LIVRE I
THEORIE DES ENSEMBLES
CHAPITRE I
LOGIQUE MATHEMATIQUE
CHAPITRE II
THEORIE DES ENSEMBLES ABSTRAITS

Rédaction n° 057

Nombre de pages : 150

Nombre de feuilles : 150

Livre I Th. des Ensembles
Chap I. (Etat 3)
Chap II (Etat 3)
57

A 57 2

LIVRE I

THÉORIE DES ENSEMBLES

CHAPITRE I (Etat 3)

LOGIQUE MATHÉMATIQUE

Sommaire

LIVRE I

THEORIE DES ENSEMBLES

CHAPITRE I (Etat 3)

LOGIQUE MATHÉMATIQUE

§ 1. La formation des relations.

Comme nous l'avons dit dans l'Introduction, le but des chapitres I et II est, en premier lieu, de définir ce qu'est la mathématique formalisée et d'en exposer les règles ; en second lieu, on y montrera comment le reste de ce Traité pourrait, si on le désirait (et afin de vérifier la correction de tel ou tel raisonnement) être tout entier "traduit" dans le langage formalisé.

1. Les signes mathématiques. Un texte mathématique formalisé se compose essentiellement d'une succession de combinaisons de certains signes, les signes mathématiques ; ces combinaisons sont appelées relations vraies et sont des cas particuliers de combinaisons dites relations. Les relations ne sont pas des combinaisons quelconques des signes mathématiques ; leur constitution est régie par certaines règles dites règles de formation ; d'autre part la succession des relations vraies obéit à d'autres règles, les règles de déduction ; le plus souvent un texte mathématique formalisé comprendra aussi un commentaire (en langage ordinaire) expliquant suivant quelles règles se fait le passage de chaque relation vraie à la suivante ; on peut en supprimer tout ou partie si on juge le lecteur suffisamment exercé pour retrouver lui-même sans erreur possible la justification de chacun de ces passages. L'ensemble des règles de formation et de déduction est ce que nous appelons la logique mathématique ; le chap.I est essentiellement consacré à leur exposé ; ce n'est qu'au chap.II que commenceront les mathématiques formalisées proprement dites.

Les signes mathématiques indispensables pour la mathématique formalisée sont de deux sortes :

1° les arguments, qui sont des signes dont la forme peut être choisie arbitrairement par le mathématicien ; le plus souvent, on prend des lettres de divers alphabets, affectés éventuellement d'indices ou d'accents ;

2° les signes de séparation et les signes de liaison, qui ont une forme fixée une fois pour toutes. Comme signes de séparation, nous n'emploierons que les parenthèses (). Les signes de liaison sont d'une part, ceux qui interviennent dans la formation des relations primitives (voir chap.II), et les 5 signes suivants, qui servent à la formation des relations complexes :

- le signe de négation, constitué par une barre horizontale surlignant une relation ;
- les mots

et ou

- les signes transfinis ou quantificateurs

$\forall$ $\exists$

($\forall$ x) se lit "quel que soit x" , ($\exists$ x) se lit "il existe x tel que" .

A côté de ces signes fondamentaux, nous rencontrerons par la suite un très grand nombre d'autres signes, les signes abréviateurs. Leur usage n'est pas strictement indispensable dans la Mathématique formalisée, et ils n'ont qu'un rôle de commodité ; aussi seront-ils décrits chacun en son lieu et expliquerons-nous au fur et à mesure comment chacun d'eux peut être utilisé.

<u>2. Les règles de formation</u>. Les règles que nous allons formuler ne nous permettrons pas encore d'écrire dans ce chapitre une seule relation ; elles sont en quelque sorte <u>relatives</u>, c'est-à-dire qu'elles affirment que, <u>si</u> certains assemblages de signes mathématiques sont des relations, d'autres assemblages formés à l'aide des premiers suivant des procédés déterminés sont encore des relations. Dans le chap.II, nous poserons comme règle que certains assemblages de signes sont des relations (les <u>relations primitives</u>) ; les règles de formation nous donneront alors le droit d'affirmer qu'une foule d'autres assemblages sont aussi des relations.

Pour énoncer de manière commode les règles de formation, nous introduirons les notions de <u>signe de remplacement</u> et de <u>schéma de relation</u>. Pour faire comprendre l'intérêt de ces notions, donnons comme exemple l'énoncé d'une des règles de formation : lorsque deux assemblages de signes sont des relations, l'assemblage obtenu en écrivant successivement une de ces relations, mise entre parenthèses, puis le signe "et", puis la seconde relation, mise entre parenthèses, est encore une relation. Il est beaucoup plus rapide d'énoncer cette règle ainsi : chaque fois que, dans l'assemblage "R et S" on remplace les lettres R,S par deux relations (mises entre parenthèses), l'assemblage obtenu est une relation. On dira que "R et S" est un <u>schéma de relation</u>. Plus généralement, nous allons nous servir, dans ce chapitre et le suivant, et afin d'éviter d'encombrantes circonlocutions, de signes <u>distincts des signes mathématiques</u>, les <u>signes de remplacement</u>, dont l'usage sera précisé chaque fois que nous introduirons un nouveau type de ces signes ; ces signes entreront, de concert avec des signes mathématiques, dans des assemblages qui <u>ne seront pas</u> des relations, mais qui <u>deviendront</u> des relations chaque fois qu'on remplacera chacun des signes

6

d'un tel assemblage par un assemblage de signes mathématiques d'un type précisé par les conventions attachées au signe de remplacement considéré.

Dans ce n° nous utiliserons deux sortes de signes de remplacement : les capitales italiques grasses et les minuscules grecques grasses. Nous dirons qu'un assemblage où figurent de tels signes et des signes mathématiques est un <u>schéma de relation</u> s'il devient une relation chaque fois qu'on substitue à chacune des capitales italiques grasses une relation mise entre parenthèses (les relations substituées aux diverses lettres étant distinctes ou non) et à chacune des minuscules grecques grasses un argument (les arguments substitués aux diverses lettres étant distincts ou non). Il est évident que l'assemblage formé <u>d'une seule</u> capitale italique grasse est un schéma de relation.

Bien entendu, nous nous abstiendrons soigneusement, dans ce chapitre et le suivant, de prendre des arguments qui seraient des capitales italiques grasses, ou des minuscules grecques grasses, afin d'éviter toute confusion.

Il importe en effet d'avoir bien présente à l'esprit la distinction très nette entre signes de remplacement et signes mathématiques ; les premiers, comme leur nom l'indique, remplacent les objets sensibles que sont les assemblages de signes mathématiques, et servent uniquement à expliquer de façon plus rapide et plus claire des modes opératoires applicables à ces objets. Au contraire, dans la Mathématique formalisée, nous avons vu que les arguments ne remplacent aucun objet, et que les relations ne sont pas davantage des indications abrégées d'opérations effectuées sur d'autres objets.

Tous les raisonnements qui vont être faits ci-dessous sur des schémas de relation <u>ne sont donc pas</u> des démonstrations mathématiques, mais en quelque sorte des <u>schémas de démonstration</u> :

ils deviennent des démonstrations lorsqu'on substitue des relations et des arguments à toutes les lettres de remplacement qui y figurent ; on pourrait entièrement s'en passer et refaire la démonstration chaque fois que se présenteraient des relations formées suivant les schémas considérés.

Cela étant, les règles de formation consistent à dire que les 5 assemblages suivants sont des <u>schémas de relation</u> (dits <u>fondamentaux</u>) :

$\overline{\overline{R}}$ R et S   R ou S $(\forall \xi)R$ $(\exists \xi)R$

D'après la définition même des schémas de relation, on obtient encore des schémas de relation en remplaçant dans les précédents les lettres R et S par d'autres capitales italiques grasses quelconques, la lettre ξ par une minuscule grecque grasse quelconque.

De ces schémas, on peut aussitôt en déduire une foule d'autres en les "combinant" grâce à la remarque suivante, qui découle aussitôt de la définition d'un schéma de relation : si, dans un tel schéma, on remplace une capitale italique grasse par un schéma de relation, mis entre parenthèses, on a encore un schéma de relation. Par exemple

$$(\exists \xi)(((\overline{\forall \xi)(R \text{ ou } S}))\ \text{et}\ ((\exists \eta)T))$$

est un schéma de relation.

Chaque fois que le mathématicien écrira une relation, il devra être capable de prouver, le cas échéant, qu'il a bien le droit de l'écrire, en en supprimant les signes abréviateurs (suivant des règles qui seront expliquées plus loin), puis, cela fait, en indiquant, pas à pas, comment la relation est obtenue à partir de relations primitives par application des règles de formation.

Introduisons maintenant l'importante distinction entre arguments <u>libres</u> et arguments <u>liés</u> dans une relation (un argument étant nécessairement l'un ou l'autre.). Nous nous bornerons pour le moment aux relations ne contenant pas de signe abréviateur. Il suffit alors, d'après ce qui précède, de savoir d'une part, quels sont les arguments libres dans une relation primitive, et d'autre part quels sont les arguments libres dans une relation obtenue en remplaçant, dans un des 5 schémas ci-dessus, les capitales italiques grasses par des relations dont on sait déjà reconnaître les arguments libres. On dispose pour cela des règles suivantes :

1° Tous les arguments d'une relation primitive sont libres.

2° Dans une relation formée suivant le schéma $\overline{R}$, les arguments libres sont les mêmes que dans la relation qu'on substitue à R .

3°-Dans une relation formée suivant l'un des schémas "R et S" , "R ou S" , les arguments libres sont ceux qui sont libres dans <u>l'une au moins</u> des relations qu'on substitue à R et à S .

4° Dans une relation formée suivant l'un des schémas ($\forall \xi$)R , ($\exists \xi$)R , les arguments libres sont ceux qui sont libres dans la relation qu'on substitue à R , et qui sont <u>distincts</u> de l'argument qu'on substitue à ξ .

Nous pouvons maintenant définir une <u>proposition</u> comme une relation dont tous les arguments sont <u>liés</u>. Lorsqu'une relation ne contient qu'<u>un seul</u> argument libre, on dit souvent que c'est une <u>propriété</u> de cet argument.

3. <u>Relations synonymes</u>. Certaines relations sont dites <u>synonymes</u> d'autres relations en raison de leur formation ; nous allons énumérer des règles qui permettent de dire qu'une relation est synonyme d'une autre. La plupart de ces règles expriment qu'une relation formée suivant un certain schéma contenant des lettres de remplacement est synonyme d'une relation formée suivant un autre schéma contenant ces mêmes lettres, lorsque la substitution de relations et d'arguments à

ces lettres de remplacement satisfait à certaines conditions ; lorsqu'il n'y a aucune condition nous exprimerons simplement la règle en disant que les deux <u>schémas</u> sont synonymes.

On a en premier lieu les règles suivantes :

(s1) Si dans une relation, on remplace un argument <u>lié</u> par un argument distinct des autres arguments de la relation, la relation obtenue est synonyme de la première.

(s2) Le schéma $\overline{\overline{R}}$ est synonyme de R (règle de la double négation).

(s3) Le schéma $\overline{\overline{R} \text{ et } \overline{S}}$ est synonyme de "R ou S" .

(s4) Le schéma $\overline{(\forall \xi)\overline{R}}$ est synonyme de $(\exists \xi)R$.

(s5) Le schéma "R et R" est synonyme de R .

(s6) Le schéma "R et S" est synonyme de "S et R" .

(s7) Le schéma "R et (S et T)" est synonyme de "(R et S) et T".

(s8) Le schéma $(\forall \xi)((\forall \eta)R)$ est synonyme de $(\forall \eta)((\forall \xi)R)$

(s9) Le schéma "R ou (S et T)" est synonyme de "(R ou S) et (R ou T)".

(s10) La relation formée suivant le schéma $(\forall \xi)$ (R ou S) (resp. $(\forall \xi)$(R et S)), est synonyme de la relation formée suivant le schéma "R ou $(\forall \xi)$S" (resp. "R et $(\forall \xi)$S" lorsque ξ est remplacé par un argument qui est lié dans la relation qu'on substitue à R ou qui n'y figure pas.

Un second groupe de règles affirme qu'une relation est synonyme d'une autre <u>si</u> on sait déjà qu'une troisième relation est synonyme d'une quatrième, ces deux dernières intervenant dans la formation des deux premières :

(s11) Si une relation est synonyme d'une autre, cette dernière est synonyme de la première (on peut donc dire que deux relations sont synonymes sans préciser l'ordre dans lequel on les considère).

(s12) Si deux relations sont synonymes d'une même troisième, elles sont synonymes.

(s13) Les relations formées suivant les schémas $\overline{R}$, $\overline{S}$ sont synonymes, si R et S ont été remplacées par deux relations synonymes.

(s14) Les relations formées suivant les schémas "R et T" , "S et T" sont synonymes, si R et S ont été remplacées par deux relations synonymes.

(s15) Les relations formées suivant les schémas $(\forall \xi)R$, $(\forall \xi)S$ sont synonymes, si R et S ont été remplacées par deux relations synonymes.

Par application répétée des règles précédentes, on obtient de nouvelles règles de synonymie :

(s16) Le schéma "R ou R" est synonyme de R .

En effet (règle s3) "R ou R" est synonyme de $\overline{\overline{R} \text{ et } \overline{R}}$;
"$\overline{R}$ et $\overline{R}$" est synonyme de $\overline{R}$ (règle s5) ; donc (règle s13)
$\overline{\overline{R} \text{ et } \overline{R}}$ est synonyme de $\overline{\overline{R}}$; enfin $\overline{\overline{R}}$ est synonyme de R (règle s2) ;
par double application de la règle s12, on voit que "R ou R" est synonyme de R .

Nous laissons au lecteur le soin d'établir de même les règles suivantes :

(s17) Le schéma "R ou S" est synonyme de "S ou R" .

(s18) Le schéma "R ou (S ou T)" est synonyme de "(R ou S) ou T" .

(s19) Le schéma $(\exists \xi)((\exists \eta)R)$ est synonyme de $(\exists \eta)((\exists \xi)R)$

(s20) Le schéma "R et (S ou T)" est synonyme de "(R et S) ou (R et T)"

(s21) La relation formée suivant le schéma $(\exists \xi)(R$ et $S)$ (resp. $(\exists \xi)(R$ ou $S)$) est synonyme de la relation formée suivant le schéma "R et $(\exists \xi)S$" (resp. "R ou $(\exists \xi)S$") lorsque ξ est remplacé par un argument qui est <u>lié</u> dans la relation qu'on substitue à R , ou qui n'y figure pas.

(s22) Les relations formées suivant les schémas "R ou T", "S ou T" sont synonymes, si R et S ont été remplacées par deux relations synonymes.

(s23) Les relations formées suivant les schémas $(\exists \xi)R$, $(\exists \xi)S$ sont synonymes, si R et S ont été remplacées par deux relations synonymes.

4. <u>Relations normales</u>. Pour l'application de certaines règles qui seront énoncées au § 2, il est essentiel de <u>restreindre</u> la notion de relation telle qu'elle a été définie ci-dessus. Jusqu'ici, rien n'empêche de former une relation suivant un des schémas "R et S" , "R ou S" en remplaçant R par une relation dans laquelle un certain argument est <u>libre</u> , et S par une relation dans laquelle le <u>même</u> argument est <u>lié</u> (en vertu de nos règles, l'argument en question est alors libre dans la relation obtenue). Nous dirons qu'une relation est <u>normale</u> si cette circonstance ne se produit à aucun moment dans sa formation à partir des relations primitives par application des 5 schémas de relation fondamentaux du n° 2 .

La notion de synonymie permet alors, pour une relation quelconque, de former une relation <u>normale</u> qui lui soit <u>synonyme</u> . Il suffira en effet, à chaque application de l'un des schémas "R et S" , "R ou S" où on doit remplacer S par une relation contenant (au moins) un argument lié qui est libre dans la relation qu'on doit substituer à R , de remplacer, dans la relation qu'on substitue à S , chacun des arguments qui sont libres dans la relation substituée à R , par un argument ne figurant dans aucune des deux relations (tous ces arguments étant naturellement distincts entre eux). La relation finale est bien synonyme de la relation non normale donnée, en vertu des règles (s1), (s13),(s14),(s22) et (s23).

<u>5. Introduction de signes abréviateurs</u>. La notion de synonymie permet aussi de formuler les règles gouvernant l'emploi des signes abréviateurs. Chaque fois qu'on introduit un tel signe, on doit d'une part expliquer comment on peut former des relations avec ce signe, et d'autre part poser une règle permettant, pour toute relation contenant ce signe, d'écrire une relation synonyme ne le contenant plus (<u>règle de définition</u> du signe abréviateur). Les arguments <u>libres</u> d'une relation contenant un signe abréviateur sont par définition ceux qui sont <u>libres</u> dans la relation synonyme ne contenant pas ce signe.

Dans ce § , nous introduirons tout d'abord les signes abréviateurs " $\rightarrow$ " et " $\rightleftarrows$ " ; ils sont régis par les règles suivantes : les assemblages "$R \rightarrow S$" , "$R \rightleftarrows S$" sont des schémas de relations, et on a les synonymies suivantes :

(d1) Le schéma "$R \rightarrow S$" est synonyme de "$\overline{R}$ ou S"

(d2) Le schéma "$R \rightleftarrows S$" est synonyme de "$(R \rightarrow S)$ et $(S \rightarrow R)$"

D'après les règles (s2) et (s17), le schéma "$R \rightarrow S$" est synonyme de "$\overline{S} \rightarrow \overline{R}$" ; d'après (s14) , le schéma "$R \rightleftarrows S$" est donc synonyme de "$\overline{R} \rightleftarrows \overline{S}$" ; d'après (s6) il est aussi synonyme de "$S \rightleftarrows R$" .

D'autres abréviations consistent en suppressions de parenthèses dans les schémas de relations. C'est ainsi que $(\forall \xi , \eta)R$, $(\forall \xi, \eta , \zeta)R$ sont des schémas de relations, soumis aux règles de définition :

(d3) Le schéma $(\forall \xi , \eta)R$ est synonyme de $(\forall \xi)((\forall \eta)R)$

(d4) Le schéma $(\forall \xi , \eta , \zeta)R$ est synonyme de $(\forall \xi)((\forall \eta , \zeta)R)$

$(\forall x,y)$ se lit "quels que soient x,y" , $(\exists x,y)$ se lit "il existe x,y tels que " ; de même pour un nombre quelconque d'arguments suivant les signes $\forall$ et $\exists$.

De même "R et S et T" , "R et S et T et U" sont des schémas de relation, avec les règles de définition :

(d5) Le schéma "R et S et T" est synonyme de "R et (S et T)"

(d6) Le schéma "R et S et T et U" est synonyme de "R et (S et T et U)".

On aura naturellement des abréviations analogues pour un nombre quelconque d'opérations $\forall$, ou d'opérations "et" consécutives. On introduit de la même manière des abréviations pour des opérations $\exists$, ou des opérations "ou" consécutives ; nous laissons au lecteur le soin de les formuler par analogie. Enfin, nous introduirons les signes ($\forall$ ...) et ($\exists$ ...), étant entendu que ($\forall$ ...)R (resp. ($\exists$ ...)R) est un schéma de relation, qui par définition, lorsqu'on y substitue à R une relation, devient une relation synonyme de la relation obtenue en écrivant devant la relation substituée le signe $\forall$ (resp. $\exists$) suivi de <u>tous les arguments libres</u> de cette relation.

§ 2. Les relations vraies.

