CHAPITRE IV
NOMBRES CARDINAUX. ENTIERS

Rédaction n° 059

Nombre de pages : 57

Nombre de feuilles : 57

Livre I Th. des Ensembles

Chap IV { Cardinaux entiers

$\boxed{59}$

CHAPITRE IV. NOMBRES CARDINAUX. ENTIERS.

I. NOMBRES CARDINAUX.

1. Définition des cardinaux.

Définition 1. On dit que des ensembles X et Y sont équipotents s'il existe une correspondance biunivoque entre X et Y.

Il revient au même de dire qu'il existe une application biunivoque de X sur Y, ou encore une application biunivoque de Y sur X. On dit aussi que X est équipotent à Y, ou que Y est équipotent à X.

Exemples. 1) Tous les ensembles à un élément sont équipotents entre eux. 2) Le seul ensemble équipotent à l'ensemble vide est l'ensemble vide.

Il est clair que tout ensemble X est équipotent à lui-même, et que, si X est équipotent à Y et Y à Z, alors X est équipotent à Z (en effet, si f est une application biunivoque de X sur Y et g une application biunivoque de Y sur Z, $g \circ f$ est une application biunivoque de X sur Z).

Nous nous proposons dans ce qui suit de définir un symbole fonctionnel Card X (lire : cardinal de X) qui soit tel que deux ensembles X et Y soient équipotents si et seulement si ils ont le même cardinal (i.e. si Card X = Card Y). S'il existait un ensemble de tous les ensembles, la relation d'équipotence serait une relation d'équivalence entre éléments de cet ensemble, et nous pourrions prendre pour Card X la classe d'équivalence de X par rapport à cette relation d'équivalence. Mais cette voie nous est interdite du fait qu'il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles. Nous allons donc procéder autrement : nous allons définir un type d'ensembles tel que tout ensemble soit équipotent à un ensemble et à un seul de ce type, et nous appellerons Card X l'ensemble unique du type en question qui est équipotent à X.

On sait en effet qu'on peut munir X d'une structure d'ensemble bien ordonné (Théorème , III,) et que cet ensemble bien ordonné est isomorphe (donc a fortiori équipotent) à un ordinal. De plus, il existe un plus petit ordinal à équipotent à X (au sens de la relation d'inclusion entre ordinaux), c'est-à-dire un ordinal a équipotent à X et tel que l'on ait $a \subset b$ pour tout ordinal b équipotent à X. Soit en effet a' un ordinal équipotent à X ; l'ensemble des ordinaux contenus dans a' et équipotents à X a un plus petit élément a (Prop. , III,). Soit b un ordinal équipotent a X ; si $b \subset a$, on a évidemment $b = a$. Comme l'un des ordinaux a, b est un segment de l'autre (Prop. , III,), on a $a \subset b$. L'ordinal a n'est évidemment équipotent à aucun de ses segments autre que lui-même. Inversement, si a est un ordinal qui n'est équipotent à aucun de ses segments autre que lui-même, a est le plus petit ordinal équipotent à a. Nous sommes donc amenés à poser la définition suivante :

<u>Définition</u> 2. <u>On appelle cardinal</u> (<u>ou nombre cardinal</u>) <u>un ordinal qui n'est équipotent à aucun de ses segments autre que lui-même.</u>

Il résulte alors de ce que nous avons dit que :

<u>Proposition</u> 1. <u>Tout ensemble est équipotent à un cardinal et à un seul.</u>

<u>Définition</u> 2. <u>Le cardinal équipotent à un ensemble X s'appelle le cardinal de X, ou nombre d'éléments de X ; il se note</u> Card X.

<u>On pose</u> Card $\emptyset = 0$ (<u>lire</u> : <u>zéro</u>) ; <u>le cardinal d'un ensemble à un élément se note</u> 1 (<u>lire</u> : <u>un</u>).

Si a et b sont des cardinaux, nous définirons la relation " $a \leqslant b$ " (a est au plus égal à b) comme étant synonyme de la relation " $a \subset b$ "; nous définirons les relations "$a < b$", "$a > b$", "$a \geqslant b$"

comme nous l'avons fait dans le cas des relations d'ordre sur un ensemble (Chap.III,). Si E est un ensemble de cardinaux, et a et b des arguments typiques du type "éléments de E", la relation "$a \leqslant b$" est une relation d'ordre sur E.

<u>Proposition</u> 2. <u>Tout ensemble de cardinaux est bien ordonné par la relation</u> "$a \leqslant b$".

Cela résulte de ce que tout cardinal est un ordinal. (cf. Prop. , Chap.III, ...). Il résultera de ce que nous démontrerons plus loin (Prop.21 du n°2) qu'il n'existe pas d'ensemble tel que tout cardinal en soit élément. Mais, si a est un cardinal, les cardinaux qui sont $\leqslant a$ sont des parties de a, de sorte que l'on peut parler de l'ensemble des cardinaux $\leqslant a$.

Il est clair que 0 est le plus petit cardinal (i.e. on a $0 \leqslant a$ pour tout cardinal a) et que 1 est le plus petit cardinal $\neq 0$ (i.e. on a $1 \leqslant a$ pour tout cardinal $a \neq 0$).

<u>Proposition</u> 3. <u>Pour qu'un ensemble</u> X <u>soit équipotent à un ensemble</u> Y, <u>il faut et suffit que</u> Card X = Card Y. <u>Pour que</u> X <u>soit équipotent à une partie de</u> Y, <u>il faut et suffit que</u> Card X $\leqslant$ Card Y.

La première assertion est évidente. Si Card X $\leqslant$ Card Y, puisque X est équipotent à Card X et Y à Card Y, X est équipotent à une partie de Y. Réciproquement, si X est équipotent à une partie de Y, il est équipotent à une partie de Card Y, donc aussi à un segment de Card Y (Prop. , Chap.III,). Le plus petit ordinal équipotent à X est donc contenu dans Card Y, d'où Card X $\leqslant$ Card Y.

<u>Remarque</u>. La démonstration montre que l'on peut établir sans faire appel à l'axiome de choix que, si un ensemble Y est équipotent à un cardinal, toute partie X de Y est équipotente à un cardinal qui est au plus égal à Card Y.

<u>Corollaire 1. Soient X et Y des ensembles. L'un au moins de ces ensembles est équipotent à une partie de l'autre.</u>

Cela résulte immédiatement des Prop. 2 et 3.

<u>Corollaire 2.- Soient X et Y des ensembles tels que chacun d'eux soit équipotent à une partie de l'autre ; ces ensembles sont alors équipotents</u> .

En effet, les relations $\operatorname{Card} X \leqslant \operatorname{Card} Y$ et $\operatorname{Card} Y \leqslant \operatorname{Card} X$ entraînent $\operatorname{Card} X = \operatorname{Card} Y$.

<u>Remarque.</u> On peut démontrer le corollaire 2 sans faire appel à l'axiome de choix. On peut supposer en effet que Y est une partie de X ; soit f une application biunivoque de X sur une partie $Z = f(X)$ de Y . Désignons par R le complément de Z par rapport à Y . Soit F l'ensemble des parties M de X qui satisfont aux conditions suivantes : a) M contient R ; b) on a $f(M) \subset M$. Désignons par A l'intersection des ensembles qui appartiennent à F . Il est clair que $A \in F$. Puisque $f(Y) \subset f(X) = Z \subset Y$, Y appartient à F , d'où $A \subset Y$. Soit B le complément de A par rapport à Y . Montrons que $Z = f(A) \cup B$. Observons pour cela que l'ensemble $R \cup f(A)$ appartient à F (car $f(R) \subset f(A)$, et $f(f(A)) \subset f(A)$ puisque $f(A) \subset A$). On a donc $A \subset R \cup f(A)$. Un élément de Z qui n'est pas dans B est dans A , mais n'est pas dans R (car $R \cap Z = \emptyset$), donc est dans $f(A)$, d'où $Z \subset f(A) \cup B$. Réciproquement, on a $f(A) \subset f(X) = Z$ et $B \subset Z$ parce que $B \subset Y$ et $B \cap R = \emptyset$; on a donc bien $Z = f(A) \cup B$. De plus, puisque $f(A) \subset A$, on a $f(A) \cap B = \emptyset$. Les ensembles A et B étant disjoints, on peut définir une application g de $Y = A \cup B$ qui coïncide avec f sur A et avec l'application identique sur B . Puisque f est biunivoque et

$f(A) \cap B = \emptyset$, g est biunivoque. On a $g(Y) = f(A) \cup B = Z$; Y est donc équipotent à Z , qui est lui-même équipotent à X . Donc Y est équipotent à X .

Proposition 4. Soit f une application d'un ensemble X sur un ensemble Y . On a alors $\operatorname{Card} Y \leqslant \operatorname{Card} X$.

Soit R la relation d'équivalence "$f(x) = f(y)$" entre éléments de X ; on sait que Y est équipotent à l'ensemble quotient X/R . Or il existe en vertu de l'axiome de choix une application g de X/R dans X telle que $g(\dot{x}) \in \dot{x}$ pour tout $\dot{x} \in X/R$. Puisque des classes d'équivalence distinctes sont disjointes, g est évidemment biunivoque, ce qui montre que X/R est équipotent à une partie de X . On a donc $\operatorname{Card} Y = \operatorname{Card} X/R \leqslant \operatorname{Card} X$.

Remarque. On peut démontrer sans faire appel à l'axiome de choix que, si f est une application sur un ensemble Y d'un ensemble X qui est équipotent à un cardinal, alors Y est équipotent à un cardinal et $\operatorname{Card} Y \leqslant \operatorname{Card} X$. En effet, l'ensemble X possède alors une structure d'ensemble bien ordonné, et on peut définir explicitement une application g de X/R dans X (les notations étant les mêmes que dans la démonstration de la Prop.4) telle que $g(\dot{x}) \in \dot{x}$ en prenant pour $g(\dot{x})$ le plus petit élément de la partie $\dot{x}$ de X .

----

2. Opérations sur les nombres cardinaux.

Désignons par $(a_i)_{i \in I}$ une famille de cardinaux. Soit, pour chaque i, X_i un ensemble tel que $\text{Card } X_i = a_i$ (on peut par exemple prendre $X_i = a_i$). Soit X un ensemble somme des ensembles X_i (pour $i \in I$), et soit P le produit des ensembles X_i. Montrons que les cardinaux Card X et Card P de X et de P respectivement ne dépendent pas du choix des ensembles X_i, X satisfaisant aux conditions énoncées. Soit en effet $(X'_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'ensembles telle que $\text{Card } X'_i = a_i$ $(i \in I)$, et soit X' un ensemble somme de la famille (X'_i). Soit $(Y_i)_{i \in I}$ (resp. $(Y'_i)_{i \in I}$) une partition de X (resp. X') telle qu'il existe, pour chaque $i \in I$, une application biunivoque g_i de X_i sur Y_i (resp.: une application biunivoque g'_i de X'_i sur Y'_i). Puisque $\text{Card } X_i = \text{Card } X'_i$, il existe une application biunivoque f_i de X_i sur X'_i. On peut définir une application f de X telle que, pour tout $i \in I$, f coïncide sur Y_i avec $g'_i \circ f_i \circ \overset{-1}{g_i}$; on voit tout de suite que f applique X biunivoquement sur X'. Soit P' le produit des ensembles X'_i $(i \in I)$; on peut définir une application h de P par la formule $h((x_i)_{i \in I}) = (f_i(x_i))_{i \in I}$; il est clair que h applique P biunivoquement sur P'.

On peut donc poser la définition suivante :

Définition 3. Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de cardinaux. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles telle que $\text{Card } X_i = a_i$ pour $i \in I$. On appelle somme des cardinaux a_i, et on désigne par $\sum_{i \in I} a_i$, le cardinal d'un ensemble somme de la famille $(X_i)_{i \in I}$. On appelle produit des cardinaux a_i, et on désigne par $\prod_{i \in I} a_i$, le cardinal du produit des ensembles de la famille $(X_i)_{i \in I}$.

On remarquera que la notation $\prod_{i \in I} a_i$ est ambigüe, puisqu'elle représente déjà le produit des ensembles a_i , produit qui est distinct du cardinal produit des a_i . Dans ce qui suit, la notation $\prod_{i \in I} a_i$ représentera toujours le produit que nous venons de définir, et non le produit des ensembles a_i .

Proposition 4. Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de cardinaux, et soit f une application biunivoque d'un ensemble J sur l'ensemble I . On a alors $\sum_{j \in J} a_{f(j)} = \sum_{i \in I} a_i$, $\prod_{j \in J} a_{f(j)} = \prod_{i \in I} a_i$.

Soit $(X_i)_{i \quad I}$ une famille d'ensembles telle que $\mathrm{Card}\ X_i = a_i$ (pour $i \in I$). Il est alors évident que tout ensemble somme de la famille $(X_i)_{i \in I}$ est aussi un ensemble somme de la famille $(X_{f(j)})_{j \in J}$, et que le produit des ensembles de la famille $(X_i)_{i \in I}$ est identique au produit des ensembles de la famille $(X_{f(j)})_{j \in J}$, ce qui démontre la Prop.4 .

Proposition 5. Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de cardinaux, et soit $(J_k)_{k \in K}$ une partition de l'ensemble I . Posons $b_k = \sum_{j \in J_k} a_j$. On a alors $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k \in K} b_k$, $\prod_{i \in I} a_i = \prod_{k \in K} b_k$.

Soit X un ensemble qui admette une partition $(X_i)_{i \in I}$ telle que $\mathrm{Card}\ X_i = a_i$ pour $i \in I$. Posons, pour $k \in K$, $Y_k = \bigcup_{j \in J_k} X_j$. La famille $(X_j)_{j \in J_k}$ est alors une partition de Y_k , d'où $\mathrm{Card}\ Y_k = b_k$, et la famille $(Y_k)_{k \in K}$ est une partition de X , ce qui démontre la première formule. Par ailleurs, soit Z_k le produit des ensembles X_j pour $j \in J_k$. On sait qu'il existe une application biunivoque du produit des ensembles Y_k (pour $k \in K$) sur le produit des ensembles X_i (pour $i \in I$), ce qui démontre la seconde formule.

