LIVRE I
CHAPITRE III (ETAT 4)
ENSEMBLES BIEN ORDONNES

Rédaction n° 060

Nombre de pages : 15

Nombre de feuilles : 15

Livre I Chap III. | Etat 4
Ensemble bien ordonnés
60

A 60

L I V R E   I

CHAPITRE III (Etat 4)

ENSEMBLES BIEN ORDONNÉS.

1. Segments.

Définition 1. On dit qu'un ensemble ordonné E est bien ordonné si toute partie non vide de E a un plus petit élément.

Si "$x(\sigma)y$" est une relation d'ordre entre éléments d'un ensemble E, on dit que E est bien ordonné par la relation σ si l'ensemble ordonné en munissant E de cette relation d'ordre est bien ordonné.

Tout ensemble bien ordonné E est totalement ordonné, puisque toute partie à deux éléments de E possède un plus petit élément. *Mais il existe des ensembles totalement ordonnés qui ne sont pas bien ordonnés, par exemple l'ensemble des nombres réels.*

Toute partie d'un ensemble bien ordonné est évidemment bien ordonnée. Par contre, un produit d'ensembles bien ordonnés n'est en général pas totalement ordonné, ni, a fortiori, bien ordonné.

Définition 2. Une partie S d'un ensemble bien ordonné E est appelée un segment de E si les conditions $x \in S$, $y \in E$, $y \leqslant x$ entraînent $y \in S$.

Soit x un élément d'un ensemble bien ordonné E. L'ensemble S_x des éléments $y \in E$ tels que $y < x$ est évidemment un segment ; on appelle cet ensemble le segment déterminé par x dans E. On a évidemment $S_x \neq E$. Soit réciproquement S un segment de E distinct de E. L'ensemble $\complement_E S$ n'est alors pas vide et a un plus petit élément x. On a donc $S_x \subset S$. Puisque S est un segment, il ne contient aucun élément $\geqslant x$; puisque E est totalement ordonné, on a $S \subset S_x$, d'où $S = S_x$. Donc tout segment de E distinct de E est le segment déterminé par un élément de E.

Proposition 1. L'ensemble E^* des segments d'un ensemble bien ordonné E est bien ordonné par la relation d'inclusion ; l'application qui à tout $x \in E$ fait correspondre le segment S_x déterminé par x est un isomorphisme de E sur l'ensemble des éléments $\neq E$ de E^*.

Il est clair que, si $x \in E$, $y \in E$, la condition $x \leqslant y$ entraîne $S_x \subset S_y$, et que $x < y$ entraîne $S_x \neq S_y$. L'application $x \longrightarrow S_x$ est donc un isomorphisme de E sur l'ensemble des éléments $\neq E$ de E^*. Il en résulte que cet ensemble est bien ordonné. Comme E est le plus grand élément de E^*, E^* est lui-même ordonné.

Proposition 2. Soient E un ensemble ordonné et $(X_i)_{i \in I}$ une famille de parties bien ordonnées de E. Supposons que, pour tout couple (i,j) d'éléments de I, l'un des ensembles X_i, X_j soit un segment de l'autre. L'ensemble $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ est alors bien ordonné. Si un élément x de X appartient à X_i, le segment déterminé par x dans X est le segment déterminé par x dans X_i.

Soient x, y des éléments de X, et i, j des éléments de I tels que $x \in X_i$, $y \in X_j$. L'un des ensembles X_i, X_j étant une partie de l'autre, et ces ensembles étant totalement ordonnés, on a ou bien $x \leqslant y$ ou bien $y \leqslant x$, ce qui montre que X est totalement ordonné. Si on a de plus $y < x$, on a $y \in X_i$ puisque l'un des ensembles X_i, X_j est un segment de l'autre. L'ensemble des éléments $< x$ de X est donc le segment déterminé par x dans X_i. Si Y est une partie non vide de X, et si $x \in Y$, l'ensemble des éléments $\leqslant x$ de Y est une partie non vide de X_i et a par suite un plus petit élément a. Puisque X est totalement ordonné, a est le plus petit élément de Y, ce qui montre que X est bien ordonné.

