

COTE: BKI 01-2.2

LIVRE I  
THEORIE DES ENSEMBLES  
(ETAT 3)  
INTRODUCTION

Rédaction n° 058

Nombre de pages : 55

Nombre de feuilles : 55

Université Henri Poincaré - Nancy I  
INSTITUT ÉLIE CARTAN - UMR 7502  
Bibliothèque de mathématiques  
B.P. 239  
54506 Vandœuvre-Lès-Nancy

livre I

Introduction (Deuxième)

Etat 3

58

L I V R E I

THÉORIE DES ENSEMBLES (Etat 3)

INTRODUCTION

L'exposé de la théorie des Ensembles (base de toute la mathématique moderne) que l'on va trouver dans ce Livre, n'exige du lecteur, pour être strictement intelligible, que la possession des processus mentaux les plus élémentaires : savoir lire et compter. Présenté sans avertissement, il n'en paraîtrait pas moins très étrange à plus d'un mathématicien éprouvé ; à plus forte raison en serait-il ainsi pour ceux qui abordent seulement les sphères des mathématiques supérieures. Aussi cette Introduction a-t-elle pour but d'expliquer à ceux qui sont déjà un peu familiarisés avec les mathématiques sous leur aspect élémentaire et classique, par quel travail d'analyse et de réflexion on peut être amené à concevoir les fondements des mathématiques sous un jour quelque peu inusité, et que cette présentation n'est pas motivée par un vain pédantisme, mais par d'authentiques difficultés de pensée qu'il importe d'élucider complètement si on veut asseoir l'édifice mathématique sur des bases solides.

1. Analyse d'une démonstration. Les propositions.

La notion de rigueur. Nous adoptons provisoirement, dans cette Introduction la conception "naïve" de la science mathématique, qui a été celle de tous les mathématiciens jusque vers le milieu du XIX<sup>e</sup> siècle, et qui est encore implicitement à la base de l'enseignement élémentaire : le mathématicien considère les "objets mathématiques" de divers types : nombres de plusieurs espèces (entiers, rationnels, réels, complexes), points et figures de l'espace, fonctions, équations, etc. ; il énonce des vérités relatives à ces objets, qu'il qualifie le plus souvent de théorèmes ; et ces vérités, il les démontre par l'emploi du seul raisonnement.

On dit souvent, en outre, que la Mathématiques est une science exacte ; on entend par là que, lorsqu'un théorème a été démontré de façon correcte (ou, comme on dit encore, de façon rigoureuse), il est acquis définitivement : le débat est entièrement tranché, et il est impossible de le rouvrir sous quelque prétexte que ce soit. En d'autres termes, les vérités mathématiques sont des vérités absolues.

Tel est l'abord impeccable et hautain que présente la Mathématique au profane ou au novice. Mais, lorsque ce dernier commence à en pénétrer les arcanes, il s'aperçoit, non sans quelque étonnement, que cette "rigueur" tant vantée est une notion qui n'a pas la fixité et l'objectivité que l'on en attendrait ; sans doute, il est rare que la vérité d'un résultat mathématique soit remise en question ; mais on entend souvent les mathématiciens discuter du plus ou moins de rigueur d'une démonstration ; et tel raisonnement qui satisfaisait pleinement une génération est rejeté comme insuffisamment rigoureux par la génération suivante.

L'Analyse logique      On est donc amené à se demander à quoi on reconnaît  
des démonstrations.      qu'une démonstration est rigoureuse ; plus généralement, comment procède le mathématicien pour contraindre l'assentiment de son lecteur et ôter au doute toute possibilité de s'exercer ? Comme il professe ne rien devoir à l'expérience, et tout tirer du raisonnement pur, il est clair qu'il n'atteint son but que par un agencement habile des diverses parties de son discours ; et on ne peut surprendre son secret qu'en analysant la structure logique d'un grand nombre de raisonnements mathématiques : travail analogue à celui du philologue, qui, d'après des textes donnés, écrit la grammaire de la langue dans laquelle ces textes sont rédigés.

Ce sont les résultats de ce travail qui nous intéressent avant tout, plutôt que la manière dont les logiciens y sont parvenus ;

mais, pour les faire apparaître plus nettement, il nous sera commode de nous référer à un exemple, que nous tirerons de l'ancêtre de tous les traités de mathématiques :

" Euclide, Eléments : Livre IX, Proposition XX. "

" Les nombres premiers sont en plus grand nombre que toute quantité donnée de nombres premiers."

" Soient  $a, b, c$  les nombres premiers donnés : je dis qu'il y a des nombres premiers en plus grand nombre que  $a, b, c$  . "

" Qu'on prenne en effet le plus petit commun multiple de  $a, b, c$ , et soit  $d$  ce nombre ; qu'on ajoute à  $d$  une unité. Ou  $d+1$  est premier ou il ne l'est pas. Si d'abord il est premier, on a donc trouvé des nombres premiers  $a, b, c, d+1$  en plus grand nombre que  $a, b, c$  . "

" Soit au contraire  $d+1$  non premier : il est donc divisible par un nombre premier. Qu'il soit divisible par  $e$  premier ; je dis que  $e$  n'est pas le même qu'aucun des nombres  $a, b, c$  . Car, s'il se peut, qu'il le soit. Or,  $a, b, c$  divisent  $d$  :  $e$  aussi divisera donc  $d$  . Mais il divise aussi  $d+1$  : leur différence 1 sera donc aussi divisible par  $e$  , qui est un entier différent de 1 : ce qui est absurde. Donc  $e$  n'est pas le même qu'aucun des nombres  $a, b, c$  ; et il a été pris premier. On a donc trouvé des nombres premiers  $a, b, c, e$  en plus grand nombre que  $a, b, c$  : ce qu'il fallait démontrer. "

Tout texte mathématique, étant supposé correct du point de vue grammatical, se compose de propositions (au sens grammatical du mot) qui s'enchaînent les unes aux autres, par les procédés de la syntaxe quant à leur aspect, par les règles du raisonnement mathématique quant à leur sens. Lorsqu'on veut dégager ces règles, on s'aperçoit tout d'abord que les diverses propositions d'un texte mathématique peuvent

5

jouer des rôles tout à fait différents. En certains cas, l'énoncé d'une proposition équivaut à une affirmation ; en l'énonçant, on entend dire qu'elle est vraie ; il en est toujours ainsi lorsque la proposition est donnée comme théorème. D'autres fois, l'on énonce des propositions à titre de simple intermédiaire dans une démonstration : ce qui peut être signalé à l'attention du lecteur par des moyens grammaticaux, par exemple par les mots "si ..." , "supposons que" , par l'emploi du subjonctif, etc. ; en tout cas, c'est le contexte qui décide.

Par exemple, dans la démonstration d'Euclide, la proposition "...e aussi divisera donc d" , non seulement n'est pas vraie, mais on va même démontrer qu'elle est fausse ; de la proposition " $n+1$  est premier" , il n'est pas question de savoir si elle est vraie ou fausse (les hypothèses faites n'entraînant ni sa vérité ni sa fausseté) ; ce qui importe, c'est que si elle est vraie, le théorème est vrai aussi, et qu'il est vrai encore si elle est fausse.

Une seconde remarque est que l'essentiel dans une proposition mathématique, c'est son sens, et non sa forme grammaticale ; il n'y a pas lieu de considérer qu'une proposition soit modifiée si l'on y substitue à un pronom le mot dont il tient la place, à un mot sa définition, etc. . Par exemple, la phrase "e n'est pas le même qu'aucun des nombres a,b,c" a le même sens que la suivante "e est autre que a , est autre que b et est autre que c" ; les deux phrases diffèrent grammaticalement mais mathématiquement il n'y a pas lieu de distinguer entre elles. Grâce à la richesse des ressources du vocabulaire et de la syntaxe, une même démonstration peut ainsi être présentée sous de multiples formes équivalentes ; il peut y avoir là, du point de vue pratique, un grand avantage lorsque, par un usage intelligent du langage, le mathématicien, sans rien perdre de la rigueur du raisonnement, sait appeler l'imagination à son aide et rendre plus claire la marche des idées ; mais il est certain que

que cet état de choses n'est pas pour faciliter l'analyse des règles logiques qui sont appliquées au cours d'une démonstration.

Formation des propositions complexes. On va donc commencer par essayer de réduire la variété des formes possibles des propositions mathématiques, en montrant qu'on peut (au prix de longueurs d'écriture, sans inconvénients du point de vue logique) remplacer beaucoup d'entre elles par des combinaisons de propositions plus simples, combinaisons qui s'effectuent suivant un petit nombre de procédés fixes. C'est seulement lorsque nous aurons énuméré ces procédés que nous pourrons examiner comment le mathématicien arrive à former des propositions vraies.

La complexité de la plupart des propositions mathématiques apparaît, dans le texte cité plus haut, sur des exemples tels que "a,b,c sont premiers", "d+1 est premier ou il ne l'est pas", "e n'est pas le même qu'aucun des nombres a,b,c" ; la première de ces propositions peut s'énoncer "a est premier, b est premier et c est premier" la seconde "d+1 est premier, ou d+1 n'est pas premier" ; la dernière est encore plus compliquée, car elle se présente comme la négation de la proposition suivante : "e est le même nombre que a , ou c'est le même nombre que b , ou c'est le même nombre que c" .

Nous voyons ainsi apparaître trois procédés simples pour former de nouvelles propositions à partir de propositions déjà énoncées. Pour les énumérer, il nous sera commode de désigner des propositions non explicitées, mais quelconques, par des lettres telles que P, Q, R. Les nouvelles propositions qu'on peut alors former à partir de propositions données P, Q, R , sont les suivantes :

1. La négation d'une proposition P , qu'on note  $\bar{P}$  ; par exemple, la négation de "a est premier" est "a n'est pas premier" .

2. La conjonction de deux ou plusieurs propositions ; comme on l'exprime d'ordinaire par le mot "et" , on désignera par "P et Q et R" la conjonction des propositions P, Q, R .

3. L'alternative de plusieurs propositions, notés par le mot "ou" l'alternative des propositions P,Q,R étant "P ou Q ou R" . L'emploi du mot "ou" prête malheureusement à une confusion, qui existe déjà dans le langage ordinaire. Lorsqu'on dit "il faut qu'une porte soit ouverte ou fermée" , on entend insister sur le fait que ces deux possibilités s'excluent mutuellement. Au contraire, le rhéteur de La Fontaine qui dit "le roi, l'âne ou moi nous mourrons" n'annonce pas la mort de l'un des trois, à l'~~exception~~ exclusion des deux autres, mais de l'un au moins des trois. De même, quand on dit "si un nombre premier divise le produit de deux nombres, il divise l'un ou l'autre des facteurs" , il divise peut-être les deux. Dans le texte d'Euclide, la phrase "ou  $n$   $d+1$  est premier, ou il ne l'est pas" peut donner à croire que le mot "ou" y reçoit le premier des sens que nous venons de distinguer ; mais un examen attentif de la démonstration fera apercevoir que l'important, c'est que l'une (au moins) des propositions " $d+1$  est premier" , " $d+1$  n'est pas premier" est vraie ; il est exact, mais sans intérêt pour la démonstration, qu'elles ne puissent être vraies à la fois. Aussi convient-on, pour l'analyse logique des propositions mathématiques, d'adopter toujours pour le mot "ou" le second des sens dégagés ci-dessus.

Il est facile d'ailleurs de ramener à celui-là, et aux deux premiers procédés de formation de propositions, l'autre sens du mot "ou" : il suffit de former la proposition " $(A$  ou  $B)$  et  $(A$  et  $B)$ " .

Nous avons déjà, dans le texte d'Euclide, des exemples d'application répétée des trois opérations que nous venons d'énumérer, à partir de propositions P, Q, R données. Mais un peu d'attention montre qu'on ne doit pas considérer comme distinctes toutes les nouvelles propositions construites de cette façon. Par exemple, il n'y a pas lieu de distinguer entre "P et Q" et "Q et P", entre "P et (Q et R)" et "P et Q et R"; et s'il arrive qu'on ait à écrire la proposition "P et P" au cours d'un raisonnement, on la remplacera aussitôt par P. Les mêmes principes valent pour l'emploi de "ou". Quant à la négation, elle est régie par la règle suivante, dite de la double négation : la négation de la négation  $\bar{P}$  de P est P. D'autre part, par la négation, les opérations "ou", "et" se ramènent l'une à l'autre ; par exemple, la négation de "e est le même nombre que a, ou que b, ou que c" est "e n'est pas le même nombre que a, et ce n'est pas le même nombre que b, et ce n'est pas le même nombre que c"; ce qui se formule en général, en disant que la négation de "P et Q et R" est " $\bar{P}$  ou  $\bar{Q}$  ou  $\bar{R}$ ", celle de "P ou Q ou R" est " $\bar{P}$  et  $\bar{Q}$  et  $\bar{R}$ ".