<u>Proposition</u> 6.- <u>Soit</u> $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ <u>une famille de cardinaux dont l'ensemble d'indices est le produit de deux ensembles</u> I <u>et</u> J. <u>On a alors</u>

$$\prod_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right) = \sum_{k\in J^I}\left(\prod_{i\in I} a_{i,k(i)}\right)$$

Pour chaque $i\in I$, désignons par X_i un ensemble qui admette une partition $(X_{i,j})_{j\in J}$ telle que Card $X_{i,j} = a_{i,j}$. Si $k\in J^I$, désignons par Y_k le produit des ensembles $X_{i,k(i)}$ pour $i\in I$. On sait alors que le produit des ensembles X_i (pour $i\in I$) est la réunion des Y_k pour $k\in J^I$. De plus, on a $Y_k\cap Y_{k'} = \emptyset$ si $k\neq k'$; car, si i est tel que $k(i)\neq k'(i)$, on a $X_{i,k(i)}\cap X_{i,k'(i)} = \emptyset$. La famille $(Y_k)_{k\in J^I}$ est donc une partition du produit des X_i, ce qui démontre la Prop. 6 .

Soient a et b des cardinaux. Si I est un ensemble à deux éléments, on peut définir une application f de cet ensemble sur l'ensemble $\{a,b\}$. Cette application définit une famille de cardinaux. La somme et le produit de cette famille ne dépendent (en vertu de la Prop. 4) que de a et de b . La somme de la famille en question se désigne par $a+b$ et s'appelle la <u>somme de</u> a <u>et de</u> b ; son produit se désigne par ab et s'appelle le <u>produit de</u> a <u>et de</u> b .

On définit de même la somme et le produit de trois, quatre,... cardinaux.

Si X et Y sont des ensembles tels que Card X = a , Card Y = b , $a+b$ est le cardinal d'un ensemble somme de X et de Y , et ab est le cardinal de X Y .

<u>Proposition</u> 7. <u>Soient</u> a,b <u>et</u> c <u>des cardinaux</u>. <u>On a</u>

(1) $a+b=b+a$; $ab=ba$

(2) $a+(b+c)=(a+b)+c$; $a(bc)=(ab)c$

(3) $a(b+c)=ab+ac$.

Ces formules découlent immédiatement des Prop. 4, 5 et 6 .

* Nous verrons plus tard, quand nous étudierons les lois de composition, que les formules (1) expriment la commutativité de l'addition et de la multiplication des cardinaux, les formules (2) leur associativité, et la formule (3) la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. *

<u>Proposition</u> 8. <u>Soient</u> a <u>et</u> b <u>des cardinaux</u>. <u>Pour que</u> a <u>soit</u> $\geqslant$ b , <u>il est nécessaire et suffisant qu'il existe un cardinal</u> c <u>tel que</u> $a = b + c$.

Soient X et Y des ensembles tels que Card X = a et Card Y = b . S'il existe un cardinal c tel que $a = b + c$, X est équipotent à un ensemble somme de Y et d'un autre ensemble, d'ou' il résulte que Y est équipotent à une partie de X , donc que $a \geqslant b$. Inversement, si $a \geqslant b$, Y est équipotent à une partie Y' de X ; si Z est le complément de Y' par rapport à X , on a $a = b + \text{Card } Z$.

Si $a \geqslant b$, il existe en général plusieurs cardinaux c tels que $a = b + c$; nous verrans cependant que, si a est un cardinal <u>fini</u>, c est uniquement déterminé .

<u>Proposition</u> 9. <u>Soient</u> a <u>et</u> b <u>des cardinaux tels que</u> $a+1 = b+1$. <u>On a alors</u> $a = b$.

Soit X un ensemble tel que $\text{Card } X = a + 1 = b+1$. On peut donc écrire $X = A \cup \{u\} = B \cup \{v\}$, où A et B sont des ensembles tels que Card A = a , Card B = b , et u, v des éléments de X tels que $u \notin A$, $v \notin B$. Posons $C = A \cap B$, et $c = \text{Card } C$. Si $u = v$, on a $A = B = C$, d'où $a = b$. Si $u \neq v$, on a $A = C \cup \{v\}$, $B = C \cup \{u\}$, $v \notin C$, $u \notin C$, d'où $a = c+1$, $b = c+1$ et $a = b$.

<u>Proposition</u> 10. <u>Soient</u> $(a_i)_{i \in I}$ <u>et</u> $(b_i)_{i \in I}$ <u>des familles de cardinaux ayant le même ensemble d'indices</u> I , <u>et telles que</u> $a_i \geqslant b_i$ <u>pour tout</u> $i \in I$. <u>On a alors</u> $\sum_{i \in I} a_i \geqslant \sum_{i \in I} b_i$ <u>et</u> $\prod_{i \in I} a_i \geqslant \prod_{i \in I} b_i$.

Soit X un ensemble qui admet une partition $(X_i)_{i \in I}$ telle que $\text{Card } X_i = a_i$ pour tout $i \in I$. Chaque ensemble X_i possède une partie Y_i telle que $\text{Card } Y_i = b_i$. La réunion des ensembles Y_i est une somme de ces ensembles et est une partie de X , d'où $\sum_{i \in I} a_i \geqslant \sum_{i \in I} b_i$. Le produit des ensembles Y_i est une partie du produit des X_i , d'où $\prod_{i \in I} a_i \geqslant \prod_{i \in I} b_i$.

<u>Remarque</u>. On peut aussi démontrer la Prop.10 comme suit. Soit, pour chaque $i \in I$, c_i un cardinal tel que $a_i = b_i + c_i$ (Prop.8) ; il résulte alors facilement de la Prop.5 que $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} b_i + \sum_{i \in I} c_i$, et de la Prop.6 que $\prod_{i \in I} a_i = \prod_{i \in I} b_i + d$, où d est un cardinal. La prop.10 résulte de ces formules et de la Prop. 8.

<u>Proposition</u> 11. <u>Soit a un cardinal</u>. <u>On a</u> $a + 0 = a$ <u>et</u> $a.1 = a$.

Soit X un ensemble tel que $\text{Card } X = a$. Il est clair que X est un ensemble somme de X et de $\emptyset$, d'où $a + 0 = a$; d'autre part, le produit de X par un ensemble à un élément est équipotent à X , d'où $a.1 = a$.

<u>Proposition</u> 12. <u>Soit</u> $(a_i)_{i \in I}$ <u>une famille de cardinaux</u>. <u>Soit</u> J <u>une partie de</u> I <u>telle que l'on ait</u> $a_i = 0$ <u>pour tout</u> $i \in I$ <u>n'appartenant pas à</u> J . <u>On a alors</u> $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in J} a_i$. <u>Soit</u> K <u>une partie de</u> I <u>telle que l'on ait</u> $a_i = 1$ <u>pour tout</u> $i \in I$ <u>n'appartenant pas à</u> K . <u>On a alors</u> $\prod_{i \in I} a_i = \prod_{i \in K} a_i$.

Soient J' et K' les compléments respectifs de J et de K par rapport à I. On a (Prop.5) $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in J} a_i + \sum_{i \in J'} a_i$ et $\prod_{i \in I} a_i = (\prod_{i \in K} a_i)(\prod_{i \in K'} a_i)$. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles telle que $\operatorname{Card} X_i = a_i$ pour $i \in I$. On a donc $X_i = \emptyset$ pour $i \in J'$, d'où il résulte que $\emptyset$ est un ensemble somme de la famille $(X_i)_{i \in J'}$ et que $\sum_{i \in J'} a_i = 0$. Si $i \in K'$, X_i est un ensemble à un élément. Tout produit d'ensembles à un élément étant évidemment un ensemble à un élément, on a $\prod_{i \in K'} a_i = 1$. La prop.12 résulte alors de la Prop.11.

Corollaire. <u>Soit</u> $(a_i)_{i \in I}$ <u>une famille de cardinaux, et soit</u> J <u>une partie de</u> I. <u>On a alors</u> $\sum_{i \in J} a_i \leqslant \sum_{i \in I} a_i$; <u>si</u> a_i <u>est</u> $\neq 0$ <u>pour tout</u> $i \in I$ <u>n'appartenant pas à</u> J, <u>on a</u> $\prod_{i \in J} a_i \leqslant \prod_{i \in I} a_i$.

Posons $b_i = a_i$ si $i \in J$ et $b_i = 0$ si $i \notin J$. On a alors (cf. Prop.10 et 12), $\sum_{i \in I} a_i \geqslant \sum_{i \in I} b_i = \sum_{i \in J} a_i$. Posons $c_i = a_i$ si $i \in J$ et $c_i = 1$ si $i \notin J$. Si $a_i \neq 0$, on a $a_i \geqslant 1$ et la seconde assertion du corollaire résulte des Prop. 10 et 12.

<u>Proposition</u> 13. <u>Soit</u> $(a_i)_{i \in I}$ <u>une famille de cardinaux</u>. <u>Pour que</u> $\prod_{i \in I} a_i$ <u>soit</u> $\neq 0$, <u>il est nécessaire et suffisant que l'on ait</u> $a_i \neq 0$ <u>pour tout</u> $i \in I$.

Tout produit d'une famille d'ensembles dont un membre est vide est lui-même vide, ce qui montre que la condition est nécessaire. Inversement, si elle est satisfaite, on a $a_i \geqslant 1$ pour tout $i \in I$, d'où $\prod_{i \in I} a_i \geqslant 1$.

<u>Proposition</u> 14. <u>Soient</u> a et b <u>des cardinaux</u>. <u>Soit</u> I <u>un ensemble tel que</u> $\operatorname{Card} I = b$; <u>si</u> $i \in I$, <u>posons</u> $a_i = a$, $c_i = 1$. On a alors $ab = \sum_{i \in I} a_i$, $b = \sum_{i \in I} c_i$.

Soit X un ensemble tel que $\mathrm{Card}\, X = a$. Posons, pour $i \in I$, $X_i = X \times \{i\}$, d'où $\mathrm{Card}\, X_i = a.1 = a$. On a $X \times I = \bigcup_{i \in I} X_i$ et $X_i \cap X_{i'} = \emptyset$ si i et i' sont des éléments distincts de I . Il en résulte que $ab = \sum_{i \in I} a_i$,. La seconde formule de la Prop.14 s'obtient à partir de la première en prenant $a = 1$.

Soient X et Y des ensembles ; l'ensemble X^Y étant structuralement défini en termes de X et de Y , il en résulte que, si X' et Y' sont des ensembles équipotents à X et à Y respectivement, $X'^{Y'}$ est équipotent à X^Y . Ceci légitime la définition suivante :

<u>Définition</u> 5. <u>Soient</u> a <u>et</u> b <u>des cardinaux</u>. <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>des ensembles tels que</u> $\mathrm{Card}\, X = a$ <u>et</u> $\mathrm{Card}\, Y = b$. <u>Le cardinal de l'ensemble</u> X^Y <u>des applications de</u> Y <u>dans</u> X <u>se désigne alors par</u> a^b .

On remarquera que a^b est une notation ambigüe, puisqu'elle représente déjà l'ensemble des applications de l'ensemble b dans l'ensemble a , ensemble qui n'est pas un cardinal en général. Dans ce qui suit, nous conviendrons que, si a et b sont des cardinaux, a^b représentera toujours le cardinal introduit par la définition 5 .

<u>Proposition</u> 15. <u>Soit</u> a <u>un cardinal</u>. <u>On a alors</u> $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $1^a = 1$; <u>si</u> $a \neq 0$, <u>on a</u> $0^a = 0$.

Cela résulte de ce qu'il existe une application et une seule de $\emptyset$ dans un ensemble quelconque, de ce que l'ensemble des applications d'un ensemble à un élément dans un ensemble X est équipotent à X , de ce qu'il n'existe qu'une application d'un ensemble X dans un ensemble à un élément et de ce qu'il n'existe aucune application d'un ensemble non vide dans $\emptyset$.

<u>Proposition</u> 6. <u>Soient</u> a <u>un cardinal et</u> $(b_i)_{i \in I}$ <u>une famille de cardinaux</u>. <u>On a alors</u> $a^{\sum_{i \in I} b_i} = \prod_{i \in I} a^{b_i}$.

Soient X un ensemble tel que Card X = a et Y un ensemble qui admet une partition $(Y_i)_{i \in I}$ telle que Card $Y_i = b_i$ pour tout $i \in I$. Si $f \in X^Y$ et $i \in I$, nous désignerons par f_i la restriction de f à Y_i , et nous poserons $\varphi(f) = (f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X^{Y_i}$. Si f et f' sont des éléments distincts de X^Y , il existe un $y \in Y$ tel que $f(y) \neq f'(y)$; si $y \in Y_i$, on a $f_i \neq f'_i$, d'où $\varphi(f) \neq \varphi(f')$. Soit donné un élément quelconque $(g_i)_{i \in I}$ ⊛ X^{Y_i} . On peut alors définir une application f de Y dans X telle que pour chaque $i \in I$, f coïncide avec g_i sur Y_i , d'où $\varphi(f) = (g_i)_{i \in I}$. On voit donc que φ est une application biunivoque de X^Y sur $\prod_{i \in I} X^{Y_i}$, ce qui démontre la Prop.6 .

⊛ de $\prod_{i \in I}$

<u>Corollaire</u>. <u>Soient</u> a <u>et</u> b <u>des cardinaux</u>. <u>Soit</u> I <u>un ensemble tel que</u> Card I = b . <u>Posons</u> $a_i = a$ <u>pour tout</u> $i \in I$. <u>On a alors</u> $a^b = \prod_{i \in I} a_i$.

Posons $c_i = 1$ pour tout $i \in I$, d'où $b = \sum_{i \in I} c_i$ (Prop.14). On a (par la Prop.16) $a^b = \prod_{i \in I} a^{c_i} = \prod_{i \in I} a_i$.

<u>Proposition</u> 17. <u>Soit</u> $(a_i)_{i \in I}$ <u>une famille de cardinaux, et soit</u> b <u>un cardinal</u>. <u>On a alors</u> $(\prod_{i \in I} a_i)^b = \prod_{i \in I} a_i^b$.

Soit J un ensemble tel que Card J = b . Si $i \in I$ et $j \in J$, nous posons $a_{i,j} = a_i$. Il résulte du corollaire à la Prop.16 que $(\prod_{i \in I} a_i)^b = \prod_{j \in J} (\prod_{i \in I} a_{i,j})$. Ceci est égal, en vertu de la Prop.5 , à $\prod_{i \in I} (\prod_{j \in J} a_{i,j}) = \prod_{i \in I} a_i^b$.

<u>Proposition</u> 18. <u>Soient</u> a,b <u>et</u> c <u>des cardinaux</u>. <u>On a</u> $a^{bc} = (a^b)^c$.

Soit I un ensemble tel que Card I = c ; si $i \in I$, nous posons $b_i = b$. Il résulte des Prop.14 et 16 que l'on a $a^{bc} = a^{\sum_{i \in I} b_i} = \prod_{i \in I} a^{b_i} = (a^b)^c$.