1. <u>Les règles de déduction</u>. Comme nous l'avons dit, un texte mathématique est composé en substance d'une succession de relations d'un type particulier, les <u>relations vraies</u>. On ne dispose bien entendu d'aucun critère mécanique permettant de reconnaître si une relation donnée est vraie ; se poser une telle question, c'est précisément poser un <u>problème mathématique</u>, pour y répondre, le mathématicien doit faire un emploi judicieux des moyens dont il dispose, et c'est dans le choix de ces derniers qu'il devra déployer plus ou moins d'ingéniosité pour parvenir à ses fins, suivant la difficulté du problème.

Quels sont donc ces moyens ? Ils consistent essentiellement en <u>6 règles de déduction</u>, qui permettent de former des relations vraies lorsqu'on connaît déjà d'autres relations vraies, et en <u>schémas de relations vraies</u>, que nous définirons un peu plus loin.

Les règles de déduction sont les suivantes :

(r1) Une relation synonyme d'une relation vraie est vraie.

(r2) Quand, dans le schéma "R et S" on remplace chacune des lettres R, S par une relation vraie, on obtient une relation vraie.

(r3) Quand, dans le schéma "R ou S" , on remplace R par une relation vraie, S par une relation quelconque, on obtient une relation vraie.

(r4) (règle du Syllogisme) Quand la relation obtenue en remplaçant, dans le schéma "R $\longrightarrow$ S" , R par une relation vraie, S par une autre relation, est une relation vraie, alors la relation par laquelle on a remplacé S est vraie.

Pour énoncer la règle suivante, nous introduirons un nouveau signe abréviateur : nous conviendrons que $(\eta | \xi)R$ est un schéma de relation, qui deviendra une relation chaque fois qu'on remplacera R par une relation <u>normale</u>, ξ et η par des arguments distincts <u>non liés</u> dans la relation substituée à R (c'est-à-dire <u>libres</u> dans cette relation, ou <u>n'y figurant pas</u>) . En outre, la règle de définition du signe abréviateur ainsi introduit est la suivante : toute relation formée suivant ce schéma est synonyme de la relation obtenue en remplaçant, dans la relation substituée à R , l'argument substitué à ξ par l'argument substitué à η (si le premier figure dans la relation, sinon la relation est simplement synonyme de la relation substituée à R). On notera que l'argument substitué à η peut déjà figurer dans la relation substituée à R .

Cela étant, on a la règle suivante :

(r5) Quand une relation obtenue à partir du schéma $(\eta | \xi)R$ est <u>vraie</u>, la relation obtenue à partir du schéma $(\exists \xi)R$ par les mêmes remplacements (de ξ et de R) est vraie.

Enfin, la dernière règle est la suivante :

(r6) Quand, dans le schéma $(\forall \xi)R$, on remplace R par une relation vraie, ξ par un argument quelconque, on obtient une relation vraie.

2. <u>Les schémas de relations vraies</u>. Un <u>schéma de relation vraie</u> est un schéma de relation qui devient une <u>relation vraie</u> chaque fois qu'on substitue aux signes de remplacement qui y figurent, soit des relations et arguments quelconques, soit des relations et arguments soumis à des restrictions qu'on énonce en même temps que le schéma.

Avec cette définition, on peut dire par exemple que "R et S" est un schéma de relation vraie quand on soumet les relations substituées à R et à S à la condition d'être vraies ; on pourrait interprèter de même les règles (r3) à (r6).

D'après la règle (r1), tout schéma de relation <u>synonyme</u> d'un schéma de relation vraie est un schéma de relation vraie. D'après (r2), en substituant aux lettres R et S dans le schéma "R et S" deux schémas de relations vraies, on obtient encore un schéma de relation vraie ; de même, d'après (r3) on obtient un schéma de relation vraie quand, dans "R ou S" , on remplace R par un schéma de relation vraie, S par un schéma de relation quelconque. Enfin, plus généralement, si, dans un schéma de relation vraie, on remplace une ou plusieurs capitales italiques grasses par des schémas de relation (satisfaisant, le cas échéant à certaines conditions), on obtient encore un schéma de relation vraie.

Nous posons comme <u>règle</u> que le schéma suivant est un schéma de relation vraie :

(v1) R ou $\overline{R}$.

Comme "R $\rightarrow$ R" est un schéma synonyme de "R ou $\overline{R}$", c'est un schéma de relation vraie.

De ce schéma fondamental et des règles de déduction, nous allons tirer un grand nombre d'autres schémas de relations vraies, fort importants en pratique, car ils dispensent une fois pour toutes de refaire indéfiniment les mêmes déductions. Dans ces raisonnements, et dans toute la suite de ce Livre, nous ferons le plus souvent l'<u>abus de langage</u> suivant, afin d'alléger l'exposé : nous parlerons partout de "la relation R" ou de "l'argument ξ" au lieu de dire "la relation qu'on substitue à R" ou "l'argument qu'on substitue à ξ" ; le lecteur n'aura aucune difficulté à rétablir un langage absolument correct s'il le désire, et l'emploi des caractères spéciaux pour les lettres de remplacement permet d'éviter toute confusion.

(v2) Si les relations qu'on substitue à R et S sont synonymes, $R \rightarrow S$ est un schéma de relation vraie.

En effet, si R et S sont des relations synonymes, les relations $R \rightarrow R$ et $R \rightarrow S$ sont synonymes ; la première étant vraie d'après (v1), il en est de même de la seconde, d'après (r1).

(v3) R ou $\overline{R}$ ou S .

En effet, ce schéma est synonyme de "(R ou $\overline{R}$) ou S" ; la règle (r3) montre que c'est un schéma de relation vraie, puisqu'il en est ainsi de "R ou $\overline{R}$" .

Le schéma (v3) est synonyme des deux suivants :

(v4) $R \rightarrow$ (R ou S) .

(v5) (R et S) $\rightarrow R$.

En outre :

(v6) (R ou $\overline{S}$) $\rightarrow R$ est un schéma de relation vraie, quand on remplace S par une relation vraie.

(v7) $R \rightarrow$ (R et S) est un schéma de relation vraie quand on remplace S par une relation vraie.

En effet, (R ou $\overline{S}$) $\rightarrow R$ est synonyme de "($\overline{R}$ et S) ou R" , donc aussi de "($\overline{R}$ ou R) et (S ou R)" ; or, quand R est une relation quelconque, S une relation vraie, (S ou R) est vraie (règle (r3)) et il en est de même de ($\overline{R}$ ou R) (schéma v1)), donc (règle (r2)), la relation "($\overline{R}$ ou R) et (S ou R)" est vraie. Raisonnement analogue pour (v7).

(v8) $((R \to S) \text{ et } (S \to T)) \to (R \to T)$ (règle de transitivité).

Le schéma est synonyme de "$((R \text{ et } \overline{S}) \text{ ou } (S \text{ et } \overline{T})) \text{ ou } (\overline{R} \text{ ou } T)$" donc aussi de

$(R \text{ ou } \overline{R} \text{ ou } S \text{ ou } T) \text{ et } (R \text{ ou } \overline{R} \text{ ou } T \text{ ou } \overline{T}) \text{ et } (S \text{ ou } \overline{S} \text{ ou } \overline{R} \text{ ou } T)$
$\text{et } (T \text{ ou } \overline{T} \text{ ou } \overline{R} \text{ ou } \overline{S})$

Or chacun des schémas entre parenthèses est un schéma de relation vraie d'après (v3), donc (règle (r2)) il en est de même du schéma total.

(v9) $(R \to S) \to ((R \text{ et } T) \to (S \text{ et } T))$

(v10) $(R \to S) \to ((R \text{ ou } T) \to (S \text{ ou } T))$

Même raisonnements que pour (v8).

(v11) $((\eta|\xi)R \to ((\exists \xi)R)$ est un schéma de relation vraie (ξ et η devant naturellement être remplacés par des arguments <u>non liés</u> dans la relation (normale) qu'on substitue à R).

D'après (v1) la relation $(\eta|\xi)((\eta|\xi)\overline{R} \text{ ou } R)$ est vraie, car elle est synonyme de "$(\eta|\xi)\overline{R}$ ou $(\eta|\xi)R$" , c'est-à-dire de "$\overline{(\eta|\xi)R}$ ou $(\eta|\xi)R$" ; la règle (r5) montre donc que la relation $(\exists\xi)((\eta|\xi)\overline{R} \text{ ou } R)$ est vraie. Or, dans la relation $(\eta|\xi)\overline{R}$, l'argument ξ ne figure plus ; la relation $(\exists\xi)((\eta|\xi)\overline{R} \text{ ou } R)$ est donc (s21) synonyme de "$(\eta|\xi)\overline{R}$ ou $(\exists\xi)R$" , donc cette dernière est vraie (règle (r1)).

(v12) $(\forall\xi)R \to ((\eta|\xi)R)$.

Le schéma est en effet synonyme de $((\eta|\xi)\overline{R}) \to ((\exists\xi)\overline{R}$, donc est vrai d'après (v11).

(v13) $R \to ((\exists \xi)R)$.

Supposons d'abord que R soit normale et ξ <u>non lié</u> dans R . Soit η un argument ne figurant pas dans R ; alors la relation $(\xi|\eta)((\eta|\xi)R)$ est synonyme de R . D'après (v11), la relation $R \to ((\exists \eta)((\eta|\xi)R)))$ est donc vraie ; mais d'après (s1), la relation $(\exists \eta)((\eta|\xi)R)$ est synonyme de $(\exists \xi)R$.

Si R est normale et ξ lié dans R , R est synonyme d'une relation dans laquelle on a remplacé ξ par un argument distinct des autres arguments de R (s1), donc, en vertu de (s15) et (s14) on est ramené au cas précédent. De même, si R n'est pas normale, R est synonyme d'une relation normale, et le même raisonnement s'applique.

(v14) $((\forall \xi)R) \to R$.

Le schéma est synonyme de "$\overline{R} \to ((\exists \xi)\overline{R})$" , donc est un schéma de relation vraie d'après (v13) .

(v15) $((\exists \xi)R) \to R$ si ξ est remplacé par un argument qui est lié dans la relation substituée à R , ou n'y figure pas .

En effet, le schéma est synonyme de "$(\forall \xi)\overline{R}$ ou R" , donc aussi d'après (s10), de $(\forall \xi)(\overline{R}$ ou $R)$; comme ($\overline{R}$ ou R) est vraie, il en est de même de $(\forall \xi)(\overline{R}$ ou $R)$ d'après (r6).

(v16) $R \to ((\forall \xi)R)$ si ξ est remplacé par un argument qui est lié dans la relation substituée à R , ou n'y figure pas.

En effet, le schéma est synonyme de $((\exists \xi)\overline{R} \to \overline{R})$, donc est un schéma de relation vraie d'après (v15) .

(v 17) $((R \to S)$ et $(R \to T)) \to (R \to (S$ et $T))$

(v 18) $((R \to T)$ et $(S \to T)) \to ((R$ ou $S) \to T)$

Raisonnement analogue à (v8) .

(v19) $(\forall \xi)(R \text{ et } S) \rightarrow ((\forall \xi)R \text{ et } (\forall \xi)S)$

D'après (v17) et les règles (r2) et (r4), il suffit de prouver que $(\forall \xi)(R \text{ et } S) \rightarrow (\forall \xi)R$ est un schéma de relation vraie. Or, ce schéma est synonyme de "$(\exists \xi)(\overline{R} \text{ ou } \overline{S}) \text{ ou } (\forall \xi)R$". Comme "$R \text{ ou } (\overline{R} \text{ ou } \overline{S})$" est vraie et que $(\overline{R} \text{ ou } \overline{S}) \rightarrow (\exists \xi)(\overline{R} \text{ ou } \overline{S})$ est vraie d'après (v13), il résulte de (v10) et de la règle (r4) que "$R \text{ ou } (\exists \xi)(\overline{R} \text{ ou } \overline{S})$" est vraie. D'après la règle (r6), $(\forall \xi)(R \text{ ou } (\exists \xi)(\overline{R} \text{ ou } \overline{S}))$ est vraie ; mais comme ξ est lié dans $(\exists \xi)(\overline{R} \text{ ou } \overline{S})$, la relation précédente est synonyme de "$(\forall \xi)R \text{ ou } (\exists \xi)(\overline{R} \text{ ou } \overline{S})$", ce qui établit (v19).

(v20) $((\forall \xi)R \text{ et } (\forall \xi)S) \rightarrow (\forall \xi)(R \text{ et } S)$

Le schéma est synonyme de "$(\forall \xi)(R \text{ et } S) \text{ ou } (\exists \xi)\overline{R} \text{ ou } (\exists \xi)\overline{S}$". Comme le schéma "$(R \text{ et } S) \text{ ou } \overline{R} \text{ ou } \overline{S}$", synonyme de "$(R \text{ ou } \overline{R} \text{ ou } \overline{S})$ et $(S \text{ ou } \overline{S} \text{ ou } \overline{R})$" est vrai d'après (v3), il résulte de (v13) et d'une double application de (v10) que "$(R \text{ et } S) \text{ ou } (\exists \xi)\overline{R} \text{ ou } (\exists \xi)\overline{S}$" est vrai. On conclut comme pour (v19).

(v21) $((\exists \xi)R \text{ ou } (\exists \xi)S) \rightarrow (\exists \xi)(R \text{ ou } S)$

(v22) $(\exists \xi)(R \text{ ou } S) \rightarrow ((\exists \xi)R \text{ ou } (\exists \xi)S)$

Se déduisent aussitôt de (v19) et (v20) respectivement, en remplaçant dans ces derniers R et S par $\overline{R}$ et $\overline{S}$.

(v23) $((\exists \xi)R \text{ et } (\forall \xi)S) \rightarrow (\exists \xi)(R \text{ et } S)$

Le schéma est synonyme de "$(\forall \xi)\overline{R} \text{ ou } (\exists \xi)\overline{S} \text{ ou } (\exists \xi)(R \text{ et } S)$". Comme "$\overline{R} \text{ ou } \overline{S} \text{ ou } (R \text{ et } S)$" est vraie, on voit successivement, comme pour (v19) et (v20) que "$\overline{R} \text{ ou } (\exists \xi)\overline{S} \text{ ou } (\exists \xi)(R \text{ et } S)$" est vrai, puis le schéma (v23) lui-même.

(v24) $(\forall \xi)(R \text{ ou } S) \rightarrow ((\forall \xi)R \text{ ou } (\exists \xi)S)$

Se déduit de (v23) en remplaçant R et S par $\overline{R}$ et $\overline{S}$.

(v25) $(\exists\xi)(R \text{ et } S) \rightarrow ((\exists\xi)R \text{ et } (\exists\xi)S)$

D'après (v17), il suffit de prouver que $(\exists\xi)(R \text{ et } S) \rightarrow (\exists\xi)R$ est un schéma de relation vraie. Or, il est synonyme de ($\overline{R}$ ou $\overline{S}$ ou R on en déduit comme ci-dessus que "($\overline{R}$ ou $\overline{S}$) ou $(\exists\xi)R$" est vrai, puis le schéma (v25) lui-même.

(v26) $((\forall\xi)R$ ou $(\forall\xi)S) \rightarrow (\forall\xi)(R$ ou $S)$

se déduit de (v25) en remplaçant R et S par $\overline{R}$ et $\overline{S}$.

(v27) $(\exists\xi)(\forall\eta)R \rightarrow (\forall\eta)(\exists\xi)R$

Le schéma est synonyme de "$(\forall\xi)(\exists\eta)\overline{R}$ ou $(\forall\eta)(\exists\xi)R$" . D'après (v13), le schéma "R ou $(\exists\eta)\overline{R}$" est vrai. Utilisant (v13) et (v10), on en conclut que "$(\exists\xi)R$ ou $(\exists\eta)\overline{R}$" est vrai ; donc, par double application de la règle (r6), $(\forall\xi)(\forall\eta)((\exists\xi)R$ ou $(\exists\eta)\overline{R})$ est vrai. Mais par double application de la règle (s10) on voit que ce schéma est synonyme de (v27).

(v28) $(\forall\eta)((\eta|\xi)R) \rightarrow (\forall\eta)(\exists\xi)R$

Le schéma est synonyme de "$(\exists\eta)((\eta|\xi)\overline{R})$ ou $(\forall\eta)(\exists\xi)R$" . Or, d'après (v11), "$(\eta|\xi)\overline{R}$ ou $(\exists\xi)R$" est vrai, donc le même raisonnement que dans (v19) prouve que (v28) est vrai.

Le mode de raisonnement employé dans les schémas (v19) à (v28) peut se résumer en les deux règles suivantes :

(r7) Si $R \rightarrow S$ est vraie, $(\forall\xi)R \rightarrow (\forall\xi)S$ est vraie.

(r8) Si $R \rightarrow S$ est vraie, $(\exists\xi)R \rightarrow (\exists\xi)S$ est vraie.

En effet, si "$\overline{R}$ ou S" est vraie, comme "$\overline{R} \rightarrow (\exists\xi)\overline{R}$" est vraie, "S ou $(\exists\xi)\overline{R}$" est vraie d'après (v10) et la règle du syllogisme. La règle (r6) montre alors que $(\forall\xi)(S$ ou $(\exists\xi)\overline{R})$ est vraie, mais cette relation est synonyme de "$(\forall\xi)S$ ou $(\exists\xi)\overline{R}$ d'après (s10), et cette dernière est synonyme de $(\forall\xi)R \rightarrow (\forall\xi)S$. Même raisonnement pour (r8), qu'on peut d'ailleurs aussi déduire de (r7) en en remarquant que "$R \to S$" est synonyme de "$\overline{S} \to \overline{R}$" et "$(\exists \xi)R \to (\exists \xi)S$" synonyme de "$(\forall \xi)\overline{S} \to (\forall \xi)\overline{R}$".

De ces schémas de relations vraies, on en déduit d'autres où figure le signe $\rightleftarrows$:

(v29) Si les relations qu'on substitue à R et à S sont synonymes, $R \rightleftarrows S$ est un schéma de relation vraie.

Résulte de (v2) et de la règle (r2).

(v30) $(R \text{ ou } \overline{S}) \rightleftarrows R$ est un schéma de relation vraie, quand on y remplace S par une relation vraie.

(v31) $(R \text{ et } S) \rightleftarrows R$ est un schéma de relation vraie quand on y remplace S par une relation vraie.

(v30) résulte de (v4),(v6) et de la règle (r2) ; de même (v31) résulte de (v5),(v7) et de la règle (r2).

(v32) $(R \rightleftarrows S) \rightleftarrows ((R \text{ et } S) \text{ ou } (\overline{R} \text{ et } \overline{S}))$

En effet, $R \rightleftarrows S$ est synonyme de $((\overline{R} \text{ ou } S) \text{ et } (\overline{S} \text{ ou } R))$, donc (s20), de $((\overline{R} \text{ et } \overline{S}) \text{ ou } (R \text{ et } S) \text{ ou } (\overline{R} \text{ et } R) \text{ ou } (\overline{S} \text{ et } S))$; d'après (v1) $(\overline{R} \text{ et } R)$ et $(\overline{S} \text{ et } S)$ sont vraies ; on a donc $((\overline{R} \text{ ou } S) \text{ et } (\overline{S} \text{ ou } R)) \rightleftarrows ((R \text{ et } S) \text{ ou } (\overline{R} \text{ et } \overline{S}))$ d'après (v30).

(v33) $(R \text{ et } (R \text{ ou } S)) \rightleftarrows R$.

(v34) $(R \text{ ou } (R \text{ et } S)) \rightleftarrows R$.

En effet, $(R \text{ et } (R \text{ ou } S)) \to R$ est vraie d'après (v5) ; d'autre part, $R \to (R \text{ et } (R \text{ ou } S))$ est synonyme de $((\overline{R} \text{ ou } R) \text{ et } (\overline{R} \text{ ou } R \text{ ou } S))$, donc est vraie d'après (v1), (v3) & la règle (r2).