Enfin, une dernière règle importante est la suivante : la proposition "(P et Q) ou R" ne doit pas être distinguée de "(P ou R) et (Q ou R)" bien que moins immédiate que les précédentes, il suffit d'y réfléchir un instant pour en reconnaître le bien-fondé.

Dans tout ce qui précède, on a supposé qu'on partait de trois propositions données P, Q, R, mais il est clair que les procédés de formation et les règles correspondantes s'appliquent à des propositions données en nombre quelconque.

Reprenons maintenant l'examen du texte d'Euclide. Pouvons-nous rendre compte de la formation de toutes les propositions qui s'y trouvent, par l'emploi des procédés qui viennent d'être énumérés ?



Que faut-il penser, en particulier, de l'emploi de "si" et des propositions subjonctives et conditionnelles ? Devons-nous voir là un nouveau moyen de formation de propositions complexes, irréductible aux précédents ?

Un moment de réflexion montre que ce n'est pas nécessaire. Considérons la proposition (à laquelle notre texte se réfère implicitement) : "si le nombre  $e$  divise les nombres  $m, n$ , il divise leur différence" . Le sens qu'on lui donne ne diffère pas de celui qu'on attribue à celles-ci : "un nombre  $e$  ne peut diviser  $m$  et  $n$  sans diviser leur différence" ou encore : "ou bien  $e$  ne divise pas à la fois les deux nombres  $m$  et  $n$  , ou il divise leur différence" . Cette dernière forme montre donc que la proposition "si  $P, Q$ " ne doit pas être considérée comme distincte de " $\bar{P}$  ou  $Q$ " ; autrement dit, il est inutile de considérer "si" comme désignant une opération logique nouvelle. La proposition "si  $P, Q$ " se formule souvent encore par les termes "pour que  $Q$  , il suffit que  $P$ " , "pour que  $P$  , il faut que  $Q$ " (par exemple "pour que  $e$  divise  $m$  et  $n$  , il est nécessaire qu'il divise leur différence") ; lorsque la proposition "si  $P, Q$ " est vraie, on dit encore que  $P$  entraîne  $Q$  ; ce qui conduit les logiciens à noter cette proposition " $P \rightarrow Q$ " (qu'elle soit vraie ou non).

Cette réduction du nombre des procédés de formation des propositions est intéressante à plus d'un titre : elle permet par exemple de voir aussitôt que la négation de " $P \rightarrow Q$ " est " $P$  et  $\bar{Q}$ " (par application des règles antérieures) ; de même, elle montre que les propositions " $P \rightarrow Q$ " et " $\bar{Q} \rightarrow \bar{P}$ " ne doivent pas être distinguées (fait dont on verra l'importance pratique ci-dessous).

On a aussi la règle suivante, qui trouve une application importante dans le texte d'Euclide, comme on le verra plus loin, et qui ne diffère que par la forme de la dernière règle donnée plus haut concernant l'emploi de "et" et "ou" : la proposition " $(P \text{ ou } Q) \rightarrow R$ " a le même sens que " $(P \rightarrow R) \text{ et } (Q \rightarrow R)$ ".

Signalons enfin un type de proposition complexe fort important, celui qui sans doute est surtout familier au lecteur sous la forme "pour que P, il faut et il suffit que Q"; par exemple "pour qu'un nombre premier divise un produit de deux nombres, il faut et il suffit qu'il divise l'un d'eux au moins". C'est une manière d'énoncer la proposition "(pour que P, il faut que Q) et (pour que P, il suffit que Q)", c'est-à-dire " $(\bar{P} \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } \bar{Q})$ ", ou encore " $(P \rightarrow Q) \text{ et } (Q \rightarrow P)$ "; aussi la note-t-on le plus souvent " $P \Leftrightarrow Q$ ", et lorsqu'elle est vraie, on dit que P et Q sont équivalentes.

Les règles de la déduction. Les procédés de formation des propositions complexes étant ainsi systématisés et réduits à un petit nombre, nous pouvons commencer à dégager l'ossature d'une démonstration mathématique. Lorsqu'on dépouille une démonstration de tous les commentaires qui aident le lecteur à en mieux <sup>suivre la marche</sup> pénétrer le sens, mais ne sont pas strictement indispensables à la succession logique des idées, on constate que le mathématicien part d'un certain nombre de propositions vraies (qu'il se borne souvent à énoncer dans le cours du texte, ou même à utiliser implicitement, mais qu'on peut supposer, pour la clarté, groupées au début de la démonstration sous le nom d'"hypothèses"); il énumère ensuite dans un certain ordre un certain nombre de nouvelles propositions vraies, formées à partir des hypothèses (et éventuellement d'autres propositions) à l'aide des procédés qui ont été énumérés ci-dessus; et il finit ainsi par aboutir à la proposition dont il voulait démontrer la vérité ("conclusion" de la démonstration).

L'acte élémentaire essentiel dans ce processus est donc la formation d'une proposition vraie à partir de propositions vraies déjà écrites, ou, comme on dit, la déduction de la nouvelle proposition à partir des précédentes ; mais pour que la démonstration soit jugée rigoureuse, il faut que chacune des déductions qui y figurent obéisse à des règles invariables, dont nous allons maintenant énumérer les principales.

Il y a en premier lieu les règles implicitement contenues dans le sens attribué aux mots "et" et "ou", et sous-entendues dans l'usage de ces mots pour la formation des propositions complexes : lorsqu'on dit que "P et Q" est vraie, on entend dire que chacune des propositions P, Q est vraie ; lorsqu'on dit que "P ou Q" est vraie, on entend dire que l'une au moins des propositions P, Q est vraie. Il s'ensuit que lorsque les deux propositions P, Q figureront dans la liste des propositions vraies déjà écrites, le mathématicien aura le droit d'ajouter à cette liste la proposition "P et Q" ; inversement, lorsque "P et Q" a déjà été reconnue comme vraie, il a le droit d'ajouter séparément les propositions P, Q à sa liste. De même, si P est déjà dans la liste des propositions vraies, on pourra ajouter à la liste la proposition vraie "P ou Q", Q étant n'importe quelle proposition (dont on n'a pas besoin de savoir si elle est vraie ou fausse).

Une autre règle fondamentale est la suivante, qui peut être considérée comme une des formes du syllogisme classique : si dans la liste des propositions vraies figurent les propositions P et " $P \rightarrow Q$ ", Q est aussi une proposition vraie.

Enfin, si P est une proposition quelconque (vraie ou non), la proposition " $P$  ou  $\bar{P}$ " est toujours vraie (principe du tiers exclu) .

Le texte d'Euclide nous donne de beaux exemples d'applications de ces règles ; si P désigne la proposition " $d+1$  est premier" , Q la proposition "il y a des nombres premiers autres que  $a, b, c$ ", Euclide démontre successivement les propositions " $P \rightarrow Q$ " , " $\bar{P} \rightarrow Q$ " ; la proposition " $(P \rightarrow Q) \text{ et } (\bar{P} \rightarrow Q)$ " est donc vraie, et nous avons vu plus haut que cette proposition ne diffère qu'en apparence de " $(P \text{ ou } \bar{P}) \rightarrow Q$ " ; comme  $(P \text{ ou } \bar{P})$  est vraie, la règle du syllogisme permet d'affirmer que Q est vraie.

On trouve aussi dans notre texte un exemple typique d'un mode de démonstration très fréquent, la démonstration dite "par l'absurde" : c'est essentiellement une application de la règle du syllogisme, où, au lieu de démontrer que " $P \rightarrow Q$ " est vraie, on démontre que " $\bar{Q} \rightarrow \bar{P}$ " est vraie ; comme il n'y a pas lieu de distinguer les sens de " $P \rightarrow Q$ " et de " $\bar{Q} \rightarrow \bar{P}$ " , on voit que, si on a aussi démontré que P est vraie, on pourra affirmer que Q est vraie (dans le texte d'Euclide, P est la proposition "e est différent de 1 et divise  $d+1$ " , Q la proposition "e n'est pas le même qu'aucun des nombres  $a, b, c$ ").

Lorsque, P étant vraie, on a démontré que " $\bar{Q} \rightarrow \bar{P}$ " est vraie, on exprime souvent ce résultat en disant que " $\bar{Q}$  est absurde" ou " $\bar{Q}$  entraîne contradiction" . En dépit de cette manière de parler, il ne faut pas voir dans ce type de raisonnement une "horreur de la contradiction", aussi peu motivée que l'horreur du vide dans l'ancienne physique, et qui obligerait, plutôt que de s'exposer au monstre Contradiction, à admettre n'importe quoi : apparence choquante, malheureusement suggérée par les expressions dont on se sert traditionnellement, et qui fait que de bons esprits répugnent à se laisser convaincre par ce genre de preuve, et même peut-être prennent là le dégoût de la méthode mathématique. En fait, l'analyse

l'analyse que nous avons esquissée montre qu'il ne s'agit, dans ce mode de démonstration comme dans les autres, que de l'application des règles logiques ordinaires.

Elle montre en même temps que, très souvent, au lieu de procéder "par l'absurde" en démontrant que  $\bar{Q}$  entraîne  $\bar{P}$ , il sera tout aussi facile, renversant la marche du raisonnement, de constater que  $P$  entraîne  $Q$ . Aussi doit-on considérer que le procédé "par l'absurde" est important surtout pour la découverte. Très souvent, lorsqu'on a été amené à conjecturer la vérité d'une proposition et qu'on désire la démontrer, il est avantageux, plutôt que d'essayer de la rejoindre en partant de ce que l'on sait, de partir de la négation de ce qu'on veut démontrer et de chercher à en tirer un résultat qui contredise ceux qui sont déjà connus. Autrement dit, au lieu de se demander "est-il certain que  $P$  soit vrai ?" le mathématicien se demande "est-il possible que  $P$  soit faux ?" ; ce qui, entre autres avantages, lui permet souvent, s'il s'est trompé dans sa conjecture, de s'apercevoir plus vite de son erreur. Il se peut naturellement que si par cette voie il atteint son but et obtient une démonstration par l'absurde, il juge préférable, après coup, de la renverser et de la mettre sous forme directe ; mais cela n'enlève rien à la valeur du procédé.

Valeur du calcul des propositions. Nous n'avons pas terminé l'examen des règles du raisonnement mathématique. On peut d'abord allonger la liste des règles de déduction du type précédent, c'est-à-dire portant sur des propositions dont on ne précise pas la structure interne : par exemple, " $P \rightarrow (P \text{ ou } Q)$ ", ou, ce qui revient au même, " $P \text{ ou } \overset{P \text{ ou}}{\vee} Q$ " est toujours vraie, quelles que soient les propositions  $P$  et  $Q$  ; de même, " $((P \rightarrow Q) \text{ et } (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$ " est toujours vraie.

Signalons encore l'importance de la notion de propositions équivalentes définie ci-dessus ; elle tient à la règle suivante : si une proposition P intervient dans la formation d'une proposition plus complexe par application répétée des trois procédés énumérés ci-dessus, et si Q est une proposition équivalente à P, en remplaçant partout P par Q dans la proposition complexe considérée, on obtient une nouvelle proposition qui est équivalente à la proposition complexe initiale. Mais on peut prouver que ces nouvelles règles résultent de l'application répétée des règles déjà énoncées (elles-mêmes d'ailleurs réductibles à un moindre nombre ; voir sur ces questions le § 2 du chap.I).

De plus, en approfondissant davantage l'analyse des propositions mathématiques, nous rencontrerons au paragraphe suivant de nouvelles règles de raisonnement qui se relient à la constitution interne des propositions. Mais, en s'en tenant aux règles énumérées jusqu'ici (et qui sont dites "règles du calcul des propositions"), avons-nous élucidé la question d'où nous étions partis, et rendu raison de la force convaincante du raisonnement mathématique (en tant qu'il n'utilise que les règles précédentes) ? Peut-être pas entièrement au gré de certains lecteurs ; car si nous avons montré comment le mathématicien procède, et fait apparaître les rouages essentiels de ses mécanismes logiques, nous n'avons nulle part dit pourquoi ces règles nous semblent revêtues d'un tel caractère de nécessité, et d'où vient l'empire qu'elles exercent sur notre entendement.

A ces problèmes, nous ne tenterons pas de donner de réponse. Non pas qu'il ne puisse y en avoir de plausibles, qu'elles soient d'ordre métaphysique, psychologique ou sociologique ; mais, outre que ces spéculations nous entraîneraient sur un terrain qui n'est pas nôtre, elles n'ajouteraient pas grand chose à ce qui est pour nous le fait essentiel en ce qui concerne la valeur des règles de la logique. Car il s'agit bien d'un fait d'ordre expérimental : c'est que tout esprit normal et non

et non prévenu se sent irrésistiblement contraint de reconnaître la validité d'une démonstration conduite selon ces règles ; il peut bien mettre en doute les "hypothèses" ; mais, une fois qu'il les a acceptées, il ne peut refuser d'admettre la "conclusion". Et il ne s'agit pas là d'un phénomène sujet à variations dans le temps : le raisonnement d'Euclide, vieux de plus de 2000 ans, garde aujourd'hui toute sa force sur les cerveaux de nos jeunes élèves. En bref, du point de vue "naïf", l'"évidence" de nos règles est telle qu'il n'y aurait guère d'effort à faire pour voir dans le refus de les accepter un signe de dérangement cérébral.