<u>Définition</u> 5. <u>On désigne par</u> 2 (lire deux) <u>le cardinal</u> $1+1$.

Il résulte tout de suite de la Prop.8 que l'on a $2 \leqslant a$ pour tout cardinal a tel que $a > 1$.

<u>Proposition</u> 19. <u>Soit</u> a <u>un cardinal et</u> X <u>un ensemble tel que</u> Card X = a. <u>On a alors</u> Card $\mathfrak{P}(X) = 2^a$.

Soit I un ensemble à deux éléments i et j ; on voit tout de suite que Card I = 2. Soit f un élément de I^X ; désignons par Y_f l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) = i$. Si f et f' sont des éléments distincts de I^X, il existe un $x \in X$ tel que $f(x) \neq f'(x)$; puisque $I = \{i, j\}$, l'un des éléments $f(x)$, $f'(x)$ est i et l'autre $\neq i$; donc x appartient à un et à un seul des ensembles $Y_f, Y_{f'}$, d'où Y_f $Y_f \neq Y_{f'}$. Si Y est une partie quelconque de X, il existe une application f de X dans I telle que $f(x) = i$ pour tout $x \in Y$ et $f(x) = j$ pour tout $x \in X$ tel que $x \notin Y$; on a alors $Y_f = Y$. On voit donc que $f \longrightarrow Y_f$ est une application biunivoque de I^X sur $\mathfrak{P}(X)$, ce qui démontre la Prop. 19.

<u>Proposition</u> 20. <u>Soit</u> a <u>un cardinal</u>. <u>On a alors</u> $2^a > a$.

Soit X un ensemble tel que Card X = a. L'application $x \longrightarrow \{x\}$ donne une application biunivoque de X sur une partie de $\mathfrak{P}(X)$, d'où $a \leqslant 2^a$. Il suffira donc de montrer que $a \neq 2^a$. Soit f une application de X dans $\mathfrak{P}(X)$; désignons par Y l'ensemble des $y \in X$ tels que $y \notin f(y)$. Si $x \in Y$, x n'appartient pas à $f(x)$, d'où $f(x) \neq Y$. Si x est un élément de X n'appartenant pas à Y, x appartient à $f(x)$, d'où $f(x) \neq Y$. Il en résulte que Y n'est l'image par f d'aucun élément de X. Il n'existe donc aucune application de X sur $\mathfrak{P}(X)$, d'où $a \neq 2^a$.

<u>Proposition</u> 21. <u>Soit</u> A <u>un ensemble de cardinaux</u> ; <u>il existe alors un cardinal</u> b <u>tel que</u> $b > a$ <u>pour tout</u> $a \in A$.

L'application identique de A sur lui-même définit une famille de cardinaux ; soit s la somme des cardinaux de cette famille. On a évidemment $a \leqslant s$ pour tout $a \in A$, d'où $a < 2^s$.

<u>Remarques sur l'emploi de l'axiome de choix.</u>

Les définitions que nous avons données de la somme et du produit d'une famille de cardinaux ne sont légitimes qu'en vertu de l'axiome de choix. Si on veut raisonner sans faire usage de ce dernier, on sera amené à poser la définition suivante : une famille $(a_i)_{i \in I}$ de cardinaux est dite <u>addible</u> (resp.: <u>multipliable</u>) s'il existe un cardinal qui est un ensemble somme (resp.: qui est équipotent à l'ensemble produit) des cardinaux de la famille $(a_i)_{i \in I}$; ce cardinal est alors uniquement déterminé, et s'appelle la somme (resp.: le produit de la famille $(a_i)_{i \in I}$.

Toute famille $(a_i)_{i \in I}$ de cardinaux dont l'ensembles d'indices peut être muni d'une structure d'ensemble bien ordonné est addible. En effet, on sait que la réunion a des ordinaux a_i est un ordinal ; l'ensemble $a \times I$ peut donc être muni d'une structure d'ensemble bien ordonné. L'ensemble des éléments de la forme (x, i), où $i \in I$ et $x \in a_i$, étant une partie d'un ensemble qui peut être bien ordonné, peut lui-même être bien ordonné et est donc isomorphe à un ordinal, et par suite aussi à un cardinal ; or cet ensemble est un ensemble somme des ensembles a_i. En particulier, on voit que toute famille de cardinaux dont l'ensemble d'indices est un ensemble à deux ou à trois éléments est addible ; il en résulte qu'on peut définir la somme de deux cardinaux sans utiliser l'axiome de choix.

Si a et b sont des cardinaux, l'ensemble produit de a par b peut être bien ordonné ; on peut donc toujours définir le produit de deux cardinaux, et par suite aussi le produit de trois cardinaux.

Si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille addible (resp.: multipliable), et si $(b_i)_{i \in I}$ est une famille de cardinaux telle que $b_i \leqslant a_i$ pour tout $i \in I$, la famille $(b_i)_{i \in I}$ est addible (resp.: multipliable), comme il résulte tout de suite du fait que toute partie d'un ensemble bien ordonné est bien ordonnée. De plus, si $J \subset I$, la famille $(a_i)_{i \in J}$ est addible (resp.: multipliable, à condition que $a_i \neq 0$ si $i \in \complement_I J$).

Le lecteur vérifiera sans difficulté que les Prop. 7, 8, 9, 11, 14 restent vraies sans l'axiome de choix, et que les Prop. 4,5,6,10,12 (et son corollaire) et 13 restent vraies sans l'axiome de choix si on suppose de plus que les sommes et produits qui y figurent sont définis. De plus, dans le cas de la Prop.6, il suffit de supposer que les familles $(a_j)_{j \in J_k}$ sont toutes addibles et multipliables, et que la famille $(b_k)_{k \in K}$ est addible et multipliable : cela entraîne que la famille $(a_i)_{i \in I}$ est addible et multipliable, comme il résulte de la démonstration. De même, dans le cas de la Prop.6, il suffit de supposer que chaque famille $(a_{i,j})_{j \in J}$ est addible et que la famille $(\sum_{j \in J} a_{i,j})_{i \in I}$ est multipliable.

Si a et b sont des cardinaux, on dira que a^b est défini si l'ensemble des applications de b dans a est équipotent à un cardinal. Alors a^0, a^1, 1^a et 0^a sont définis, et la Prop.15 reste vraie sans l'axiome de choix. La Prop. 16 reste vraie si on suppose que soit $a^{\sum_{i \in I} b_i}$ soit $\prod_{i \in I} a^{b_i}$ est défini, l'autre étant alors également défini.

La Prop. 17 reste vraie si on suppose que soit $(\prod_{i \in I} a_i)^b$ soit $\prod_{i \in I} a_i^b$ est défini. Les Prop. 18 et 19 restent vraies si on suppose ~~que soit~~ $\cancel{(}$ $\cancel{i \in I\ a_i)^b}$ ~~soit~~
que les symboles qui y interviegnent sont définis.

II. ENTIERS NATURELS. ENSEMBLES FINIS.

1. Le principe de récurrence.

Définition 1. On dit qu'un cardinal a est fini si $a \neq a + 1$; un cardinal fini s'appelle aussi un entier naturel. On dit qu'un ensemble est fini s'il est équipotent à un cardinal fini. On dit qu'une famille d'éléments d'un ensemble est finie si son ensemble d'indices est fini.

La relation " $\leqslant$ " entre cardinaux définit une relation " $\leqslant$ " entre entiers naturels.

Théroème 1.- Tout ensemble non vide d'entiers naturels a un plus petit élément.

Cela résulte immédiatement de la Prop. 2, I, 1.

Proposition 1. Si n est un entier naturele, $n + 1$ est un entier naturel.

En effet, la relation $n \neq n+1$ entraîne $n + 1 \neq (n + 1) + 1$ en vertu de la Prop. 9, I, 2.

Il est clair que $0 \neq 1$, donc que 0 est un entier naturel. Il en est donc de même de 1 et de 2.

Proposition 2.- Soit n un entier naturel. Tout cardinal a tel que $a \leqslant n$ est alors un entier naturel. Si $n \neq 0$, il existe un entier naturel m et un seul tel que $n = m + 1$; on a $m < n$, et m est le plus grand cardinal $< n$.

Il existe un cardinal b tel que $n = a + b$ (Prop. 8, I, 2), d'où $(a + 1) + b = a + (1 + b) = a + (b + 1) = (a + b) + 1 = n + 1$ (Prop.7, I, 2) ; puisque $n \neq n+1$, il en résulte que $a \neq a+1$, donc que a est un entier naturel. Si $n \neq 0$, on a $n \geqslant 1$, et il existe un cardinal m et un seul tel que $n = m + 1$ (Prop.8 et 9, I, 2) ; m est un entier naturel, d'où $m \neq m + 1 = n$ et $m < n$. Si le cardinal a est $< n$, on a $b \neq 0$, d'où $b = c + 1$, c étant un cardinal, et par suite $n = (a + c) + 1$, $a + c = m$ et $a \leqslant m$.

Corollaire 1. *Toute partie d'un ensemble fini X est finie.*

En effet, on sait que le cardinal d'une partie de X est au plus égal à celui de X (Prop. 3, I, n°1).

Corollaire 2. Si Y *est une partie d'un ensemble fini* X *et si* $Y \neq X$, *on a* Card Y $<$ Card X .

Soit en effet x un élément de X n'appartenant pas à Y, et soit $X' = Y \cup \{x\}$. On a Card X' = (Card Y) + 1 $>$ Card Y et Card X' $\leqslant$ Card X, d'où Card Y $<$ Card X .

Corollaire 3. Si f *est une application d'un ensemble fini* X *sur un ensemble* Y, Y *est fini*.

On sait en effet que Card Y $\leqslant$ Card X (Prop.4, I, n°1).

Conformément aux définitions générales relatives aux ensembles ordonnés, si a et b sont des entiers naturels, nous notons : $[a,b]$ l'ensemble des entiers naturels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$, $[a,b[$ l'ensemble des entiers naturels x tels que $a \leqslant x < b$, $]a,b]$ l'ensemble des entiers naturels x tels que $a < x \leqslant b$, et $]a,b[$ l'ensemble des entiers naturels x tels que $a < x < b$.

<u>Soit</u> $P(n)$ <u>une relation contenant un argument libre</u> n <u>du type des entiers naturels</u>. <u>Supposons que l'une ou l'autre des relations suivantes soit vraie</u> :

a) " (<u>pour tout</u> $m < n$, $P(m)$) <u>entraîne</u> $P(n)$ "

b) " $P(0)$ <u>et</u> ($P(n)$ <u>entraîne</u> $P(n+1)$)"

<u>On peut alors affirmer que la relation</u> $P(n)$ <u>est vraie</u>.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait un entier naturel q tel que "non $P(q)$" . L'ensemble des entiers naturels x tels que "$x \in [0,q]$ et non $P(x)$" aurait un plus petit élément q' . Les relations "non $P(q')$" et "pour tout $m < q'$, $P(m)$" seraient vraies, ce qui conduit à une contradiction dans le cas a). Par ailleurs, on aurait ou bien $q'=0$ ou bien $q' = q''+1$, q'' étant un entier naturel $< q'$; donc ou bien "non $P(0)$" ou bien "$P(q'')$" serait vraie, ce qui conduit à une contradiction dans le cas b).

La méthode de démonstration d'une relation $P(n)$ que nous venons d'indiquer s'appelle le <u>raisonnement par récurrence</u>. Elle s'applique en général, de la manière suivante : dans le cas a), on ajoute aux hypothèses de la théorie qu'on étudie l'hypothèse "si m est un entier naturel $< n$, alors $P(m)$" , et on cherche à en déduire la conclusion "$P(n)$" ; dans le cas b), on cherche d'abord à démontrer "$P(0)$" , puis, ajoutant l'hypothèse "$P(n)$", on cherche à démontrer "$P(n+1)$" . Dans les deux cas, si on parvient à établir les démonstrations que nous avons indiquées, on a le droit d'en conclure que la relation "$P(n)$" est vraie dans la théorie initiale.

La méthode de démonstration par récurrence possède de nombreuses variantes ; nous allons en indiquer quelques unes.

1. Soit k un entier naturel, et soit P(n) une relation qui contient un argument libre du type des entiers naturels $\geqslant k$. Supposons que les relations "P(k)" et "si $n \geqslant k$, P(n) entraîne P(n + 1)" soient vraies ; la relation "si $n \geqslant k$, P(n)" (qui est d'ailleurs équivalente à "P(n)" puisque n est du type des entiers $\geqslant k$) est alors vraie. Soit en effet n' un argument libre du type des entiers naturels, et soit "P'(n')" la relation "si $n' \geqslant k$, P(n')", qui est équivalente à "si $n \geqslant k$,P(n)" . La relation P'(0) est vraie ; car, si $k = 0$ elle est équivalente à "P(k)", et, si $k \neq 0$, la relation "$0 \geqslant k$" est fausse. La relation "P'(n') entraîne P'(n'+1)" est vraie. Car, si $n'+1 < k$, la relation "P'(n'+1)" est vraie ; il en est de même si $k = n'+1$, puisque "P(k)" est vraie ; si $k \geqslant n'$, la relation "P'(n') entraîne P'(n'+1)" est équivalente à "P(n') entraîne P(n'+1)" , qui est vraie. La relation "P'(n')" est donc vraie.

2. Soient a et b des entiers naturels tels que $a \leqslant b$, et soit "P(n)" une relation qui contient un argument libre n du type "élément de $[a,b]$" . Si les relations "P(a)" et "si $n \in [a,b]$, P(n) entraîne P(n+1)" sont vraies, la relation "si $n \in [a,b]$, P(n)" est vraie. On le voit en appliquant la variante 1. à la relation "si $n' \leqslant b$, P(n')" , où n' est un argument libre du type des entiers naturels $\geqslant a$.

3. Soient a et b des entiers naturels tels que $a \geqslant b$. Soit "P(n)" une relation qui contient un argument libre n du type "élément de $[a,b]$" . Si les relations "P(b)" et "si $n \in [a,b[$, P(n+1) entraîne P(n)" sont vraies, la relation "si $n \in [a,b]$, P(n)" est vraie. Soit en effet c le plus petit élément de l'ensemble des entiers n de l'ensemble $[a,b]$ tels que "si $m \in [a,b]$ et $m \geqslant n$, P(m)" ;

Si on avait $c \neq a$, on aurait $c = d + 1$, d étant un entier naturel de l'ensemble $[a,b]$. La relation "si $m \in [a,b]$ et $m \geqslant d + 1$, $P(m)$" serait vraie ; il en serait donc de même de "$P(d + 1)$" , donc aussi de "$P(d)$", et enfin de "si $m \in [a,b]$ et $m \geqslant d$, $P(m)$" , ce qui conduirait à une contradiction. On a donc $c = a$, et la relation "si $n \in [a,b]$, $P(n)$" est vraie. La variante que nous venons de décrire s'appelle <u>récurrence descendante</u>.