2. Ordinaux.

Définition 3. Un ensemble bien ordonné a est appelé un ordinal si tout $x \in a$ est identique au segment qu'il détermine dans a .

Exemples. Les exemples $\emptyset$, $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ et la partie $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ sont des ordinaux.

Si a est un ordinal, l'application qui à tout $x \in a$, fait correspondre le segment déterminé par x dans a est l'application identique. Les éléments de a sont donc des ensembles, et il résulte de la Prop.1, n°1 que la relation d'ordre dans a est la relation d'inclusion. De plus, on voit que, si x et y sont des éléments de a , les conditions $x < y$, $x \in y$ et ($x \subset y$ et $x \neq y$) sont équivalentes. En particulier, tout élément d'un élément de a est un élément de a .

Il résulte immédiatement de la définition que tout segment d'un ordinal est un ordinal. Donc tout élément d'un ordinal est un ordinal.

Proposition 3. L'ensemble a^* des segments d'un ordinal a (ordonné par inclusion) est un ordinal $\neq a$.

L'ensemble a^* est bien ordonné (Prop.1, n°1), et on a $a \subset a^*$ parce que a est un ordinal. On a $a^* = a \cup \{a\}$, et a est le plus grand élément de a . Si $x \in a$, le segment déterminé par x dans a^* est le même que le segment déterminé par x dans a , donc égal à x . Le segment déterminé par a dans a^* est l'ensemble des segments $\neq a$ de a , donc est a . On voit donc que a^* est un ordinal, et que $a \notin a$, d'où $a^* \neq a$.

Proposition 4. Si a et b sont des ordinaux, l'un des ensembles a,b est un segment de l'autre.

Montrons d'abord que, si $b \subset a$, b est un segment de a . Soient x un élément de b , et y un élément de a tel que $y < x$. On a $y \in x$ et $x \in b$, d'où $y \in b$ puisque b est un ordinal ; ceci démontre bien que b est un segment de a .

Passons maintenant au cas général. Il suffit de montrer que, si $b \not\subset a$, a est un segment de b . Soit b_1 le plus petit élément de b n'appartenant pas à a . Si $x \in b_1$, on a $x < b_1$, d'où $x \in a$; on a donc $b_1 \subset a$, et b_1 est un segment de a . Si on avait $b_1 \neq a$, b_1 serait le segment déterminé par un élément de a ; a étant un ordinal, cet élément serait b_1 , ce qui est impossible puisque $b_1 \notin a$. On a donc $a = b_1$; puisque b_1 est un segment de b , a est un segment de b .

<u>Corollaire</u>. <u>Si un ordinal</u> b <u>n'est pas contenu dans un ordinal</u> a, b <u>contient l'ensemble</u> a^* <u>des segments de</u> a .

En effet, a est un segment de b distinct de b , d'où $a \in b$ et $a^* = a \cup \{a\} \subset b$.

<u>Proposition</u> 5. <u>Soit</u> $(a_i)_{i \in I}$ <u>une famille d'ordinaux</u>. <u>L'ensemble</u> $a = \bigcup_{i \in I} a_i$ <u>est alors un ordinal</u>.

Les ensembles a_i sont des parties de l'ensemble a , ordonné par inclusion. De plus, si $i \in I$, $j \in I$, l'un des ensembles a_i, a_j est segment de l'autre. Il résulte donc de la Prop.2, n°1 que a est bien ordonné par inclusion, et que, si $x \in a_i$, le segment détermine par x dans a est le segment déterminé par x dans a_i , donc x lui-même. Il en résulte que a est un ordinal.

<u>Corollaire</u>. <u>Si</u> E <u>est un ensemble d'ordinaux, il existe un ordinal</u> b <u>tel que</u> $E \subset b$, $b \notin E$.

Soit a la réunion des éléments de E . On peut prendre pour b l'ensemble des segments de a .

Proposition 6. Tout ensemble d'ordinaux est bien ordonné par la relation d'inclusion.

Cela résulte immédiatement du corollaire à la Prop. 5.