Il s'est pourtant trouvé, depuis le début du XX<sup>e</sup> siècle, des logiciens et même des mathématiciens qui rejettent certaines de ces règles (entre autres la règle de la double négation et le principe du tiers exclu). Que cette attitude puisse être raisonnablement défendue, c'est ce qui est sans doute assez difficilement concevable du point de vue "naïf" ; nous ne pourrions la justifier que lorsque nous aurons montré comment on est amené à modifier ce dernier et à considérer la Mathématique sous un nouvel aspect (voir § 4). Nous nous hâtons d'ajouter d'ailleurs que, si les "tabous" auxquels nous venons de faire allusion n'ont rien d'absurde en soi, nous n'avons nullement l'intention de nous y conformer ; ils n'aboutissent qu'à mutiler et compliquer effroyablement la Mathématique classique, et nous estimons que les raisons qu'on a avancées pour justifier leur adoption ne proviennent que d'une analyse insuffisamment poussée de la nature de la pensée mathématique. Nous reviendrons sur ce point lorsque le moment en sera venu.

§ 2. Structure de la proposition mathématique.

Propriétés, relations, variables.

Les propositions simples. Les règles logiques énumérées au § 1 s'appliquent indifféremment, et avec le même effet, à toute sorte de propositions, et non seulement aux propositions mathématiques ; dès lors qu'on a accepté d'admettre comme vraies un certain nombre de propositions, elles permettent d'en déduire beaucoup d'autres que l'on est contraint de considérer aussi comme vraies. D'où vient donc que ce mécanisme logique n'est guère employé avec succès en dehors de la Mathématique (tout au moins de façon consciente et systématique) ? Il est clair que nous devons chercher la réponse à cette question dans la nature même des propositions mathématiques, qui leur confère (du point de vue "naïf", où nous continuons à nous placer) ce caractère de "vérités absolues" que nous sommes peu disposés à accorder aux propositions relevant de toute autre branche de l'activité humaine.

L'analyse faite plus haut nous permet de n'examiner que les propositions qu'on peut qualifier de simples, c'est-à-dire celles qui ne paraissent pas pouvoir se scinder en plusieurs autres réunies par des mots tels que "et", "ou", "si", comme il a été expliqué au § 1 . On constate alors que ces propositions expriment que certains objets mathématiques possèdent telle propriété ou ont entre eux telle relation. Mais un examen plus attentif révèle que les propriétés ou relations ainsi exprimées peuvent se ranger en catégories assez nettement tranchées :

1° Il y a d'abord des propositions exprimant des propriétés ou des relations d'objets mathématiques explicités, ou, comme on dit, des propositions "particulières" ; par exemple "6 est premier" " $2^{2^{1000}} + 1$  est premier", " $\pi$  est irrationnel" sont des propriétés des nombres explicités  $6, 2^{2^{1000}} + 1$  et  $\pi$  (la première étant fausse,



la troisième vraie ; quant à la seconde, on ignore encore si elle est vraie ou non) ; de même "le p.p.c.m. de 2 et 3 est 6" est une relation entre 2, 3 et 6 ; " $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ " est une relation entre la somme de la série du second membre et le nombre  $\pi$ , défini par un tout autre procédé.

2° Beaucoup plus nombreuses et plus intéressantes sont les propositions exprimant des propriétés ou des relations générales, concernant tous les objets mathématiques d'un certain type ; par exemple "tout entier qui divise deux entiers divise leur différence", "le produit du p.g.c.d. et du p.p.c.m. de deux entiers quelconques est égal au produit de ces entiers", "les hauteurs de tout triangle sont concourantes".

3° Non moins importantes sont les propositions affirmant l'existence d'un <sup>ou</sup> plusieurs objets mathématiques d'un certain type satisfaisant à des conditions données ; par exemple "il existe un nombre réel dont le carré est égal à 2", "il existe une fonction égale à sa dérivée".

Il y a enfin des propositions "simples" de forme plus complexe que les précédentes ; mais avant de les décrire, il nous sera indispensable de revenir sur les deux dernières espèces de propositions que nous venons de discerner, pour en systématiser davantage la formation.

L'introduction des variables. La distinction que nous venons de faire ne concerne pas encore spécialement les propositions mathématiques, mais apparaît aussi en logique formelle et dans ses applications : "Socrate est mortel" est une proposition particulière, "tout homme est mortel" une proposition générale, "quelque homme est roux" une proposition d'"existence". Ce qui est par contre particulier aux mathématiques (surtout aux mathématiques modernes), c'est la notation qu'elles utilisent pour exprimer ces propositions.

18

Nous avons pris soin en effet, dans les exemples ci-dessus, d'exprimer les propositions "générales" ou les propositions d'"existence" en langage ordinaire ; mais ce n'est pas ainsi qu'on les énonce le plus souvent en mathématiques. Par exemple, au lieu de dire "tout entier qui divise deux entiers divise leur différence", on considèrera comme ayant même sens l'énoncé suivant "quels que soient les entiers  $x, y, z$ , si  $x$  divise  $y$  et  $z$ , il divise  $y-z$ " ; au lieu de dire "il existe un nombre réel dont le carré est égal à 2", on dira "il existe un nombre réel  $x$  tel que  $x^2=2$ ".

On introduit ainsi dans les textes mathématiques des phrases telles que " $x$  divise  $y$ " qui ne sont pas correctes du point de vue grammatical, puisque aux endroits où devraient normalement figurer des substantifs, ces derniers sont remplacés par des lettres ; toutefois, on obtient de nouveau une proposition mathématique sensée et correcte du point de vue de la syntaxe chaque fois qu'on remplace chacune des lettres qui figure dans une telle phrase par un objet mathématique de type approprié, mais par ailleurs quelconque ; il est d'ailleurs entendu que si une même lettre figure à divers endroits dans une telle phrase, elle doit être remplacée par le même objet à tous les endroits où elle figure. Une phrase telle que " $x$  divise  $y$ " est donc en quelque sorte une matrice de relations entre entiers ; de même qu'on signe des chèques en blanc, on pourrait aussi convenir d'écrire cette phrase "     divise     ", où les blancs seraient destinés à être remplis par des entiers quelconques. On dit que les lettres employées de cette manière sont des variables, ou des arguments, du type des objets mathématiques dont elles occupent la place ; et, élargissant le sens qu'ont les mots "relation" et "propriété" dans le langage ordinaire, on dira qu'une phrase telle que " $x$  divise  $y$ " est une relation entre les arguments  $x, y$ , une phrase telle que " $x$  est premier" une propriété de l'argument  $x$ .

Dans le texte d'Euclide cité au § 1, les lettres  $a, b, c$  jouent à très peu près le rôle de variables, bien que sous une forme un peu différente de celle qu'on donne aux textes mathématiques modernes ; la proposition qui s'y trouve démontrée s'énoncerait à présent : "quels que soient les nombres premiers  $a, b, c$ , il existe un nombre premier distinct de  $a, b, c$ ". On verrait aisément sur cet exemple l'intérêt pratique immense que présente l'usage des lettres, en essayant de rédiger toute la démonstration en s'en passant, et en constatant la lourdeur et l'aspect diffus du texte auquel on parviendrait. C'est de semblables défauts qu'a par exemple souffert l'Algèbre pendant tout le Moyen Age, et ces progrès ultérieurs n'ont été possibles qu'avec l'introduction des variables aux XVI<sup>e</sup> et XVII<sup>e</sup> siècles.

Le calcul des relations. Dans les considérations générales sur les relations, il nous sera commode de désigner des relations quelconques par des symboles tels que  $R \{x, y\}$ ,  $S \{x, y, z\}$ , les lettres écrites entre les signes  $\{ \dots \}$  étant les arguments qu'est supposée renfermer la relation ; de même, une propriété quelconque de l'argument  $x$  sera désignée par des notations telles que  $P \{x\}$ . Lorsque, dans une relation  $R \{x, y, z\}$ ,  $x$  et  $y$ , par exemple, remplacent des objets mathématiques de même type,  $R \{x, x, z\}$  désigne la nouvelle relation qu'on obtient en remplaçant partout  $y$  par  $x$  dans la relation considérée,  $R \{y, x, z\}$  celle qu'on obtient en permutant partout  $x$  et  $y$  dans  $R \{x, y, z\}$ .

Comme les relations et propriétés sont des matrices de propositions, les combinaisons de propositions énumérées au § 1 conduisent à considérer des combinaisons analogues de relations ; la phrase " $R \{x, y\}$  ou  $S \{x, y, z\}$ " est encore une relation entre arguments  $x, y, z$  ;

lorsqu'on remplacera ces arguments par des objets mathématiques déterminés, elle deviendra la proposition "A ou B" si  $R \{x, y\}$  devient A et  $S \{x, y, z\}$  devient B. On forme de même la combinaison " $R \{x, y\}$  et  $S \{x, y, z\}$ "; enfin  $\bar{R} \{x, y\}$  est la relation qui, pour toute substitution d'objets déterminés à x et y, devient la négation de la proposition qu'on obtient en substituant ces objets à x et y; on dit encore que c'est la négation de  $R \{x, y\}$ .

Il résulte alors du sens que nous donnons à ces relations "complexes" que toutes les règles énoncées au § 1 sur l'emploi des mots "et", "ou" et de la négation sont encore valables quand on les énonce pour des relations (ou propriétés) au lieu de propositions. Plus généralement, elles sont valables quand les lettres P, Q, R, etc. qui y figurent sont remplacées les unes par des relations, les autres par des propriétés, d'autres enfin par des propositions; aussi est-il avantageux, pour simplifier, de considérer les propriétés et propositions comme des relations d'un type particulier, les premières étant caractérisées par le fait qu'elles ne contiennent qu'une seule variable, les secondes par le fait qu'elles n'en contiennent aucune. Cette convention est d'ailleurs justifiée par le fait que, si on remplace tous les arguments d'une relation par des objets déterminés, on obtient une proposition, et que, si on les remplace tous sauf un par des objets déterminés, on obtient une propriété de l'argument restant; de même, si  $R \{x, y\}$  est une relation à deux variables (remplaçant des objets de même type),  $R \{x, x\}$  est une propriété de l'argument x.

Ceci posé, si nous revenons aux diverses sortes de propositions décrites plus haut, nous voyons que si  $R \{x, y, z\}$  est une relation à trois arguments (par exemple), on peut en déduire, soit la proposition "générale" : "quels que soient  $x, y, z$ ,  $R \{x, y, z\}$ ", soit la proposition

d'"existence" : "il existe  $x, y, z$ , tels que  $R \{x, y, z\}$ ".

Mais l'emploi des variables permet bien d'autres combinaisons.

Considérons par exemple la relation  $x=y^2$  entre deux variables du type des entiers ; la phrase "il existe  $y$  tel que  $x=y^2$ " n'est qu'une autre manière d'exprimer la propriété "x est un carré" de l'argument  $x$ .

Plus généralement, à partir d'une relation quelconque  $R \{x, y\}$  à deux arguments, on pourra former deux propriétés de l'argument  $x$  à partir de cette relation, savoir : quel que soit  $y$ ,  $R \{x, y\}$  , et "il existe  $y$  tel que  $R \{x, y\}$ ".

Ces nouveaux procédés peuvent toutefois paraître en désaccord avec la convention d'après laquelle nous avons rangé propositions et propriétés dans la catégorie des relations, car dans les phrases "quel que soit  $y$ ,  $R \{x, y\}$ " , ou "il existe  $x, y$  tels que  $R \{x, y\}$ " il figure toujours deux lettres  $x, y$ . Mais dans la seconde de ces phrases,  $x$  et  $y$  ne sont plus du tout des variables au sens auquel nous l'entendions plus haut, car on n'obtient plus une phrase sensée lorsqu'on y remplace  $x$  et  $y$  par deux objets déterminés ; il en est de même de la lettre  $y$  dans la première phrase. Il convient donc de faire une distinction entre les lettres susceptibles d'être remplacées par des objets déterminés, dites variables libres, et celles qui ne le sont plus, les variables neutralisées ; et il faut considérer une relation comme une proposition (resp. une propriété d'un argument  $x$ ) dès qu'elle ne contient aucune variable libre (resp. dès que  $x$  est la seule variable libre de la relation). Cette distinction faite, on peut former, à partir de toute relation  $R$  contenant (entre autres) la variable libre  $x$ , les relations "quel que soit  $x$ ,  $R$ " et "il existe  $x$  tel que  $R$ " ; dans ces nouvelles relations,  $x$  est un argument neutralisé, tous les autres arguments libres (resp. neutralisés) de  $R$  restent libres (resp. neutralisés).