4. Soit "$P(x)$" une relation qui contient un argument libre d'un type T quelconque ; et soit $S(x)$ un symbole fonctionnel typique du type des entiers naturels qui contient l'argument libre x . Introduisons un argument libre n du type des entiers naturels. Si les relations "pour tout x tel que $S(x) = 0$, $P(x)$" et "si pour tout x tel que $S(x) = n$, $P(x)$, alors, pour tout x tel que $S(x) = n+1$, $P(x)$" sont vraies, alors "$P(x)$" est vraie. En effet, la relation "pour tout entier naturel n et pour tout x tel que $S(x) = n$, $P(x)$" est vraie. Quand on emploie la variante que nous venons de décrire, on dit qu'on démontre "$P(x)$" <u>par récurrence sur</u> "$S(x)$" . L'hypothèse de récurrence est alors que $P(x)$ soit vraie pour tout x tel que $S(x) = n$. On peut évidemment combiner la variante 4. avec les variantes 1.,2., et 3. .

On peut non seulement démontrer des relations par récurrence, mais aussi <u>définir des symboles fonctionnels par récurrence</u>. <u>Considérons un type</u> T ; <u>supposons donnés un argument</u> a <u>de ce type</u> <u>(ou un élément explicite de ce type)</u> <u>et un symbole fonctionnel</u> $\varphi(x)$ <u>de ce type</u>, <u>contenant un argument libre</u> x <u>du type</u> T . <u>Il est alors légitime d'introduire un symbole fonctionnel</u> f(n) <u>du type</u> T , <u>contenant un argument libre</u> n <u>du type des entiers naturels</u>, <u>tel que les relations</u>

$$f(0 = a \; ; \qquad f(n+1) = \varphi(f(n))$$

<u>soient vraies</u>. Démontrons en effet par récurrence la propriété suivante il existe un ensemble E_n et un seul dont les éléments sont du type T et une application f_n et une seule de $[0,n]$ dans E_n tels que $f_n(0) = a$ et $f_n(m+1) = \varphi(f_n(m))$ pour tout $m \in [0,n[$. Cette assertion est vraie pour $n = 0$ (on prend $E_0 = \{a\}$ et pour f_0 l'application définie par $f_0(0) = a$). Supposons que notre assertion soit vraie pour n . Puisque $[0,n+1] = [0,n] \cup \{n+1\}$, et $n+1 \notin [0,n]$, il existe une application f_{n+1} de $[0,n+1]$ sur l'ensemble $E_{n+1} = E_n \cup \{\varphi(f_n(n))\}$ qui prolonge f_n et qui soit telle que $f_{n+1}(n+1) = \varphi(f_n(n))$. Il est clair que $f_{n+1}(0) = a$ et que $f_{n+1}(m+1) = \varphi(f_{n+1}(m))$ pour tout $m \in [0,n+1[$. Soient inversement E'_{n+1} un ensemble d'éléments du type T et f'_{n+1} une application de $[0,n+1]$ sur E'_{n+1} tels que $f'_{n+1}(0) = a$ et $f'_{n+1}(m+1) = \varphi(f'_{n+1}(m))$ pour tout $m \in [0,n+1[$. Si f'_n est la restriction de f'_{n+1} à $[0,n]$, on a $f'_n(0) = a$ et $f'_n(m+1) = \varphi(f'_n(m))$ pour tout $m \in [0,n[$, d'où $f'_n([0,n]) = E_n$ et $f'_n = f_n$ en vertu de l'hypothèse de récurrence. On a donc $f'_{n+1}(n+1) = \varphi(f_n(n))$, d'où $E'_{n+1} = E_{n+1}$ et $f'_{n+1} = f_{n+1}$, ce qui démontre notre assertion pour $n+1$. On peut donc introduire un symbole fonctionnel f_n tel que les relations "f_n est une application de $[0,n]$ sur un ensemble d'éléments du type T " et " pour tout $m \in [0,n[$, $f_n(m+1) = \varphi(f_n(m))$" soient vraies. On définit alors le symbole fonctionnel $f(n)$ par la formule $f(n) = f_n(n)$. Ce symbole a les propriétés voulues, et de plus il résulte de notre démonstration que, <u>si</u> $f'(n)$ <u>est un symbole fonctionnel qui a les mêmes propriétés que</u> $f(n)$, <u>on a</u> $f'(n) = f(n)$ <u>pour tout entier naturel</u> n .

Soit par exemple u une application d'un ensemble F dans lui-même. Désignons par e l'application identique de F dans lui-même. On peut alors introduire un symbole fonctionnel $\overset{n}{u}$ dy type "élément de F^F " tel que les relations

$$\overset{0}{u} = e \qquad \overset{n+1}{u} = \overset{n}{u}\ u$$

soient vraies (φ est ici l'application $v \to v \circ u$ de F^F dans lui-même). On dit que $\overset{n}{u}$ est la n-<u>ième itérée de l'application</u> u . On a $\overset{1}{u} = u$, $\overset{2}{u} = u \circ u$.

La méthode de définition par récurrence a des variantes analogues aux variantes 1.,2. et 3. de la méthode de démonstration par récurrence ; nous laissons au lecteur le soin d'examiner en quoi consistent ces variantes. Une autre variante est la suivante. Soit donnée une application d'une partie E' d'un ensemble E dans l'ensemble E et un élément a de E . Désignons par R le complément de E' par rapport à E . Introduisons un ensemble H qui est la réunion de E et d'un ensemble $\{u\}$ à un élément u tel que $u \notin E$. Définissons une application ψ de H dans lui-même par les formules

$$\psi(x) = \varphi(x) \text{ si } x \in E' \ ; \quad \psi(x) = u \text{ si } x \in R \ ; \quad \psi(u) = u \ .$$

On peut introduire un symbole fonctionnel f(n) (où n est un argument libre du type des entiers naturels) tel que $f(n) \in H$ et $f(n+1) = \psi(f(n))$ pour tout n . Deux circonstances peuvent alors se présenter. Ou bien on a $f(n) \in E'$ pour tout n , auquel cas nous poserons $g = f$. Ou bien il n'en est pas ainsi, et il existe alors un plus petit entier naturel p tel que $f(p) \notin E'$. On a alors $f(p) \in E$. C'est vrai si $p = 0$, puisque $f(0) = a$. Si $p \neq 0$, on peut écrire $p = q+1$, où q est un entier naturel $< p$, et on a $f(q) \in E'$, d'où $f(p) = \varphi(f(q)) \in E$.

Nous désignerons dans ce second cas par g l'application de $[0,p]$ dans E définie par $g(n) = f(n)$ pour tout $n \in [0,p]$. Donc : *étant donnés un ensemble* E , *une application* φ *d'une partie* E' *de* E *dans* E *et un élément* a *de* E , *ou bien on peut introduire un symbole fonctionnel* $g(n)$ (*où* n *est un argument libre du type des entiers naturels*) *tel que* $g(n) \in E'$, $g(0) = a$ *et* $g(n+1) = \varphi(g(n))$ *pour tout* n , *ou bien il existe un entier naturel* p *et une application* g *de* $[0,p]$ *dans* E *tels que* $g(0) = a$, $g(m) \in E'$ *et* $g(m+1) = \varphi(g(m))$ *pour tout* $m \in [0,p[$ *et* $g(p) \notin E'$. *De plus ces deux cas s'excluent mutuellement*. *Dans le premier cas, si* $g'(n)$ *est un symbole fonctionnel qui a les mêmes propriétés que* $g(n)$, *on a* $g'(n) = g(n)$ *pour tout* n ; *dans le second cas, l'entier* p *et l'application* g *sont uniquement déterminés*.

2. *Opérations sur les entiers naturels et les ensembles finis.*

Proposition 3. *Soit* $(a_i)_{i \in I}$ *une famille finie d'entiers naturels. Les cardinaux* $\sum_{i \in I} a_i$ *et* $\prod_{i \in I} a_i$ *sont alors des entiers naturels*.

Montrons d'abord que, si a et b sont des entiers naturels, $a + b$ est fini. Nous procèderons par récurrence sur b . Notre assertion est vraie pour $b = 0$, car $a + 0 = a$. Si elle est vraie pour b , il résulte de la formule $a+(b+1) = (a+b)+1$ (Prop.7, I, n°2) et de la Prop.1, n°1 que $a+(b+1)$ est fini, donc que notre assertion est vraie pour $b+1$. Elle est donc vraie pour tout entier naturel b .

Montrons maintenant que $\sum_{i \in I} a_i$ est fini par récurrence sur l'entier naturel Card $I = n$. Notre assertion est vraie si $n = 0$, car alors $I = \emptyset$ et $\sum_{i \in I} a_i = 0$. Supposons la vraie pour les familles d'entiers naturels telles que le cardinal de leur ensemble d'indices soit n . Si Card I = n+1 , on peut écrire $I = J \cup \{k\}$, où J est une partie de I telle que Card J = n et k un élément de I n'appartenant pas à J . On a $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in J} a_i + a_k$ (Prop.5, I, n°2) ; $\sum_{i \in J} a_i$ est fini en vertu de l'hypothèse de réccurrence ; il en résulte bien que $\sum_{i \in I} a_i$ est fini.

Ceci dit, il résulte de la Prop.14, I, n°2 que le produit de deux entiers naturels a et b est la somme d'une famille finie d'entiers naturels égaux à a . Ce produit est donc fini. Montrons que $\prod_{i \in I} a_i$ est fini par récurrence sur Card I = n. C'est vrai si n = 0, car le produit de la famille vide d'entiers naturels est 1 . Si c'est vrai pour n , et si Card I = n+1 , on a (utilisant les mêmes notations que plus haut) $\prod_{i \in I} a_i = (\prod_{i \in J} a_i) a_k$, ce qui montre que $\prod_{i \in I} a_i$ est fini.

<u>Corollaire</u> 1. <u>Toute réunion d'une famille finie</u> $(X_i)_{i \in I}$ <u>d'ensembles finis est finie</u>.

Soit en effet X' un ensemble somme de la famille $(X_i)_{i \in I}$. Il existe une partition $(X'_i)_{i \in I}$ de X' en ensembles X'_i tels qu'il existe pour tout $i \in I$ une application f_i de X'_i sur X_i . L'application de X' qui prolonge toutes les applications f_i est une application de X' sur la réunion Y des ensembles X_i. Or X' est fini en vertu de la Prop.3 ; il en est donc de même de Y (Corollaire 3 à la Prop.2, n°1).

<u>Corollaire 2</u>. <u>Le produit d'une famille finie d'ensembles finis est un ensemble fini</u>.

Cela résulte immédiatement de la Prop.3 .

Corollaire 3. <u>Si</u> a <u>et</u> b <u>sont des entiers naturels</u>, a^b <u>est un entier naturel</u>. <u>L'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini est fini</u>.

On sait que a^b est le produit d'une famille finie d'entiers naturels tous égaux à a (Corollaire à la Prop.16, I, n°2) ; la première assertion du corollaire résulte donc de la Prop.3 . La deuxième est une conséquence immédiate de la première.

Corollaire 4. *L'ensemble des parties d'un ensemble fini X est fini.*

On sait en effet que le cardinal de cet ensemble est $2^{\mathrm{Card}\, X}$ (Prop.19, I, n°2).

Proposition 4. *Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles finies d'entiers naturels telles que $b_i \leqslant a_i$ pour tout $i\in I$ et que $b_i < a_i$ pour au moins un $i \in I$. On a alors $\sum_{i\in I} a_i > \sum_{i\in I} b_i$. Si on suppose de plus que $a_i \neq 0$ pour tout $i \in I$, on a $\prod_{i\in I} a_i > \prod_{i\in I} b_i$.*

Soit j un indice tel que $a_j > b_j$; on peut écrire $a_j = b_j + c_j$, où c_j est un cardinal $\neq 0$ (Prop.8, I, n°2). Soit J le complément de $\{j\}$ par rapport à I . On a $\sum_{i\in I} a_i = (\sum_{i\in J} a_i) + (b_j + c_j) \geqslant$ $\geqslant (\sum_{i\in J} b_i) + (b_j + c_j) = \sum_{i\in I} b_i + c_j$ (cf. Prop.7 et 10, I, n°2) . Or on a $c_j \neq 0$, d'où $c_j \geqslant 1$. Puisque $\sum_{i\in I} b_i$ est un entier naturel, il est $\neq (\sum_{i\in I} b_i) + 1$, donc strictement inférieur à $(\sum_{i\in I} b_i) + c_j$, d'où $\sum_{i\in I} a_i > \sum_{i\in I} b_i$. On voit de même que $\prod_{i\in I} a_i = (\prod_{i\in J} a_i)(b_j + c_j) \geqslant \prod_{i\in I} b_i + (\prod_{i\in J} a_i) c_j$. Si on a $a_i \neq 0$ pour tout $i \in I$, il résulte de $c_j \neq 0$ que $(\prod_{i\in J} a_i) c_j \neq 0$ (Prop.13, I, n°2), d'où $\prod_{i\in I} a_i > \prod_{i\in I} b_i$.

Corollaire 1. *Soient a un entier naturel et b et b' des entiers naturels tels que $b \neq b'$. On a alors $a+b = a+b'$, et, si $a \neq 0$, $ab \neq ab'$.*

Cela résulte immédiatement de la Prop.4 si on observe que l'un des entiers naturels b, b' est strictement supérieur à l'autre.

Corollaire 2. Soient a, a' et b des entiers naturels tels que $a > a'$ et $b \neq 0$. On a alors $a^b > a'^b$.

Soit I un ensemble tel que $\mathrm{Card}\, I = b$. Si $i \in I$, posons $a_i = a, a'_i = a'$, d'où $a^b = \prod_{i \in I} a_i$, $a'^b = \prod_{i \in I} a'_i$ (Cor. à la Prop.16, I, n°2). Puisque $b \neq 0$, il existe un i tel que $a_i > a'_i$; de plus on a $a_i \geqslant a'_i$, d'où $a_i > 0$, pour tout $i \in I$, d'où le résultat.

Proposition 5.- Soient a et b des entiers naturels tels que $a \geqslant b$. Il existe alors un entier naturel c et un seul tel que $a = b+c$.