Raisonnement analogue pour (v34).

(v35) Si les relations qu'on substitue à R et à S sont vraies, le schéma $R \rightleftarrows S$ est un schéma de relation vraie.

En effet, il en est ainsi du schéma $((R \text{ et } S) \text{ ou } (\overline{R} \text{ et } \overline{S}))$ d'après (r2) et (r3), donc le schéma (v32) et la règle (r4) montrent que $R \rightleftarrows S$ est vraie.

(v36) $((R \rightleftarrows S)$ et $(S \rightleftarrows T)) \rightarrow (R \rightleftarrows T)$ (règle de transitivité)

C'est une conséquence immédiate de la règle de définition du signe $\rightleftarrows$, et des schémas (v8) et (v9) .

(v37) $(R \rightleftarrows S) \rightarrow ((R$ et $T) \rightleftarrows (S$ et $T))$

(v38) $(R \rightleftarrows S) \rightarrow ((R$ ou $T) \rightleftarrows (S$ ou $T))$

Conséquences de (v8) et (v9) .

(v39) $(\forall \xi)R \rightleftarrows R$, si ξ est remplacé par un argument qui est lié dans la relation substituée à R , ou qui n'y figure pas.

(v40) $(\exists \xi)R \rightleftarrows R$ si ξ est remplacé par un argument qui est lié dans la relation substituée à R , ou qui n'y figure pas

Ce sont des conséquences de (v13),(v14),(v15) et (v16) et de la règle (r2) .

(v41) $(\forall \xi)(R$ et $S) \rightleftarrows ((\forall \xi)R$ et $(\forall \xi)S)$

Conséquence de (v19) et ~~xx~~ (v20) et de la règle (r2).

(v42) $(\exists \xi)(R$ ou $S) \rightleftarrows ((\exists \xi)R$ ou $(\exists \xi)S)$

De même, à partir de (v21) et (v22).

On a aussi les règles correspondant à (r7) et (r8) :

(r9) Si $R \rightleftarrows S$ est vraie, $(\forall \xi)R \rightleftarrows (\forall \xi)S$ est vraie.

(r10) Si $R \rightleftarrows S$ est vraie, $(\exists \xi)R \rightleftarrows (\exists \xi)S$ est vraie.

Ce sont des conséquences immédiates de (r7) et (r8), des règles (r2), (r4) et du schéma (v5).

Notons enfin que, si une relation R est <u>vraie</u>, la relation $(\eta \mid \xi)R$ est <u>vraie</u> ; en effet, d'après (r6), $(\forall \xi)R$ est vraie, et il résulte alors de (v12) et de la règle du syllogisme (r4) que $(\eta \mid \xi)R$ est vraie.

<u>3. Conventions de langage</u>. Nous adopterons désormais les conventions de langage suivantes :

1° On dit qu'une relation est la <u>négation</u> d'une autre si on l'obtient en substituant la seconde relation à R dans le schéma $\overline{R}$; on dit qu'une relation est <u>fausse</u> si sa négation est vraie.

2° Etant données deux relations, on dit que la première <u>entraîne</u> la seconde si en substituant la première à R et la seconde à S dans le schéma $R \to S$, on obtient une relation vraie.

3° Etant données deux relations, on dit qu'elles sont <u>équivalentes</u> si chacune d'elles entraîne l'autre ; d'après la règle (r2), la règle (r4) et le schéma (v5), il revient au même de dire que si on substitue l'une de ces relations à R et l'autre à S dans le schéma $R \rightleftarrows S$, on obtient une relation vraie.

Ces dénominations permettent d'énoncer sans signes de remplacement certaines des règles précédentes. Par exemple, la règle (r4) (règle du syllogisme) s'énonce en disant que si une relation vraie entraîne une autre relation, cette dernière est vraie. Le schéma (v29) signifie que deux relations synonymes sont équivalentes ; le schéma (v3) que deux relations équivalentes à une troisième sont équivalentes ; le schéma (v35) que deux relations vraies sont équivalentes.

Enfin, on déduit des schémas (v37) et (v38), des règles (r9) et (r10) et du fait que "$\overline{R} \rightleftarrows \overline{S}$" est synonyme de "$R \rightleftarrows S$" que si, dans une relation formée suivant un certain schéma à partir d'autres relations, on remplace une de ces dernières par une relation équivalente, la relation obtenue est équivalente à la relation initiale.

<u>Remarque</u>.- La plupart des schémas de relations vraies énumérés ci-dessus relient deux schémas de relations par le signe $\rightarrow$; on peut exprimer les règles qui leur correspondent en disant que toute relation formée suivant le premier schéma <u>entraîne</u> la relation formée suivant le second (avec les mêmes substitutions dans les deux schémas, naturellement) ; de façon abrégée, on peut convenir de dire que le <u>premier schéma entraîne le second</u>. D'après la règle du syllogisme, si une relation formée suivant le premier schéma est vraie, la relation formée suivant le second est vraie également. Mais cette règle (qui découle de la première et de la règle du syllogisme) n'a pas du tout la même signification que le premier énoncé, et il importe de ne pas les confondre. Par exemple, la règle (r6) ne signifie pas du tout que le schéma $R \rightarrow (\forall \xi)R$ soit un schéma de relation vraie ; de même, le schéma $(R \rightarrow S) \rightarrow ((\forall \xi)R \rightarrow (\forall \xi)S)$ <u>n'est pas</u> un schéma de relation vraie, malgré la règle (r7). Il est remarquable que, pour les règles (r1) à (r5) inclusivement, à chacune de ces règles corresponde un schéma de relation vraie qui la renforce en quelque sorte, en affirmant chaque fois que non seulement, comme l'énonce la règle envisagée, si une relation formée suivant un certain schéma est vraie, une relation formée suivant un second schéma est aussi vraie, mais bien que le premier schéma <u>entraîne</u> le second (les schémas de relations vraies correspondant à ces règles sont (v2), (v4),(v5),(v11) et le schéma $(R \text{ et } (R \rightarrow S)) \rightarrow S$, qui correspond à (r4) et que nous n'avons pas donné ci-dessus, car il n'intervient pas en pratique ; nous laissons au lecteur le soin de le déduire des autres).

§ 3. Théories et axiomes.

1. <u>Axiomes et relations $\mathcal{C}$-vraies</u>. On dit qu'on a défini une <u>théorie mathématique</u> lorsqu'on a écrit :

1° un certain nombre de relations ;

2° un certain nombre de schémas de relations, où le remplacement des signes de remplacement qui y figurent peut être assujetti à certaines conditions explicitées.

Les relations (resp. schémas de relations) ainsi écrites sont appelées les <u>axiomes</u> (resp. <u>schémas d'axiomes</u>) de la théorie. On donne en général un nom à une théorie déterminée ; dans l'énoncé des règles qui vont suivre, et qui s'appliquent à une théorie quelconque, nous utiliserons la lettre $\mathcal{C}$ pour désigner une théorie non spécifiée.

Les axiomes et schémas d'axiomes d'une théorie $\mathcal{C}$ peuvent contenir un certain nombre d'arguments <u>libres</u> explicitement désignés ; on dit que ce sont les <u>arguments de base</u> de la théorie $\mathcal{C}$. Lorsqu'il en est ainsi, les minuscules grecques grasses qui figurent dans les schémas d'axiomes de $\mathcal{C}$ doivent donc être telles que, pour toute substitution d'arguments à ces lettres, les arguments substitués soient tous <u>liés</u> dans les relations obtenues.

Nous dirons qu'une relation est une <u>conjonction d'axiomes</u> de $\mathcal{C}$ si elle s'obtient par application de l'opération "et" à un certain nombre de relations qui sont, soit des axiomes de $\mathcal{C}$, soit des relations provenant de schémas d'axiomes de $\mathcal{C}$ par remplacement des signes de remplacement qui figurent dans ces schémas. Il est clair que, si A et B sont des conjonctions d'axiomes, "A et B" est une conjonction d'axiomes.

Nous dirons qu'une relation R est <u>vraie dans la théorie</u> $\mathcal{C}$, ou en abrégé $\mathcal{C}$ -<u>vraie</u>, si on peut former une conjonction d'axiomes A telle que A $\longrightarrow$ R soit <u>vraie</u> ; le plus souvent, par abus de langage, on dira simplement que R est <u>vraie</u>, sans mentionner dans quelle théorie, lorsqu'aucune confusion ne sera possible.

On dit qu'une relation R est <u>fausse dans la théorie</u> $\mathcal{C}$, ou encore $\mathcal{C}$ -<u>fausse</u>, si la relation $\overline{R}$ est $\mathcal{C}$ -vraie.

Pour éviter toute confusion, on dit parfois qu'une relation vraie (au sens absolu) est un <u>identité logique</u>. Une identité logique est $\mathcal{C}$ -vraie pour une théorie $\mathcal{C}$ quelconque, d'après la règle (r3).

L'abus de langage précédent découle de ce que le raisonnement sur les relations $\mathcal{C}$-vraies se fait suivant des règles presque identiques à celles qui gouvernent le raisonnement sur les relations vraies (que nous avons exposées au § 2). On a en effet les règles suivantes, qui sont respectivement les analogues de (r1),(r2),(r4) et (r6) :

(r'1) Si R est $\mathcal{C}$ -vraie, et si S est équivalente à R , S est $\mathcal{C}$ -vraie.

En effet, il y a par hypothèse une conjonction d'axiomes A telle que ($\overline{A}$ ou R) soit vraie ; or (v38) ($\overline{A}$ ou S) est équivalente à ($\overline{A}$ ou R), donc est vraie.

(r'2) Si R , S sont deux relations $\mathcal{C}$-vraies, (R et S) est une relation $\mathcal{C}$ -vraie.

En effet, il y a par hypothèse deux conjonctions d'axiomes A,B , telles que $A \rightarrow R$ et $B \rightarrow S$ soient vraies ; d'après (v5), (v8) et les règles (r2) et (r4), (A et B)$\rightarrow R$, (A et B)$\rightarrow S$ sont vraies ; donc (d'après (v17), (r2) et (r4)), (A et B)$\rightarrow$(R et S) est vraie ; comme (A et B) est une conjonction d'axiomes, (R et S) est $\mathcal{C}$ -vraie.

(r'3) Si R est $\mathcal{C}$ -vraie, et si $R \rightarrow S$ est $\mathcal{C}$-vraie, S est $\mathcal{C}$ -vraie.

En effet, il y a par hypothèse deux conjonctions d'axiomes A,B , telles que $A \rightarrow R$ et $B \rightarrow$($\overline{R}$ ou S) soient vraies ; on en conclut comme ci-dessus que (A et B)$\rightarrow$(R et ($\overline{R}$ ou S)) est vraie. Or (R et ($\overline{R}$ ou S)) est synonyme de ((R et $\overline{R}$) ou (R et S)) , et comme (R et $\overline{R}$) est fausse, (R et ($\overline{R}$ ou S)) est équivalente à (R et S) d'après (v30) ; donc ((v38) et règle (r4)) (A et B)$\rightarrow$(R et S) est vraie ; d'après (v5), (v8), les règles (r2) et (r4), (A et B)$\rightarrow$S est vraie, donc S est $\mathcal{C}$-vraie.

(r'4) Si R est $\mathcal{C}$-vraie, $(\forall \xi)$R est $\mathcal{C}$-vraie, <u>pourvu qu'on remplace ξ par un argument distinct des arguments de base de</u> $\mathcal{C}$.

En effet, il y a une conjonction d'axiomes A telle que ($\overline{A}$ ou R) soit vraie ; donc (règle (r6)), $(\forall \xi)$($\overline{A}$ ou R) est vraie ; mais comme ξ n'est pas un argument libre dans $\overline{A}$ par hypothèse, $(\forall \xi)$($\overline{A}$ ou R) est synonyme de ($\overline{A}$ ou $(\forall \xi)$R) par la règle (s10), donc $(\forall \xi)$R est $\mathcal{C}$-vraie.

<u>Remarque</u>. Les axiomes d'une théorie $\mathcal{C}$ se présentent souvent sous la forme $(\forall \xi, \eta, \zeta)$R . Au lieu de dire que cette relation est un axiome, il revient au même de dire que R est une relation $\mathcal{C}$-<u>vraie</u>, d'après la règle (r'4), le schéma (v14) et la règle (r'3) .

On dit que R <u>entraîne</u> S <u>dans la théorie</u> $\mathcal{C}$ (resp. <u>est équivalente à</u> S <u>dans la théorie</u> $\mathcal{C}$) lorsque la relation R$\rightarrow$S (resp. R$\rightleftarrows$S) est $\mathcal{C}$-vraie. Ici encore, on supprime la mention "dans la théorie $\mathcal{C}$" lorsqu'aucune confusion n'est à craindre. <u>Avec cette convention</u>, on a les règles suivantes :

(r'5) Si R entraîne S et si S entraîne T , R entraîne T .

Application des règles (r'2),(r'3) et du schéma (v8) .

(r'6) Si R entraîne S , (R et T) entraîne (S et T) .

(r'7) Si R entraîne S , (R ou T) entraîne (S ou T)

Même raisonnement à partir de (v9) et (v10) respectivement.

(r'8) Si R entraîne S et R entraîne T , R entraîne (S et T) .

(r'9) Si R entraîne T et S entraîne T , (R ou S) entraîne T .

Même raisonnement à partir de (v17) et (v18).

(r'10) Si R entraîne S , $(\forall \xi)$R entraîne $(\forall \xi)$S , *pourvu que* ξ *soit remplacé par un argument distinct des arguments de base*.

(r'11) Si R entraîne S , $(\exists \xi)$R entraîne $(\exists \xi)$S , *pourvu que* ξ *soit remplacé par un argument distinct des arguments de base*.

Même raisonnement que pour les règles (r7) et (r8), en remplaçant partout "vraie" par " $\mathcal{C}$-vraie" et utilisant la règle (r'4) au lieu de (r6).

(r'12) Si S est vraie, (R ou $\overline{S}$) est équivalente à R .

(r'13) Si S est vraie, (R et S) est équivalente à R .

Même raisonnement que pour (v6 et (v7), en remarquant que si S est $\mathcal{C}$-vraie, (S ou R) est $\mathcal{C}$-vraie, d'après (v4) et la règle (r'3).

(r'14) Si R et S sont vraies, elles sont équivalentes.

(r'15) Si R est équivalente à S , et si S est équivalente à T , R est équivalente à T .

(r'16) Si R est équivalente à S , (R et T) est équivalente à (S et T).

(r'17) Si R est équivalente à S , (R ou T) est équivalente à (S ou T).

(r'18) Si R est équivalente à S , $(\forall \xi)$R est équivalente à $(\forall \xi)$S *pourvu que* *soit distinct des arguments de base*.

(r'19) Si R est équivalente à S , $(\exists \xi)$R est équivalente à $(\forall \xi)$S *pourvu que* ξ *soit distinct des arguments de base*.

Enfin, si R est vraie, $(\eta \mid \xi)$R est vraie, *pourvu que* η *et* ξ *soient distincts des arguments de base*.

On dit qu'une théorie $\mathcal{C}'$ est *plus riche* qu'une théorie $\mathcal{C}$ si tous les axiomes (resp. schémas d'axiomes) de $\mathcal{C}$ sont aussi des axiomes (resp. schémas d'axiomes) de $\mathcal{C}'$; on dit encore dans ce cas que $\mathcal{C}'$ est une théorie *subordonnée* à $\mathcal{C}$, ou que $\mathcal{C}$ est une *théorie antécédente à* $\mathcal{C}'$. Dans ce traité, toutes les théories seront subordonnées à la

<u>théorie des ensembles</u> (cf. chap.II) ou à une théorie antécédente à la théorie des ensembles.

On peut présenter certaines démonstrations en faisant intervenir des théories spéciales à ces démonstrations. Supposons par exemple que R <u>entraîne</u> S dans une théorie $\mathcal{C}$; cela signifie qu'il existe une conjonction d'axiomes A de la théorie $\mathcal{C}$ telle que A $\rightarrow$($\bar{R}$ ou S) soit une identité logique ; comme cette relation est synonyme de ($\bar{A}$ ou $\bar{R}$ ou S) , donc aussi de (A et R)$\rightarrow$S , il revient au même de dire que S est <u>vraie</u> dans la théorie $\mathcal{C}'$ obtenue en ajoutant aux axiomes de $\mathcal{C}$ la relation R . Une autre interprétation s'obtient en remarquant que la relation ($\bar{A}$ ou $\bar{R}$ ou S) est aussi synonyme de (A et $\bar{S}$)$\rightarrow$$\bar{R}$; donc, dire que R entraîne S dans la théorie $\mathcal{C}$ revient à dire que R est <u>fausse</u> dans la théorie $\mathcal{C}''$ obtenue en ajoutant aux axiomes de $\mathcal{C}$ la relation $\bar{S}$ ("raisonnement par l'absurde").

Ces interprétations sont surtout fréquentes lorsque les relations R,S qu'on considère contiennent des arguments <u>libres</u> distincts des arguments de base de la théorie $\mathcal{C}$ et qui deviennent des arguments de base dans la théorie plus riche qu'on introduit ; si par exemple a,b,c sont ces arguments, on présentera le raisonnement en disant "Soient a,b,c tels que R" ; on sous-entend par là qu'on a introduit une nouvelle théorie dans laquelle R est un axiome supplémentaire, et a,b,c de nouveaux arguments de base.

> Ce langage provient naturellement de la conception "ontologique" des mathématiques (cf. Introduction), pour laquelle a,b,c sont des "objets" nouveaux dont on "admet" qu'ils sont "liés par la relation R" (cf. chap.II, § 1).
>
> <u>Remarque</u>. Lorsque, dans une théorie $\mathcal{C}$, on veut démontrer que ($\exists\ \xi$)R <u>entraîne</u> S , ξ étant un argument qui est <u>lié</u> dans S ou

ou <u>n'y figure pas</u>, et qui est distinct des arguments de base de $\mathcal{T}$, on peut se borner à démontrer que R entraîne S ; en effet, si ($\overline{R}$ ou S) est vraie dans la théorie $\mathcal{T}$, il en est de même de $(\forall \xi)$($\overline{R}$ ou S) d'après la règle (r'4) ; mais d'après l'hypothèse sur ξ, $(\forall \xi)$($\overline{R}$ ou S) est synonyme de (($\forall \xi$)$\overline{R}$ ou S) (règle (s10)), d'où la conclusion. On considèrera donc la nouvelle théorie obtenue en ajoutant R aux axiomes de $\mathcal{T}$, et on prouvera que S est vraie dans cette théorie.

2. <u>Théories non contradictoires</u>. Dans une théorie $\mathcal{T}$, si une relation R est telle que R soit vraie et fausse <u>à la fois</u>, toute autre relation S est vraie dans $\mathcal{T}$, car (R et $\overline{R}$) $\rightarrow$ S est une identité logique, étant synonyme de (R ou $\overline{R}$ ou S) ; la règle (r'3) montre alors que S est $\mathcal{T}$-vraie. On dit dans ce cas que la théorie $\mathcal{T}$ est <u>contradictoire</u> ; une telle théorie est visiblement dénuée de tout intérêt en Mathématique.