3. Le théorème de Zermelo.

Dans ce numéro, nous faisons la convention suivante : si la lettre f (affectée éventuellement d'un indice) représente une application d'un ensemble M , la lettre F (affectée éventuellement du même indice) représentera l'extension canonique de f à l'ensemble des parties de M . Si M est un ordinal, tout élément de M est aussi une partie de M , d'où la nécessité de distinguer entre f et F .

Proposition 7. Soient E un ensemble, H une partie de $\mathcal{P}(E)$ et p une application de H dans E telle que $p(X) \notin X$ pour $X \in H$. Disons qu'une application f d'un ordinal a dans E est une p-application si on a, pour tout $x \in a$, $F(x) \in H$ et $f(x) = p(F(x))$. Il existe alors une p-application f d'un ordinal a dans E telle que $F(a) \notin H$. L'ordinal a et l'application f sont uniquement déterminés par cette condition, et f est biunivoque.

Toute p-application f_b d'un ordinal b dans E est biunivoque ; car, si x et y sont des éléments de b , et si $y < x$, on a $y \in x$, d'où $f_b(y) \in F_b(x)$, et par suite $f_b(x) \neq f_b(y)$ puisque $f_b(x) = p(F_b(x))$, d'où $f_b(x) \notin F_b(x)$.

Si f_b et $f_{b'}$ sont des p-applications d'ordinaux b et b' dans E ; l'une de ces applications est un prolongement de l'autre. Supposons en effet par exemple que b soit un segment de b' (cf. Prop.4, n°2) . Si $f_{b'}$ il y aurait un plus petit élément x de b tel que $f_b(x) \neq f_{b'}(x)$. Si $y \in x$, on aurait $y \in b$, $f_b(y) = f_{b'}(y)$; on aurait donc $F_b(x) = F_{b'}(x)$, d'où $f_b(x) = p(F_b(x)) = f_{b'}(x)$.

Désignons par C l'ensemble des parties Y de X telles qu'il existe une p-application d'un ordinal sur Y . Il résulte de ce que nous venons de dire que, si $Y \in C$, il n'existe qu'un seul ordinal a_Y pour lequel il existe une application f_Y de a_Y sur Y , et que f_Y est aussi unique. On a donc une famille $(a_Y)_{Y \in C}$ d'ordinaux. Soit a la réunion des ordinaux de cette famille ; a est donc un ordinal (Prop.5, n°2). Si Y et Y' sont dans C , l'une des applications f_Y , $f_{Y'}$ prolonge l'autre ; il existe donc une application f de a dans E qui prolonge toutes les applications f_Y . Si $x \in a$, x appartient à un a_Y , d'où $F(x) = F_Y(x) \in H$, et $f(x) = p(F(x))$; f est donc une p-application. Il est impossible que $F(a) \in H$. En effet, s'il en était ainsi, il existerait un prolongement f^* de f à l'ensemble $a^* = a \cup \{a\}$ des segments de a tel que $f^*(a) = p(F(a))$. Or a^* est un ordinal ; f^* serait donc une p-application, et on aurait $a^* \subset a$, ce qui est absurde. Si $f_{a'}$ est une p-application d'un ordinal a' dans E , f prolonge $f_{a'}$ par construction. Si $F_{a'}(a') \notin H$, a' ne peut être un élément de a puisque f est une p-application ; a et a' étant des ordinaux, on a $a = a'$ et $f_{a'} = f$. La prop.7 est donc démontrée.

<u>Théorème</u> 1 (Théorème de Zermelo) .- <u>Tout ensemble E peut être muni d'une structure d'ensemble bien ordonné</u>.

Soit H l'ensemble des parties $\neq E$ de E . Si $X \in H$, $\complement_E X$ n'est pas vide. Il résulte donc de l'axiome de choix qu'il existe une application p de H dans E telle que $p(X) \in \complement_E X$ pour tout $X \in H$. Il résulte alors de la Prop.7 qu'il existe une application biunivoque d'un ordinal sur une partie de E n'appartenant pas à H , donc sur E . On en déduit (par transport de structure) qu'il existe une structure d'ensemble bien ordonné sur E .