Il existe un cardinal c tel que $a = b+c$, et on a $c \leqslant a$ (Prop.8, I, n°2) ; il en résulte que c est un entier naturel (Prop.2, n°1). L'unicité de c résulte immédiatement du corollaire 1 à la Pro.4.

Corollaire. Soient a, b, b' des entiers naturels tels que $a > 1$, $b > b'$. On a alors $a^b > a^{b'}$.

Soit en effet c l'entier naturel tel que $b = b'+c$. On a $a^b = a^{b'}a^c$ (Prop.16, I, n°2), $a^c \geqslant a > 1$ et $a^{b'} \neq 0$.

L'entier c de la Prop.5 s'appelle la différence des entiers naturels a et b, et se désigne par $a-b$. On voit tout de suite que, si a, b, a', b' sont des entiers naturels tels que $a \geqslant b$, $a' \geqslant b'$, on a $(a-b)+(a'-b') = (a+a')-(b+b')$.

Si a et b sont des entiers naturels, la notation $[b, a[$ représente l'ensemble des entiers naturels n tels que $b \leqslant n$ et $n < a$.

Proposition 6. Soient a et b des entiers naturels tels que $a \geqslant b$. L'ensemble $[b, a[$ est alors fini, et son nombre d'éléments est $a-b$.

Nous procèderons par récurrence sur a. Notre assertion est vraie si $a = 0$, car on a alors $b = 0$, $[b, a[= \emptyset$ et $a-b = 0$. Supposons la vraie pour a. Il résulte immédiatement de la Prop.2, n°1 que

$[b,a+1[\; = ([b,a[) \cup \{a\}$. L'ensemble $[b,a+1[$ est donc fini et son cardinal est $\mathrm{Card}\,([b,a[) + 1 = (a-b)+1 = (a+1)-b$, ce qui démontre notre assertion pour $a+1$.

<u>Proposition</u> 7. <u>Soit</u> E <u>un ensemble fini d'entiers naturels et soit</u> n <u>le nombre d'éléments de</u> E . <u>Il existe alors une application strictement croissante et une seule de l'ensemble</u> $[1,n[$ <u>des entiers</u> x <u>tels que</u> $1 \leqslant x \leqslant n$ <u>sur</u> E .

L'ensemble E étant bien ordonné (par la relation " $\leqslant$ "), il existe un ordinal unique ω qui est isomorphe à E . Si σ est un segment de ω différent de ω lui-même, on a $\mathrm{Card}\ \sigma < n$ (Corollaire 2 à la Prop.2, n°1), ce qui prouve que σ n'est pas équipotent à ω . Il en résulte que ω est un cardinal, d'ou' $\omega = n$. Le même raisonnement montre qu'il existe une application strictement croissante de $[1,n]$ sur ω (car il résulte tout de suite de la Prop.6 que $\mathrm{Card}\,[1,n] = n$). Il existe donc une application strictement croissante de $[1,n]$ sur E . Cette application est unique en vertu de la Prop.   Chap.III,   .

<u>Définition</u> 2. <u>On appelle suite finie d'éléments d'un ensemble</u> F <u>une famille d'éléments de</u> F <u>dont l'ensemble d'indices est un ensemble fini d'entiers naturels</u>. <u>Le nombre d'éléments de l'ensemble d'indices de la suite s'appelle la longueur de la suite</u>. <u>Les membres de la suite s'appellent ses termes</u>.

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une suite finie de longueur n , et soit f l'application strictement croissante de $[1,n]$ sur I . Si $k \in [1,n]$, on dit que $x_{f(k)}$ est le k-<u>ième terme de la suite</u>. <u>Si</u> $n \geqslant 1$, $x_{f(n)}$ s'appelle <u>le dernier terme de la suite</u>.

Soient a et b des entiers naturels. Une suite finie dont l'ensemble d'indices est l'ensemble $[b,a]$ des entiers naturels i tels que $b \leqslant i \leqslant a$ se note souvent $(x_i)_{b \leqslant i \leqslant a}$. Plus généralement, si P(i) est une relation contenant un argument libre i du type des entiers, et s'il existe un ensemble I d'entiers tel que $i \in I$ soit équivalent à $P(i)$, une suite finie dont l'ensemble d'indices est I se note souvent $(x_i)_{P(i)}$.

Si les termes X_i de la suite finie $(X_i)_{b \leqslant i \leqslant a}$ sont des ensembles, la réunion et le produit de ces ensembles se notent respectivement $\bigcup_{i=b}^{a} X_i$ et $\prod_{i=b}^{a} X_i$; si $b \geqslant a$, l'intersection des ensembles X_i se note $\bigcap_{i=b}^{a} X_i$.

Si les termes de la suite finie $(a_i)_{b \leqslant i \leqslant a}$ sont des cardinaux, la somme et le produit de ces cardinaux se notent respectivement $\sum_{i=a}^{b} a_i$ et $\prod_{i=a}^{b} a_i$.

On définit de même les notations

$$\bigcup_{P(i)} X_i , \quad \prod_{P(i)} X_i ; \quad \bigcap_{P(i)} X_i ; \quad \sum_{P(i)} a_i ; \quad \prod_{P(i)} a_i$$

où $P(i)$ est une relation satisfaisant à la condition énoncée plus haut (de plus il faut encore supposer, dans le cas de la notation $\bigcap_{P(i)} X_i$, qu'il existe un i tel que $P(i)$).

<u>Proposition</u> 8.- <u>Soit</u> $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ <u>une suite finie d'entiers naturels de longueur</u> $n > 0$ <u>telle que</u> $x_i > x_{i+1}$ <u>pour</u> $i \in [1,n[$. <u>On a alors</u> $n \leqslant x_1+1$.

Montrons que $x_i+i \leqslant x_1+1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. C'est vrai pour $i=1$. Si c'est vrai pour i , et si $i+1 \leqslant n$, on a $x_{i+1}+1 \leqslant x_i$, d'où $x_{i+1}+i+1 \leqslant x_i+i \leqslant x_1+1$, ce qui montre que notre assertion est vraie pour $i+1$. On a donc $n \leqslant x_n+n \leqslant x_1+1$, ce qui démontre la Prop. 8 .

<u>Remarque</u>. Tous les résultats que nous avons obtenus sur les entiers naturels et les ensembles finis restent valables sans l'axiome de choix. En effet, un ensemble fini est par définition équipotent à un cardinal, donc peut être muni d'une structure d'ensemble bien ordonné. Les propositions sur les cardinaux que nous avons employées dans la démonstration de la Prop.2, n°1 sont valables sans l'axiome de choix (cf. les remarques finales de I, n°2). Les corollaires 1^{2}, et 3 à la Prop.2 restent vrais sans l'axiome de choix en vertu des remarques qui suivent les démonstrations des Prop. 3 et 4 de I, n°1. Le lecteur vérifiera immédiatement que les méthodes de raisonnement et de définition par récurrence se légitiment sans faire appel à l'axiome de choix.

D'autre part, toute famille finie de cardinaux est addible puisque l'ensemble d'indices d'une telle famille a une structure d'ensemble bien ordonné (cf. les remarques finales de I, n°2). Toute famille finie de cardinaux est aussi multipliable : cela se démontre par récurrence sur le nombre d'éléments de l'ensemble d'indices de la famille en utilisant la même formule que dans la démonstration de la Prop. 3 . Il en résulte que, si a et b sont des entiers naturels, a^b est défini, et que les Prop.3,4,5,6 ainsi que leurs corollaires sont vraies sans l'axiome de choix .

32

3. Division euclidienne.

Théorème 2. Soient a un entier naturel et b un entier naturel > 0. Il existe alors des entiers naturels q et r tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$; et ces entiers sont uniquement déterminés quand a et b sont donnés.

Les conditions imposées entraînent $bq \leq a < bq + b = b(q+1)$, d'où $bn \leq a$ si $n \leq q$. On voit donc que $q+1$ est le plus petit entier naturel m tel que $bm > a$, et par suite que q et $r = a-bq$ sont uniquement déterminés. Pour démontrer qu'il existe des entiers naturels satisfaisant aux conditions requises, observons d'abord qu'il existe des entiers naturels m tels que $bm > a$ (car, puisque $b \neq 0$, on a $b(a+1) > a$) ; il existe donc un plus petit entier naturel p tel que $bp > a$. On a $p \neq 0$; on peut donc écrire $p = q+1$, où q est un entier naturel $< p$, d'où $bq \leq a$. On a $a-bq < b(q+1)-bq = b$, ce qui achève la démonstration du Théorème 2.

Définition 3. Les entiers naturels q et r du Théorème 2 s'appellent respectivement le quotient euclidien de a par b et le reste de la division de a par b. Si $r = 0$, on dit que a est un multiple de b, ou que a est divisible par b, ou que b est un diviseur de a, ou que b divise a. Le quotient euclidien de a par b s'appelle alors le quotient de a par b et se note $\frac{a}{b}$.

Il est clair que tout multiple a' d'un multiple a de b est un multiple de b, et que

$$\frac{a'}{b} = \frac{a'}{a}\frac{a}{b} .$$

D'autre part, si c et d sont des multiples de b, et si $c \geq d$, $c+d$ et $c-d$ sont des multiples de b, et on a

$$\frac{c+d}{b} = \frac{c}{b} + \frac{d}{b} \quad ; \quad \frac{c-d}{b} = \frac{c}{b} - \frac{d}{b} .$$

Les entiers naturels qui sont divisibles par 2 sont appelés __pairs__, et les autres __impairs__ . Si a est divisible par 2 , $\frac{a}{2}$ s'appelle la __moitié__ de a .

Soient maintenant b un entier naturel > 1 et a un entier naturel quelconque. Définissons par récurrence un symbole fonctionnel typique q_n du type des entiers naturels (n étant un argument libre du type des entiers naturels) par les conditions suivantes : $q_o = a$, q_{n+1} est le quotient euclidien de q_n par b . Si $n > 0$, désignons par r_n le reste de la division de q_{n-1} par b . Montrons que l'on a, pour tout entier naturel n ,

$$a = \sum_{i=1}^{n} r_i b^{i-1} + q_n b^n .$$

C'est vrai si n=0, car notre formule se réduit alors à $a = q_o$, qui est vraie,. Supposons que notre formule soit vraie pour n . On a $q_n = bq_{n+1} + r_{n+1}$; remplaçant q_n par cette expression, il vient $a = \sum_{i=1}^{n+1} r_i b^{i-1} + q_{n+1} b^{n+1}$, ce qui montre que la formule est vraie pour n+1 .

Si $q_n \neq 0$, on a $q_{n+1} < q_n$, car la relation $b > 1$ entraîne $bq_{n+1} > q_{n+1}$ si $q_{n+1} \neq 0$. Il résulte alors de la Prop.8,n°2 que l'on a $q_a = 0$. Soit h le plus petit entier naturel tel que $q_h = 0$. On a alors

$$(1) \qquad a = \sum_{i=1}^{h} r_i b^{i-1}$$

On dit que la formule (1) donne le __développement de__ a __dans la base__ b. Si $h > 0$, on a $q_h = 0$, $q_{h-1} \neq 0$, d'où $r_h = q_{h-1} \neq 0$. Si h=0, on a $a = 0$.

__Proposition__ 9. __Soient__ a __un entier naturel__ $\neq 0$, b __un entier naturel__ > 1 __et__ $(r_i)_{1 \leqslant i \leqslant h}$ __une suite finie d'entiers naturels tels que__ $0 \leqslant r_i < b$ (__pour tout__ $i \in I\left[1,h\right]$), $r_h \neq 0$ et $a = \sum_{i=1}^{h} r_i b^{i-1}$.

Cette dernière formule donne alors la représentation de a dans la base b

Posons en effet $q_n = \sum_{i=n+1}^{h} r_i b^{i-1-n}$ $(0 \leqslant n \leqslant h)$. On a $q_o = a, q_h = 0$, $q_n \neq 0$ si $n < h$ et $q_n = bq_{n+1} + r_{n+1}$. Puisque $r_{n+1} < b$, q_{n+1} est le quotient euclidien de q_n par q_{n+1} et r_{n+1} le reste de la division de q_n par q_{n+1}, ce qui démontre la Prop.9.

4. Numération.

Soient donnés un entier naturel explicité $b > 1$ et un certain nombre d'entiers naturels explicités, dits chiffres, tels que tout entier naturel $< b$ soit égal à un chiffre et à un seul (ce qui signifie que la relation "$x < b$" est équivalent à la disjonction des relations "$x = c$", où c parcourt les divers chiffres, et que, si c et c' sont des chiffres distincts, la relation "$c \neq c'$" est vraie). Nous supposerons de plus que le chiffre qui est égal à l'entier naturel 0 est noté 0. Appelons alors symbole numérique un assemblage de signes obtenu en écrivant un certain nombre de chiffres à côté les uns des autres, le chiffre écrit le plus à gauche n'étant pas 0. On peut alors utiliser les symboles numériques pour représenter des entiers naturels de la manière suivante. Un symbole numérique qui se compose d'un seul chiffre représente déjà un entier naturel. Si S est un symbole numérique qui comporte plusieurs chiffres, soit c le chiffre le plus à droite de S et soit S' le symbole numérique obtenu en supprimant le chiffre le plus à droite de S. On convient alors que l'entier naturel représenté par S est c+a'b si a' est l'entier naturel représenté par S'. Comme S' comporte un chiffre de moins que S, l'application repétée de cette règle permettra de déterminer l'entier naturel représenté par S. Par exemple, si c,d,e,f sont des chiffres, les symboles cd, cde, cdef représenteront respectivement les entiers naturels $cb+d$, cb^2+db+e, cb^3+db^2+eb+f (où on a posé $3 = 2+1$). De plus, si on pose $4 = 3+1$, tout entier naturel $x \neq 0$ tel que $x < b^4$ peut être représenté par un symbole de l'une des formes c, cd, cde, ou cdef. En effet, nous avons vu au numéro précédent qu'il existe une suite finie $(r_i)_{1 \leqslant i \leqslant h}$ d'entiers naturels tels que $0 \leqslant r_i < b$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$, $r_h \neq 0$ et $x = \sum_{i=1}^{h} r_i b^{i-1}$. On a $x \geqslant b^{h-1}$, d'où $b^{h-1} < b^4$ et $h \leqslant 4$. Si $h = 4$, x est représenté par le symbole cdef, où c, d, e et f sont les chiffres égaux à r_4, r_3, r_2 et r_1 respectivement ; on voit de même que si $h=3$ (resp.: 2,1) on peut représenter x par un symbole à trois (resp: deux, un) chiffres.