En plus des trois procédés de formation fondamentaux décrits au § 1 pour les propositions, on dispose donc des deux nouvelles opérations "quel que soit" et "il existe" dans le "calcul des relations" et on conçoit sans peine la variété des combinaisons que l'application répétée de ces procédés peut fournir. Mais ici encore, toutes ces combinaisons ne doivent pas être considérées comme distinctes. En premier lieu, la phrase "quel que soit  $x$ , (quel que soit  $y$ ,  $R \{x,y\}$ )", qui résulte de l'application de deux opérations "quel que soit" consécutives, a le même sens que "quels que soient  $x,y$ ,  $R \{x,y\}$ "; de même pour un nombre quelconque d'opérations "quel que soit" consécutives, ou d'opérations "il existe" consécutives.

Par contre, on ne peut intervertir l'opération "quel que soit" et l'opération "il existe"; il est clair que la proposition "quel que soit  $x$ , il existe  $y$  tel que  $x=y^2$ " n'est pas du tout la même que "il existe  $y$  tel que, quel que soit  $x$ ,  $x=y^2$ ".

Une autre règle importante est que la négation de "quel que soit  $x$ ,  $R$ " ne se distingue pas de "il existe  $x$  tel que  $\bar{R}$ ", la négation de "il existe  $x$  tel que  $R$ " ne se distingue pas de "quel que soit  $x$ ,  $\bar{R}$ ".

A certains égards, ces règles peuvent être regardées comme des extensions des règles du § 1 concernant la négation de " $R$  et  $S$ " et celle de " $R$  ou  $S$ ". En effet, supposons par exemple que  $R \{x\}$  soit une propriété d'un argument  $x$ , et qu'il n'y ait que trois objets mathématiques pour lesquels cette propriété ait un sens; si  $A,B,C$  sont les propositions qu'on obtient en substituant à  $x$  chacun de ces objets, la proposition "quel que soit  $x$ ,  $R \{x\}$ " a même sens que "A et B et C", la proposition "il existe  $x$  tel que  $R \{x\}$ " même sens que "A ou B ou C"; on peut faire des remarques analogues chaque fois que la variable  $x$  ne peut être remplacée que par un nombre fini d'objets.

Enfin, si R est une relation contenant la variable libre x , S une relation dans laquelle x ne figure pas, ou est neutralisé, la relation "quel que soit x , R ou S" a le même sens que "(quel que soit x , R) ou S"

Ici encore, si on suppose pour simplifier que R soit une propriété de l'argument x , S une proposition, et que x ne puisse par exemple être remplacé que par trois objets, donnant respectivement les trois propositions A,B,C , la proposition "quel que soit x , R ou S" a le même sens que "(A ou S) et (B ou S) et (C ou S)" ; la règle précédente exprime que cette proposition ne doit pas être distinguée de "(A et B et C) ou S" , et nous retrouvons dans ce cas une des règles du calcul des propositions.

Au calcul des relations se rattachent de nouvelles règles de déduction, qui sont des extensions des règles énumérées au § 1 concernant les propositions. Convenons de dire qu'une relation  $R \{ x,y,z \}$  renfermant par exemple trois arguments libres, est vraie lorsque la proposition "quels que soient x,y,z ,  $R \{ x,y,z \}$ " est vraie (autrement dit, lorsque l'on obtient une proposition vraie en remplaçant x,y,z par des objets quelconques (des types convenables) dans  $R \{ x,y,z \}$ ). Alors les règles de déduction énoncées au § 1 restent valables lorsque les lettres P,Q désignent des relations quelconques, et non plus seulement des propositions : de façon précise, si les relations P,Q sont vraies, il en est de même de "P et Q" ; si la relation P est vraie, la relation "P ou Q" est vraie, Q étant une relation quelconque (vraie ou non) ; si la relation P et la relation " $\bar{P}$  ou Q" sont vraies, la relation Q est vraie ; enfin, la relation "P ou  $\bar{P}$ " est toujours vraie (que P soit vraie ou non). Cette dernière règle est elle-même (comme on peut le montrer) un cas particulier d'une nouvelle règle importante qui relie les opérations "quel que soit" et "il existe" : R étant une relation dans

laquelle figure par exemple l'argument  $x$ , la relation " $\bar{R}$  ou (il existe  $x$  tel que  $R$ )" est toujours vraie (que  $R$  soit vraie ou non). Si on convient encore de dire que la relation  $R$  entraîne la relation  $S$  lorsque " $R \rightarrow S$ " (c'est-à-dire " $\bar{R}$  ou  $S$ ") est vraie, cette dernière règle signifie que  $R$  entraîne "il existe  $x$  tel que  $R$ ".

Du point de vue "naïf" ces règles se justifient encore par leur évidence, étant donné le sens des termes "quel que soit" et "il existe". Il en serait de même pour les autres règles de déduction dont nous ne parlons pas ici, parce qu'on peut les déduire logiquement des précédentes (cf. chap.I).

Nous attirons seulement l'attention sur quelques erreurs auxquelles pourrait conduire l'emploi des termes "relation vraie" au sens indiqué ci-dessus ; si commode que soit cette locution dans la pratique, il faut se garder de raisonner toujours, par une analogie irréfléchie, sur les "relations vraies" comme s'il s'agissait de "propositions vraies". Par exemple, dire que la relation  $R$  n'est pas vraie ne signifie pas du tout que la relation  $\bar{R}$  le soit, mais seulement que la proposition (beaucoup moins forte) "il existe  $x, y, z$  tels que  $\bar{R}$ " est vraie (si  $x, y, z$  sont les arguments libres de  $R$ ).

De même, dire que la relation " $R$  ou  $S$ " est vraie ne signifie plus du tout, lorsque  $R$  et  $S$  contiennent des arguments libres, que l'une au moins des relations  $R, S$  soit vraie, mais seulement que, lorsqu'on remplace dans les relations  $R, S$  les arguments libres qui figurent dans " $R$  ou  $S$ " par des objets quelconques, on obtient deux propositions dont l'une au moins est certainement vraie (sans que ce soit toujours la même).



§ 3. Définitions et axiomes.

Définitions et relations primitives. L'analyse des paragraphes précédents nous permet maintenant de dissocier les propositions mathématiques en relations combinées par les 5 procédés fondamentaux que nous avons mis en lumière. Mais devons-nous nous arrêter aux termes derniers auxquels nous permet de remonter cette dissociation, c'est-à-dire aux relations qui, du point de vue grammatical, ne paraissent plus être des combinaisons de relations plus simples ? Ce serait méconnaître le rôle très particulier que le mathématicien fait jouer dans ses raisonnements aux mots du langage ordinaire. Par exemple, "x est pair", "x est un carré", "x est premier" sont des propriétés de la variable x du type des entiers, qui semblent bien ne pas provenir de combinaisons d'autres relations ; mais, à quiconque n'ayant jamais étudié les mathématiques, il paraîtra assez étrange que le mathématicien attribue un sens à ces phrases, car il n'aperçoit pas comment les qualificatifs de "pair", "carré" ou "premier" peuvent s'appliquer à des entiers, si on conserve à ces mots le sens qu'ils ont dans la langue courante. La réponse du mathématicien est fort simple : c'est que précisément il ne prend pas ces termes dans leur acception ordinaire, mais leur attribue un sens purement conventionnel ; la propriété "x est pair" ne doit pas être distinguée, par convention, de "il existe y tel que  $x=2y$ ", la propriété "x est carré" de "il existe y tel que  $x=y^2$ " ; enfin, la propriété "x est premier" a, par convention, même sens que "quel que soit y,  $y=1$  ou  $y=x$  ou y ne divise pas x". Poser ces conventions, c'est définir les propriétés considérées, lesquelles ne sont donc que des abréviations pour des propriétés qui s'exprimeraient de façon plus compliquée.

Ces abréviations (qui ne sont pas toujours tirées du langage courant, mais sont plus souvent formées à l'aide de nouveaux signes, sans signification dans la langue non mathématique)

constituent la presque totalité du vocabulaire mathématique. Bien qu'elles n'influencent que sur la forme écrite des démonstrations, et non sur leur sens, elles ont une importance pratique qui ne saurait être exagérée ; sans elles, la plupart des textes mathématiques seraient d'illisibles fatras ; et nombreux sont les exemples de théories qui ont passé par de longues périodes de stagnation, faute d'un symbolisme adéquat à l'expression commode de leurs résultats, et suggérant de nouvelles directions de recherche. Mais du point de vue du logicien, qui ne se préoccupe pas de la science qui se fait, mais veut codifier et éclaircir les principes de la science déjà faite il est utile au contraire de réduire au minimum le nombre de termes indispensables dans le vocabulaire mathématique.

Dans les exemples qui précèdent, les propriétés apparemment irréductibles que l'on considérerait peuvent donc se définir à l'aide des relations " $x=yz$ ", " $x$  divise  $y$ " et des 5 procédés généraux de formation de relations complexes. A son tour " $x$  divise  $y$ " se définit comme ayant le sens de "il existe  $z$  tel que  $y=xz$ ", et nous sommes ainsi ramenés encore à la relation  $x=yz$ . Ce processus ne peut naturellement se poursuivre indéfiniment, et on arrive enfin à des relations qu'on peut appeler primitives, en ce sens qu'elles ne peuvent plus être "définies" à partir d'autres relations. Pour les entiers, " $x=yz$ " n'est pas encore une relation primitive ; on "définit" en effet la multiplication à partir de l'addition et cette dernière à partir de l'addition de l'unité, si bien qu'on arrive à la relation primitive " $y=x+1$ ". De même, lorsqu'on veut analyser par exemple la structure logique de la géométrie plane élémentaire on aboutit à des relations primitives telles que " $x$  est situé sur  $X$ "

(où  $x$  est un point variable,  $X$  une droite variable), " $x$  est situé entre  $y$  et  $z$ " ( $x, y, z$  étant des points variables sur une même droite). Pour chaque théorie mathématique, on peut ainsi dégager un petit nombre  $\aleph$  de relations primitives entre variables des différents types d'objets que considère la théorie, toute autre relation de la théorie pouvant être formée à partir de celles-là .

Les axiomes. Une analyse régressive analogue permet de remonter, dans chaque théorie, à un certain nombre de propositions vraies (formées à l'aide des relations primitives de la théorie), qu'on pourrait aussi qualifier de "primitives", car on peut en déduire toutes les autres propositions vraies de la théorie, par application des règles du raisonnement. On dit que ces propositions sont les axiomes de la théorie. Par exemple, on peut déduire les propositions vraies de l'arithmétique de 5 axiomes dont nous citerons seulement les deux suivants : " $x+1 \neq 1$ " , " $x, y, (x+1=y+1) \rightarrow (x=y)$ " . De même, on a pu montrer que les propositions vraies de la géométrie élémentaire (dans l'espace) se déduisent de 21 axiomes, parmi lesquels figurent par exemple les suivants : "par deux points distincts il passe au moins une droite", "deux droites distinctes ont au plus un point commun" , "de trois points d'une droite, il y en a toujours un et un seul situé entre les deux autres" , "dans tout plan il existe trois points non situés sur une même droite" .

Avec la notion d'axiome, nous arrivons au terme de l'analyse logique des démonstrations mathématiques, tout au moins tant que nous considérons celles-ci du point de vue "naïf" où nous nous sommes maintenus jusqu'ici et nous pouvons donner une première réponse à la question que nous nous posée en commençant : qu'est-ce qu'un raisonnement rigoureux ? Nous lui reconnaitrons cette qualité si, en premier lieu, on peut, sans changer le sens des propositions qui y figurent, les remplacer par des

des propositions obtenues à partir des relations primitives (de la théorie considérée) par les 5 procédés fondamentaux de formation de relations complexes ; en second lieu, il faudra que les "hypothèses" de la démonstration soient, ou bien des axiomes, ou bien des propositions vraies déjà démontrées par des raisonnements reconnus rigoureux<sup>(\*)</sup> ; enfin, les "déductions" dont se compose la démonstration devront s'effectuer exclusivement par application des règles de raisonnement énumérées ci-dessus. On dit qu'une démonstration présentée de cette manière est mise sous forme axiomatique.