Le fait qu'une théorie $\mathcal{T}$ soit contradictoire peut encore s'interprêter de la façon suivante : comme (R et $\overline{R}$) est $\mathcal{T}$-vraie, il y a une conjonction d'axiomes A telle que A $\rightarrow$ (R et $\overline{R}$) soit une identité logique, et comme cette relation est synonyme de (R ou $\overline{R}$) $\rightarrow$ $\overline{A}$ cette dernière est aussi une identité logique ; mais comme (R ou $\overline{R}$) est une identité logique, la règle (r4) prouve que $\overline{A}$ est une identité logique ; autrement dit, il y a une conjonction d'axiomes de la théorie $\mathcal{T}$ qui est <u>fausse</u> (au sens absolu). Si par exemple il s'agit de la conjonction "B et C et D", où B,C,D sont trois axiomes de $\mathcal{T}$, la relation $\overline{A}$ est synonyme de (B et C) $\rightarrow$ $\overline{D}$; on peut donc dire que si $\mathcal{T}_0$ est la théorie (moins riche que $\mathcal{T}$) obtenue en <u>supprimant</u> dans $\mathcal{T}$ l'axiome D, la relation D est <u>fausse</u> dans la théorie $\mathcal{T}_0$. Inversement, chaque fois qu'on a démontré qu'une relation est fausse dans une théorie $\mathcal{T}_0$, on obtient une théorie contradictoire en ajoutant cette relation aux axiomes de $\mathcal{T}_0$.

A un moment donné de son développement historique, on peut toujours reconnaître si une théorie donnée est ou non contradictoire, puisqu'il suffit pour cela de dresser la liste des relations vraies dans la théorie. Toute différente est la question de savoir s'il est <u>possible</u> que, dans une théorie donnée, on forme un jour une relation qui soit à la fois vraie et fausse. A l'exception de quelques cas particulièrement simples, les réponses qu'on a tenté de donner jusqu'à présent à cette question paraissent exiger un type d'argumentation tout à fait différent du raisonnement mathématique tel que nous l'entendons, et sortent par suite de notre cadre ; aussi n'aborderons-nous pas ce sujet.

Bornons-nous à indiquer comment, à cette question, peuvent se rattacher d'autres problèmes. On rencontre souvent, dans certaines théories, des relations dont on n'arrive pas à prouver, ni qu'elles sont vraies, ni qu'elles sont fausses dans la théorie. On peut se demander si cet échec ne provient que d'un défaut d'ingéniosité de la part des mathématiciens qui se sont occupés de la question, et si un jour le doute pourra être levé par un savant plus perspicace (ce qui, en fait, s'est déjà maintes fois produit), ou si, au contraire, il peut se faire que, dans une théorie $\mathcal{T}$, on soit dans l'<u>impossibilité</u> de prouver qu'une relation R soit vraie, et dans la même impossibilité de prouver qu'elle soit fausse. Cette question peut se poser d'une autre manière : dire qu'on ne pourra jamais prouver que R soit $\mathcal{T}$-vraie, c'est dire que la théorie $\mathcal{T}'$ obtenue en ajoutant $\bar{R}$ aux axiomes de $\mathcal{T}$ est <u>non contradictoire</u> ; en effet, si elle était contradictoire, il y aurait une conjonction d'axiomes de $\mathcal{T}'$ qui serait fausse ; si cette conjonction d'axiomes était déjà une conjonction d'axiomes de $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}$ serait contradictoire, et R serait vraie dans $\mathcal{T}$; si au contraire cette conjonction d'axiomes n'est pas une conjonction d'axiomes de $\mathcal{T}$, elle est de la forme

"A et $\bar{R}$" où A est une conjonction d'axiomes de $\mathcal{C}$ et dire qu'elle est fausse signifierait que (A $\rightarrow$ R) est une identité logique, c'est-à-dire que R est $\mathcal{C}$-vraie. Inversement, on a vu ci-dessus que si R est $\mathcal{C}$-vraie, la théorie $\mathcal{C}'$ est contradictoire. On voit donc que pour affirmer qu'il est <u>impossible</u> de démontrer qu'une relation R soit $\mathcal{C}$-vraie et qu'il est également <u>impossible</u> de démontrer qu'elle soit $\mathcal{C}$-fausse, il faut prouver que les théories $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$, obtenues respectivement en ajoutant aux axiomes de $\mathcal{C}$ la relation $\bar{R}$ et la relation R , sont <u>toutes deux non-contradictoires</u>.

Signalons enfin que nous montrerons ultérieurement comment, pour certaines théories, le problème de la non-contradiction peut se ramener au même problème pour d'autres théories ; nous verrons que, dans certains cas, on peut affirmer que, <u>si</u> on admet qu'une théorie $\mathcal{C}$ n'est pas contradictoire, on peut être assuré qu'une autre théorie $\mathcal{C}'$ ne l'est pas non plus.

3. <u>Arguments typiques et quantificateurs typiques</u>. Soit $\mathcal{C}$ une théorie, Θ une relation contenant comme arguments libres certains arguments de base de $\mathcal{C}$ (ou aucun éventuellement), et un argument ξ distinct des arguments de base de $\mathcal{C}$. Considérons alors la théorie $\mathcal{C}_1$, subordonnée à $\mathcal{C}$, obtenue en ajoutant aux axiomes de $\mathcal{C}$ la relation Θ . Dans cette théorie, les arguments de base sont ceux de $\mathcal{C}$, et en outre ξ ; dans l'application des règles du raisonnement aux relations $\mathcal{C}_1$-vraies, il résulte de ce qui a été vu ci-dessus qu'il n'y a de différence avec les règles de raisonnement pour les identités logiques que lorsque les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ s'appliquent à un argument de base, en particulier à ξ . Nous allons voir que l'on peut rétablir la validité de toutes les règles du raisonnement du § 2 , <u>sans restriction</u> relative à

à l'emploi de l'argument ξ , en remplaçant partout les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ par deux nouveaux signes que nous allons définir.

Ces signes abréviateurs sont $\forall_{\Theta}$ et $\exists_{\Theta}$; ils ne s'appliquent qu'à l'argument ξ , et les règles qui les définissent sont les suivantes :

1° $(\forall_{\Theta}\xi)R$ est une relation synonyme de $(\forall\xi)(\overline{\Theta}$ ou $R)$.

2° $(\exists_{\Theta}\xi)R$ est une relation synonyme de $(\exists\xi)(\Theta$ et $R)$.

Reprenons alors toutes les règles du raisonnement où figurent les signes $\forall$ et $\exists$; nous allons énumérer les règles correspondantes contenant les signes $\forall_{\Theta}$ et $\exists_{\Theta}$; il doit être entendu que, dans l'énoncé de ces règles, les mots "entraîne" , resp. "équivalent" signifient "<u>entraîne dans la théorie</u> $\mathcal{C}_1$ " resp. "<u>équivalent dans la théorie</u> $\mathcal{C}_1$ " . On notera que Θ est <u>vraie</u> (dans la théorie $\mathcal{C}_1$), donc aussi $(\exists\xi)\Theta$.

On a d'abord les règles qui correspondent aux règles de synonymie (s4), (s10), (s21) :

(s"1) La négation de $(\forall_{\Theta}\xi)R$ est synonyme de $(\exists_{\Theta}\xi)\overline{R}$.

(s"2) Si ξ n'est pas libre dans R , la relation $(\forall_{\Theta}\xi)(R$ ou $S)$ est équivalente à "R ou $(\forall_{\Theta}\xi)S$" : la relation $(\forall_{\Theta}\xi)(R$ et $S)$ est équivalente à "R et $(\forall_{\Theta}\xi)S$" .

(s"3) Si ξ n'est pas libre dans R , la relation $(\exists_{\Theta}\xi)(R$ et $S)$ est équivalente à "R et $(\exists_{\Theta}\xi)S$" ; la relation $(\exists_{\Theta}\xi)(R$ ou $S)$ est équivalente à "R ou $(\exists_{\Theta}\xi)S$" .

La règle (s"1) est immédiate, et permet de déduire (s"3) de (s"2). Pour démontrer (s"2) remarquons que $(\forall\xi)(\overline{\Theta}$ ou R ou $S)$ est équivalente à "R ou $(\forall\xi)(\overline{\Theta}$ ou $S)$", ce qui établit la première partie de la règle ; d'autre part, $(\forall\xi)(\overline{\Theta}$ ou $(R$ et $S))$ est équivalente à $(\forall\xi)((\overline{\Theta}$ ou $R)$ et $(\overline{\Theta}$ ou $S))$, donc à "$(\forall\xi)(\overline{\Theta}$ ou $R)$ et $(\forall\xi)(\overline{\Theta}$ ou $S)$" ; $(\forall\xi)(\overline{\Theta}$ ou $R)$

est d'après l'hypothèse, équivalente à "$(\forall \xi)\, \overline{\Theta}$ ou R" ; mais comme $(\exists \xi)\, \Theta$ est vraie, "$(\forall \xi)\, \overline{\Theta}$ ou R" est équivalente à R , ce qui complète la démonstration.

Passons à la règle correspondante à (r6) :

(r"1) Si R est vraie, $(\forall_{\Theta} \xi)$R est vraie.

En effet, par hypothèse, Θ entraîne R dans la théorie $\mathcal{C}$, donc il existe une conjonction d'axiomes A de $\mathcal{C}$ telle que ($\overline{A}$ ou $\overline{\Theta}$ ou R) soit une identité logique ; on en conclut que $(\forall \xi)$($\overline{A}$ ou $\overline{\Theta}$ ou R) est une identité logique ; mais cette relation est équivalente à "$\overline{A}$ ou $(\forall \xi)$($\overline{\Theta}$ ou R)", donc $(\forall \xi)$ ($\overline{\Theta}$ ou R) est $\mathcal{C}$-vraie, et a fortiori $\mathcal{C}_1$-vraie.

Enfin, aux règles (v13), (v14),(v39),(v40),(v41),(v42),(v23),(v24),(v25), (v26),(r7) et (r8) correspondent les suivantes :

(v"1) R entraîne $(\exists_{\Theta} \xi)$R .

(v"2) $(\forall_{\Theta} \xi)$R entraîne R .

(v"3) Si ξ n'est pas libre dans R , $(\forall_{\Theta} \xi)$R est équivalente à R .

(v"4) Si ξ n'est pas libre dans R , $(\exists_{\Theta} \xi)$R est équivalente à R .

(v"5) $(\forall_{\Theta} \xi)$(R et S) est équivalente à ($(\forall_{\Theta} \xi)$R et $(\forall_{\Theta} \xi)$S)

(v"6) $(\exists_{\Theta} \xi)$(R ou S) est équivalente à ($(\exists_{\Theta} \xi)$R ou $(\exists_{\Theta} \xi)$S)

(v"7) ($(\forall_{\Theta} \xi)$R et $(\exists_{\Theta} \xi)$S) entraîne $(\exists_{\Theta} \xi)$(R et S)

(v"8) $(\forall_{\Theta} \xi)$(R ou S) entraîne ($(\forall_{\Theta} \xi)$R ou $(\exists_{\Theta} \xi)$S)

(v"9) $(\exists_{\Theta} \xi)$(R et S) entraîne ($(\exists_{\Theta} \xi)$R et $(\exists_{\Theta} \xi)$S)

(v"10) ($(\forall_{\Theta} \xi)$R ou $(\forall_{\Theta} \xi)$S) entraîne $(\forall_{\Theta} \xi)$(R ou S) .

(r"2) Si R entraîne S , $(\forall_{\Theta} \xi)$R entraîne $(\forall_{\Theta} \xi)$S .

(r"3) Si R entraîne S , $(\exists_{\Theta} \xi)$R entraîne $(\exists_{\Theta} \xi)$S .

Nous démontrerons seulement la règle (v"1), laissant les autres raisonnements (qui sont analogues) au lecteur. D'après (v13), la relation (Θ et R) entraîne $(\exists \xi)$(Θ et R) ;

mais comme Θ est <u>vraie</u> (dans la théorie $\mathcal{C}_1$), (Θ et R) est équivalente à R ; d'où la règle (v"1).

Notons encore que la relation $(\forall \xi)$R entraîne $(\forall_{\Theta} \xi)$R , car R entraîne ($\overline{\Theta}$ ou R) ; de même $(\exists_{\Theta} \xi)$R entraîne $(\exists \xi)$R , car (Θ et R) entraîne R .

Lorsqu'on énonce des relations vraies dans la théorie $\mathcal{C}_1$, on fait les conventions de langage suivantes : au lieu de dire qu'une relation R est <u>vraie dans la théorie</u> $\mathcal{C}_1$, on convient de dire qu'elle est <u>vraie dans la théorie</u> $\mathcal{C}$, <u>lorsque</u> ξ <u>est un argument de type</u> Θ ; les combinaisons de signes $\forall_{\Theta} \xi$, et $\exists_{\Theta} \xi$ se lisent respectivement "<u>quel que soit</u> ξ <u>de type</u> Θ", et "<u>il existe</u> ξ <u>de type</u> Θ <u>tel que</u>". On dit que $\forall_{\Theta}$ et $\exists_{\Theta}$ sont des <u>quantificateurs typiques</u>.

Le plus souvent, on dira au début des raisonnements dans la théorie $\mathcal{C}_1$: "soit ξ un argument de type Θ ", et les mots "relation vraie" seront pris dans la suite au sens de "relation $\mathcal{C}_1$-vraie" ; de même pour les locutions "R entraîne S" , "R est équivalente à S" .

Au lieu d'ajouter aux axiomes de la théorie $\mathcal{C}$ une seule relation contenant un seul argument distinct des arguments de base de $\mathcal{C}$, on peut considérer une théorie $\mathcal{C}_1$ obtenue en ajoutant plusieurs relations Θ , Θ' , Θ'', etc., chacune d'elles contenant un seul argument libre ξ, ξ', ξ''(dit respectivement "de type Θ ", "de type Θ''' , "de type $\Theta''\,''$),ces arguments étant distincts les uns des autres et distincts des arguments de base de $\mathcal{C}$. Pour chacun de ces arguments, on introduit les quantificateurs typiques correspondants, qui obéissent aux règles que nous venons d'énoncer. On peut en outre énoncer les règles correspondant aux règles (s8), (s19) et (v27) :

(s"4) $(\forall_{\Theta}\xi)((\forall_{\Theta'}\xi')R)$ est synonyme de $(\forall_{\Theta'}\xi')((\forall_{\Theta}\xi)R)$.

(s"5) $(\exists_{\Theta}\xi)((\exists_{\Theta'}\xi')R)$ est synonyme de $(\exists_{\Theta'}\xi')((\exists_{\Theta}\xi)R)$.

En effet, $(\forall_{\Theta}\xi)((\forall_{\Theta'}\xi')R)$ est synonyme de $(\forall\xi)(\overline{\Theta}$ ou $(\forall\xi')(\overline{\Theta}'$ ou R)) ; comme ξ' ne figure pas dans Θ, elle est aussi synonyme de $(\forall\xi)(\forall\xi')(\overline{\Theta}$ ou $\overline{\Theta}'$ ou R) ; mais le même raisonnement montre que $(\forall_{\Theta'}\xi')((\forall_{\Theta}\xi)R)$ est synonyme de $(\forall\xi')(\forall\xi)(\overline{\Theta}'$ ou Θ ou R) ; les deux relations sont donc bien synonymes.

(s"6) $(\exists_{\Theta}\xi)(\forall_{\Theta'}\xi')R$ entraîne $(\forall_{\Theta'}\xi')(\exists_{\Theta}\xi)R$.

En effet, $(\exists_{\Theta}\xi)(\forall_{\Theta'}\xi')R$ est synonyme de $(\exists\xi)(\Theta$ et $(\forall\xi')(\overline{\Theta}'$ ou R)), donc de $(\exists\xi)(\forall\xi')(\Theta$ et $(\overline{\Theta}'$ ou R)). D'après (v27), cette relation entraîne $(\forall\xi')(\exists\xi)(\Theta$ et $(\overline{\Theta}'$ ou R)), qui est synonyme de $(\forall\xi')(\exists\xi)((\Theta$ et $\overline{\Theta}')$ ou $(\Theta$ et R)) ; cette relation est équivalente à $(\forall\xi')((\exists\xi)(\Theta$ et $\overline{\Theta}')$ ou $(\exists\xi)(\Theta$ et R)) ; comme ξ ne figure pas dans $\overline{\Theta}'$, la relation $(\exists\xi)(\Theta$ et $\overline{\Theta}')$ est équivalente à " $\overline{\Theta}'$ et $(\exists\xi)\Theta$ ", donc aussi à $\overline{\Theta}'$, puisque $(\exists\xi)\Theta$ est vraie. La règle est donc établie.

Reste enfin à donner les analogues des règles (v11) et (v12) où figure le symbole $(\eta|\xi)$. Il faut pour cela se placer dans une théorie où on a introduit comme axiome, non seulement la relation Θ mais aussi la relation $(\eta|\xi)\Theta$, η étant un argument distinct des arguments de Θ. Dans ces conditions, les analogues de (v11) et (v12) sont :

(v"11) $(\eta|\xi)R$ entraîne $(\exists_{\Theta}\xi)R$.

(v"12) $(\forall_{\Theta}\xi)R$ entraîne $(\eta|\xi)R$.

En effet, la relation $((\eta|\xi)\Theta$ et $(\eta|\xi)R)$ entraîne $(\exists\xi)(\Theta$ et R) ; mais dans la théorie où nous nous plaçons, la relation $(\eta|\xi)\Theta$ est vraie, donc $((\eta|\xi)\Theta$ et $(\eta|\xi)R)$ est équivalente à $(\eta|\xi)R$, ce qui établit (v"11).

Par abus de langage, on conviendra de considérer η comme un autre argument du type Ⓗ ; introduire plusieurs arguments d'un même type Ⓗ revient donc à considérer la théorie obtenue en ajoutant aux axiomes de $\mathcal{C}$ la relation Ⓗ et celles qu'on obtient en substituant à ξ dans Ⓗ les autres arguments "de même type que ξ".

LIVRE I

THEORIE DES ENSEMBLES

CHAPITRE II (Etat 3)

THEORIE DES ENSEMBLES ABSTRAITS

Sommaire

§ 1 : La relation d'égalité et les symboles fonctionnels. 1 : Les relations d'égalité. 2 : Relations fonctionnelles et symboles fonctionnels. 3 : Le principe des relations fonctionnelles composées. 4 : Les relations fonctionnelles biunivoques. 5 : Les relations fonctionnelles typiques.

§ 2 : La relation d'appartenance. 1 : Relation d'appartenance et relation d'inclusion. 2 : La règle de fonctionnalisation. 3 : La théorie des parties d'un ensemble. 4 : Partie réduite à un élément, complémentaire d'une partie, réunion et intersection de deux parties. 5 : Théorie des parties d'un sous-ensemble.

§ 3 : Produit de deux ensembles. 1 : La relation de couplage. 2 : La théorie du produit de deux ensembles. 3 : Relations et parties explicites d'un produit.

§ 4 : Fonctions : 1 : Conventions de langage. 2 : Applications de E dans F . 3 : Applications de E sur F . Applications biunivoques de E dans F . 4 : Extension d'une application aux ensembles de parties. 5 : Extension réciproque d'une application aux ensembles de parties. 6 : Applications composées. 7 : Fonctions de deux arguments. 8 : Applications définies par des parties d'un produit. 9 : Applications canoniques des produits.

....

39

§ 5 : Réunion, intersection, produit d'une famille d'ensembles.

1 : Familles d'éléments. 2 : Réunion d'une famille d'ensembles. 3 : Recouvrements ; partitions ; somme d'une famille d'ensembles. 4 : Intersection d'une famille d'ensembles. 5 : Produit d'une famille d'ensembles. 6 : L'axiome de choix.

§ 6 : Relations d'équivalence. Ensembles quotients. 1 : Partitions et relations d'équivalence. 2 : Applications et relations d'équivalence. 3 : Relation d'équivalence induite. 4 : Relations compatibles avec une relation d'équivalence. 5 : Fonctions compatibles avec deux relations d'équivalence. 6 : Quotient de deux relations d'équivalence. 7 : Produit de deux relations d'équivalence.