D'autre part, deux symboles numériques distincts représentent toujours des entiers naturels différents. Supposons en effet que des symboles numériques S et S' représentent le même entier a. Soient c et c' les chiffres de droite de S et de S' ; si S et S' ne comportent chacun qu'un seul chiffre, on a $a=c=c'$, et S et S' sont identiques. Si S comporte plus d'une chiffre, soit T le symbole obtenu en supprimant le chiffre de droite de S. Si u est l'entier représenté par T, on a $a = ub+c > b$ (car $u \neq 0$) ; il en résulte que S' doit comporter plus d'un chiffre. Si T' est le symbole obtenu en supprimant le chiffre de droite de S' et u' l'entier naturel représenté par T', on a $a = ub+c = u'b+c'$; c et c' sont tous deux égaux au reste de la division de a par b, d'où $c = c'$ et par suite $ub = u'b$, d'où $u=u'$. Les symboles T et T' représentent donc le même entier naturel. Comme T a moins de chiffres que S, et T' que S', on voit qu'on pourra établir, en répétant un certain nombre de fois la démonstration précédente, que S et S' sont identiques.

Le système de représentation d'entiers naturels par des symboles numériques que nous venons d'exposer s'appelle le <u>système de numération de base</u> b . En pratique, on utilise l'un ou l'autre des systèmes suivants : a) le système de base 2 , dans lequel les chiffres sont 0 et 1; b) le <u>système décimal</u> dans lequel les chiffres sont $0,1,2,3 = 2+1$, $4 = 3+1$, $5 = 4+1$, $6 = 5+1$, $7 = 6+1$, $8 = 7+1$, $9 = 8+1$ et où b est l'entier $9+1$ qui s'appelle <u>dix</u>. Il est clair que, dans le système décimal, dix se note 10. C'est le système décimal que nous utiliserons dans cet ouvrage, sauf mention explicite du contraire.

Nous verrons dans le faiscicule consacré au calcul numérique que l'on peut donner des règles simples pour écrire dans le système décimal (ou d'ailleurs dans tout autre système de numération) les symboles numériques qui représentent la somme ou le produit de deux entiers naturels donnés par leurs symboles numériques.

5. **Analyse combinatoire.**

Soient $E, F, \ldots, G$ des ensembles finis. On voit alors facilement que tous les ensembles de l'échelle des types sur les ensembles $E, F, \ldots, G$ sont finis. Il en résulte que tout ensemble qui est défini structuralement en termes de $E, F, \ldots, G$ est fini, et que le nombre d'éléments d'un tel ensemble ne dépend que des nombres d'éléments de $E, F, \ldots, G$. L'objet de l'analyse combinatoire est de déterminer explicitement les nombres d'éléments de certains ensembles définis structuralement en termes de $E, F, \ldots, G$ en fonction des nombres d'éléments de $E, F, \ldots, G$.

Quand nous dirons dans ce qui suit que le nombre d'objets d'un certain type est un entier naturel m, nous voudrons dire que ces objets sont les éléments d'un ensemble fini dont le nombre d'éléments est m ; nous dirons aussi que cet ensemble fini est un ensemble à m éléments.

On utilise fréquemment dans les questions d'analyse combinatoire la proposition suivante.

Proposition 10.- *Soient* E *et* F *des ensembles* ; *posons* $a = \operatorname{Card} E$ *et* $b = \operatorname{Card} F$. *Soit* U *une partie du produit* $E \times F$. *Supposons que, pour tout* $x \in E$, *la coupe* $U(x)$ *de* U *suivant* x *ait le même cardinal* p, *et que, pour tout* $y \in F$, *la coupe* $\overset{-1}{U}(y)$ *de* $\overset{-1}{U}$ *suivant* y *ait le même cardinal* q. *On a alors* $aq = bp$.

Soit u le cardinal de U. On a $U = \bigcup_{x \in E} U(x)$, et les ensembles $U(x)$ sont mutuellement disjoints. Il en résulte que u est la somme d'une famille de cardinaux tous égaux à q dont l'ensemble d'indices est E, d'où $u = aq$. On voit de même que le cardinal de $\overset{-1}{U}$ est bp. Or les ensembles U et $\overset{-1}{U}$ sont évidemment équipotents, d'où le résultat.

Corollaire. *Soient* E *et* F *des ensembles ; posons* $a = \mathrm{Card}\, E$ *et* $b = \mathrm{Card}\, F$. *Soit* f *une application de* E *dans* F *telle que, pour tout* $y \in F$, *l'ensemble* $\overset{-1}{f}(y)$ *ait le même cardinal* p. *On a alors* $a = bp$.

Cela résulte immédiatement de la Prop. 10.

Si E est un ensemble fini à n éléments, l'ensemble B des applications biunivoques de E dans lui-même est structuralement défini en termes de E. Cet ensemble est donc fini, et son nombre d'éléments ne dépend que de n.

Définition 4. *Soit* n *un entier naturel. On appelle factorielle* n, *et on désigne par* $n!$, *le nombre des applications biunivoques dans lui-même d'un ensemble fini à* n *éléments.*

On notera que, si f est une application biunivoque d'un ensemble fini E dans lui-même, on a $f(E) \subset E$ et $\mathrm{Card}\, f(E) = \mathrm{Card}\, E$, d'où $f(E) = E$ (Cor. 2 à la Prop. 2, n°1). Le nombre n est donc aussi le nombre des *permutations* d'un ensemble à n éléments.

Proposition 11. *Soit* E *un ensemble fini à* n *éléments, et soit* $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant h}$ *une suite finie d'entiers naturels telle que* $\sum_{i=1}^{h} p_i = n$. *L'entier naturel* $n!$ *est alors divisible par* $\prod_{i=1}^{h} p_i!$, *et le quotient de* $n!$ *par* $\prod_{i=1}^{h} p_i!$ *est égal au nombre des partitions* $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant h}$ *de* E *dont l'ensemble d'indices est* $[1, h]$ *et qui sont telles que* $\mathrm{Card}\, X_i = p_i$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$.

Soit P l'ensemble des partitions $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant h}$ satisfaisant aux conditions énoncées. Puisque $\sum_{i=1}^{h} p_i = n$, l'ensemble P n'est pas vide ; soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant h}$ un élément de cet ensemble. Soit G l'ensemble des permutations de E. Si $f \in G$, les ensembles $f(A_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$ forment évidemment une partition de E, et on a $\mathrm{Card}\, f(A_i) = p_i$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$, d'où $\varphi(f) = (f(A_i))_{1 \leqslant i \leqslant h} \in P$; φ est une application de G dans P. Soit $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant h}$ un élément de P ; cherchons le le nombre des permutations $f \in G$ telles que $\varphi(f) = (X_i)_{1 \leqslant i \leqslant h}$. La restriction de f à A_i doit être, pour tout $i \in [1,h]$, une application biunivoque de A_i sur X_i. Soit B_i l'ensemble des applications biunivoques de A_i sur X_i ; si $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant h}$ est un élément de l'ensemble $\prod_{i=1}^{h} B_i$, il résulte du fait que les A_i forment une partition de E qu'il existe une application f de E qui prolonge toutes les f_i ; il est clair que f est une permutation et que $\varphi(f) = (X_i)_{1 \leqslant i \leqslant h}$. Le nombre des permutations f qui satisfont à cette dernière condition est donc égal au nombre d'éléments de $\prod_{i=1}^{h} B_i$. Or, puisque X_i est équipotent à A_i, B_i est évidemment équipotent à l'ensemble des applications biunivoques de A_i sur lui-même, ce qui montre que le nombre d'éléments de B_i est $p_i!$. Le nombre d'éléments de $\prod_{i=1}^{h} B_i$ est donc $\prod_{i=1}^{h} p_i!$; ce nombre ne dépend pas de l'élément $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant h}$ de P. La prop.11 résulte donc du corollaire à la Prop.10.

<u>Corollaire</u>. <u>Soient</u> p <u>et</u> n <u>des entiers naturels tels que</u> $p \leqslant n$. <u>L'entier naturel</u> $p!\,(n-p)!$ <u>divise alors</u> $n!$ <u>et la quotient de</u> $n!$ <u>par</u> $p!\,(n-p)!$ <u>est le nombre des parties à</u> p <u>éléments d'un ensemble à</u> n <u>éléments</u>.

Soit E un ensemble à n éléments. Si $(X_i)_{i=1,2}$ est une partition de E telle que $\mathrm{Card}\, X_1 = p$ et $\mathrm{Card}\, X_2 = n-p$, X_2 est la complément de X_1 par rapport à E. Inversement, si X est une partie de E à p éléments, et si on désigne par X_1 l'ensemble X et par X_2 son complément par rapport à E, $(X_i)_{i=1,2}$ est une partition de E telle que $\mathrm{Card}\, X_1 = p$, $\mathrm{Card}\, X_2 = n-p$. Le nombre des parties à p éléments de E est donc égal à celui des partitions de E en deux ensembles à p et $n-p$ éléments respectivement, d'où le résultat.

Si p et n sont des entiers naturels tels que $p \leqslant n$, le nombre des parties à p éléments d'un ensemble à n éléments se désigne par $\binom{n}{p}$ et s'appelle le <u>coefficient binomial d'indices</u> n <u>et</u> p (pour des raisons qui apparaîtront en Algèbre, cf. Algèbre, chap. I). On a donc

$$(1) \qquad \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

d'où il résulte immédiatement que

$$(2) \qquad \binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$$

(Cette dernière formule résulte aussi tout de suite du fait que, si E est un ensemble à n éléments, l'application $X \longrightarrow \complement_E X$ est une application biunivoque de l'ensemble des parties à p éléments de E sur l'ensemble des parties à n-p éléments de E).

<u>Proposition</u> 12. <u>Soit</u> n <u>un entier naturel</u>. <u>On a</u>

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n .$$

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre d'éléments de $\mathfrak{P}(E)$ est alors 2^n (Prop. 19, I, n°2) . Or, si F_p est l'ensemble des parties à p éléments de E , la famille $(F_p)_{0 \leqslant p \leqslant n}$ est une partition de $\mathfrak{P}(E)$, d'où le résultat.

<u>Proposition</u> 13. <u>Soient</u> n <u>et</u> p <u>des entiers naturels tels que</u> $p+1 \leqslant n$. <u>On a alors</u>

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$$

Soient E un ensemble à n+1 éléments, et F l'ensemble des parties à p+1 éléments de E . Soit x un élément de E ; soit F' l'ensemble des parties à p+1 éléments de E auxquelles x appartient, et F" celui de celles auxquelles x n'appartient pas. Soit E' l'ensemble des éléments $\neq x$ de E . L'ensemble F" est celui des parties à p+1 éléments de E' ; son nombre d'éléments est donc $\binom{n}{p+1}$. On voit tout de suite que l'application $X \longrightarrow X \cap E'$ est une application biunivoque de F' sur l'ensemble des parties à p éléments de E' . Le nombre d'éléments de F' est donc $\binom{n}{p}$, d'où le résultat.

Proposition 14. Soit n un entier naturel. On a alors $n! = \prod_{i=1}^{n} i$.

Cette assertion est vraie pour $n=0$, car il est clair que $0\,!=1$, et on sait que le produit de la famille vide d'entiers naturels est 1 . Supposons que notre assertion soit vraie pour n . L'ensemble des parties à un élément d'un ensemble à $n+1$ éléments est évidemment un ensemble à $n+1$ éléments. Il résulte donc du corollaire à la Prop.11 que $(n+1)! = (n!)(n+1)$, d'où $(n+1)! = (\prod_{i=1}^{n} i)(n+1) = \prod_{i=1}^{n+1} i$.

Proposition 15. Soient m et n des entiers naturels tels que $m \leq n$. Le nombre des applications biunivoques d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à n éléments est alors le quotient de $n!$ par $(n-m)!$.

Soient E un ensemble à m éléments et F un ensemble à n éléments ; soit B l'ensemble des applications biunivoques de E dans F . Tout élément f de B applique E sur une partie à m éléments de F . Si X est une partie à m éléments de F , le nombre des applications $f \in B$ telles que $f(E) = X$ est égal au nombre des applications biunivoques de E sur X , c'est-à-dire à $m!$. Il résulte alors du corollaire à la Prop.10 que le nombre d'éléments de B est $(m!).\binom{n}{m}$, qui est égal au quotient de $n!$ par $(n-m)!$ en vertu de la formule (1).

Proposition 16. Soient E et F des ensembles finis bien ordonnés ayant respectivement m et n éléments (avec $m \leq n$). Le nombre des applications strictement croissantes de E dans F est alors $\binom{n}{m}$.

L'image de E par une application strictement croissante de E dans F est une partie à m éléments de F . Réciproquement, soit X une partie à m éléments de F . Il ne peut exister d'application strictement croissante de E sur une partie de X différente de X ou de X sur une partie de E différente de E . Il existe donc une application strictement croissante et une seule de E sur X (Prop. , Chap.III,). Le nombre des applications strictement croissantes de E dans F est donc égal à celui des parties à m éléments de F , d'où le résultat.

<u>Proposition</u> 17.- <u>Soient</u> n <u>et</u> h <u>des entiers naturels</u>. <u>Le nombre des familles</u> $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant h}$ <u>d'entiers naturels dont l'ensemble d'indices est</u> $[1,h]$ <u>et qui sont telles que</u> $\sum_{i=1}^{h} p_i \leqslant n$ <u>est</u> $\binom{n+h}{h}$.

Soit $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant h}$ une famille d'entiers naturels satisfaisant aux conditions énoncées. Posons $q_k = \sum_{i=1}^{k} (p_i+1)$ $(1 \leqslant k \leqslant h)$. On a donc $q_{k+1} = q_k + p_{k+1}+1$ si $k \in [1,h[$, ce qui montre que l'application $k \to q_k$ est strictement croissante. On a évidemment $q_1 \geqslant 1$ et $q_h = (\sum_{i=1}^{h} p_i)+h \leqslant n+h$, $p_i = (q_{i+1}-q_i)-1$. Soit inversement $k \to q_k$ une application strictement croissante de $[1,h]$ dans $[1,n+h]$. Posons $p_1 = q_1-1$, et si $i \in]1,h]$, $p_i = (q_i-q_{i-1})-1$ (ce qui a un sens puisque $q_i > q_{i-1}$) . On a alors $q_k = \sum_{i=1}^{k} (p_i+1)$ $(1 \leqslant k \leqslant h)$. Cette formule est en effet vraie pour $k = 1$. Si elle est vraie pour k et si $k+1 \leqslant h$, on a $q_{k+1} = q_k+p_{k+1} + 1 = \sum_{i=1}^{k+1} (p_i+1)$, ce qui démontre la formule pour $k+1$. On a $q_h = (\sum_{i=1}^{h} p_i)+ h \leqslant n+h$, d'où $\sum_{i=1}^{h} p_i \leqslant n$. On voit donc que le nombre des familles $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant h}$ satisfaisant aux conditions énoncées est égal à celui des applications strictement croissantes de $[1,h]$ dans $[1,n+h]$, d'où le résultat, en vertu de la Prop.16.