La valeur des axiomes. Quel que soit l'intérêt du critère objectif précédent, plus d'un mathématicien estimera sans doute qu'il y a quelque pédantisme à lui avoir consacré d'aussi longs développements, et, tout en accordant que la présentation axiomatique des démonstrations est aujourd'hui reconnue nécessaire de façon à peu près universelle, il fera valoir que l'apprentissage de ce mode de raisonnement ne peut guère se faire que par la pratique, et qu'il est donc assez vain de chercher à en codifier la théorie dans les moindres détails. Nous reconnaitrions sans peine la valeur de cette objection si les pages qui précèdent n'avaient d'autre but que d'exposer cette codification (encore qu'il ne soit pas si mauvais que "ce que l'on conçoit bien s'énonce clairement") ; mais l'analyse que nous avons résumée était nécessaire pour faire comprendre comment on est amené à modifier le point de vue "naïf" vis-à-vis des mathématiques, ainsi que nous allons maintenant l'expliquer.

---

(\*) Il faut naturellement que ces propositions vraies ne fassent pas elles-mêmes appel, dans leur démonstration, à la proposition où elles figurent à titre d'hypothèses ; c'est ce qu'on exprime en disant que la démonstration ne doit pas comporter de "cercle vicieux". On est assuré que cette condition est remplie lorsque les propositions vraies sont numérotées, et que dans la démonstration de l'une d'elles les hypothèses ont toujours un numéro inférieur à celui de la proposition à démontrer.

On est en effet conduit à se demander pourquoi les axiomes d'une théorie mathématique sont considérés comme vrais. S'agit-il, comme pour les règles du raisonnement, d'une sorte d'"évidence" interne, tenant à l'idée même que nous nous faisons des objets mathématiques qui interviennent dans les axiomes, et qui nous interdit de refuser notre assentiment à ces propositions ? C'est ce qu'on a cru pendant longtemps, et cette opinion n'a commencé à être ébranlée qu'au cours du siècle dernier, à la suite d'études plus approfondies sur les fondements de la Géométrie élémentaire.

On sait en effet que, parmi les axiomes de cette dernière figure le fameux "postulat des parallèles" (ou "postulat d'Euclide") affirmant que "par un point, on peut mener à une droite une seule parallèle". Il se distingue des autres axiomes de la Géométrie en ce qu'il ne paraît pas posséder au même degré le caractère de nécessité qu'on reconnaît sans peine à ces derniers au premier abord ; et on ne peut songer à le vérifier expérimentalement, l'univers extérieur ne pouvant nous fournir que de grossières approximations des objets mathématiques que nous nommons "points" et "droites". On a donc cherché, pour justifier l'introduction de cet axiome, à le démontrer à partir des autres ; mais après de très nombreux essais infructueux, on a fini par s'apercevoir de l'impossibilité d'une telle démonstration, ce qui a conduit à concevoir sous un jour tout à fait différent le postulat d'Euclide, et par contre coup, tous les autres axiomes.

Pour voir comment on a pu arriver à cette conclusion, il nous faudra dire quelques mots sur la notion de contradiction en mathématique. L'idée qu'une proposition puisse être à la fois vraie et fausse nous paraît incompatible avec la notion que nous avons du vrai et du faux, notion qui est à la base de nos règles de raisonnement. De fait, il résulte de ces règles ( § 1) que si une proposition A était à la fois

vraie et fausse, toute autre proposition B le serait aussi : car "A ou  $\bar{A}$  ou B" est vraie, et cette proposition s'écrit aussi " $(A \text{ et } \bar{A}) \rightarrow B$ "; donc si "A et  $\bar{A}$ " est vraie, il en est de même de B . On dit qu'une théorie mathématique serait contradictoire si une proposition de cette théorie était à la fois vraie et fausse. Aucune théorie de la Mathématique classique ne s'est révélée contradictoire jusqu'ici, et nous n'aborderons pas pour le moment le problème de savoir s'il est possible qu'une d'elles le soit. En tout cas, si on démontrait un jour qu'une théorie mathématique est contradictoire, le seul moyen de conserver à la Mathématique son caractère de science serait d'admettre qu'un des axiomes de la théorie est faux. De façon précise, supposons pour simplifier que la théorie comporte trois axiomes A,B,C ; si on démontrait que (A et B et C) entraîne (P et  $\bar{P}$ ), on en déduirait que ( $\bar{A}$  ou  $\bar{B}$  ou  $\bar{C}$ ) est vraie, c'est-à-dire que (A et B) entraîne  $\bar{C}$  ; autrement dit en ne prenant pour axiomes que les propositions A et B , la proposition  $\bar{C}$  serait vraie dans la nouvelle théorie, et cette dernière (différente naturellement de la théorie primitivement envisagée) aurait de nouveau un intérêt mathématique tant qu'on n'y découvrirait pas de contradiction (\*).

Le schéma de démonstration "par l'absurde" (§ 1) peut se rattacher à cette notion de théorie contradictoire : pour établir qu'une proposition C est vraie dans une théorie où (par exemple) il y a deux axiomes A,B , c'est-à-dire pour montrer que (A et B) entraîne C , il suffit de démontrer que la "théorie" dont les axiomes sont A,B et  $\bar{C}$  est contradictoire (en étendant quelque peu le sens usuel du mot "théorie") ; c'est de cette interprétation que dérive le langage habituel employé dans ce genre de démonstration (cf. § 1). Cela étant, pour démontrer le postulat d'Euclide, que nous désignerons par P , on a cherché à raisonner par

---

(\* ) Bien entendu, on pourrait aussi dire que la proposition  $\bar{A}$  est vraie dans la théorie dont B et C sont les axiomes, etc.

par l'absurde en montrant que la "théorie" obtenue en remplaçant P par  $\bar{P}$  dans la liste des axiomes, était contradictoire ; mais si loin qu'on ait poussé les déductions de cette théorie, on n'est jamais arrivé à rencontrer de contradiction ; et on est finalement parvenu à démontrer que, si la Géométrie élémentaire habituelle (dite encore "Géométrie euclidienne") est non-contradictoire, la théorie obtenue en remplaçant P par  $\bar{P}$  dans la liste des axiomes (et dite "Géométrie non euclidienne") est, elle aussi, non-contradictoire.

Mais alors, au lieu d'être une "théorie" factice, construite en vue d'une démonstration par l'absurde, la Géométrie non-euclidienne acquiert un droit à l'existence égal à celui de la Géométrie euclidienne ; on peut prendre comme axiome aussi bien la proposition P que sa négation  $\bar{P}$  sans que rien nous permette d'affirmer que l'une des deux théories obtenues soit "plus vraie" que l'autre : le choix entre les deux se réduit à une question de "commodité" (comme le veut Poincaré) ou d'utilité dans les applications que l'on a en vue. Autrement dit, la vérité d'un axiome (et par suite aussi des propositions qu'on en déduit) ne nous est plus imposée de l'extérieur, en quelque sorte ; elle est soumise à notre choix, et n'est plus qu'affaire de convention.

Constatation profondément troublante vis-à-vis de la conception "naïve" des mathématiques. D'autant que le doute, une fois éveillé, s'est rapidement propagé à tous les axiomes de la Géométrie, et a conduit à des résultats analogues. Et, mise à part l'Arithmétique, il n'est plus une seule théorie de la Mathématique classique dont les axiomes ne soient aujourd'hui reconnus universellement comme n'étant "vrais" que par convention.

En ce qui concerne l'Arithmétique, les mathématiciens dits "intuitionnistes" (auxquels nous avons déjà fait allusion) se refusent à considérer ses axiomes comme de simples conventions, et pensent au contraire qu'il s'agit là de vérités fondamentales que la structure même de notre esprit nous interdit de nier. Nous croyons pour notre part que l'Arithmétique n'occupe nullement une place à part parmi les théories mathématiques ; et si au premier abord ses axiomes nous paraissent doués d'une "évidence" plus éclatante que partout ailleurs, cela tient uniquement à l'intuition particulièrement nette que nous avons des petits nombres. Mais il y a un abîme entre la notion que nous avons du nombre "expérimental", c'est-à-dire du nombre que l'on peut compter, et la notion de l'entier "général" ; et non seulement il est fort douteux que quiconque ait l'intuition d'un nombre tel que  $2^{2^{1000}}$ , mais encore on peut raisonnablement se demander s'il est possible à un cerveau humain d'avoir une telle intuition. Dans ces conditions, alors que la vérité de la proposition " $2 \neq 3$ " nous semble aveuglante, au nom de quoi, sinon d'un axiome arbitraire, affirmons-nous que " $2^{2^{1000}} \neq 2^{2^{1000}} + 1$ " est, elle aussi, une proposition vraie ? On rétorquera que l'on est guidé par une irrésistible "analogie", une "extrapolation" de l'expérience sensible qui est une tendance universelle de l'esprit humain. Mais alors, la même réponse justifierait aussi, par exemple, l'axiome de Géométrie affirmant que "par deux points distincts il ne passe qu'une seule droite" ; car l'expérience nous montre bien que deux fils tendus entre deux points donnés paraissent coïncider sur toute leur longueur ; et l'axiome en question se déduit de ce fait expérimental par une "extrapolation" analogue.



Il est clair que dans les deux cas on se heurte à l'infranchissable hiatus qui sépare les êtres du monde expérimental des êtres mathématiques que l'on en déduit par "abstraction" ; et nous pensons que toute tentative pour le dissimuler ne peut aboutir qu'à obscurcir les idées.

Que reste-t-il donc de la conception naïve de la "vérité absolue" des propositions mathématiques ? Si on veut conserver au mot "vrai" son sens intuitif, il est clair que les propositions d'une théorie mathématique ne peuvent pas plus être considérées comme vraies que ne le sont les axiomes de la théorie ; et démontrer une proposition P dans une théorie dont les axiomes sont A,B,C (par exemple) ce n'est pas démontrer que P est vraie, mais bien que la proposition "(A et B et C)  $\rightarrow$  P" est vraie (au sens absolu). En d'autres termes, c'est par un pur abus de langage (d'ailleurs extrêmement commode en pratique) qu'on continue à dire que les propositions d'une théorie mathématique sont vraies ; elles ne sont vraies que d'une manière toute relative, c'est-à-dire si on accepte de considérer les axiomes de la théorie comme vrais ; mais plus rien ne nous oblige à donner cet acquiescement ; et toute la force de contrainte qu'exerce sur nous le raisonnement mathématique tire donc sa seule source des règles du raisonnement, et non plus des prémisses mêmes de ce raisonnement, contrairement à ce qu'il était naturel de supposer a priori, par analogie avec les parties déductives des sciences expérimentales.

#### § 4. Les objets mathématiques et la théorie des Ensembles.

La notion d'objet mathématique. La reconnaissance du caractère conventionnel des axiomes a aussi de graves répercussions sur l'idée que nous pouvons nous faire des divers types d'"objets" sur lesquels raisonne le mathématicien. La conception naïve que nous avons des plus simples

34

d'entre eux, tels que nombres entiers, ou points, droites et plans de l'espace, dérive manifestement de l'observation de certains objets de l'expérience : la nature nous offre des "points matériels" ayant une certaine étendue, des "droites matérielles" ayant une certaine largeur, des "plans matériels" ayant une certaine épaisseur, et des relations diverses entre ces objets ; nous pouvons vérifier que certaines de ces relations sont vraies, au sens expérimental du mot, c'est-à-dire dans les limites de précision de nos appareils de mesure ; et plus nos appareils deviennent précis, plus nous devons réduire la dimension de nos points, la largeur de nos droites et l'épaisseur de nos plans, pour que les relations considérées demeurent vraies ; d'où résulte, "à la limite" en quelque sorte, la notion abstraite des points, droites et plans "géométriques", êtres idéaux échappant à tout processus expérimental, mais pour lesquels nous admettons la vérité absolue des mêmes relations. Encore que fort en honneur en métaphysique, ce passage de la notion de vérité expérimentale à une notion de vérité "transcendante" s'appliquant à des êtres qui n'existent que dans notre entendement, ne laisse pas de susciter un certain malaise lorsqu'on se donne la peine d'y réfléchir quelque peu ; et ce serait déjà un sérieux motif de douter de la "vérité absolue" des axiomes de la Géométrie, quand bien même les motifs plus sérieux encore, dont nous avons parlé au § 3, n'existeraient pas.