§ 7 : Structures. 1 : Echelle des types sur des ensembles de base. 2 : La notion de structure. 3 : Utilisation des structures. Non-contradiction des théories. 4 : Transports de structures et isomorphismes. 5 : Identifications et dédoublements.

- III -

Commentaires

Ce chapitre doit naturellement correspondre aux parties du fascicule de résultats autres que les §§ sur les puissances et les ensembles ordonnés, en donnant les démonstrations des résultats en question. Il s'agit de savoir comment ces démonstrations doivent être présentées. Le but poursuivi par le rédacteur a été le suivant : partant du langage logique absolument rigoureux décrit dans le chap.I, amener peu à peu le lecteur, par des gradations aussi ménagées que possible, au langage "naïf" qui doit être celui du reste du Traité. Ce projet cherche à éviter deux écueils ; d'une part, l'adhésion stricte au langage logique rendrait le chapitre illisible ; d'autre part, il est absolument nécessaire de savoir sur quelles bases reposent les raisonnements, et en particulier ce que sont les "symboles fonctionnels" et "éléments explicites" qui jouent le rôle capital dans toute l'affaire ; faute de quoi, on en est réduit à des escroqueries verbales qui laissent une profonde impression de malaise. Aussi le rédacteur a-t-il cherché à être le plus précis possible dans les 3 premiers §§ , qui exposent les axiomes de la théorie des ensembles, et leurs plus importantes conséquences ; à partir du § 4 , il a au contraire "jeté du lest" en se rapprochant de la rédaction Weil, et en adoptant un langage plus souple, mais qu'il est toujours facile de traduire en langage logique rigoureux grâce à ce qui a été vu dans les premiers §§. Il s'est rendu compte à l'épreuve que la tâche qu'il s'était proposée n'était pas des plus faciles à mener à bien, et ne se flatte nullement d'y avoir tout à fait réussi ; aussi espère-t-il que les efforts conjugués de tout Bourbaki parviendront à réaliser complétement ce qu'il a ébauché, en conservant l'idée première qui l'a guidé.

Le lecteur observera que le système logique adopté pour exposer la Théorie des ensembles (formalisation du système d'axiomes de Zermolo-Fraenkel, suivant une méthode de H. Cartan) permet de liquider tous les anciens tabous, et de dire par exemple "quel que soit l'ensemble E " sans pour cela qu'on ait à parler de l'ensemble de tous les ensembles !

CHAPITRE II (Etat 3)

THEORIE DES ENSEMBLES ABSTRAITS

§1. La relation d'égalité et les symboles fonctionnels.

La théorie des ensembles comprend trois sortes de relations primitives ; elle repose sur trois groupes d'axiomes et schémas d'axiomes, chacun de ces groupes se rapportant à une des trois espèces de relations primitives de la théorie. Nous étudierons d'abord la théorie partielle où on n'introduit que le premier de ces groupes d'axiomes et schémas d'axiomes, celui qui se rapporte aux relations d'<u>égalité</u>.

1. <u>Les relations d'égalité.</u> Nous posons comme première règle que l'assemblage de signes obtenu en écrivant deux arguments quelconques, l'un à gauche l'autre à droite du signe = (qui se lit "égale") est une <u>relation primitive</u> ; toute relation de cette nature est dite <u>relation d'égalité</u>. On introduit le signe abréviateur $\neq$ (qui se lit "différent de") ; tout assemblage obtenu en écrivant deux arguments, l'un à gauche, l'autre à droite de ce signe est une relation ; en outre $x \neq y$ est synonyme de la négation de $x=y$.

La <u>théorie de l'égalité</u> est une théorie sans argument de base, reposant sur un axiome :

(E_I) $(\forall x)(x=x)$,

et un schéma d'axiome :

(e1) $(\forall \ldots)((\xi = \eta) \to ((\xi|\zeta)R \to (\eta|\zeta)R)))$

R devant naturellement être remplacé par une relation <u>normale</u>, ξ, η, ζ par des arguments (distincts ou non) <u>non liés</u> dans R .

On en déduit que, <u>dans la théorie de l'égalité</u>, la relation $x=x$ est vraie, et le schéma "$(\xi = \eta) \to ((\xi|\zeta)R \to (\eta|\zeta)R)$" un schéma de relation vraie. Dans ce qui suit, conformément aux conventions du chap.I, § 3, le mot "vrai" est toujours employé dans le sens de "vrai dans la théorie de l'égalité" .

Proposition 1. La relation $x=y$ est équivalente à $y=x$.

Substituons successivement x et y à z dans la relation $z=x$; d'après le schéma (e1), $(x=y)$ entraîne $(x \neq x$ ou $y=x)$; comme $x=x$ est vraie, $(x \neq x$ ou $y=x)$ est équivalente à $y=x$ (règle (r'12)), donc (règle (r'5)), $x=y$ entraîne $y=x$. Comme cela signifie que la relation $(x=y) \longrightarrow (y=x)$ est vraie, en remplaçant successivement dans cette relation y par z , x par t , puis z par x et enfin t par y on voit que $y=x$ entraîne $x=y$.

Proposition 2.- La relation $(x=y$ et $y=z)$ entraîne $x=z$.

Substituons successivement x et y à u dans la relation $u \neq z$; d'après le schéma (e1), la relation $(x=y) \rightarrow (x=z$ ou $y \neq z)$ est vraie ; mais elle est synonyme de $(x \neq y$ ou $y \neq z$ ou $x=z)$, et aussi de $(x=y$ et $y=z) \longrightarrow (x=z)$.

En outre, on a le schéma de relation vraie

(e'1) $\quad ((\xi \mid \xi)R$ et $\xi = \eta) \longrightarrow ((\eta \mid \xi)R)$

En effet, on vérifie aussitôt que ce schéma est synonyme de

$(\xi = \eta) \longrightarrow ((\xi \mid \xi)R \longrightarrow (\eta \mid \xi)R)$.

2. Relations fonctionnelles et symboles fonctionnels. On dit qu'une relation est fonctionnelle par rapport à un argument si elle est normale, si l'argument considéré est libre dans la relation, et si les schémas $(\exists \xi)R$, "$(R$ et $(\eta \mid \xi)R) \longrightarrow (\xi = \eta)$" deviennent des relations vraies lorsqu'on y remplace R par la relation considérée, ξ par l'argument considéré, et η par un argument distinct des arguments figurant dans R .

On convient souvent de dire "il existe un ξ et un seul tel que R" pour énoncer le schéma "$(\exists \xi)R$ et $((R$ et $(\eta \mid \xi)R) \longrightarrow (\xi = \eta))$" .

D'après cette définition, si, dans une relation R fonctionnelle par rapport à ξ, on remplace ξ par un argument ξ' distinct des autres arguments de R, la relation obtenue est fonctionnelle par rapport à ξ'. Si η est un argument libre dans R, distinct de ξ, et si on remplace η par un argument ζ distinct de η et de ξ (mais pouvant déjà figurer dans R comme argument libre), la relation obtenue est encore fonctionnelle par rapport à ξ.

Si S est une relation normale équivalente à une relation R fonctionnelle par rapport à ξ, et si ξ est libre dans S, la relation S est fonctionnelle par rapport à ξ, car $(\eta \mid \xi)S$ est équivalente à $(\eta \mid \xi)R$, lorsque η est différent des arguments figurant dans R ou dans S.

On a le schéma de relation vraie

(e'1 bis) $\quad (R \text{ et } (\eta \mid \xi)R) \rightleftarrows (R \text{ et } \xi = \eta)$

lorsqu'on remplace R par une relation fonctionnelle par rapport à ξ, η par un argument ne figurant pas dans R.

En effet, comme R est fonctionnelle par rapport à ξ, on a $(R \text{ et } (\eta \mid \xi)R) \to (\xi = \eta)$; donc $(R \text{ et } (\eta \mid \xi)R) \to (R \text{ et } \xi = \eta)$. D'autre part, d'après (e'1), on a $(R \text{ et } \xi = \eta) \to (\eta \mid \xi)R$; donc on a $(R \text{ et } \xi = \eta) \to (R \text{ et } (\eta \mid \xi)R)$.

L'utilité des relations fonctionnelles repose sur le schéma fondamental suivant

(e'2) $\quad ((\exists \xi)(R \text{ et } S) \rightleftarrows ((\forall \xi)(\overline{R} \text{ ou } S))$

qui est un schéma de relation vraie quand on remplace R par une relation fonctionnelle par rapport à ξ, et S par une relation normale quelconque où ξ n'est pas un argument lié.

Comme (R ou $\overline{R}$) est vraie, ($\overline{R}$ ou S) est équivalente à (($\overline{R}$ ou S) et ($\overline{R}$ ou R)) (règle r'13)), donc aussi (règle (s9)) à ($\overline{R}$ ou (R et S)). Il en résulte que $(\forall\xi)$($\overline{R}$ ou S) est équivalente à $(\forall\xi)$($\overline{R}$ ou (R et S)) (règle (r'18)) ; mais d'après le schéma (v 24), $(\forall\xi)$($\overline{R}$ ou (R et S)) entraîne (($\forall\xi)\overline{R}$ ou $(\exists\xi)$(R et S)), et cette dernière relation est équivalente à $(\exists\xi)$(R et S), puisque $(\forall\xi)\overline{R}$ est fausse (règle (r'12). Donc $(\forall\xi)$ ($\overline{R}$ ou S) entraîne $(\exists\xi)$ (R et S).

Inversement, si η est distinct des arguments figurant dans R ou dans S, (R et S) est équivalente à ((R et S) et ($\overline{R}$ ou $(\eta\mid\xi)\overline{R}$ ou $\xi=\eta$)), puisque ($\overline{R}$ ou $(\eta\mid\xi)\overline{R}$ ou $\xi = \eta$) est par hypothèse vraie (règle r'13)). Mais ((R et S) et ($\overline{R}$ ou $(\eta\mid\xi)\overline{R}$ ou $\xi=\eta$) est synonyme de (R et $\overline{R}$ et S) ou (R et $(\eta\mid\xi)\overline{R}$ et S) ou (R et S et $\xi=\eta$). Mais comme (R et $\overline{R}$ et S) est fausse (règle (v3)), cette relation est équivalente à

(R et $(\eta\mid\xi)\overline{R}$ et S) ou (R et S et $\xi = \eta$)

Or, (R et $(\eta\mid\xi)\overline{R}$ et S) entraîne $(\eta\mid\xi)\overline{R}$; (R et S et $\xi=\eta$) entraîne (S et $\xi=\eta$), donc, d'après le schéma (e'1), elle entraîne aussi $(\eta\mid\xi)S$. Donc nous voyons que (R et S) entraîne ($(\eta\mid\xi)\overline{R}$ ou $(\eta\mid\xi)S$) (règle (r'7) et transitivité) ; il en résulte (règles (r'10) et (r'11)) que $(\forall\eta)(\exists\xi)$ (R et S) entraîne $(\forall\eta)(\exists\xi)$($(\eta\mid\xi)\overline{R}$ ou $(\eta\mid\xi)S$). Mais comme η ne figure pas dans (R et S), $(\forall\eta)(\exists\xi)$($R$ et S) est équivalente à $(\exists\xi)$(R et S) (règle v 39)), et de même, comme ξ ne figure pas dans ($(\eta\mid\xi)\overline{R}$ ou $(\eta\mid\xi)S$), $(\forall\eta)(\exists\xi)$($(\eta\mid\xi)\overline{R}$ ou

$(\eta|\xi)S)$ est équivalente à $(\forall\eta)(\eta|\xi)\overline{R}$ ou $(\eta|\xi)S)$ (règle (v 40)) ; enfin, cette dernière relation est synonyme de $(\forall\xi)(\overline{R}$ ou $S)$ d'après la règle (s1), ce qui prouve que $(\exists\xi)(R$ et $S)$ entraîne $(\forall\xi)(\overline{R}$ ou $S)$, et achève le raisonnement.

Du schéma (e'2), on déduit les suivants, dans lesquels R doit toujours être remplacé par une relation fonctionnelle en ξ, S et T par des relations normales où ξ n'est pas lié :

(e'3) $\quad \overline{((\exists\xi)(R \text{ et } S))} \rightleftarrows (\exists\xi)(R \text{ et } \overline{S})$

(e'4) $\quad (\exists\xi)(R \text{ et } (S \text{ et } T)) \rightleftarrows ((\exists\xi)(R \text{ et } S) \text{ et } (\exists\xi)(R \text{ et } T))$

(e'5) $\quad (\exists\xi)(R \text{ et } (S \text{ ou } T)) \rightleftarrows ((\exists\xi)(R \text{ et } S) \text{ ou } (\exists\xi)(R \text{ et } T))$

(e'6) $\quad (\exists\xi)(R \text{ et } (\forall\eta)S) \rightleftarrows (\forall\eta)(\exists\xi)(R \text{ et } S)$, pourvu que η soit distinct des arguments de R.

(e'7) $\quad (\exists\xi)(R \text{ et } (\exists\eta)S) \rightleftarrows (\exists\eta)(\exists\xi)(R \text{ et } S)$, pourvu que η soit distinct des arguments de R.

Le schéma (e'3) est synonyme de (e'2) ; (e'5) est une conséquence immédiate de (v42), et (e'7) de (s21) et (s19) ; reste à établir (e'4) et (e'6). Pour (e'4) d'après (e'2), $(\exists\xi)(R$ et $(S$ et $T))$ est équivalente à $(\forall\xi)(\overline{R}$ ou $(S$ et $T))$, donc (règle (v41)) à $((\forall\xi)(\overline{R}$ ou $S)$ et $(\forall\xi)(\overline{R}$ ou $T)$; comme $(\forall\xi)(\overline{R}$ ou $S)$ est équivalente à $(\exists\xi)(R$ et $S)$, $(\forall\xi)(\overline{R}$ ou $T)$ équivalente à $(\exists\xi)(R$ et $T)$ d'après (e'2), (e'4) se trouve établi. De même $(\exists\xi)(R$ et $(\forall\eta)S)$ est équivalente à $(\forall\xi)(\overline{R}$ ou $(\forall\eta)S)$, donc d'après (s10), à $(\forall\xi)(\forall\eta)(\overline{R}$ ou $S)$, puisque η ne figure pas dans R ; d'après (s8), cette dernière relation est équivalente à $(\forall\eta)(\forall\xi)(\overline{R}$ ou $S)$, qui est équivalente à $(\forall\eta)(\exists\xi)$ $(R$ et $S)$ d'après (e'2) et (r'18).

Enfin, on a le schéma

(c'8) $S \rightleftarrows (\exists \xi)(R \text{ et } S)$, pourvu que ξ ne figure pas dans S .

En effet, $(\exists \xi)(R \text{ et } S)$ est alors équivalente à $((\exists \xi)R \text{ et } S)$, et comme $(\exists \xi)R$ est vraie, $((\exists \xi)R \text{ et } S)$ est équivalente à S (règle (r'13)).

Les schémas (c'3) à (c'8) nous montrent que, lorsque R est fonctionnelle en ξ , l'opération qui consiste à passer d'une relation S (normale, et où ξ n'est pas lié), à la relation $(\exists \xi)(R \text{ et } S)$ est (à l'équivalence près) permutable avec les 5 opérations fondamentales du chap.I, et qu'elle remplace S par une relation équivalente lorsque ξ ne figure pas dans S . Autrement dit, elle jouit de propriétés tout à fait analogues à l'opération $(\eta \mid \xi)S$ qui consiste à remplacer ξ par un autre argument dans S . C'est ce qui permet d'introduire, pour abréger l'écriture, la notation des symboles fonctionnels, dont nous allons maintenant exposer le mode d'emploi.

Lorsqu'une relation R est fonctionnelle par rapport à ξ , on forme une ou plusieurs combinaisons de signes, qu'on appelle symboles fonctionnels attachés à cette relation ; un tel symbole peut être dans chaque cas laissé à l'arbitraire du mathématicien, à condition de respecter la règle suivante ; le symbole choisi ne doit pas contenir ξ , et doit contenir tous les arguments libres et distincts de ξ de la relation fonctionnelle R ; il peut éventuellement contenir aussi des arguments liés de R , mais dans ce cas, il faut préciser que les arguments libres dans R et distincts de ξ sont ce qu'on appellera les arguments libres du symbole fonctionnel, les autres étant les arguments liés dans ce symbole.

Ceci posé, étant donnée une relation normale S dans laquelle ξ est un argument libre, et telle que (R et S) soit <u>normale</u> (ce qui signifie donc qu'aucun argument libre dans R (resp. S) n'est lié dans S (resp. R)) on pose comme règle que, lorsqu'on substitue partout à ξ ~~dans~~ un même symbole fonctionnel attaché à R, l'assemblage obtenu est encore une relation, synonyme de $(\exists\, \xi)$ (R et S) ; d'après la règle générale concernant les signes abréviateurs, les arguments libres dans cette relation sont donc ceux qui sont libres dans l'une au moins des relations R, S, <u>à l'exception de</u> ξ ; on peut encore dire que ce sont les arguments qui sont, soit libres dans le symbole fonctionnel, soit libres dans S et distincts de ξ.

On introduira en outre le signe abréviateur $(f_R \mid \xi)S$; on conviendra que c'est un schéma de relation, où f_R doit être remplacé par un symbole fonctionnel attaché à une relation fonctionnelle R, ξ par l'argument par rapport auquel cette relation est fonctionnelle, S par une relation où ξ est non lié, et telle que (R et S) soit normale ; en outre, toute relation formée suivant ce schéma est équivalente à celle formée suivant le schéma $(\exists\, \xi)$ (R et S), donc aussi à la relation formée en substituant partout à ξ dans S le symbole fonctionnel f_R. Dans le cas particulier où S <u>ne contient pas</u> ξ, la relation $(f_R \mid \xi)S$ est identique à S, et elle est encore équivalente à $(\exists\, \xi)$(R et S) d'après (e'8). Si la relation S est <u>vraie</u>, la relation $(f_R \mid \xi)S$ est <u>vraie</u>, car R est alors équivalente à (R et S) ; comme $(\exists\, \xi)R$ est vraie, $(\exists\, \xi)$ (R et S) est vraie.

C'est de cette règle qu'on déduit en particulier la possibilité, fréquemment utilisée, d'"appliquer" une théorie à une autre.

En effet, si, dans les axiomes d'une théorie, on substitue aux arguments de base des symboles fonctionnels contenant les arguments de base d'une autre théorie, on obtient des relations qui, dans cette dernière théorie, entraînent toutes les relations qu'on obtient en effectuant la même substitution dans les relations vraies de la théorie initiales.

Si η est un argument distinct des arguments figurant dans R ou dans S, nous avons vu ci-dessus que $(\eta \mid \xi)R$ est une relation fonctionnelle en η ; en outre, f_R peut encore être considéré comme symbole fonctionnel de cette relation, car la relation $(\exists\ \eta)((\eta \mid \xi)R$ et $(\eta \mid \xi)S)$ est synonyme de $(\exists\ \xi)(R$ et $S)$, et $(f_R \mid \eta)(\eta \mid \xi)S$ n'est autre que la relation $(f_R \mid \xi)S$ par définition.