<u>Corollaire</u>. <u>Soient</u> n <u>et</u> h <u>des entiers naturels, avec</u> $h > 0$. <u>Le nombre des familles</u> $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant h}$ <u>d'entiers naturels dont l'ensemble d'indices est</u> $[1,h]$ <u>et telles que</u> $\sum_{i=1}^{h} p_i = n$ <u>est</u> $\binom{n+h-1}{h-1}$.

Soit F_n l'ensemble de ces familles, et soit F'_n l'ensemble des familles $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant h}$ telles que $\sum_{i=1}^{h} p_i \leqslant n$. Si $n=0$, F_n est un ensemble à un élément, et le corollaire est vrai dans ce cas puisque $\binom{h-1}{h-1} = 1$. Si $n > 0$, il est clair que $F'_n = F_n \cup F'_{n-1}$ et que $F_n \cap F'_{n-1} = \emptyset$. Les nombres d'éléments de F'_n et F'_{n-1} sont $\binom{n+h}{h}$ et $\binom{n+h-1}{h-1}$ respectivement en vertu de la Prop.17. Le corollaire résulte alors de la prop.13.

Proposition 18. *Soit* n *un entier* >0 . *Le nombre* a_n *des couples* (i,j) *d'entiers naturels tels que* $i \in [1,n]$, $j \in [1,n]$ *et* $i \geqslant j$ *est* $\frac{n(n+1)}{2}$; *le nombre* b_n *des couples* (i,j) *tels que* $i \in [1,n], j \in [1,n]$ *et* $i > j$ *est* $\frac{n(n-1)}{2}$.

Soient A et B les parties de $[1,n] \times [1,n]$ composées des couples (i,j) tels que $i \geqslant j$ et $i > j$ respectivement. On a $B \subset A$, et le complément de B par rapport à A est évidemment la diagonale du produit $[1,n] \times [1,n]$, donc le nombre d'éléments est n . On a donc $a_n - b_n = n$. D'autre part, B est évidemment équipotent à l'ensemble B' des couples (i,j) du produit $[1,n] \times [1,n]$ tels que $i < j$. On a $[1,n] \times [1,n] = A \cup B'$ et $A \cap B' = \emptyset$, d'où $a_n + b_n = n^2$. Ajoutant les égalités $a_n - b_n = n$ et $a_n + b_n = n^2$, il vient $2a_n = n(n+1)$, d'où $2b_n = 2n^2 - n(n+1) = n(n-1)$.

Corollaire. *Soit* n *un entier naturel* >0. *On a alors* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Utilisons les mêmes notations que dans la démonstration de la Prop.18. Si $i \in [1,n]$, le nombre des couples $(n-i,j)$ tels que $j \geqslant n-i$ est i ; si A_i est l'ensemble de ces couples, $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une partition de A , d'où $a_n = \sum_{i=1}^{n} i$.

III. ENSEMBLES INFINIS.

1. L'ensemble des entiers naturels.

On appelle infini un ensemble (ou un cardinal) qui n'est pas fini. On peut voir facilement que, si la théorie basée sur les axiomes que nous avons introduits jusqu'ici n'est pas contradictoire, l'assertion "il existe un ensemble infini" n'est pas un théorème de cette théorie. Nous allons donc clore la ~~xxmxx~~ liste des axiomes de la théorie des ensembles en posant l'axiome suivant :

Axiome de l'infini. Il existe un ensemble infini.

La question de savoir si la théorie des ensembles, supposée non contradictoire sans l'axiome de l'infini, le devient en introduisant cet axiome, n'est pas résolue.

Théorème 3. Il existe un ensemble N dont les éléments sont tous les entiers naturels, et cet ensemble est infini.

Soit E un ensemble infini, et soit a le cardinal de E. Si n est un entier naturel, on n'a pas $a \leqslant n$ (Prop.2, II, n°1) ; on a donc $n \leqslant a$. L'ensemble N des cardinaux finis $\leqslant a$ est donc l'ensemble de tous les entiers naturels. Si p est un entier naturel, l'ensemble $[0,p]$ est une partie à $p+1$ éléments de N, d'où $\mathrm{Card}\, N \neq p$; N est donc infini.

Remarques. 1. On peut aussi démontrer le Théorème 3 sans faire appel à l'axiome de choix en montrant que l'ensemble des nombres d'éléments des parties finies d'un ensemble infini est l'ensemble des entiers naturels.

2\. On voit que l'énoncé du théorème 3 est équivalent à l'axiome de l'infini.

L'ensemble N du théorème 3 (qui est évidemment uniquement déterminé) s'appelle l'ensemble des entiers naturels. Cet ensemble sera désigné par N dans tout le reste de cet ouvrage.

Définition 1. On appelle suite d'éléments d'un ensemble E une famille d'éléments de E dont l'ensemble d'indices est une partie de N .

Les suites finies sont donc des suites particulières. Si k est un entier naturel, une suite dont l'ensemble d'indices est l'ensemble des entiers naturels $\geqslant k$ se désigne souvent par $(x_n)_{k \leqslant n < \infty}$, ou même par (x_n) si $k = 0$. Si $(X_n)_{k \leqslant n < \infty}$ est une suite d'ensembles, on note souvent

$$\bigcup_{n=k}^{\infty} X_n \; ; \; \bigcap_{n=k}^{\infty} X_n \; ; \; \prod_{n=k}^{\infty} X_n$$

respectivement la réunion, l'intersection et le produit des ensembles de la suite. Si P(n) est une relation contenant un argument libre n du type "élément de N" , on note souvent $(x_n)_{P(n)}$ une suite dont l'ensemble d'indices est l'ensemble des n tels que P(n). Si $(X_n)_{P(n)}$ est une suite d'ensembles, on note

$$\bigcup_{P(n)} X_n \; ; \; \bigcap_{P(n)} X_n \; ; \; \prod_{P(n)} X_n$$

respectivement la réunion, l'intersection et le produit des ensembles de la suite (à condition toutefois, dans le cas de l'intersection, qu'il existe un n tel que P(n)).

La relation "$m \leqslant n$" entre entiers naturels est une relation d'ordre dans N , et N est bien ordonné par cette relation (Théorème 1, II, n° 1).

La méthode de définition par récurrence, qui permet de construire des symboles fonctionnels f(n) (où n est un argument libre du type des entiers naturels) permet aussi, quand on a l'axiome de l'infini, de démontrer l'existence d'applications de N dans des ensembles. Nous allons donner ici une nouvelle variante de cette méthode.

<u>Théorème</u> 4.- <u>Soit</u> E <u>un ensemble</u>. <u>Si</u> n <u>est un entier naturel, soit</u> G_n <u>l'ensemble des applications de</u> $[0,n[$ <u>dans</u> E . <u>Soit donnée une application</u> $n \to \gamma_n$ <u>de</u> N <u>telle que</u> $\gamma_n \in E^{G_n}$ <u>pour tout</u> $n \in N$. <u>Il existe alors une application</u> f <u>et une seule de</u> N <u>dans</u> E <u>telle que</u> $f(n) = \gamma_n(f^{(n)})$ <u>pour tout</u> $n \in N$, <u>où</u> $f^{(n)}$ <u>est la restriction de</u> f <u>a</u> $[0,n[$.

Montrons par récurrence sur n qu'il existe une application f_n et une seule de $[0,n[$ dans E telle que l'on ait $f_n(m) = \gamma_m(f_n^{(m)})$ pour tout $m \in [0,n[$ (où $f_n^{(m)}$ est la restriction de f_n à $[0,m[$). Si $n = 0$, l'unique application f_o de $[0,0[= \emptyset$ dans E satisfait à notre condition, puisque $[0,0[= \emptyset$. Supposons notre assertion vraie pour n . Soit f_{n+1} l'application de $[0,n+1[$ dans E qui prolonge f_n et qui applique n sur $\gamma_n(f_n)$. Il est clair que l'on a $f_{n+1}(m) = \gamma_m(f_{n+1}^{(m)})$ pour tout $m \in [0,n+1[$. Inversement, si f'_{n+1} est une application de $[0,n+1[$ dans E qui satisfait à cette condition, la restriction de f'_{n+1} à $[0,n[$ est égale à f_n en vertu de l'hypothèse de récurrence, d'où $f'_{n+1}(n) = \gamma_n(f_n) = f_{n+1}(n)$, et $f_{n+1} = f'_{n+1}$, ce qui achève de démontrer que notre assertion est vraie pour n+1 . L'application $n \to f_{n+1}(n)$ de N dans E possède alors la propriété requise ; et, si f' est une application quelconque de N dans E qui possède la même propriété, alors, pour tout $n \in N$, la restriction de f' a $[0,n[$ coïncide avec celle de f , d'où f' = f .

2. Calcul sur les cardinaux infinis.

Proposition 1. Soit a un cardinal infini. On a alors $a^2=a$.

Supposons pour un moment que $a^2 \neq a$. L'ensemble des cardinaux infinis $a' \leqslant a$ tels que $a'^2 \neq a'$ possède alors un plus petit élément b. On a $b \geqslant 1$, d'où $b^2 \geqslant b$ et par suite $b^2 > b$ puisque $b^2 \neq b$. L'ordinal b n'a pas de plus grand élément. Car, si u était le plus grand élément de b, le segment U déterminé par u dans b ne serait pas équipotent à b (puisque b est un cardinal), d'où $d \neq d+1 = b$ si $d = \mathrm{Card}\, U$; d serait donc un entier naturel, et il en serait de même de b, ce qui n'est pas. On peut donc munir l'ensemble produit $b \times b$ d'une structure d'ensemble bien ordonné E telle que tout segment de E distinct de E soit contenu dans le produit par lui-même d'un segment de b distinct de b (Prop. , Chap.III,). On a $\mathrm{Card}\, E > b$; il n'existe donc pas de segment de b isomorphe à E, d'où on déduit qu'il existe un segment S de E isomorphe à b et que $S \neq E$. Soit s un segment de b distinct de b tel que $S \subset s \times s$, et soit c le cardinal de s ; on a donc $b \leqslant c^2$ et $c < b$. Si c est infini, la condition $c < b$ entraîne $c^2 = c < b$; si c est fini, il en est de même de c^2, d'où $c^2 < b$. On arrive donc dans tous les cas à la conclusion absurde que $b < b$, ce qui démontre la Prop.1.

Corollaire 1. Si a est un cardinal infini, on a $a^n = a$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Cela résulte immédiatement de la Prop.1.

Corollaire 2. Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille finie de cardinaux tous au plus égaux à un cardinal infini a. On a alors $\prod_{i \in I} a_i \leqslant a$, et $\prod_{i \in I} a_i = a$ s'il existe un $i \in I$ tel que $a_i = a$ et si $a_i \neq 0$ pour tout $i \in I$.

Soit n le nombre d'éléments de I . On a évidemment $\prod_{i \in I} a_i \leqslant a_n = a$. Si l'un des a_i est $= a$, et les autres $\geqslant 1$, on a $\prod_{i \in I} a_i \geqslant a$, d'où $\prod_{i \in I} a_i = a$.

<u>Corollaire 3. Soient a un cardinal infini et</u> $(a_i)_{i \in I}$ <u>une famille de cardinaux tous</u> $\leqslant a$ <u>dont l'ensemble d'indices ait un cardinal</u> $\leqslant a$. <u>On a alors</u> $\sum_{i \in I} a_i \leqslant a$.

Soit b le cardinal de I . Posons $a'_i = a_i$ pour $i \in I$. On a alors $\sum_{i \in I} a_i \leqslant \sum_{i \in I} a'_i = ab \leqslant a^2 = a$.

<u>Corollaire 4. Soit</u> $(X_i)_{i \in I}$ <u>une famille d'ensembles et soit</u> a <u>un cardinal infini</u>. <u>Supposons que l'on ait</u> $\mathrm{Card}\, X_i \leqslant a$ <u>pour tout</u> $i \in I$ <u>et</u> $\mathrm{Card}\ I \leqslant a$. <u>On a alors</u> $\mathrm{Card}\,(\bigcup_{i \in I} X_i) \leqslant a$.

Soit X un ensemble somme des ensembles X_i . On a donc $\mathrm{Card}\, X \leqslant a$ en vertu du corollaire 3 . D'autre part, il existe une application de X sur $\bigcup_{i \in I} X_i$, d'où le résultat.

<u>Corollaire 5. Soit</u> f <u>une application d'un ensemble infini</u> E <u>sur un ensemble</u> F . <u>Supposons que, pour tout</u> $y \in F$, <u>l'ensemble</u> $\overset{-1}{f}(y)$ <u>soit fini</u>. <u>L'ensemble</u> F <u>est alors équipotent à</u> E .

La famille $(\overset{-1}{f}(y))_{y \in F}$ est une partition de E , d'où $\mathrm{Card}\, E = \sum_{y \in F} n(y)$, où $n(y)$ est le nombre d'éléments de $\overset{-1}{f}(y)$. Puisque E est infini, F ne peut être fini, d'où $n(y) \leqslant \mathrm{Card}\, F$ pour tout $y \in F$, et par suite $\mathrm{Card}\, E \leqslant \mathrm{Card}\, F$ en vertu du corollaire 3 . On sait déjà que $\mathrm{Card}\, F \leqslant \mathrm{Card}\, E$; on a donc $\mathrm{Card}\, F = \mathrm{Card}\, E$.

3. Ensembles dénombrables.

Définition 2. On dit qu'un ensemble est dénombrable s'il est équipotent à une partie de l'ensemble N .

Proposition 2. Toute partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable. Le produit d'une famille finie d'ensembles dénombrables est dénombrable. La réunion d'une suite d'ensembles dénombrables est dénombrable.

La première assertion est évidente. Les autres résultent des corollaires à la Prop.1, n°2 .

Proposition 3. Tout ensemble infini contient un ensemble infini dénombrable. Tout ensemble infini dénombrable est équipotent à N .