Quoi qu'il en soit, dès que nous admettons que la vérité des axiomes est affaire de convention, la conception précédente des êtres mathématiques n'est plus possible ; car si l'esprit parvient encore à se former une idée (plus ou moins confuse) de ce que peuvent être des "propriétés" d'êtres purement spirituels, il répugne violemment à penser que les mêmes objets géométriques, par exemple, puissent, à notre gré, tantôt

tantôt posséder la propriété exprimée par le postulat d'Euclide P , tantôt la négation  $\bar{P}$  de cette propriété. Comme nous avons vu que rien ne nous permet de choisir entre P et  $\bar{P}$  , force nous est, pour <sup>re</sup>trouver une conception cohérente, d'admettre qu'il ne s'agit pas des mêmes objets dans les deux cas, et qu'il y a deux sortes d'objets géométriques, ceux de la Géométrie euclidienne, et ceux de la Géométrie non-euclidienne

Bien entendu, la même situation prévaut dans chaque théorie, et il faut donc concevoir un type nouveau d'objets pour chaque système d'axiomes. C'est en ce sens qu'on dit parfois que les axiomes sont des définitions déguisées : ils contiennent tout ce qu'il faut savoir des objets d'une théorie pour développer cette dernière. Mais ce sont d'ordinaire des "définitions" incomplètes, car il est le plus souvent possible d'imaginer plusieurs sortes d'objets possédant les propriétés qu'énumèrent les axiomes mais ayant en outre d'autres propriétés, mathématiques ou non mathématiques, compatibles avec les axiomes mais différant d'une sorte d'objets à l'autre. En particulier, les noms des objets d'une théorie et des relations primitives entre ces objets ne sont nullement déterminés par les axiomes et peuvent être choisis arbitrairement, soit dans la langue courante, avec toutes les résonances intuitives dont elle est chargée, soit dans des groupes de signes ou de syllabes sans signification usuelle ; l'essentiel est que lorsqu'on traduit les axiomes en remplaçant les noms de chaque objet (ou relation primitive) suivant un "dictionnaire" déterminé, la formation des axiomes à partir des relations primitives (à l'aide des 5 procédés fondamentaux) soit toujours la même. Par exemple, en Géométrie plane, on pourrait convenir de dire "alpha" au lieu de "point", "bêta" au lieu de "droite", et  $A \{ x, y \}$ , au lieu de "x est sur y" ; l'axiome "quels que soient les points x, x', il existe une droite y passant par x et x' " se traduira

quels que soient les alphas  $x, x'$ , il existe un bêta  $y$  tel que  $A \{x, y\}$  et  $A \{x', y\}$  " .

Faut-il voir dans cette latitude une regrettable imperfection de la méthode axiomatique ? Bien au contraire, elle ne présente que des avantages. Tout d'abord, en s'astreignant à ne vouloir connaître des objets mathématiques que ce qu'en expriment les axiomes, on évite toutes les erreurs auxquelles une image mentale plus riche n'expose que trop souvent, l'esprit ayant facilement tendance à s'appuyer implicitement sur des propriétés qui lui semblent intuitives, mais ne sont pas des conséquences des axiomes. Tant que les théorèmes restaient simples et eux-mêmes d'accord avec l'intuition, ce danger n'était pas bien grand ; mais avec les progrès de l'Analyse, et l'apparition de phénomènes incompatibles avec l'intuition, il est devenu de plus en plus sérieux ; c'est ainsi que l'on a cru pendant longtemps que toute fonction continue admet une dérivée, à cause de l'intuition grossière que nous avons de la "courbe représentative" d'une fonction continue.

Toutefois, l'avantage précédent est tout négatif, et la possibilité de "traduire" une théorie d'un langage dans un autre a eu des conséquences bien plus importantes sur le progrès des mathématiques. Supposons en effet que lorsqu'on remplace, dans les axiomes d'une certaine théorie  $\mathcal{C}$ , les noms des objets et des relations par des noms d'objets et de relations d'une théorie  $\mathcal{C}'$ , les axiomes deviennent des théorèmes dans la théorie  $\mathcal{C}'$  (c'est-à-dire des conséquences des axiomes de  $\mathcal{C}'$ ). Alors, si on traduit de la même manière tous les théorèmes de  $\mathcal{C}$ , on obtient encore des théorèmes de  $\mathcal{C}'$ , et cette dernière théorie se trouve ainsi enrichie d'un seul coup d'une foule de résultats nouveaux auxquels on n'aurait sans doute pas pensé sans cela.

Un exemple classique est la dualité en Géométrie projective plane :

si, dans les axiomes de cette dernière, on échange les mots "point" et "droite", le système d'axiomes reste le même ; à tout théorème de Géométrie projective plane correspondra donc un théorème "dual" obtenu par l'échange des mots "point" et "droite" dans son énoncé.

Un autre exemple remarquable est une des démonstrations qu'on peut donner de la non-contradiction de la Géométrie non-euclidienne plane (H. Poincaré). Considérons le "dictionnaire" suivant :

plan	demi-plan $y > 0$
point du plan	point du demi-plan $y > 0$
droite	demi-cercle de centre sur Ox
angle de deux droites	angle de deux demi-cercles
distance de deux points	logarithme du rapport anharmonique de deux points et des intersections avec Ox du demi-cercle de centre sur Ox passant par les deux points

Si on "traduit" les axiomes de la géométrie non-euclidienne suivant ce dictionnaire, on constate que ces axiomes deviennent des théorèmes de Géométrie euclidienne ; si donc on pouvait déduire de ces axiomes une proposition à la fois vraie et fausse, la traduction de cette proposition serait une proposition à la fois vraie et fausse de Géométrie euclidienne ; il en résulte que si on admet que cette dernière n'est pas contradictoire, la Géométrie non-euclidienne ne saurait l'être non plus.

Ainsi, un système d'axiomes, ou, comme on peut dire encore, une structure mathématique (terme que nous définirons de façon précise au chap.II), apparaît comme une matrice de propositions vraies, en quelque sorte : de chaque proposition vraie conséquence des axiomes, on peut tirer autant d'exemplaires différents que les objets pour lesquels les axiomes sont vrais comportent d'interprétations. On conçoit donc l'utilité que présente pour le mathématicien l'étude abstraite de

de certains types de structures, utilité d'autant plus marquée que les structures envisagées comporteront d'une part un plus grand nombre de propositions vraies (conséquences des axiomes), et seront d'autre part susceptibles de s'"appliquer" à une plus grande variété d'objets mathématiques (\*) ; un des buts de ce Traité est précisément de montrer comment l'emploi systématique de quelques structures bien choisies permet d'unifier et de simplifier considérablement un grand nombre de théories mathématiques.

La théorie des ensembles. Nous avons déjà parlé, à plusieurs reprises, de la notion de théorie non-contradictoire ; elle acquiert une importance toute particulière dès qu'on abandonne la croyance à la vérité absolue des axiomes. En effet, nous avons dit que la pensée rationnelle ne saurait concevoir d'objets dont une même propriété serait à la fois vraie et fausse ; l'expérience sensible ne nous présente jamais de tels objets, et tant que l'on admettait que les objets mathématiques et leurs propriétés nous étaient donnés au même titre que le monde extérieur il était tout à fait naturel de penser que, pas plus que les objets du monde extérieur, ils ne récelaient de possibilités de contradiction (et en fait, on ne songeait même pas à se poser une telle question). Il en est tout autrement lorsque les objets mathématiques sont conçus comme des créations de notre esprit, associés à des systèmes d'axiomes que nous avons toute liberté de choisir à notre gré ; les exigences de la pensée restant les mêmes, elle ne saurait héberger ces hôtes d'une nouvelle espèce que si elle est assurée qu'ils sont indemnes de tout germe de contradiction. En d'autres termes, pour avoir le droit de développer une théorie mathématique, il faut au préalable prouver

---

(\*) Ces deux exigences sont d'ailleurs assez difficilement conciliables, ce qui fait qu'il n'y a qu'un petit nombre de structures vraiment "bien faites", et méritant à ce titre le nom de "fondamentales".

que cette théorie n'est pas contradictoire ; c'est la seule restriction apportée à notre choix des axiomes, mais elle est d'importance.

Peut-on donner une telle preuve, et si oui, sur quoi la fonder ? Nous avons donné ci-dessus un exemple de réponse partielle à cette question, ramenant la non-contradiction d'une théorie à celle d'une autre. La méthode suivie dans cet exemple peut se formuler de façon générale comme suit ; si, en "traduisant" les axiomes d'une théorie  $\mathcal{E}$  comme il a été dit plus haut on obtient des théorèmes d'une théorie  $\mathcal{E}'$ , et si la théorie  $\mathcal{E}'$  n'est pas contradictoire, la théorie  $\mathcal{E}$  ne l'est pas non plus. Par cette méthode, on a effectivement pu ramener les unes aux autres les démonstrations de non-contradiction des ~~théorèmes~~ théories mathématiques classiques, de sorte que finalement on saurait démontrer qu'elles sont non-contradictaires si on savait le démontrer pour l'Arithmétique seule ; cette dernière apparaît ainsi comme le pilier sur lequel repose tout l'édifice mathématique.

Toutefois, pour "arithmétiser" de la sorte la Mathématique classique, on a recours à des modes de raisonnement d'un type nouveau sur lesquels il nous faut attirer l'attention. Prenons par exemple l'une des méthodes par lesquelles on démontre la non-contradiction de la théorie des nombres réels en supposant admise la non-contradiction de la théorie des nombres rationnels (Dedekind) ; la "traduction" des axiomes des nombres réels s'effectue en faisant correspondre à tout nombre réel  $x$  la totalité des nombres rationnels qui sont  $\geq x$  (\*) ;

---

(\*) Naturellement, pour que cette traduction ne comporte pas de cercle vicieux, il faut caractériser les ensembles de nombres rationnels qui correspondent aux nombres réels par des propriétés qui ne font pas intervenir ces derniers ; on peut par exemple prendre les suivantes : a) si un nombre rationnel appartient à un tel ensemble, tout nombre rationnel plus grand lui appartient aussi ; b) si, parmi les nombres rationnels qui sont au plus égaux à tous les nombres de l'ensemble, il y en a un plus grand que tous les autres, ce nombre appartient à l'ensemble. On reconnaîtra là sans peine une présentation un peu modifiée des "coupures" de Dedekind .

40

cette totalité, ou, comme on dit plus souvent, cet ensemble de nombres rationnels étant considéré comme un nouvel objet. Il convient d'insister sur le caractère "synthétique" de cette conception ; l'Analyse classique considère bien, elle aussi, des ensembles de nombres réels (par exemple l'ensemble des entiers, l'ensemble des nombres premiers, ou les intervalles) ; mais ils sont plutôt pensés comme "champs de variation" pour les nombres qui les "parcourent" ; de même, la Géométrie envisage souvent les courbes et surfaces comme "lieux" que "décrivent" les points de ces ensembles (encore que la conception "synthétique" d'un ensemble de points y apparaisse aussi assez fréquemment, notamment lorsqu'il s'agit de droites ou de plans) ; mais c'est peut-être dans la vie sociale qu'on trouve des démarches de la pensée qui présentent le plus d'analogie avec celle dont nous parlons : on y a l'habitude, en effet, de considérer des entités sociales telles qu'un peuple, un régiment, une association, un comité, comme distincts des individus qui les composent.

C'est précisément cet acte élémentaire de la pensée qui, depuis un demi-siècle, s'est révélé de plus en plus indispensable dans toutes les branches de la Mathématique moderne (et non seulement pour des buts limités comme des démonstrations de non-contradiction) : concevoir comme un nouvel objet un ensemble d'objets, caractérisés dans notre pensée par une propriété qui leur est commune et n'appartient qu'à eux. Cette opération peut d'ailleurs s'appliquer à toute sorte d'objets, matériels ou spirituels, mais elle intervient surtout lorsqu'il s'agit d'objets mathématiques ; à partir de ces derniers, elle permet de créer de nouveaux objets, qui ont entre eux et avec les objets d'où l'on est parti des relations auxquelles peuvent s'appliquer les règles du raisonnement ; en tenant compte des axiomes auxquels satisfont les objets mathématiques initiaux, on peut ainsi démontrer de nouvelles propositions vraies



41

s'appliquant non seulement à ces objets, mais aux ensembles qu'ils forment. Comme exemple très simple de telles propositions, citons la suivante, empruntée à l'Arithmétique (et résultant des axiomes de cette dernière) : dans tout ensemble d'entiers, il y a toujours un entier plus petit que tous les autres. Il serait facile de multiplier de tels exemples, et on conçoit donc l'enrichissement qu'apporte l'introduction de la notion d'ensemble dans les théories mathématiques classiques ; par ailleurs le lecteur constatera dans cet ouvrage à quel point elle est devenue, avec les notions qui s'y rattachent, telle que la notion générale de fonction, et celle (plus particulière) de correspondance biunivoque, la base fondamentale de toutes les mathématiques modernes. Il a d'ailleurs fallu, en vue de la variété des applications de ces notions, en codifier les principaux usages, et dégager des propositions générales, qui sont vraies sans qu'on fasse aucune hypothèse sur la nature des objets initiaux qui constituent les ensembles intervenant dans ces propositions : c'est ce qu'on appelle la théorie des "ensembles abstraits" .

Les paradoxes de la théorie des ensembles. Ce n'est pas ici le lieu d'entrer dans le détail de cette théorie, qui sera exposée au chap.II de ce Livre ; et nous n'avons dit quelques mots de la notion d'ensemble que pour en arriver aux difficultés logiques soulevées par cette notion, ce que l'on a appelé les "paradoxes" de la théorie des ensembles ; nous nous bornerons à deux de ces paradoxes.