Soit ζ un argument libre dans R, distinct de ξ, et ne figurant pas dans S ; soit ζ' un argument distinct de ξ (mais pouvant figurer dans R ou S comme argument libre). Si R' est la relation $(\zeta' \mid \zeta)R$, R' est fonctionnelle en ξ ; la relation $(f_{R'} \mid \xi)S$ est synonyme de $(\exists\ \xi)((\zeta' \mid \zeta)R$ et $S)$, c'est-à-dire de $(\zeta' \mid \zeta)((\exists\ \xi)(R$ et $S))$ puisque S ne contient pas ζ. Cela montre qu'on peut considérer comme un symbole fonctionnel attaché à R' la combinaison de signes obtenue en remplaçant, <u>dans</u> f_R, l'argument ζ par ζ' ; on le désignera par $(\zeta' \mid \zeta)f_R$.

Considérons maintenant la relation $\xi = f_R$; comme f_R est un symbole fonctionnel de $(\eta \mid \xi)R$, cette relation n'est autre que $(f_R \mid \eta)(\xi = \eta)$. On a le schéma de relation vraie : (e'9) $(\xi = f_R) \rightleftarrows R$.

En effet, $\xi = f_R$ est équivalente à $(\exists\ \eta)((\eta \mid \xi)R$ et $\xi = \eta)$. D'après (e'1bis) $((\eta \mid \xi)R$ et $\xi = \eta)$ est équivalente à $(R$ et $(\eta \mid \xi)R)$, donc $\xi = f_R$ est équivalente à $(\exists\ \eta)(R$ et $(\eta \mid \xi)R)$; comme R ne contient pas η, cette relation est aussi équivalente à (R et $(\exists \eta)((\eta|\xi)R)$) ; enfin, comme $(\exists \eta)$ $((\eta|\xi)R)$ est vraie, on voit finalement que $\xi = f_R$ est équivalente à R .

On a aussi le schéma de relation vraie :

(e'9 bis) $(f_R|\xi)R$.

En effet, $(f_R|\xi)R$ est équivalente à $(\exists\xi)(R \text{ et } R)$, donc à $(\exists\xi)R$, qui est vraie par hypothèse.

Signalons encore les schémas de relations vraies suivants :

(e'10) $(\forall\xi)S \rightarrow (f_R|\xi)S$

(e'11) $(f_R|\xi)S \rightarrow (\exists\xi)S$

En effet, comme S entraîne ($\bar{R}$ ou S), $(\forall\xi)S$ entraîne $(\forall\xi)$ ($\bar{R}$ ou S), relation qui est synonyme de $(f_R|\xi)S$; de même pour (e'11).

On a aussi le schéma suivant, qui est à la source de la méthode de résolution des équations connue sous le nomde "méthode de substitution":

(e'12) $(R \text{ et } S) \rightleftarrows (R \text{ et } (f_R|\xi)S)$

En effet, $(f_R|\xi)S$ est synonyme de $(\exists\xi)$ (R et S), et (R et S) entraîne $(\exists\xi)$(R et S) ; comme (R et S) entraîne R , (R et S) entraîne (R et $(f_R|\xi)S$). Inversement, $(f_R|\xi)S$ est synonyme de $(\forall\xi)(\bar{R}$ ou S), donc entraîne ($\bar{R}$ ou S) ; par suite (R et $(f_R|\xi)S$) entraîne (R et ($\bar{R}$ ou S)), qui est synonyme de ((R et $\bar{R}$) ou (R et S)) ; comme (R et $\bar{R}$) est fausse, (R et ($\bar{R}$ ou S)) est équivalente à (R et S), ce qui achève la démonstration.

Si R et S sont <u>toutes deux des relations fonctionnelles en</u> ξ , on a les schémas de relation vraie :

(e'13) $(f_R=f_S) \leftrightarrows ((\forall\xi)(R \rightleftarrows S))$

(e'14) $(f_R=f_S) \rightarrow ((f_R|\xi)T \rightleftarrows (f_S|\xi)T)$

En effet, comme $(\xi = f_S)$ est équivalente à S d'après (e'9), $(f_R = f_S)$ est équivalente à $(f_R \mid \xi)S$, c'est-à-dire à $(\forall \xi)(R \rightarrow S)$; comme $(f_R = f_S)$ est équivalente à $(f_S = f_R)$, elle est aussi équivalente à $(\forall \xi)(S \rightarrow R)$, donc elle est équivalente à $(\forall \xi)(R \rightleftarrows S)$. D'autre part, si η est un argument distinct des arguments de R,S,T , $(\xi = \eta)$ entraîne $(T \rightleftarrows (\eta \mid \xi)T)$ d'après (e1) ; il en résulte que $(\xi = f_S)$ entraîne $(T \rightleftarrows (f_S \mid \xi)T)$, puis que $(f_R = f_S)$ entraîne $((f_R \mid \xi)T \rightleftarrows (f_S \mid \xi)T)$.

Il résulte de (e'13) que si R et S sont des relations fonctionnelles en ξ <u>équivalentes</u>, la relation $f_R = f_S$ est vraie, et par suite, d'après (e'14), $(f_R \mid \xi)T$ est équivalente à $(f_S \mid \xi)T$ pour une relation quelconque T ; en raison de ce fait, on prend souvent le même symbole fonctionnel pour deux relations fonctionnelles équivalentes. D'autre part, si f_R et g_R sont deux symboles fonctionnels <u>distincts</u> attachés à la <u>même</u> relation fonctionnelle R , la relation $f_R = g_R$ est vraie.

On déduit aussi de (e'13) que, si ζ est un argument libre dans R , distinct de ξ , ξ' et ξ'' deux arguments distincts de ξ , on a le schéma de relation vraie :

(e'14 bis) $\quad (\xi' = \xi'') \rightarrow ((\xi' \mid \xi)f_R = (\xi'' \mid \xi)f_R)$

Cela revient en effet à montrer que $(\xi' = \xi'')$ entraîne $(\forall \xi)((\xi' \mid \xi)R \rightleftarrows (\xi'' \mid \xi)R)$. Or, d'après (e1), $(\xi' = \xi'')$ entraîne $(\xi' \mid \xi)R \rightleftarrows (\xi'' \mid \xi)R$; donc $(\forall \xi)(\xi' = \xi'')$ entraîne $(\forall \xi)((\xi' \mid \xi)R \rightleftarrows (\xi'' \mid \xi)R)$; mais comme ξ est distinct de ξ' et de ξ'' , $(\forall \xi)(\xi' = \xi'')$ est équivalente à $(\xi' = \xi'')$.

3. *Le principe des relations fonctionnelles composées.* Soit R une relation *fonctionnelle* par rapport à un argument ξ , S une relation *fonctionnelle* par rapport à un argument   , S une relation *fonctionnelle* par rapport à un argument η . Dans ces conditions, on a la règle suivante, dite *principe des relations fonctionnelles composées* :

Si η *ne figure pas dans* R , *la relation* $(f_R | \xi)S$ *est fonctionnelle en* η .

En effet, comme $(\exists\, \eta)S$ est vraie, $(f_R | \xi)(\exists\, \eta)S$ est vraie, et cette relations, d'après (e'7) est équivalente à $(\exists\, \eta)((f_R | \xi)S)$. De même, si ζ est un argument distinct des arguments de R et de S , la relation $(S \text{ et } (\zeta | \eta)S) \rightarrow (\eta = \zeta)$ est vraie ; il en est donc de même de la relation obtenue en y substituant f_R à ξ , c'est-à-dire, puisque R ne contient pas η , la relation $((f_R | \xi)S \text{ et } (\zeta | \eta)(f_R | \xi)S)) \rightarrow (\eta = \zeta)$.
La règle est ainsi démontrée.

On a en outre le schéma suivant :

(e'15) $$(f_{(f_R | \xi)S} | \eta)T \rightleftarrows (f_R | \xi)((f_S | \eta)T)$$

pourvu que dans T , η soit *libre* et que T *ne contienne pas* ξ (aucun argument lié dans une des trois relations R,S,T n'étant libre dans une autre).

En effet, la relation $(f_{(f_R | \xi)S} | \eta)T$ est par définition équivalente à $(\exists\, \eta)((f_R | \xi)S \text{ et } T)$; comme T ne contient pas ξ , T est équivalente à $(f_R | \xi)T$, et $((f_R | \xi)S \text{ et } T)$ à $(f_R | \xi)(S \text{ et } T)$; enfin, d'après (e'7), comme R ne contient pas η , $(\exists\, \eta)((f_R | \xi)(S \text{ et } T))$ est équivalente à $(f_R | \xi)((\exists\, \eta)(S \text{ et } T))$, c'est-à-dire à $(f_R | \xi)((f_S | \eta)T)$.

Autrement dit, on obtient deux relations équivalentes, d'une part en substituant à η dans T un symbole fonctionnel attaché à $(f_R \mid \xi)S$, et d'autre part, en substituant d'abord à η un symbole fonctionnel attaché à S , puis, dans la relation obtenue, en substituant à ξ un symbole fonctionnel attaché à R ; mais comme T ne contient pas ξ , on obtient cette dernière relation en substituant à η , dans T , une combinaison de signes formée d'un symbole fonctionnel attaché à S , <u>dans lequel</u> on a remplacé ξ par un symbole fonctionnel attaché à R . C'est pourquoi on peut considérer cette combinaison de signes comme un <u>symbole fonctionnel</u> attaché à la "relation fonctionnelle composée" $(f_R \mid \xi)S$. On le désignera par le signe abréviateur $(f_R \mid \xi)f_S$. On peut ainsi former de nouveaux symboles fonctionnels en <u>substituant</u>, dans un symbole fonctionnel donné, à l'un des arguments qui y figurent, un autre symbole fonctionnel.

Si R et R' sont <u>toutes deux</u> des relations fonctionnelles en ξ (ne contenant pas   ), on a le schéma :

(e'16) $(f_R = f_{R'}) \rightarrow ((f_R \mid \xi)f_S = (f_{R'} \mid \xi)f_S)$

En effet, $f_R = f_{R'}$ entraîne $((f_R \mid \xi)S \rightleftarrows (f_{R'} \mid \xi)S)$, donc $(\forall \eta)(f_R = f_R{'})$, qui est équivalent à $f_R = f_{R'}$, puisque R et R' ne contiennent pas η , entraîne $(\forall \eta)((f_R \mid \xi)S \rightleftarrows (f_{R'} \mid \xi)S)$; or, d'après (e'13) cette dernière relation est équivalente à $(f_R \mid \xi)f_S = (f_{R'} \mid \xi)f_S$.

Enfin, soient R,R' deux relations fonctionnelles respectivement par rapport à ξ et ξ', telles que R <u>ne contienne pas</u> ξ' et que R' <u>ne contienne pas</u> ξ ; si R ~~et~~ ni R' ne contiennent η , on a le schéma de relation vraie

(e'16 bis) $(f_R \mid \xi)(f_{R'} \mid \xi')f_S = (f_{R'} \mid \xi')(f_R \mid \xi)f_S$.

En effet, il suffit de montrer que les relations fonctionnelles composées $(f_R|\xi)(f_{R'}|\xi')S$ et $(f_{R'}|\xi')(f_R|\xi)S$ sont équivalentes ; or, la première est synonyme de $(\exists\xi)$ (R et $(\exists\xi')$(R' et S)), la seconde synonyme de $(\exists\xi')$ (R' et $(\exists\xi)$(R et S)), et en vertu de l'hypothèse, chacune d'elles est synonyme de $(\exists\xi)(\exists\xi')$(R et R' et S)

4. Les relations fonctionnelles biunivoques. On dit qu'une relation B est une relation fonctionnelle biunivoque par rapport à deux arguments ξ, η, si elle est à la fois fonctionnelle par rapport à ξ et fonctionnelle par rapport à η. Désignons par f_B un symbole fonctionnel attaché à B, lorsqu'on considère B comme relation fonctionnelle en ξ ; on a alors le schéma suivant, lorsque R est remplacée par une relation dans laquelle ξ n'est pas lié et η ne figure pas :

(e'17) $(\exists\xi)R \rightleftarrows (\exists\eta)((f_B|\xi)R)$

(e'18) $(\forall\xi)R \rightleftarrows (\forall\eta)((f_B|\xi)R)$

Il suffit de démontrer (e'17), car (e'18) s'en déduit en appliquant (e'17) à $\overline{R}$. Par définition $(\exists\eta)((f_B|\xi)R)$ est synonyme de $(\exists\eta)(\exists\xi)$(B et R), donc de $(\exists\xi)(\exists\eta)$(B et R), et comme η ne figure pas dans R, elle est aussi synonyme de $(\exists\xi)$(R et $(\exists\eta)$B). Mais comme $(\exists\eta)$B est vraie, (R et $(\exists\eta)$B) est équivalente à R, d'où la règle.

On observera que, dans ce raisonnement, on n'a pas utilisé entièrement le fait que B soit fonctionnelle en η, mais seulement le fait que $(\exists\eta)$B est vraie.

En outre, avec les mêmes hypothèses sur R, si R est fonctionnelle en ξ, $(f_B|\xi)R$ est fonctionnelle en η, d'après le principe des relations fonctionnelles composées (puisque cette relation est synonyme de $(\exists\xi)$(B et R), donc de $(f_R|\xi)B$, et que B est fonctionnelle en η).

<u>Exemple</u> : <u>La relation d'égalité</u>. Toute relation d'égalité $x=y$ est fonctionnelle par rapport à chacun des deux arguments x, y. En effet, comme $y=y$ est vraie, il résulte du schéma (v11) que $(\exists x)(x=y)$ est vraie ; d'autre part, d'après les prop.1 et 2, ($x=y$ et $x'=y$) entraîne $x=x'$. Nous allons montrer que l'on peut prendre comme symbole fonctionnel attaché à cette relation (considérée comme fonctionnelle en x) <u>la lettre y</u>. En effet, si x n'est pas lié dans R, la relation (R et $x=y$) entraîne $(y|x)R$ d'après (e'1) ; donc $(\exists x)$(R et $x=y$) entraîne $(\exists x)(y|x)R$, et cette dernière relation est équivalente à $(y|x)R$. Inversement, d'après (e'1), ($\overline{R}$ et $x=y$) entraîne $(y|x)\overline{R}$, donc $(y|x)R$ entraîne (R ou $x\neq y$) ; par suite $(\forall x)(y|x)R$ entraîne $(\forall x)$(R ou $x\neq y$), qui est équivalente à $(\exists x)$(R et $x=y$) d'après (e'2). On a donc prouvé que $(y|x)R$ <u>est équivalente à</u> $(\exists x)$ (R et $x=y$), donc qu'on peut prendre y comme symbole fonctionnel attaché à la relation d'égalité $x=y$.

5. <u>Les relations fonctionnelles typiques</u>. Considérons une théorie $\mathcal{C}$ subordonnée à la théorie de l'égalité, et dans laquelle interviennent un certain nombre d'<u>arguments typiques</u> (chap.I, §3,n°3). Si ξ est un argument de type Θ, R une relation normale dans laquelle ξ est libre, nous dirons, par extension, que R est une <u>relation fonctionnelle par rapport à</u> ξ <u>dans la théorie</u> $\mathcal{C}$, si les relations $(\exists_{\Theta}\xi)R$, "(R et $(\eta|\xi)R) \rightarrow (\xi=\eta)$" sont $\mathcal{C}$-<u>vraies</u> (η désignant un argument de même type que ξ).

Cela posé, on constate aussitôt que toutes les règles relatives aux relations fonctionnelles (absolues) établies ci-dessus sont encore valables pour les relations fonctionnelles typiques, pourvu que : 1° on remplace partout les quantificateurs $\exists$, $\forall$ par les quantificateurs typiques $\exists_{\Theta}$, $\forall_{\Theta}$ respectivement ; 2° dans toutes les règles où interviennent la substitution d'un argument à un autre, on ne substitue jamais à un argument typique qu'un argument de même type.

On notera que si R est une relation fonctionnelle par rapport à ξ au sens absolu, R n'est pas nécessairement fonctionnelle par rapport à ξ dans la théorie $\mathcal{C}$, car la relation $(\exists\ \xi)$R peut être vraie sans que $(\exists_{\Theta}\ \xi)$R le soit.

Toutefois, la relation d'égalité $\xi = \eta$ est fonctionnelle par rapport à ξ dans une théorie quelconque $\mathcal{C}$ pourvu que η soit de même type ξ. En effet, on a vu ci-dessus que $(\exists_{\Theta}\ \xi)(\xi = \eta)$, synonyme de $(\exists\ \xi)(\Theta$ et $\xi = \eta)$, est équivalente à $(\eta \mid \xi)\ \Theta$, relation qui est vraie dans la théorie $\mathcal{C}$, si η est de même type que ξ.

On peut aussi définir une relation fonctionnelle R dans la théorie $\mathcal{C}$, par rapport à un argument non typique ξ, en remplaçant dans la définition ci-dessus $\exists_{\Theta}$ par $\exists$. Ici encore, toutes les règles relatives aux relations fonctionnelles absolues s'étendent sans modification (sous la seule réserve cette fois de ne substituer à un argument typique qu'un argument de même type).

Parmi les relations fonctionnelles typiques, il faut signaler particulièrement les relations R qui sont fonctionnelles par rapport à un argument ξ de type Θ, et dans lesquelles, en dehors de ξ, les seuls arguments libres (éventuels) sont les arguments de base (non typiques) de la théorie $\mathcal{C}$. On dit qu'un symbole fonctionnel attaché à une telle relation est un élément explicite du type Θ.

Exercice. Soit U une relation contenant (au moins) deux arguments libres x,y, telle que, dans la théorie de l'égalité, $(\forall\ x)(x \mid y)$U soit vraie, et que le schéma

$(\forall \ldots)(U \to ((x|\xi)R \to (y|\xi)R))$ **soit un schéma** de relation vraie lorsqu'on **remplace R par une relation normale** dans laquelle x et y ne sont **pas liés, et** ξ **par un argument** quelconque non lié dans R . **Montrer que, dans la théorie de l'égalité,** U est <u>équivalente</u> à $x = y$.

§ 2. **La relation d'appartenance.**

1. <u>Relation d'appartenance et **relation d'inclusion**</u>. **La seconde** sorte de relation primitive que nous **introduirons est constituée** par les <u>relations d'appartenance</u>. On pose **comme règle que l'assemblage** de signes obtenu en écrivant deux **arguments quelconques, l'un à** gauche, l'autre à droite du signe $\in$ (qui se **lit "appartient à") est** une <u>relation primitive</u> ; toute relation de **cette nature est dite** <u>relation d'appartenance</u>. On introduit le signe **abréviateur** $\notin$ (qui se lit "n'appartient pas à") ; tout assemblage obtenu **en écrivant deux** arguments, l'un à gauche, l'autre à droite de ce **signe**, est une **relation** ; en outre, le schéma $\xi \notin \eta$ est synonyme de $\overline{\xi \in \eta}$.

La <u>théorie de l'appartenance</u> **est une théorie sans** argument de base, subordonnée à la théorie de **l'égalité, et définie par** deux nouveaux axiomes et un nouveau schéma d'**axiome.**

Pour énoncer les deux **axiomes, nous introduirons** un nouveau signe abréviateur, le signe d'**<u>inclusion</u>** $\subset$ (**qui se lit** "contenu dans") ; tout assemblage obtenu en **écrivant deux arguments** l'un à gauche, l'autre à droite de ce signe, est une relation, **et le schéma** $\xi \subset \eta$. est par définition synonyme de

$$(\forall \zeta)(\zeta \in \xi \to \zeta \in \eta)$$

Les arguments libres de $\xi \subset \eta$ **sont donc** ξ et η . On introduit aussi le signe abréviateur $\not\subset$ (qui se **lit "n'est pas contenu dans"** , le schéma $\xi \not\subset \eta$ étant synonyme de $\overline{\xi \subset \eta}$.

Au lieu de $\xi \subset \eta$ (resp. $\xi \not\subset \eta$) on écrit parfois $\eta \supset \xi$ (resp. $\eta \not\supset \xi$), le signe $\supset$ (resp. $\not\supset$) se lisant "contient" (resp. "ne contient pas").