Soit a le cardinal d'un ensemble infini E . Si n est un entier naturel, on a $n < a$. Puisque n et a sont des ordinaux, cela signifie que $n \in a$, d'où $N \subset a$. L'ensemble E , qui est équipotent à a , contient donc un ensemble équipotent à N . Si E est dénombrable, son cardinal est en même temps au plus égal et au moins égal à celui de E , d'où il résulte que E est équipotent à N .

Proposition 4. L'ensemble des parties finies d'un ensemble infini E est équipotent à E .

Si n est un entier naturel, nous désignons par F_n l'ensemble des parties finies à n éléments de E . Si $X \in F_n$, il existe une application de l'ensemble $[1,n]$ sur X ; F_n est donc équipotent à une partie de l'ensemble des applications de $[1,n]$ dans E , ensemble qui est lui-même équipotent à E^n . Or E^n est équipotent à E (Cor.1 à la Prop.1, n°2) ; F_n est donc équipotent à une partie de E . Il résulte de la Prop.3 que $\operatorname{Card} N \leqslant \operatorname{Card} E$. L'ensemble F des parties finies de E étant la réunion des F_n pour $n \in N$, il résulte du corollaire 4 à la Prop.1, n°1 que cet ensemble est équipotent à une partie de E .

D'autre part, l'application $x \longrightarrow \{x\}$ est une application biunivoque de E sur une partie de F ; F est donc équipotent à E .

Corollaire. L'ensemble des suites finies d'éléments d'un ensemble infini E est équipotent à E .

Si I est une partie finie de N, l'ensemble S_I des applications de I dans E est équipotent à E^n , si n est le nombre d'éléments de I ; S_I est donc équipotent à E si $n \neq 0$. L'ensemble S des suites finies d'éléments de E est la réunion de la famille des ensembles S_I pour toutes les parties finies I de N . Cette famille est dénombrable en vertu de la Prop.4 ; il en résulte que Card S $\leqslant$ Card E (Corollaire 4 à la Prop.1,n°2). Comme il est évident que Card E $\leqslant$ Card S , on a Card E = Card S .

Définition 3. On dit qu'un ensemble a la puissance du continu s'il est équipotent à l'ensemble des parties de N .

Un ensemble qui a la puissance du continu n'est donc pas dénombrable.

L'hypothèse du continu postule que tout ensemble non dénombrable possède une partie qui a la puissance du continu. On ne sait pas si cette hypothèse est vraie. Mais on sait que l'hypothèse du continu généralisée, qui affirme que, pour tout cardinal infini a , tout cardinal $> a$ est $\geqslant 2^a$, n'est pas fausse si la théorie des ensembles n'est pas contradictoire (i.e. la négation de cette hypothèse n'est pas un théorème de la théorie des ensembles).

51

IV. ENSEMBLES FINIS ET STRUCTURES D'ORDRE.

1. Ensembles ordonnés finis.

Proposition 1. *Tout ensemble ordonné fini non vide a un élément maximal et un élément minimal.*

Nous le démontrerons par récurrence sur le nombre d'éléments n de l'ensemble. Supposons que tout ensemble ordonné fini non vide dont le nombre d'éléments est $< n$ ait un élément maximal et un élément minimal. Soit E un ensemble ordonné non vide à n éléments. Soit a un élément de E ; désignons par E' (resp.: E'') l'ensemble des éléments x de E tels que $x > a$ (resp.: $x < a$). L'élément a n'appartient ni à E' ni à E'', d'où il résulte que les nombres d'éléments de ces ensembles sont $< n$. Si E' (resp.: E'') n'est pas vide, il possède un élément maximal (resp.: minimal) qui est aussi un élément maximal (resp.: minimal) de E. Si E' (resp.: E'') est vide, a est élément maximal (resp.: minimal) de E.

Proposition 2. *Pour qu'un ensemble E soit fini, il faut et suffit que toute partie non vide de $\mathfrak{P}(E)$ ait un élément maximal (pour la relation d'inclusion entre éléments de $\mathfrak{P}(E)$).*

Si E est fini, il en est de même de $\mathfrak{P}(E)$, et il résulte de la Prop.1 que la condition est nécessaire. Réciproquement, supposons la satisfaite. L'ensemble des parties finies de E n'est pas vide (car $\emptyset$ en est un élément) ; soit F une partie finie maximale de E. Si $x \in E$, $F \cup \{x\}$ est fini et contient F, d'où $F \cup \{x\} \subset F$ et $x \in F$. On a donc $F = E$, ce qui prouve que E est fini.

Proposition 3. *Pour qu'un ensemble totalement ordonné E soit fini, il faut et suffit que toute partie non vide de E ait un plus petit et un plus grand élément.*

Il résulte immédiatement de la Prop.1 que la condition est nécessaire. Supposons la maintenant satisfaite. Si $x \in E$, nous désignons par S_x l'ensemble des éléments y de E tels que $y \leqslant x$. Soit F l'ensemble des $x \in E$ tels que S_x soit fini. ~~xxx~~ Si E n'est pas vide (ce que nous pouvons supposer), il a un plus petit élément, et cet élément appartient à F , qui n'est par suite pas vide. Soit alors a le plus grand élément de F . Si a n'était pas le plus grand élément de E , l'ensemble des $z \in E$ tels que $z > a$ aurait un plus petit élément b . Puisque E est totalement ordonné, on aurait $S_b = S_a \cup \{b\}$. Or S_a est fini; S_b serait donc aussi fini, ce qui est impossible. Donc a est le plus grand élément de E , et $E = S_a$ est fini.

Proposition 4. Un ensemble totalement ordonné fini E à n éléments est isomorphe à l'ensemble $[1,n]$ ordonné par la relation " $\leqslant$ ").

En effet, E est bien ordonné (Prop.3) ; l'un des ensembles E , $[1,n]$ est donc isomorphe à un segment de l'autre. Or ces deux ensembles ont le même nombre d'éléments ; donc aucun d'eux n'est équipotent à une partie de l'autre qui ne soit pas l'autre tout entier, d'où le résultat.

2. Ensembles filtrants et réticulés.

Définition 1. On dit qu'un ensemble ordonné E est filtrant à droite (resp.: à gauche) si toute partie finie de E est majorée (resp.: minorée)

Si E est un ensemble, et $x(\sigma)y$ une relation d'ordre entre éléments de E , nous dirons que E est filtrant (à droite ou à gauche) pour la relation σ si l'ensemble ordonné obtenu en munissant E de la relation d'ordre σ est filtrant (à droite ou à gauche). Dans les énoncés généraux relatifs aux ensembles ordonnés et dans leurs démonstrations, nous supposerons que la relation d'ordre est notée " $x \leqslant y$ " .

Proposition 5. *Pour qu'un ensemble ordonné non vide* E *soit filtrant à droite* (*resp.*: *à gauche*), *il faut et suffit que toute partie à deux éléments de* E *soit majorée* (*resp.*: *minorée*).

La condition est évidemment nécessaire. Supposons la satisfaite, et démontrons par récurrence sur n que toute partie finie à n éléments de E est majorée (resp.: minorée). C'est vrai si $n=0$, parce que $E \neq \emptyset$. Supposons que ce soit vrai pour n . Si X est une partie à $n+1$ éléments de E , on peut écrire $X = Y \cup \{x\}$, où Y est une partie à n éléments et x un élément de E . Soit y un majorant (resp.: un minorant) de Y . Si $y = x$, c'est un majorant (resp.: un minorant) de X . Sinon, l'ensemble $\{x,y\}$ a deux éléments, et possède donc un majorant (resp.: un minorant) z . Il est clair que z est un majorant (resp.: un minorant) de X .

Exemples. 1. Tout ensemble totalement ordonné non vide est filtrant à gauche et à droite.

2. Tout ensemble ordonné qui admet un plus grand (resp: un plus petit) élément est filtrant à droite (resp.: à gauche).

3. L'ensemble Φ (E,F) des applications de parties d'un ensemble E dans un ensemble F (ordonné par prolongement) est filtrant à gauche, puisqu'il admet un plus petit élément, l'application vide ; mais il n'est pas filtrant à droite si E et F ont chacun plus d'un élément, car deux applications distinctes de E dans F n'ont aucun prolongement commun.

Il résulte immédiatement de la définition qu'un produit d'ensembles ordonnés filtrants (à gauche ou à droite) est filtrant (à gauche ou à droite). ~~est filtrant~~ Par contre, une partie d'un ensemble filtrant n'est pas nécessairement filtrante.

Proposition 6. *Soient E un ensemble filtrant à droite ou à gauche et F un ensemble ordonné. Une application f de E dans F qui est à la fois croissante et décroissante est constante.*

Supposons E filtrant à droite. Soient x,y des éléments de E, et z un majorant de $\{x,y\}$. On a $f(x) \leqslant f(z)$ et $f(x) \geqslant f(z)$, d'où $f(x) = f(z)$. On voit de même que $f(y) = f(z)$, d'où $f(x) = f(y)$. On a une démonstration analogue quand E est filtrant à gauche.

Définition 2. *On dit qu'un ensemble ordonné E est réticulé (ou encore que E est un réseau ordonné, ou un lattis) si toute partie finie non vide de E admet une borne supérieure et une borne inférieure dans E.*

Proposition 6. *Pour qu'un ensemble ordonné E soit réticulé, il faut et il suffit que tout couple (x,y) d'éléments de E admette une borne supérieure et une borne inférieure.*

Cela résulte immédiatement de la Prop.   , Chap.III,   .

Si x et y sont des éléments d'un ensemble réticulé E, on désigne par $\sup(x,y)$ et $\inf(x,y)$ la borne supérieure et la borne inférieure du couple (x,y).

Exemples. 1. Un ensemble totalement ordonné est réticulé.

2. Si E est un ensemble, l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ (ordonné par inclusion) est réticulé ; il en est de même de l'ensemble des parties finies de E (nous savons en effet que l'intersection et la réunion de deux parties finies de E sont finies).

3. Soit E l'ensemble $\{0,1,2\}$. La partie $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{0,1,2\}\}$ de $\mathfrak{P}(E)$ est réticulée, mais la borne supérieure de l'ensemble $\{\{1\}, \{2\}\}$ dans F n'est pas la même que sa borne supérieure dans $\mathfrak{P}(E)$.

4. Il peut se faire que, dans un ensemble ordonné, toute partie à deux éléments admette une borne inférieure, mais que certaines parties à deux éléments n'admettent pas de borne supérieure ; il en est par exemple ainsi pour l'ensemble des applications des parties d'un ensemble E ayant plus d'un élément dans un ensemble F ayant plus d'un élément.

5. Un ensemble réticulé non vide est évidemment filtrant à gauche et à droite ; mais un ensemble filtrant à gauche et à droite n'est pas nécessairement réticulé ; * on en a un exemple en prenant l'ensemble E des disques ouverts contenant l'origine dans le plan numérique, E étant ordonné par inclusion * .

Définition 3. On dit qu'un ensemble réticulé E est achevé si toute partie non vide de E admet une borne supérieure et une borne inférieure dans E .

Il est clair qu'un ensemble réticulé achevé a un plus petit et un plus grand élément.

Proposition 7. Soit E un ensemble ordonné ayant un plus petit élément et tel que toute partie non vide de E admette une borne supérieure dans E ; alors toute partie non vide de E admet aussi une borne inférieure dans E (autrement dit, E est réticulé achevé).

Soit Y l'ensemble des minorants d'une partie non vide X de E . L'ensemble Y n'est pas vide, puisque E admet un plus petit élément. Soit m la borne supérieure de Y. Si $x \in X$, x est un majorant de Y , d'où $m \leqslant x$. Inversement, tout minorant de X est $\leqslant m$; m est donc la borne inférieure de X .

Exemples. 1. Tout ensemble fini totalement ordonné est réticulé achevé ; mais l'ensemble des entiers naturels est totalement ordonné, donc réticulé, mais n'est pas achevé, puisqu'il n'a pas de plus grand élément.

2. L'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties d'un ensemble E , ordonné par inclusion, est réticulé achevé.

3. Soit E un ensemble. Appelons par abus de langage "partition" de E toute partie de $\mathfrak{P}(E)$ telle que l'application identique de cette partie dans $\mathfrak{P}(E)$ soit une partition. Ordonnons l'ensemble P des partitions de E par la relation "p est moins fine que p' " . L'ensemble P est alors réticulé achevé. Il a en effet un plus petit élément, à savoir l'ensemble $\{E\}$. Soit Q un ensemble non vide de partitions. Si $q \in Q$ et $x \in E$, soit $F_q(x)$ l'élément de q qui contient x ; posons $F(x) = \bigcap_{q \in Q} F_q(x)$. Les ensembles F(x), pour $x \in E$, forment alors une partition qui est la borne supérieure de Q dans P .

Il résulte aussitôt de la Prop. , Chap.III, que tout produit d'ensembles réticulés est réticulé, et que le produit est achevé si tous les facteurs le sont.

3. Propriétés de caractère fini.

Théorème 5. Soit F un ensemble de parties d'un ensemble E . Supposons que la condition suivante soit satisfaite : pour qu'une partie X de E appartienne à F , il faut et suffit que toute partie finie de X appartienne à F . L'ensemble F , ordonné par inclusion, possède alors un élément maximal.

Soit en effet F' une partie totalement ordonnée de F , et soit X la réunion des ensembles appartenant à F' . Nous allons montrer que $X \in F$; il en résultera alors que F est inductif, donc qu'il possède un élément maximal (en vertu du Théorème de Zorn, cf. Chap.III,). Soit Y une partie finie de X ; si $y \in Y$, soit Z_y un élément de F' tel que $y \in Z_y$. L'ensemble des Z_y (pour tous les $y \in Y$) est une partie finie de F' ; puisque F' est totalement ordonné, cet ensemble a un plus grand élément Z . L'ensemble Y est une partie finie de Z , et on a $Z \in F$; il en résulte que $Y \in F$. Toute partie finie de X appartenant à F , on a $X \in F$, ce qui achève la démonstration.

Soit P(X) une propriété des parties X d'un ensemble E . On dit que cette propriété est de <u>caractère fini</u> si, pour qu'une partie X de E la possède, il est nécessaire et suffisant que toute partie finie de X la possède. Il résulte alors du Théorème 3 que, si P(X) est une propriété de caractère fini des parties d'un ensemble E , il existe une partie maximale de E qui possède la propriété P(X).

Soit par exemple E un ensemble ordonné. La propriété pour une partie de E d'être totalement ordonnée est évidemment de caractère fini ; il existe donc une partie totalement ordonnée maximale de E .