En premier lieu, remarquons qu'~~ex~~<sup>a</sup> priori, un ensemble d'objets est le plus fréquemment distinct des objets qui le composent ou comme on dit plus souvent, qui appartiennent à l'ensemble (par exemple l'ensemble des entiers n'est pas un entier) ; mais il peut aussi être identique à l'un d'eux (par exemple, l'ensemble de toutes les abstractions est une abstraction).

Considérons alors l'ensemble E de tous les ensembles qui n'appartiennent pas à eux-mêmes, et cherchons si E appartient ou non à lui-même.

Si E appartient à lui-même, il n'appartient pas à lui-même par définition (puisque les objets composant E sont les ensembles n'appartenant pas à eux-mêmes) ; si au contraire E n'appartient pas à lui-même, il appartient à lui-même par définition. Nous sommes donc contraints de conclure que E appartient à lui-même et n'appartient pas à lui-même à la fois, autrement dit, nous obtenons une contradiction.

Devant ce résultat extraordinaire, on peut penser que la définition de E est telle qu'elle le rend absolument inconcevable pour l'intuition<sup>(\*)</sup>, et par suite qu'il n'est pas permis de faire un raisonnement quelconque sur cet ensemble. Mais le second exemple que nous allons donner concerne au contraire l'ensemble des objets mathématiques les plus intuitifs, les nombres entiers. Désignons en effet par A l'ensemble des entiers qui ne peuvent être définis par une phrase de moins de cent mots français<sup>(\*\*)</sup> ; il existe des entiers qui appartiennent à cet ensemble, car les phrases de moins de cent mots français sont en nombre fini , à plus forte raison celles de ces phrases qui définissent un entier ; il ne peut donc y avoir qu'un nombre fini d'entiers définis par de telles phrases. Il y a par suite dans A un entier n plus petit que tous les autres ; d'autre part, nous pouvons définir n par la phrase suivante : "n est le plus petit entier de l'ensemble des entiers qui ne peuvent être définis par une phrase de moins de cent mots français" ;

---

(\*) Parmi les objets qui composent E figurent en effet tous les ensembles d'entiers, tous les ensembles d'ensembles d'entiers, tous les ensembles d'ensembles d'ensembles d'entiers, et ainsi de suite ; or, on a déjà une très grande peine à imaginer seulement ce que peut être un ensemble d'ensembles d'ensembles d'ensembles d'entiers !  
(\*\*) Nous entendons de façon précise par "phrase définissant un entier" une phrase énonçant une propriété qui appartienne à un entier et un seul, qu'elle caractérise donc complètement.

43

cette phrase ayant moins de cent mots, n n'appartient pas à A par définition. Nous arrivons donc de nouveau à un résultat absurde, puisque n appartient et n'appartient pas à A à la fois.

Que faut-il penser de ces raisonnements déconcertants ? Il n'est pas besoin de beaucoup d'habitude des démonstrations mathématiques pour sentir qu'ils ne sont pas du type ordinaire de ceux qu'on rencontre dans ces démonstrations ; et cela est vrai aussi bien de la Mathématique classique que des théories modernes les plus variées. Il s'agit donc là d'un véritable dévergondage de la pensée mathématique, montrant simplement qu'il est nécessaire de fixer à cette dernière des bornes qu'elle ne doit pas dépasser. Mais les difficultés commencent lorsqu'il s'agit de savoir quelques bornes il faut imposer, et pour quelles raisons.

Comme c'est la notion d'ensemble qui est à la racine du mal, on peut chercher, non à s'en passer complètement, ce qui ne se pourrait sans renoncer à la quasi-totalité des mathématiques, mais à la circonscrire plus nettement, en restreignant ses possibilités d'application aux cas qui se présentent effectivement dans les raisonnements mathématiques et ne conduisent apparemment pas à des contradictions, tout en interdisant par ailleurs son emploi dans des raisonnements du genre de ceux qui mènent aux "paradoxes". On aboutit ainsi, par exemple, au système de règles connues sous le nom d'"axiomes de Zermelo-Fraenkel"<sup>(\*)</sup> ; d'après ces règles, on a le droit entre autres, de considérer l'ensemble formé de deux objets quelconques ; un ensemble étant "donné" (c'est-à-dire que les règles permettent de le considérer), on a aussi le droit de considérer l'ensemble de tous les ensembles contenus dans l'ensemble donné (\*\*);

(\*) Voir A. FRAENKEL, Einleitung in die Mengenlehre, § 16.

(\*\*) On dit qu'un ensemble A est contenu dans un ensemble B si tout objet appartenant à A appartient aussi à B.

mais on ne peut parler de l'ensemble paradoxal A considéré plus haut, car la propriété qui définit les entiers qui le composent n'est pas d'un genre admis par le système de règles.

En adoptant ce point de vue, on peut sauvegarder toute la Mathématique actuelle, qui ne renferme pas de raisonnement n'obéissant pas aux règles précédentes. Mais les mathématiciens "intuitionnistes" laissent beaucoup moins de latitude à la pensée mathématique ; acceptant la donnée des nombres entiers comme une intuition fondamentale de l'esprit (voir § 3), ils proscrivent tout raisonnement qui ne se rattache pas immédiatement à cette intuition, ce qui les conduit, non seulement à s'interdire l'usage de certaines règles de logique et à restreindre considérablement la notion d'ensemble, mais encore à rejeter toute une partie des théories mathématiques actuelles, et à refondre entièrement les démonstrations de celles qu'ils conservent, ce qui a d'ailleurs pour effet de compliquer singulièrement ces dernières (\*).

Aucune de ces deux conceptions n'est à l'abri de la critique. Nous avons dit plus haut pourquoi, à notre avis, la base que les intuitionnistes donnent à leur édifice, la théorie des entiers, ne nous semblait pas posséder le privilège qu'ils lui attribuent ; par ailleurs, tout mathématicien soucieux de la généralité et de l'élégance de sa science trouvera abusive la mutilation qu'on veut lui faire subir, sous prétexte d'échapper aux véritables calembours, sans rapport avec les raisonnements mathématiques usuels, que sont les "paradoxes".

D'un autre côté, si les axiomes de Zermelo-Fraenkel ne présentent pas cet inconvénient, ils apparaissent comme des décrets arbitraires :

---

(\*) Nous ne pouvons ici entrer dans le détail des thèses intuitionnistes. On en trouvera par exemple l'exposé dans le livre cité de Fraenkel, ou dans A. HEYTING, *Mathematische Grundlagenforschung*.

si vraiment les objets mathématiques ont quelque existence, on ne voit pas de raison profonde qui doit restreindre la liberté de penser aux ensembles que forment ces objets ; ou plutôt on voit trop que ces restrictions ne sont que des expédients, introduits uniquement en vue d'éviter à tout prix les ensembles paradoxaux, mais qui ne satisfont nullement l'esprit (\*).

Enfin et surtout, nous n'avons nullement répondu à la question préalable, signalée plus haut, que pose la conception des objets d'une théorie mathématique : la preuve que cette théorie est exempte de contradiction. Il semble même que l'utilisation de la théorie des ensembles pour certaines démonstrations partielles de non-contradiction remette en question la validité de ces démonstrations. En tout cas, il faudrait prouver que l'usage des axiomes de l'Arithmétique et de la théorie des ensembles (restreinte d'une manière ou d'une autre, de façon à éviter les "paradoxes") ne peut entraîner de contradiction. Or, jusqu'ici on n'a donné de ce fait aucune preuve convaincante, et il est même fort douteux qu'on puisse en donner une qui ne soit pas plus ou moins une pétition de principe (\*\*).

---

(\*) Pour les lecteurs qui ont déjà quelque connaissance de la théorie des ensembles, citons en particulier l'objection suivante, qui s'apparente avec ce qu'on appelle le "paradoxe de Skolem" (cf. Fraenkel, loc.cit., p.333) : il résulte des axiomes de Zermelo-Fraenkel que les seuls ensembles d'entiers que l'on puisse jamais considérer individuellement sont en infinité dénombrable, car les propriétés qui sont admises par ces axiomes pour définir un ensemble d'entiers son elles-mêmes en infinité dénombrable. D'autre part, un des axiomes permet par contre de considérer l'ensemble de tous les ensembles d'entiers, et un théorème classique de Cantor (qu'on peut démontrer dans le système d'axiomes de Zermelo-Fraenkel) prouve que cet ensemble a une puissance strictement supérieure au dénombrable.

(\*\*) Sur cette question, voir notamment les récents travaux de Gödel, résumés par exemple par J. Herbrand, Journ. de Crelle, t. 166 (1932)

La mathématique formalisée. Ainsi, il semble bien que, de ce long effort pour comprendre la nature et la portée du raisonnement mathématique, nous ne puissions tirer que des conclusions décevantes. Tout était simple dans notre conception "naïve" initiale : la mathématique était une science "exacte", s'occupant d'"objets" bien caractérisés. Mais lorsque nous avons voulu voir ces objets de plus près, ils se sont dérobés dans une brume toujours plus impénétrable ; et, bien loin d'être le langage scientifique universel s'imposant à tout esprit de façon inéluctable, la mathématique a fini par nous apparaître comme variable d'un mathématicien à l'autre, suivant l'"école" à laquelle il se rattache et ses goûts personnels, qui lui font accepter ou rejeter telle ou telle théorie.

Tout n'est cependant pas perdu, et nous allons voir qu'il reste un moyen d'échapper à toutes les difficultés que nous avons rencontrées ci-dessus : il réside dans ce qu'on peut appeler la conception formelle (ou formaliste) des mathématiques.

Si nous avons vainement cherché à éclaircir la notion d'objet mathématique, c'est qu'il s'agit là d'êtres métaphysiques, qui n'ont pas d'existence objective en dehors de notre pensée ; de pareilles controverses ne surgiraient pas à propos d'objets de l'expérience sensible. Ne peut-on donc ramener la Mathématique sur le terrain solide de toutes les sciences de la nature, en abandonnant comme ces dernières les spéculations métaphysiques incapables de conduire à aucun résultat positif ? Ne peut-on concevoir une Mathématique sans objets mathématiques (au sens où nous avons entendu ces mots jusqu'ici) ?

A première vue, cette idée semble tout simplement absurde, car il ne saurait y avoir de science sans quelque objet auquel elle s'applique ;

et si nous bannissons les "objets mathématiques", quels seront donc les objets dont s'occupera le mathématicien ?

Pour échapper à ce dilemme, rappelons-nous que les "objets mathématiques" d'une théorie n'interviennent dans la théorie que par l'intermédiaire des "relations primitives" entre variables du type de ces objets, et des axiomes formés à partir de ces relations primitives par les 5 procédés fondamentaux ; c'est là un fait reconnu en substance depuis fort longtemps par tous les mathématiciens ayant un peu réfléchi à leur science, puisque déjà Pascal, dans ses observations sur l'"Esprit géométrique" insiste sur la nécessité, pour raisonner correctement, de "substituer mentalement la définition à la place du défini" partout où ce dernier intervient. Les véritables objets de la Mathématique, ce ne sont donc pas les "objets mathématiques" dont nous avons parlé jusqu'ici, mais bien les relations primitives et les relations complexes formées à l'aide de relations primitives.

Mais, dira-t-on, dans les relations primitives il figure des variables, et ces dernières "remplacent" les objets mathématiques auxquels nous nous trouvons ainsi ramenés. C'est ici que se place le tournant décisif qui conduit à la mathématique formalisée : il consiste à admettre que, contrairement à ce qui vient d'être dit, les variables ne "remplacent" rien du tout, et ne "représentent" rien d'autre qu'elles-mêmes, c'est-à-dire des lettres auxquelles nous n'attachons aucune signification autre que le fait que ce sont des dessins d'une certaine forme tracés sur le papier, et qu'il importe seulement de savoir distinguer les uns des autres. Ces lettres se combinent suivant des règles déterminées avec d'autres signes pour constituer les relations primitives (par exemple les signes  $x, y, +, 1, =$ , se combinent dans la relation  $y=x+1$ ) ; ces dernières se combinent ensuite entre elles par les

par les 5 procédés fondamentaux pour former toutes les relations qui interviennent dans une théorie (\*). Naturellement, les signes autres que les variables qui entrent dans les relations primitives, doivent eux aussi être considérés comme ayant perdu toute signification, et n'étant plus que des dessins d'une forme déterminée ; il en est de même des mots "il existe", "quel que soit", "et", "ou" qui peuvent d'ailleurs avantageusement être remplacés par des signes plus condensés (dans ce Livre même, nous remplacerons très souvent "il existe" par  $\exists$ , "quel que soit" par  $\forall$  ; les logiciens écrivent aussi  $\&$  à la place de "et",  $\vee$  à la place de "ou"). Enfin, le mot "vrai" n'a plus lui-même qu'un sens purement conventionnel, et sert uniquement à distinguer certaines propositions (certains logiciens le remplacent d'ailleurs par le signe  $\vdash$ ) ; quant aux "règles du raisonnement", elles n'ont plus que la valeur de conventions arbitraires.