Remarquons maintenant que, les notations étant les mêmes que dans la Prop.7 , si on suppose de plus que E est ordonné et que, pour tout $X \in H$, $p(X)$ est un majorant de X , alors toute p-application f d'un ordinal a dans E est un isomorphisme de a sur une partie de E . En effet, si x et y sont des éléments de a tels que $y < x$, on a $f(y) \in F(x)$ et $f(x)$ est un majorant de $F(x)$, mais n'appartient pas à $F(x)$, d'où $f(y) < f(x)$.

<u>Définition</u> 4. <u>On appelle inductif un ensemble ordonné</u> E <u>tel que toute partie totalement ordonnée de</u> E <u>possède un majorant dans</u> E .

Par exemple, si A et B sont des ensembles, l'ensemble des applications de parties de A dans B , ordonné par prolongement, est inductif.

<u>Théorème</u> 2.- <u>Tout ensemble ordonné inductif</u> E <u>a un élément maximal</u>.

Disons qu'un élément v de E est un <u>majorant strict</u> d'une partie X de E si v est un majorant de X et $v \notin X$. Soit H l'ensemble des parties de E qui ont des majorants stricts. Il résulte de l'axiome de choix qu'il existe une application p de H dans E telle que $p(X)$ soit un majorant strict de X pour tout $X \in H$. Soit f une p-application d'un ordinal a dans E telle que $F(a) \notin H$. Puisque f est un isomorphisme de a sur $F(a)$, $F(a)$ est ototalement ordonné et a par suite un majorant m . Puisque $F(a) \notin H$, $F(a)$ n'a pas de majorant strict. Il en résulte immédiatement que m est maximal dans E .

<u>Corollaire</u>. <u>Soit</u> u <u>un élément d'un ensemble ordonné inductif</u> E . <u>Il existe alors un élément maximal</u> m <u>de</u> E <u>tel que</u> $m \geqslant u$.

L'ensemble E' des éléments $\geqslant u$ de E est évidemment inductif, et tout élément maximal de E' est aussi maximal dans E , d'où le résultat.

<u>Théorème</u> 3. <u>Soit</u> E <u>un ensemble bien ordonné</u> ; <u>il existe alors un ordinal</u> a <u>et un seul isomorphe à</u> E , <u>et il n'existe qu'un seul isomorphisme de</u> a <u>sur</u> E

Soit H l'ensemble de ceux des segments S de E qui sont $\neq E$ et qui sont tels qu'il existe un isomorphisme et un seul d'un ordinal sur S. Si $S \in H$, nous désignons par $p(S)$ le plus petit élément de E n'appartenant pas à S. Soit f une p-application d'un ordinal a dans E telle que $F(a) \notin H$. L'ensemble $F(a)$ est un segment de E. Car, si $x \in a$, $F(x)$ est un segment de E, et $f(x)$ est le plus petit élément de E n'appartenant pas à ce segment, ce qui montre que tout élément $< f(x)$ de E est dans $F(x)$, donc dans $F(a)$. Tout isomorphisme f_b d'un ordinal b sur $F(a)$ est une p-application. Car, si $y \in b$, y est le plus petit élément de b strictement supérieur à tous les éléments de y, d'où il résulte que $f_b(y)$ est le plus petit élément de $F(a)$ strictement supérieur à ceux de $F_b(y)$; de plus, puisque y est un segment de b distinct de b, $F_b(y)$ est un segment de $F(a)$ distinct de $F(a)$, donc un élément de H, et on a $f_b(y) = p(F_b(y))$. Il résulte donc de la Prop. 7 qu'il existe un isomorphisme et un seul d'un ordinal sur $F(a)$. Puisque $F(a) \notin H$, on a $F(a) = E$, ce qui démontre le Théorème 3.

<u>Corollaire</u> 1. <u>Si</u> E <u>et</u> F <u>sont des ensembles bien ordonnés, l'un de ces ensembles est isomorphe à un segment de l'autre.</u>

Cela résulte immédiatement du Théorème 3 et du fait que, de deux ordinaux, l'un est un segment de l'autre.