On a les deux propositions suivantes :

<u>Proposition 1</u>. <u>La relation</u> $x \subset x$ <u>est vraie</u>.

Elle est synonyme en effet de $(\forall z)(z \in x \to z \in x)$, et $z \in x \to z \in x$ est vraie.

<u>Proposition 2</u>. <u>La relation</u> $(x \subset y$ <u>et</u> $y \subset z)$ <u>entraîne</u> $x \subset z$.

En effet $(x \subset y$ et $y \subset z)$ est synonyme de $((\forall t)(t \in x \to t \in y)$ et $(\forall t)(t \in y \to t \in z))$, donc équivalente à $(\forall t)((t \in x \to t \in y)$ et $(t \in y \to t \in z))$; comme $((t \in x \to t \in y)$ et $(t \in y \to t \in z))$ entraîne $(t \in x \to t \in z)$, la proposition est démontrée.

Cela étant, les deux axiomes relatifs à la relation d'appartenance sont les suivants :

(E_{II}) $(\forall x,y)((x \subset y$ et $y \subset x) \to (x=y))$.

(E_{III}) $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \subset x \rightleftarrows z \in y)$.

On peut encore exprimer (E_{II}) en disant que, dans la théorie de l'appartenance, la relation $(x \subset y$ et $y \subset x)$ entraîne $x=y$; elle lui est d'ailleurs <u>équivalente</u>, car d'après (e1) $x=y$ entraîne $(x \subset x \to x \subset y)$, et comme $x \subset x$ est vraie, $x=y$ entraîne $x \subset y$; on voit de même que $x=y$ entraîne $y \subset x$.

De l'axiome (E_{II}) on déduit d'abord le schéma d'axiome suivant :

(e'19) $((\forall z)(R \rightleftarrows z \in y)$ et $(\forall z)(R \rightleftarrows z \in y')) \to (y=y')$

En effet, $(\forall z)((R \rightleftarrows z \in y)$ et $(R \rightleftarrows z \in y'))$ entraîne $(\forall z)(z \in y \rightleftarrows z \in y')$, qui entraîne $y=y'$ d'après (E_{II}).

Ce schéma et l'axiome (E_{III}) permettent de montrer que, dans la théorie de l'appartenance, la relation $(\forall z)(z \subset x \rightleftarrows z \in y)$ est <u>fonctionnelle en</u> y ; en effet, $(\exists y)(\forall z)(z \subset x \rightleftarrows z \in y)$

est vraie d'après (E_{III}) ; d'autre part, la relation

$$(\forall z)(z \subset x \rightleftarrows z \in y) \quad \text{et} \quad (\forall z)(z \subset x \rightleftarrows z \in y')$$

entraîne $y=y'$ d'après (e'19) .

Dans la relation $(\forall z)(z \subset x \rightleftarrows z \in y)$, les arguments libres sont x et y ; nous prendrons comme symbole fonctionnel attaché à cette relation l'assemblage de signes $\mathfrak{P}(x)$, dont x est le seul argument libre ; ce symbole est aussi appelé l'<u>ensemble des parties de x</u> . La relation $y \subset x$ est équivalente à $y \in \mathfrak{P}(x)$, car la relation $(\forall y)(y \subset x \rightleftarrows y \in \mathfrak{P}(x))$ est vraie (§ 1).

La relation $x \subset y$ entraîne $\mathfrak{P}(x) \subset \mathfrak{P}(y)$, car elle entraîne $(u \subset x) \rightarrow (u \subset x$ et $x \subset y)$, c'est-à-dire, d'après la prop.2, $(u \subset x) \rightarrow (u \subset y)$, ou encore $(u \in \mathfrak{P}(x)) \rightarrow (u \in \mathfrak{P}(y))$; elle entraîne par suite $(\forall u)(u \in \mathfrak{P}(x) \rightarrow u \in \mathfrak{P}(y))$, c'est-à-dire $\mathfrak{P}(x) \subset \mathfrak{P}(y)$.

2. <u>La règle de fonctionnalisation</u>. Le schéma d'axiome de la théorie de l'appartenance est le suivant :

(e2) $\quad (\forall \ldots)(\exists \eta)(\forall \xi)((\xi \in \zeta$ et $R) \rightleftarrows (\xi \in \eta))$

où R doit être remplacé par une relation normale, ξ , ζ , par des arguments distincts, non liés dans R et η par un argument <u>ne figurant pas</u> dans R et distinct de ξ et ζ .

De ce schéma, et de l'axiome (E_{II}), on déduit que, dans la théorie de l'appartenance, le schéma $(\forall \xi)((\xi \in \zeta$ et $R) \rightleftarrows (\xi \in \eta))$ est un schéma de <u>relation fonctionnelle en</u> η , R étant une relation normale quelconque. En effet, on voit d'abord que $(\exists \eta)(\forall \xi)((\xi \in \zeta$ et $R) \rightleftarrows (\xi \in \eta))$ est vrai d'après (e2) ; d'autre part la relation

$$(\forall \xi)((\xi \in \eta \text{ et } R) \rightleftarrows (\xi \in \eta)) \text{ et } (\forall \xi)((\xi \in \zeta \text{ et } R) \rightleftarrows (\xi \in \eta'))$$

est équivalente à $\eta=\eta'$ d'après (e'19). C'est en raison de ce fait que le schéma d'axiome (e2) est encore appelé <u>règle de fonctionnalisation</u>

il permet en effet de former une relation <u>fonctionnelle</u> à partir d'une relation <u>quelconque</u>. On prend comme symbole fonctionnel attaché à la relation $(\forall \xi)((\xi \in \zeta \text{ et } R) \rightleftarrows (\xi \in \eta))$ l'assemblage de signes $\underline{E}_{\xi}[R ; \zeta]$; les arguments libres de ce symbole sont donc les arguments libres de R <u>autres que</u> ξ et l'argument ζ . Dans la théorie de l'appartenance, la relation $(\forall \xi)((\xi \in \zeta \text{ et } R) \rightleftarrows (\xi \in \underline{E}_{\xi}[R ; \zeta]))$ est <u>vraie</u>, autrement dit, la relation $(\xi \in \zeta$ et R) est <u>équivalente</u> à $\xi \in \underline{E}_{\xi}[R ; \zeta]$.

On en déduit aussitôt que, si R et S sont deux relations quelconques, la relation $R \rightarrow S$ entraîne $\underline{E}_{\xi}[R; \zeta] \subset \underline{E}_{\xi}[S; \zeta]$, et la relation $R \rightleftarrows S$ entraîne $\underline{E}_{\xi}[R; \zeta] = \underline{E}_{\xi}[S; \zeta]$ (d'après (E_{II})).

De façon plus précise, $\underline{E}_{\xi}[R; \zeta] \subset \underline{E}_{\xi}[S; \zeta]$ est <u>équivalente</u> à $(\xi \in \zeta$ et $R) \rightarrow (\xi \in \zeta$ et S), $\underline{E}_{\xi}[R; \zeta] = \underline{E}_{\xi}[S; \zeta]$ est <u>équivalente</u> à $(\xi \in \zeta$ et $R) \rightleftarrows (\xi \in \zeta$ et S) .

3. <u>La théorie des parties d'un ensemble</u>. La "théorie des parties d'un ensemble E " est une théorie subordonnée à la théorie de l'appartenance, et comportant <u>un</u> argument de base E . Avec les conventions du chap. I, § 3, elle ne comporte, en dehors des axiomes et schémas d'axiomes de la théorie de l'appartenance, que la donnée d'<u>arguments typiques</u>. En premier lieu, un certain nombre de ces arguments satisfont aux relations obtenues par remplacement de ξ par ces arguments dans $\xi \in E$; on les appelle par abréviation <u>arguments de type</u> E , ou <u>éléments génériques de</u> E (ou encore <u>éléments arbitraires de</u> E) ; nous prendrons pour ces arguments des minuscules latines x,y,z,..., choisies parmi les dernières lettres de l'alphabet, et lorsque nous utiliserons ces lettres dans ce numéro et le suivant, nous omettrons le plus souvent de mentionner que ce sont des arguments du type E .

La quantification typique d'un argument x de type E s'écrira $(\forall x \in E)$ resp. $(\exists x \in E)$ (qu'on lit "quel que soit x dans E (ou appartenant à E)" resp. "il existe x dans E (ou appartenant à E) tel que" .

Les dernières lettres majuscules de l'alphabet X,Y,Z,..., seront, de même, dans ce n° et le suivant des arguments typiques satisfaisant aux relations obtenues par remplacement de ξ par ces arguments dans $\xi \subset E$ (ou, ce qui est équivalent, $\xi \in \mathfrak{P}(E)$) ; on dit que ce sont des <u>arguments du type des parties de</u> E (ou du type $\mathfrak{P}(E)$), ou des <u>parties génériques</u> (ou <u>parties arbitraires</u>) de E ; la quantification typique d'un tel argument X s'écrira $(\forall X \subset E)$ resp. $(\cancel{\forall}\exists X \cancel{\in}\subset \cancel{\mathfrak{P}} E)$ (ou $(\forall X \in \mathfrak{P}(E))$ resp. $(\exists X \in \mathfrak{P}(E))$) (qu'on lit "quel que soit X contenu dans E" resp. "il existe X contenu dans E tel que").

Avec ces conventions, la relation $X \subset Y$ est <u>équivalente</u> à $(\forall x \in E)(x \in X \rightarrow x \in Y)$, et par suite la relation $(\forall x \in E)(x \in X \rightleftarrows x \in Y)$ est équivalente à $X=Y$.

En effet, dans la théorie de l'appartenance, $X \subset Y$, synonyme de $(\forall x)(x \notin X$ ou $x \in Y)$ est équivalente à $(\forall x)((x \notin X$ ou $x \in Y)$ ou $(x \notin E$ et $x \in E))$, puisque $(x \notin E$ et $x \in E)$ est fausse, et que x n'est pas un argument de base ; $X \subset Y$ est donc équivalente à

$(\forall x)(x \notin E$ ou $x \notin X$ ou $x \in Y)$ et $(\forall x)(x \notin X$ ou $x \in E$ ou $x \in Y)$

D'autre part, dans la théorie de l'appartenance, $(\forall x)(x \notin X$ ou $x \in E)$, c'est-à-dire $X \subset E$, entraîne $(\forall x)(x \notin X$ ou $x \in E$ ou $x \in Y)$ puisque x n'est pas argument de base. Donc, dans la théorie des parties de E , $X \subset E$ entraîne $(\forall x)(x \notin X$ ou $x \in E$ ou $x \in Y)$, et par suite cette dernière relation est vraie ; il en résulte que $X \subset Y$ est équivalente à $(\forall x)(x \notin E$ ou $x \notin X$ ou $x \in Y)$, c'est-à-dire à $(\forall x \in E)(x$ X ou $x \in Y)$.

Nous allons en déduire que, dans la théorie des parties de E , la relation $(\forall x \in E)(R \rightleftarrows (x \in X))$ est une <u>relation fonctionnelle par rapport à</u> X (argument du type $\mathfrak{P}(E)$), <u>équivalente</u> à la relation $(\forall x)((x \in E$ et $R) \rightleftarrows (x \in X))$.

En effet, comme $X \subset E$ est vraie, la relation $(\forall x \in E)(R \rightleftarrows (x \in X))$ est équivalente à

$$X \subset E \text{ et } (\forall x \in E)(R \rightleftarrows (x \in X))$$

Or, nous allons voir que cette dernière est équivalente <u>au sens absolu</u> à la relation

$$(\forall x)((x \in E \text{ et } R) \rightleftarrows (x \in X))$$

En effet, elle est équivalente à

$$(\forall x)((x \notin X \text{ ou } x \in E) \text{ et } (x \notin E \text{ ou } (R \rightleftarrows (x \in X))))$$

Notre assertion sera établie si nous montrons que les relations $((\bar{A}$ ou $B)$ et $(\bar{B}$ ou $(R$ et $A)$ ou $(\bar{R}$ et $\bar{A}))$), et

$$((B \text{ et } R \text{ et } A) \text{ ou } ((\bar{B} \text{ ou } \bar{R}) \text{ et } \bar{A})$$

sont équivalentes au sens absolu. Or, la seconde est équivalente à

$$(B \text{ et } R \text{ et } A) \text{ ou } (\bar{A} \text{ et } \bar{B}) \text{ ou } (\bar{A} \text{ et } \bar{R})$$

et on voit aisément que la première est équivalente à

$$(\bar{A} \text{ et } \bar{B}) \text{ ou } (\bar{A} \text{ et } \bar{R}) \text{ ou } (B \text{ et } R \text{ et } A) \text{ ou } (B \text{ et } \bar{R} \text{ et } \bar{A})$$

Enfin, comme $(\bar{A}$ et $\bar{R})$ est équivalente à $((\bar{A}$ et $\bar{R})$ ou $(B$ et $\bar{A}$ et $\bar{R}))$, la proposition est démontrée.

Cela étant, pour voir que $(\forall x \in E)(R \rightleftarrows (x \in X))$ est fonctionnelle par rapport à X <u>dans la théorie des parties de</u> E , il faut d'abord montrer que $(\exists X \subset E)(\forall x \in E)(R \rightleftarrows (x \in X))$ est vraie ce qui résulte aussitôt de ce qui précède et du schéma d'axiome (e2). En second lieu, la relation

$$(\forall x \in E)((R \rightleftarrows x \in X) \text{ et } (R \rightleftarrows x \in X'))$$

entraîne $(\forall x \in E)(x \in X \rightleftarrows x \in X')$, donc $X = X'$.

Nous dirons que la relation fonctionnelle $(\forall x \in E)(R \rightleftarrows x \in X)$ est obtenue en <u>fonctionnalisant</u> R <u>par rapport à</u> x . En raison de l'équivalence qui vient d'être démontrée, on peut prendre comme symbole fonctionnel attaché à cette relation l'assemblage de signes $\underline{E}_x[R;E]$, qu'on remplace (par abus de langage) par $\underline{E}[R]$ si aucune confusion n'est à craindre ; ce symbole est appelé "l'ensemble des $x \in E$ où la relation R a lieu" . La relation R est équivalente à $x \in \underline{E}[R]$, et la relation $\underline{E}[R] \subset E$ (équivalente à $\underline{E}[R] \in \mathfrak{P}(E)$) est vraie. En outre, comme $x \in E$ est vraie, la relation $R \rightarrow S$ est équivalente à $\underline{E}[R] \subset \underline{E}[S]$, la relation $R \rightleftarrows S$ est équivalente à $\underline{E}[R] = \underline{E}[S]$.

En particulier, si R et S sont <u>toutes deux vraies</u> (dans la théorie des parties de E) ou <u>toutes deux fausses</u>, on a $\underline{E}[R] = \underline{E}[S]$.

Comme $x \in E$ est vraie, pour toute relation vraie R , on a $\underline{E}[R] = \underline{E}[x \in E]$; or, nous allons voir qu'on peut prendre E comme symbole fonctionnel attaché à la relation $(\forall x \in E)(x \in E \rightleftarrows x \in X)$. Par suite, pour toute relation vraie R , on a $\underline{E}[R] = E$.

Pour montrer qu'on peut prendre E comme symbole fonctionnel attaché à $(\forall x \in E)(x \in E \rightleftarrows x \in X)$, remarquons d'abord que cette relation est synonyme de

$$(\forall x)(x \notin E \text{ ou } ((x \notin E \text{ ou } x \in X) \text{ et } (x \notin X \text{ ou } x \in E)))$$

donc équivalente à $(\forall x)(x \notin E \text{ ou } x \in X)$, c'est-à-dire à $E \subset X$. Cela étant, il faut prouver que, pour une relation quelconque S (normale, et dans laquelle X est libre), la relation $(E|X)S$ est équivalente à $(\exists X \subset E)(S \text{ et } E \subset X)$; or, cette dernière s'écrit $(\exists X)(X \subset E \text{ et } E \subset X \text{ et } S)$, et, d'après (E_{II}), elle est équivalente à $(\exists X)(X=E \text{ et } S)$; mais d'après le § 1, n° 4, cette dernière relation est équivalente à $(E|X)S$.

E est donc un élément explicite du type des parties de E (ou, comme on dit encore, une partie explicite de E), qu'on appelle la partie pleine de E ou l'ensemble fondamental du type E.

Comme la relation $x \notin E$ est fausse, pour toute relation fausse R, $\underline{E}[R]$ est égal à la partie de E où a lieu la relation $x \notin E$; on la désigne par $\emptyset_E$, ou simplement $\emptyset$ si aucune confusion n'est possible : $\emptyset_E$ est donc un élément explicite du type des parties de E, qu'on appelle la partie vide de E ; la relation $x \in \emptyset$ est équivalente à $x \notin E$, donc est fausse (autrement dit, la relation $x \notin \emptyset$ est vraie).

Proposition 3. La relation $E \subset X$ est équivalente à $X=E$.

En effet, $X \subset E$ est vraie, donc $E \subset X$ est équivalente à ($E \subset X$ et $X \subset E$) c'est-à-dire à $X=E$ d'après (E_{II}).

Proposition 4. La relation $(\forall x \in E)(x \in X)$ est équivalente à $X=E$.

En effet, elle est synonyme de $(\forall x)(x \notin E$ ou $x \in X)$, c'est-à-dire de $E \subset X$; la proposition est donc ramenée à la prop.3.

Proposition 5. La relation $\emptyset \subset X$ est vraie.

En effet, comme $x \notin \emptyset$ est vraie, il en est de même de la relation ($x \notin \emptyset$ ou $x \in X$), donc de $(\forall x)(x \notin \emptyset$ ou $x \in X)$, qui est synonyme de $\emptyset \subset X$.

Proposition 6. La relation $X \subset \emptyset$ est équivalente à $X=\emptyset$.

En effet, $\emptyset \subset X$ est vraie, donc $X \subset \emptyset$ est équivalente à ($\emptyset \subset X$ et $X \subset \emptyset$), c'est-à-dire à $X=\emptyset$ d'après (E_{II}).

Proposition 7. La relation $(\forall x \in E)(x \notin X)$ est équivalente à $X=\emptyset$.

En effet, comme $x \in \emptyset$ est fausse, $x \notin X$ est équivalente à ($x \notin X$ ou $x \in \emptyset$), et par suite $(\forall x \in E)(x \notin X)$ est équivalente à $(\forall x \in E)$ $(x \in X \rightarrow x \in \emptyset)$, c'est-à-dire à $X \subset \emptyset$; or, cette dernière relation est équivalente à $X=\emptyset$.

Corollaire. La relation $E \neq \emptyset$ est vraie.

En effet, lle est équivalente à $(\exists x\in E)(x\in E)$; or $x\in E$ est vraie, et elle entraîne $(\exists x\in E)(x\in E)$ (dans la théorie des parties de E) .

On déduit de ce corollaire qu'on ne peut "appliquer" la théorie des parties d'un ensemble, en remplaçant l'argument de base E par un symbole fonctionnel S (§ 1, n° 2) si la relation $S=\emptyset_S$ est vraie dans la théorie que l'on considère ; en effet, la théorie que l'on obtiendrait ainsi serait contradictoire.

4. Partie réduite à un élément, complémentaire d'une partie, réunion et intersection de deux parties. En fonctionnalisant par rapport à y la relation $y=x$, on obtient une relation fonctionnelle en un argument X du type des parties de E ; nous prendrons pour symbole fonctionnel attaché à cette relation l'assemblage de signes $\{x\}$, dans lequel x est donc le seul argument libre ; ce symbole est appelé "la partie réduite au seul élément x" . La relation $y=x$ est équivalente à $y\in\{x\}$.