Le lecteur qu'étourdirait un peu cette fuite éperdue de toute la mathématique dans le domaine du formalisme et de la convention, pourra fixer ses idées en comparant la mathématique formalisée à un jeu tel que le jeu d'échecs : les pièces du jeu sont les variables et les signes qui servent à former les relations primitives, ainsi que ceux qui relient ces dernières dans l'application des 5 procédés fondamentaux ; les situations sur l'échiquier correspondent aux relations (primitives ou complexes) ; les règles du raisonnement aux règles du jeu qui permettent de passer d'une situation à une autre ; enfin les mots "relation", "proposition", "vrai", correspondent aux termes conventionnels par lesquels on désigne certaines situations ou certains passages d'une situation à une autre, comme "roque", "échec", "mat".

(\*) Il semble à première vue subsister une difficulté dans cette conception, car si elle élimine la notion d'"objet variable", on ne voit pas immédiatement comment elle peut se passer de celle d'objet explicité. Nous verrons au chap. I comment on résout cette difficulté, en remplaçant les objets explicités par les propriétés qui les caractérisent.



C'est ce point de vue que nous adopterons dans les chapitres qui vont suivre ; il s'applique, non seulement aux théories mathématiques classiques, mais aussi à la théorie des Ensembles, où la relation primitive " $x \in X$ " signifie, dans la conception "naïve" : l'objet  $x$  appartient à l'ensemble  $X$  ; quant aux axiomes de la Théorie des Ensembles, ils correspondent en substance au système de Zermelo-Fraenkel ; leur choix est naturellement arbitraire dans une large mesure (comme celui de tout système d'axiomes) et est guidé par le souci de comprendre dans la mathématique formalisée toute la mathématique actuelle. Ces axiomes et leurs principales conséquences seront exposés aux chapitres II et III, après qu'on aura, dans un premier chapitre, énoncé avec tout les détails nécessaires, et en se plaçant au point de vue formaliste, les règles de formation des relations, et les règles du raisonnement. Nous montrerons aussi au chap.II, comment la Théorie des Ensembles ainsi conçue est le substratum de toutes les théories mathématiques ultérieures ; au chap.III et IV, nous développerons deux de ces théories, fondamentales pour toute la suite du Traité : l'Arithmétique élémentaire et la théorie des ensembles ordonnés.

Toutes les difficultés liées à la conception des "objets mathématiques" s'évanouissent avec ces derniers lorsqu'on se place au point de vue formaliste : il ne subsiste plus en Mathématique que les objets matériels que sont les relations, considérés comme assemblages de signes, et ils ne peuvent être l'occasion de controverses métaphysiques, pas plus que ne peuvent l'être (pour suivre notre comparaison) les pièces du jeu d'échecs. Les "paradoxes" où venait achopper la théorie des Ensembles "naïve" disparaissent également, soit parce qu'ils font intervenir des relations dont la formation n'est pas conforme aux règles.

soit parce que les axiomes qui permettraient de les formuler ne figurent pas dans le système choisi. Enfin, l'obligation de prouver par avance la non-contradiction d'une théorie n'a plus de raison d'être, puisqu'il n'est plus nécessaire de s'appuyer sur l'"existence" dans la pensée des "objets mathématiques". Le fait qu'à un moment donné de son développement historique, une théorie contient une proposition vraie dont la négation est également vraie est un fait d'ordre expérimental ; si on constate un jour un tel fait, nous avons vu plus haut (§ 3) comment on pourra l'interpréter, en supprimant un ou plusieurs des axiomes de la théorie, qui deviendront des propositions fausses dans la nouvelle théorie ; naturellement, il y aura lieu aussi, dans ce cas, de reprendre toutes les propositions vraies de la théorie initiale, pour voir si elles restent encore vraies dans la théorie modifiée.

L'éventualité d'une contradiction dans une théorie mathématique classique nous paraît d'ailleurs fort improbable, au même titre qu'une brusque modification d'une loi naturelle, et pour la même raison empirique, à savoir qu'il ne s'en est jamais présenté jusqu'ici ; il serait évidemment intéressant de posséder une preuve absolument convaincante de non-contradiction, mais nous avons dit plus haut que la possibilité d'une telle preuve est, elle aussi, très douteuse. Quoi qu'il en soit, il est loisible au mathématicien, à l'abri du formalisme, de se désintéresser de cette question en l'abandonnant aux logiciens, sans en être le moins du monde gêné dans le développement de ses théories ; c'est l'attitude qui sera la nôtre.

Mathématique et réalité. Il est sans doute de nombreux et d'excellents esprits, parmi les mathématiciens, et surtout parmi les physiciens et chimistes qui utilisent les théories mathématiques, à qui la formalisation des mathématiques paraîtra une solution de facilité, un refuge

commode dans la tour d'ivoire de l'abstraction, une défaite mal dissimulée devant le grand problème des rapports de la mathématique et du monde extérieur. Si justifiée que paraisse cette opinion au premier abord, nous croyons cependant qu'elle ne repose que sur une confusion entre deux questions bien distinctes.

Il est certes extrêmement commode au mathématicien de raisonner, ou d'avoir l'illusion de raisonner, sur des "objets" qu'il a l'impression d'analyser, de disséquer, de combiner dans sa pensée comme le chimiste dissocie ou fait réagir des substances matérielles dans ses appareils, et qu'une longue habitude finit par douer, à ses yeux, d'une "existence" aussi indiscutable que celle des objets de l'expérience sensible ; l'esprit humain est naturellement "ontologique", et se sent désorienté s'il ne peut suivre la pente invincible qui le porte à penser par "êtres" et "attributs" . De même, chacun sait combien une figure peut faciliter le raisonnement dans un problème de Géométrie ; mais tout le monde admet aussi que la figure n'ajoute rien d'essentiel au raisonnement ; elle n'est qu'un moyen d'en concentrer plus nettement les divers éléments dans la pensée et d'en rendre le déroulement plus clair ; et il est utile, le cas échéant, de s'en passer volontairement afin de pouvoir vérifier que la démonstration est bien conforme à la stricte logique, et non basée sur des intuitions trompeuses suggérées par la figure. Tel est, à notre avis, le rôle que jouent les "objets mathématiques" dans la pensée du mathématicien : ils constituent une fiction très propice à la cristallisation de l'intuition des problèmes étudiés, intuition sans laquelle aucune découverte n'est possible ; mais, comme nous l'avons vu plus haut, l'intuition que nous avons de ces "objets", c'est en réalité l'intuition de leurs propriétés. Le développement des théories mathématiques modernes vient d'ailleurs

confirmer le bien-fondé de cette conception de la psychologie du mathématicien, en montrant combien cette intuition diffère de l'intuition des objets sensibles ; les propriétés de certains des "êtres" qui interviennent dans ces théories, comme par exemple l'espace de Hilbert ou les nombres p-adiques, sont telles qu'elles ne permettent de s'en faire aucune image, même grossièrement approchée, par analogie avec des êtres du monde extérieur ; cela n'empêche nullement les spécialistes de ces questions de se forger, à leur propre usage, une intuition parfaitement utilisable de ces propriétés. Si nous insistons sur ce point, c'est que tout en reconnaissant l'intérêt pratique de la conception "ontologique" des mathématiques, nous croyons qu'il importe d'avoir une idée aussi claire que possible de ce qu'elle recouvre dans la pensée, afin d'éviter de se laisser arrêter par de pseudo-problèmes métaphysiques comme ceux qui avaient paru nous barrer la route : le formalisme n'est autre que la réaction de défense qui permet à l'esprit de ne pas être pris à son propre jeu, et dominé par les fantômes qu'il a lui-même évoqués.

Bien entendu, de même qu'il serait absurdement pédantesque, sous le prétexte d'éviter des conclusions intuitives erronées, de bannir systématiquement les figures d'un livre de Géométrie, de même, dans ce Traité, à l'exception des chapitres I et II du Livre I, les démonstrations seront présentées dans un langage dont l'interprétation naturelle sera l'interprétation "ontologique" ; mais on aura donné, dans les chapitres précités, la clé permettant, si nécessaire, d'interpréter les mêmes démonstrations dans la conception formaliste.

Quelle que soit la position que l'on adopte dans ce débat sur l'existence des "objets mathématiques", elle n'a aucune répercussion sur le déroulement des théories mathématiques existantes, puisqu'il ne s'agit que de leur interprétation mentale. C'est pourquoi, contrairement à ce

qu'on pourrait croire à première vue, elle n'influe pas beaucoup plus sur le problème de l'"application" des mathématiques aux phénomènes expérimentaux. Il en serait autrement si la conception "ontologique" des mathématiques permettait de donner à ce problème une solution satisfaisante ; mais il faudrait se mettre volontairement des ceillères pour oser déclarer qu'il en est bien ainsi. Sans doute, - et nous l'avons déjà dit - les mathématiques à leur origine et sous leur aspect le plus élémentaire, reposent sur l'expression idéalisée de quelques vérités expérimentales très simples ; et il est peu de théories mathématiques, même parmi les plus modernes, où l'on ne puisse par quelque biais rattacher les axiomes à un fait d'expérience courante ; mais ce rattachement suppose le plus souvent un tel travail d'abstraction et d'élaboration que l'esprit non prévenu serait bien en peine de reconnaître le fait en question sous les axiomes qui lui correspondent. En outre, même une fois admise cette base expérimentale des axiomes mathématiques (que personne ne songe sérieusement à nier), le plus difficile reste à faire ; car il s'agit d'expliquer comment, travaillant sur des bases expérimentales déjà fortement idéalisées, et avec des méthodes qui ne doivent rien à l'expérience, le mathématicien parvient à montrer des mécanismes qui s'adaptent si merveilleusement à l'interprétation de phénomènes tout autres que ceux dont on était parti pour formuler les axiomes. Pourquoi, dans un monde expérimental où tout est fini, l'idée mathématique de l'infini se révèle-t-elle si féconde ? D'où vient que le Calcul différentiel est la seule clé capable de relier les quelques hypothèses extrêmement simples que sont les lois de la Mécanique, avec des phénomènes aussi complexes que le mouvement d'un gyroscope ou celui du système solaire ? Encore prenons-nous là des exemples très classiques ;

mais la Physique moderne nous offre des coïncidences autrement troublantes, puisqu'on y voit des théories mathématiques développées depuis longtemps sans le moindre souci d'applications, comme la géométrie des espaces de Riemann, la représentation linéaire des groupes ou la théorie des opérateurs de l'espace de Hilbert, se trouver être les outils particulièrement adaptés à la théorie de la Relativité ou à la Physique de l'atome.

Trouverons-nous un jour le "pourquoi" de ces phénomènes, ou est-ce là une question inaccessible à l'esprit humain ? Pour le moment, le mystère reste entier : il semble que l'on soit en présence de quelque chose d'analogue aux "préadaptations" si fréquentes (et si inexplicables elles aussi) en Biologie, où l'on voit se développer de façon totalement indépendante deux chaînes de phénomènes, dont l'aboutissement se trouve être deux organismes parfaitement adaptés pour former des parties complémentaires d'un même tout et fonctionner en une coopération harmonieuse.

En tout cas, vis-à-vis de ces problèmes, on voit qu'on ne perd rien en renonçant à la conception "naïve" des mathématiques, puisque celle-ci s'avère incapable de les résoudre ; et si la conception formaliste n'apporte certes aucune nouvelle lumière sur la question, du moins le mathématicien peut-il l'admettre (en raison de ses avantages intrinsèques) sans avoir l'impression, ce faisant, de tourner le dos délibérément à la réalité extérieure.

Si l'on nous permettait une comparaison quelque peu triviale, nous dirions que la Mathématique nous apparaît, dans ses rapports avec le réel comme un vaste magasin de confections, où les vêtements les plus divers que sont les théories mathématiques sont prêts à venir se mouler sur les faits expérimentaux ; quant aux "objets mathématiques" ,

ce sont les mannequins : ils ne font pas partie intégrante des vêtements dont on les couvre, et ne leur ajoutent rien, sinon une présentation plus commode. Seulement, pour poursuivre notre image, il faudrait admettre que notre tailleur est un artisan~~ç~~ bien étrange, qui se serait borné jadis à prendre quelques mesures hâtives sur des rustres mal dégrossis ; puis, laissant aller son imagination, il aurait accumulé dans ses armoires les parures les plus somptueuses, sans le moindre souci de la clientèle possible ; et voici que, comme dans un conte de fées, ce sont ces atours oubliés qui se trouvent combler les désirs des plus raffinées de nos modernes élégantes.

Il est temps de laisser maintenant le lecteur pénétrer lui-même dans la boutique magique ; ce qui précède n'a eu d'autre but que de l'amener sans heurts jusqu'à son seuil, en le préparant à ce qu'il y va trouver ; à lui de dire si nous y avons réussi.

---