<u>Corollaire</u> 2. <u>Deux ordinaux distincts ne sont pas isomorphes.</u>

<u>Proposition</u> 8. <u>Toute partie d'un ensemble bien ordonné</u> E <u>est isomorphe à un segment de</u> E.

Faisant usage du corollaire 1 au Théorème 3, on voit qu'il suffit de montrer qu'il ne peut exister d'isomorphisme f d'un ensemble bien ordonné H sur une partie d'un segment $S \neq H$ de H. Or, il y aurait alors des éléments x de F tels que $f(x) < x$; soit u le plus petit de ces éléments

Pour tout $y < u$, on aurait $f(y) \geqslant y$, d'où $f(u) \geqslant f(y)$. Comme u est le plus petit majorant de l'ensemble des y qui sont $< u$, on aurait $f(u) \geqslant u$, d'où une contradiction.

4. Remarques sur l'emploi de l'axiome de choix.

Nous avons utilisé l'axiome de choix pour démontrer les théorèmes 1 et 2. Inversement, chacun de ces théorèmes implique l'axiome de choix. Soit en effet $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles non vides et soit $E = \bigcup_{i \in I} X_i$. Supposons que le théorème 1 est vrai. Munissons l'ensemble E d'une structure d'ensemble bien ordonné. Soit, pour chaque $i \in I$, x_i le plus petit élément de la partie X_i de E relative à cette bonne ordination de E. On a alors $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$, d'où $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$, ce qui montre que le théorème de Zermelo entraîne l'axiome de choix. Supposons maintenant que le théorème 2 soit vrai. Soit H l'ensemble des applications f de parties de I dans E telles que $f(i) \in X_i$ pour tout élément i de la partie de I sur laquelle f est définie. On voit tout de suite que l'ensemble H, ordonné par prolongement, est inductif. Soit g un élément maximal de H, et soit J l'ensemble où g est défini. Si on avait $J \neq I$, il existerait un $i \in I$ tel que $i \notin J$, et on pourrait prolonger g par une application g' de $J \cup \{i\}$ dans E telle que $g'(i) \in X_i$, d'où il résulterait que g ne serait pas maximal. On a donc $J = I$, d'où $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$.

Par contre, les démonstrations des résultats énoncés dans les n^{os} 1 et 2, ainsi que celles de la Prop.7, n^{o}3, du théorème 3, n^o 3 et de ses corollaires et de la Prop.8 n^{o}3 ne font pas intervenir l'axiome de choix. Nous allons montrer que l'on peut établir sans faire appel à l'axiome de choix que le produit de deux ensembles qui peuvent être munis de structures d'ensembles bien ordonnés peut aussi être muni d'une structure d'ensemble bien ordonné. Soient en effet E et F des ensembles bien ordonnés ; munissons le produit $E \times F$ des ensembles de base de E et de F de la relation d'ordre lexicographique. On obtient alors un ensemble bien ordonné. Soit en effet H une partie non vide de $E \times F$. Soit a le plus petit élément de la projection de H sur le premier facteur E de $E \times F$; et soit b le plus petit élément de l'ensemble des $y \times F$ tels que $(a,y) \in H$. On voit tout de suite que (a,b) est le plus petit élément de H.

Nous aurons besoin plus tard de la

Proposition 9. *Soit E un ensemble bien ordonné qui n'a pas de plus grand élément. Il existe alors une structure d'ensemble bien ordonné sur le produit $E \times E$ de l'ensemble de base E par lui-même qui possède la propriété suivante : le segment déterminé par un élément de $E \times E$ dans la structure d'ensemble bien ordonné ainsi définie sur cet ensemble est contenu dans un ensemble de la forme $S \times S$, où S est un segment de E distinct de E.*

Soit H l'ensemble bien ordonné obtenu en munissant $E \times E$ de la relation d'ordre lexicographique, et soit K l'ensemble bien ordonné obtenu en munissant $E \times H$ de la relation d'ordre lexicographique. Si $(x,y) \in E \times E$, soit $m(x,y)$ le plus grand des éléments x, y. L'application $(x,y) \to (m(x,y),(x,y))$ est une application biunivoque de $E \times E$ sur une partie P de K. La relation d'ordre dans K induit une structure d'ensemble bien ordonné sur P ; on en déduit par transport de structure une relation d'ordre σ sur $E \times E$ pour laquelle

$E \times E$ est bien ordonné. Soit (a,b) un élément de $E \times E$, et soit $c = m(a,b)$. Si (x,y) est un élément de $E \times E$ tel que $(x,y)\ \sigma(a,b)$, on a $m(x,y) \leqslant c$, d'où $x \leqslant c$ et $y \leqslant c$. Puisque E n'a pas de plus grand élément, il ~~n'~~y a un $c' \in E$ tel que $c' > c$. Si S est le segment déterminé par c', le segment déterminé par (a,b) dans $E \times E$, ordonné par σ, est contenu dans $S \times S$.

CHAPITRE IV. NOMBRES CARDINAUX. ENTIERS.

CHAPITRE IV. NOMBRES CARDINAUX. ENTIERS.

Etat 4.

Commentaires du rédacteur.

La rédaction présente suppose (contrairement aux décisions du congrès de Février) que les ensembles bien ordonnés et le théorème de Zermelo ont été faits au chap.III, et que la notion d'ordinal a été introduite. Le rédacteur a d'ailleurs écrit une contre-rédaction du bloc ordonnés - Zermelo- Zorn utilisant les ordinaux, qui est, croit-il, sensiblement plus courte et digestible que la rédaction actuelle. Tout ceci suppose naturellement que l'on a introduit un axiome supplémentaire en théorie des ensembles, disant que si $f(i)$ est un symbole fonctionnel où i est un élément générique d'un ensemble I , et si $f(i)$ est toujours un ensemble, il existe un ensemble A tel que $f(i) \subset A$ pour tout $i \in I$ (axiome de la réunion). Cet axiome simplifie d'ailleurs bien l'exposition de ce qui concerne les familles d'ensembles au Chap.II.

Grâce à cela, on a la notion de cardinal d'un ensemble, qui permet de donner des formes singulièrement moins entortillées aux énoncées. Il va sans dire qu'un voile aussi pudique que possible est jeté sur le fait que ces cardinaux sont eux-mêmes des ensembles bien ordonnés ; en particulier, ce fait n'intervient jamais quand il s'agit d'entiers naturels. Par contre, cela intervient dans la démonstration du fait que E^2 est équipotent à E pour tout E infini, donnant de ce théorème une démonstration très simple.

Le rédacteur a cru pouvoir se permettre de changer la définition de la notion d'ensemble fini. La définition actuelle est plus simple et permet d'arriver tout aussi vite à l'essentiel, à savoir au principe de récurrence. En raison de l'importance de ce dernier, de multiples variantes en ont été fournies.

L'axiome de l'infini n'a été introduit qu'après que toute la théorie des entiers et ensembles finis avait été faite ; il a paru intéressant au rédacteur de vérifier qu'on n'en avait jamais besoin avant.

Relisant son oeuvre, il semble au rédacteur que les démonstrations relatives aux opérations sur les cardinaux pourraient être abrégées dans leur écriture. On pourrait d'ailleurs abréger plus radicalement en se contentant de définir $a + b$ et ab, non les sommes et produits de familles ; les sommes et produits de suites finies d'entiers naturels devraient alors être définis par récurrence. Une objection assez sérieuse contre cette manière de faire est que l'on perdrait la réduction de la multiplication à des additions répétées et celle de l'exponentiation à des multiplications répétées.

Enfin, un détail. Le rédacteur s'est servi de la formule $\prod_{i \in I} (\bigcup_{j \in J} X_{ij}) = \bigcup_{k \in J^I} (\prod_{i \in I} X_{i,k(i)})$, qui n'est pas donnée au Chap.II, mais dont le rédacteur demande l'inclusion.