Proposition 8. La relation $x\in X$ est équivalente à $\{x\}\subset X$.

En effet $\{x\}\subset X$ est équivalente à $(\forall y\in E)(y\notin\{x\}$ ou $y\in X)$ et comme $y\notin\{x\}$ est équivalente à $y\neq x$, $\{x\}\subset X$ est équivalente à $(\forall y\in E)(y\neq x$ ou $y\in X)$; comme $y=x$ est fonctionnelle en y , et que x est un symbole fonctionnel attaché à cette relation, la relation $(\forall y\in E)(y\neq x$ ou $y\in X)$ est équivalente à $x\in X$.

Proposition 9. La relation $X\subset\{x\}$ est équivalente à $(X=\emptyset$ ou $X=\{x\})$.

En effet, la relation $X\subset\{x\}$ est équivalente à $(\forall y\in E)(y\notin X$ ou $y\in\{x\})$, c'est-à-dire à $(\forall y\in E)(y\notin X$ ou $y=x)$; elle est aussi équivalente à $(\forall y\in E)(y\notin X$ ou $(y\in X$ et $y=x))$, donc elle entraîne la relation

$$(\forall y\in E)(y\notin X) \quad \text{ou} \quad (\exists y\in E)(y\in X \ \text{et} \ y=x)$$

Mais $(\forall\ y \in E)(y \notin X)$ est équivalente à $X=\emptyset$ (prop.7), et comme $y=x$ est fonctionnelle en y, $(\exists\ y \in E)(y \in X$ et $y=x)$ est équivalente à $x \in X$, c'est-à-dire à $\{x\} \subset X$ (prop.9). La relation $X \subset \{x\}$ entraîne donc $(X=\emptyset$ ou $\{x\} \subset X)$; mais elle entraîne aussi $(X=\emptyset$ ou $X \subset \{x\})$, donc elle entraîne $(X=\emptyset$ ou $(\{x\} \subset X$ et $X \subset \{x\}))$, c'est-à-dire $(X=\emptyset$ ou $X=\{x\})$ d'après (E_{II}).

Réciproquement, comme $\emptyset \subset \{x\}$ est vraie, $(X=\emptyset$ ou $X=\{x\})$ est équivalente à $((X=\emptyset$ et $\emptyset \subset \{x\})$ ou $X=\{x\})$; mais $(X=\emptyset$ et $\emptyset \subset \{x\})$ entraîne $X \subset \{x\}$, et $X=\{x\}$ entraîne $X \subset \{x\}$ (prop.1), donc $(X=\emptyset$ ou $X=\{x\})$ entraîne $X \subset \{x\}$.

En fonctionnalisant par rapport à x la relation $x \notin X$, on obtient une relation fonctionnelle en un argument Y du type des parties de E ; nous prendrons pour symbole fonctionnel attaché à cette relation l'assemblage $\complement X$, dans lequel X est le seul argument libre, et qui est appelé <u>le complémentaire de</u> X. La relation $x \notin X$ est donc équivalente à $x \in \complement X$.

Comme les relations $x \in \emptyset$ et $x \notin E$ sont équivalentes, on a $\emptyset = \complement E$; de même $x \in E$ et $x \notin \emptyset$ sont équivalentes, donc $E = \complement \emptyset$.

<u>Proposition 10</u>. <u>Quel que soit</u> X, $\complement(\complement X)=X$.

En effet, la relation $x \in \complement(\complement X)$ est équivalente à $x \notin \complement X$, donc à la négation de $x \in X$, c'est-à-dire à $x \in X$.

En fonctionnalisant par rapport à x la relation $(x \in X$ ou $x \in Y)$ (resp. $(x \in X$ et $x \in Y))$ on obtient une relation fonctionnelle en un argument Z du type des parties de E ; nous prendrons pour symbole fonctionnel attaché à cette relation l'assemblage $X \cup Y$ (resp. $X \cap Y$), dans lequel X et Y sont les arguments libres, et qui est appelé <u>la réunion de</u> X <u>et</u> Y (resp. <u>l'intersection de</u> X <u>et</u> Y). La relation $(x \in X$ ou $x \in Y)$ (resp. $(x \in X$ et $x \in Y))$ est donc équivalente à $x \in X \cup Y$ (resp. $x \in X \cap Y$).

Proposition 11. Les relations suivantes sont vraies :

(1) $X \cup X = X$, $X \cap X = X$

(2) $X \cup (\complement X) = E$, $X \cap (\complement X) = \emptyset$

(3) $X \cup \emptyset = X$, $X \cap E = X$

(4) $X \cup E = E$, $X \cap \emptyset = \emptyset$.

Nous laissons au lecteur les démonstrations, qui sont immédiates.

Proposition 12. Les relations suivantes sont vraies :

(5) $X \cup Y = Y \cup X$, $X \cap Y = Y \cap X$

$x \cap Y \subset X$

(6) $X \subset X \cup Y$, $\complement (X \cap Y) = (\complement X) \cup (\complement Y)$.

(7) $\complement (X \cup Y) = (\complement X) \cap (\complement Y)$,

Démontrons par exemple la première relation (7). La relation $x \in \complement (X \cup Y)$ est la négation de $x \in X \cup Y$, donc elle est synonyme de la négation de ($x \in X$ ou $x \in Y$), c'est-à-dire de ($x \notin X$ et $x \notin Y$) ; comme $x \notin X$ est synonyme de $x \in \complement X$, $x \notin Y$ synonyme de $x \in \complement Y$, la relation est démontrée. Nous laissons les autres démonstrations au lecteur.

Proposition 13. Les relations

$$X \subset Y \ , \quad \complement Y \subset \complement X \ , \quad X \cup Y = Y \ , \quad X \cap Y = X$$

sont équivalentes.

La relation $X \subset Y$ est équivalente à $(\forall x \in E)(x \notin X$ ou $x \in Y)$, donc à $(\forall x \in E)(x \notin \complement Y$ ou $x \in \complement X)$, c'est-à-dire à $\complement Y \subset \complement X$C . Pour montrer que $X \subset Y$ est équivalente à $X \cup Y = Y$, remarquons que cette dernière relation est équivalente à ($X \cup Y \subset Y$ et $Y \subset X \cup Y$) d'après (E_{II}) , donc à $X \cup Y \subset Y$, puisque $Y \subset X \cup Y$ est vraie (prop.12). Or la relation $X \cup Y \subset Y$ est synonyme de $(\forall x \in E)((x \notin X$ et $x \notin Y)$ ou $x \in Y)$, donc équivalente à $(\forall x \in E)$ $(x \notin X$ ou $x \in Y)$. On démontre de même que $X \subset Y$ est équivalente à $X \cap Y = X$.

<u>Proposition 14.</u> <u>Les relations</u>

$$X \cap Y = \emptyset \ , \qquad X \subset \complement Y \qquad , \qquad Y \subset \complement X$$

<u>sont équivalentes</u>.

En effet, $X \cap Y = \emptyset$ est équivalente à $(\forall x \in E)(x \notin X$ ou $x \notin Y)$ donc à $(\forall x \in E)(x \notin X$ ou $x \in \complement Y)$, c'est-à-dire à $X \subset \complement Y$; on montre de même que $X \cap Y = \emptyset$ est équivalente à $Y \subset \complement X$.

Par définition, la relation "X et Y se rencontrent" est synonyme de $X \cap Y \neq \emptyset$.

<u>Proposition 15.</u> <u>Les relations</u>

$$X \cup Y = E \quad , \qquad \complement X \subset Y \qquad , \qquad \complement Y \subset X$$

<u>sont équivalentes</u>.

Démonstration analogue à celle de la prop.14.

<u>Proposition 15.</u> <u>Les relations suivantes sont vraies</u> :

(8) $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z \quad , \qquad X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$

(9) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z), \qquad X \cap (Y \quad Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$.

Nous laissons au lecteur la démonstration. Les relations (8) permettent d'écrire $X \cup Y \cup Z$ (resp. $X \cap Y \cap Z$) au lieu de $(X \cup Y) \cup Z$ (resp. $(X \cap Y) \cap Z$) sans ambiguité ; $X \cup Y \cup Z$ (resp. $X \cap Y \cap Z$) est appelé la réunion (resp. l'intersection) de X, Y et Z. On écrit de même $X \cup Y \cup Z \cup T$ (resp. $X \cap Y \cap Z \cap T$) pour $(X \cup Y \cup Z) \cup T$ (resp. $(X \cap Y \cap Z) \cap T$), et ainsi de suite.

<u>Proposition 16.</u> <u>La relation</u> $X \subset Y$ <u>entraîne les relations</u> $X \cup Z \subset Y \cup Z$ <u>et</u> $X \cap Z \subset Y \cap Z$.

En effet, $(x \in X) \rightarrow (x \in Y)$ entraîne $(x \in X$ ou $x \in Z) \rightarrow (x \in Y$ ou $x \in Z)$ donc $(\forall x \in E)((x \in X) \rightarrow (x \in Y))$ entraîne $(\forall x \in E)((x \in X$ ou $x \in Z) \rightarrow$ $\rightarrow (x \in Y$ ou $x \in Z))$. Démonstration analogue pour la relation $X \cap Z \subset Y \cap Z$.

Proposition 17. La relation ($Z \subset X$ et $Z \subset Y$) est équivalente à $Z \subset X \cap Y$; la relation ($X \subset Z$ et $Y \subset Z$) est équivalente à $X \cup Y \subset Z$.

La démonstration est immédiate.

Le symbole fonctionnel composé $\{x\} \cup \{y\}$, (qui a un sens sans qu'on soit obligé de préciser dans quel ordre on substitue $\{x\}$ à X et $\{y\}$ à Y dans $X \cup Y$, d'après le schéma (c'16 bis)) se note aussi $\{x,y\}$ pour abréger ; de même $\{x\} \cup \{y\} \cup \{z\}$ se note $\{x,y,z\}$ et ainsi de suite. D'après (1), on a $\{x,x\} = x$, d'après (5), on a $\{x,y\} = \{y,x\}$. On dit que $\{x,y\}$ est la partie formée de x et de y , et de même pour $\{x,y,z\}$ et les symboles fonctionnels analogues contenant plus de trois arguments.

Remarque. Considérons un symbole fonctionnel, que nous désignerons par ϕ , obtenu en "composant" (§ 1, n° 3) un certain nombre de fois les symboles $\complement$, $\cup$, $\cap$ dans un ordre déterminé, à partir d'arguments X,Y,Z,..., du type $\mathfrak{P}(E)$ (par exemple, $X \cap \complement (Y \cup (Z \cap \complement X))$ est un tel symbole). Si on considère le symbole $\complement \phi$ obtenu en composant $\complement$ avec ϕ , il résulte des relations (7) et de la prop.10 (appliquées de proche en proche) que $\complement \phi$ est égal au symbole fonctionnel ϕ' obtenu en remplaçant, dans la suite des symboles fonctionnels dont la "composition" donne ϕ , chaque signe $\cup$ par $\cap$ et vice-versa, puis en remplaçant X,Y,Z,... par $\complement X, \complement Y, \complement Z, \ldots$ respectivement dans le symbole ainsi obtenu. Le symbole ϕ' est dit dual de ϕ (c'est ainsi que le dual de l'exemple choisi est $\complement X \cup \complement (\complement Y \cap (\complement Z \cup \complement (\complement X)))$). On peut d'ailleurs grâce aux relations (7), remplacer toujours un symbole ϕ par un symbole égal dans lequel les signes $\complement$ ne portent que sur les arguments; alors dans le symbole dual, on remplacera partout $\complement(\complement X), \complement(\complement Y), \ldots$ par X,Y,..., respectivement (ce qui donne un symbole égal) ;

dans notre exemple, on remplace ϕ par $X \cap ((\complement Y) \cap ((\complement Z) \cup X))$, ϕ' par $(\complement X) \cup (Y \cup (Z \cap \complement X))$.

Soient maintenant deux symboles fonctionnels ϕ, ψ (où les signes $\complement$ ne portent que sur les arguments) tels que la relation $\phi = \psi$ (resp. $\phi \subset \psi$ $\cancel{\complement\psi \subset \complement\phi}$) soit vraie ; alors la relation $\complement\phi = \complement\psi$ (resp. $\complement\psi \subset \complement\phi$) est vraie (la seconde en vertu de la prop.13) ; il en résulte que $\phi' = \psi'$ (resp. $\psi' \subset \phi'$) est vraie ; si, dans cette relation, on remplace $X, Y, Z, \ldots$ par $\complement X, \complement Y, \complement Z, \ldots$ et vice-versa, on obtient encore une relation vraie, dite <u>duale</u> de la relation $\phi = \psi$ (resp. $\phi \subset \psi$). Le lecteur vérifiera sans peine que toutes les relations affectées ci-dessus d'un même numéro sont duales l'une de l'autre.

5. <u>Théorie des parties d'un sous-ensemble</u>. On a souvent à considérer une théorie subordonnée à la théorie des parties d'un ensemble E, la "théorie des parties d'un sous-ensemble A de E". Elle comporte <u>deux</u> arguments de base, E et A, et (en dehors des axiomes et schémas d'axiomes de la théorie de l'appartenance) un nouvel axiome : $A \subset E$. Cette théorie est subordonnée à la fois à la théorie des parties de E et à la théorie des parties de A ; elle comporte donc comme arguments typiques les éléments génériques de E et ceux de A, les parties génériques de E et celles de A. On notera que si x est un élément générique de A, la relation $x \in A$ entraîne $x \in E$ puisque $A \subset E$ est vraie, donc $x \in E$ est vraie ; de même, si X est une partie générique de A, $X \subset E$ est vraie. Si x est un élément générique de A, la relation $(\exists x \in A)R$ est par définition équivalente à $(\exists x)(x \in A$ et $R)$; mais $x \in A$ est équivalente à "$x \in A$ et $x \in E$" ; on en déduit que, si x' est un élément générique de E ne figurant pas dans R, $(\exists x \in A)R$ est équivalente à $(\exists x' \in E)(x' \in A$ et $(x' | x)R)$; on voit de même que $(\forall x \in A)R$ est équivalente à $(\forall x' \in E)(x' \notin A$ ou $(x' | x)R)$.

Il en résulte que si, par exemple, R est une relation <u>vraie</u> dans la théorie des parties du sous-ensemble A , et ne contient qu'un seul élément générique x de A , la relation $x' \in A \to (x'|x)R$ est vraie dans la théorie des parties de E , x' étant un élément générique de E ; en effet, $(\forall x \in A)R$ est alors vraie, donc aussi $(\forall x' \in E)(x' \notin A$ ou $(x'|x)R)$, et par suite aussi $(x' \notin A$ ou $(x'|x)R)$.

En d'autres termes, on peut s'abstenir de considèrer la "théorie des parties d'un sous-ensemble de E ", et traduire toutes les propositions de cette théorie en propositions de la théorie des parties de E , où A est simplement considéré comme une partie générique de E . Toutefois, il est souvent commode d'utiliser le langage de cette théorie, notamment quand on l'"applique" en y remplaçant A par un <u>symbole fonctionnel</u> dans une théorie subordonnée à la théorie des parties de E , et où la relation qu'on obtient en remplaçant A par ce symbole dans $A \subset E$ est <u>vraie</u>.

On notera que dans la théorie des parties du sous-ensemble A de E , on a $\emptyset_A = \emptyset_E$; en effet, soit x un élément générique de E ; pour un argument générique y de A , la relation $y \in \emptyset_A$ équivaut dans la théorie des parties du sous-ensemble A , à $y \notin A$; par suite $x \in A$ entraîne $((x \notin A) \rightleftarrows (x \in \emptyset_A))$. On déduit aisément de cette proposition, que $x \in A$ entraîne $x \notin \emptyset_A$, ou encore que $\emptyset_A \subset \complement A$; comme d'autre part $\emptyset_A \subset A$ est vraie, on a $\emptyset_A \subset (A \cap \complement A) = \emptyset_E$; comme la relation $X \subset \emptyset_E$ équivaut à $X = \emptyset_E$, on a bien $\emptyset_A = \emptyset_E$.

On en conclut qu'on ne peut "appliquer" la théorie des parties d'un sous-ensemble A de E (c'est-à-dire remplacer A par un symbole fonctionnel f_R tel que $f_R \subset E$ soit vraie) si la relation $f_R = \emptyset_E$ est vraie (dans la théorie où on "applique" la théorie des parties du sous-ensemble A) ; car on obtiendrait alors une théorie **contradictoire**, puisque $A \neq \emptyset_A$ est vraie, et par suite $A \neq \emptyset_E$ dans la théorie des parties du sous-ensemble A (cf. n° 3, cor. de la prop.7) .

Exercices.- 1) Montrer que la relation $(\forall X \subset E)(x \in X \rightarrow y \in X)$ est équivalente à $x=y$.

2) Montrer que la relation $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ est équivalente à $x \neq y$.

3) On considère la théorie subordonnée à la théorie de l'égalité, définie par l'axiome (E_{II}) et le schéma d'axiome

$$(e^{*}2) \quad (\forall \ldots)(\exists \eta)(\forall \xi)(R \rightleftarrows (\xi \in \eta))$$

où R doit être remplacé par une relation normale, ξ par un argument non lié dans R , η par un argument ne figurant pas dans R et distinct de ξ . Dans cette théorie, le schéma $(\forall \xi)(R \rightleftarrows (\xi \in \eta))$ est un schéma de **relation fonctionnelle en** η . En particulier, soit Ω un symbole fonctionnel attaché à la relation fonctionnelle (en y) $(\forall x)(x \notin x \rightleftarrows x \in y)$; montrer que la relation $\Omega \notin \Omega$ est équivalente à $\Omega \in \Omega$ dans la théorie considérée, et que par suite cette théorie est **contradictoire**.

4) Dans la théorie de l'appartenance, on désigne par $\emptyset_u$ le symbole fonctionnel attaché à la relation fonctionnelle (en y) $(\forall x)((x \in u \text{ et } x \notin u) \rightleftarrows (x \in y))$. Montrer que $\emptyset_u = \emptyset_v$ est une relation vraie.

§ 3. Produit de deux ensembles.

1. **La relation de couplage**. Introduisons maintenant la troisième sorte de relation primitive de la théorie des ensembles, les **relations de couplage**. Par définition, en remplaçant ξ , η , ζ par trois arguments dans l'assemblage de signes $\left(\begin{smallmatrix}\xi\\ \eta\end{smallmatrix} \middle| \zeta\right)$ est une **relation primitive**, et toute relation obtenue de cette manière est dite **relation de couplage**.

La <u>théorie du couplage</u> est une théorie sans argument de base, subordonnée à la théorie de l'appartenance, et définie par quatre nouveaux axiomes. Les deux premiers sont :

(E_{IV}) $(\forall\, x,y)(\exists\, z)(\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}|z)$

(E_V) $(\forall\, x,y,z,z')(((\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}|z)$ et $(\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}|z')) \rightarrow (z=z'))$

Ces deux premiers axiomes s'interprètent aussitôt de la manière suivante : ils expriment que dans la théorie du couplage, la relation $(\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}|z)$ <u>est fonctionnelle en z</u> . On prend pour symbole fonctionnel de cette relation l'assemblage de signes (x,y), qu'on appelle <u>couple formé de x et de y</u> ; la relation de couplage $(\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}|z)$ est donc <u>équivalente</u> à $z=(x,y)$, ce qui nous dispensera désormais d'écrire la relation $(\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}|z)$.

Le troisième axiome de la théorie est :

(E_{VI}) $(\forall\, x,y,x',y')(((x,y)=(x',y')) \rightarrow (x=x'$ et $y=y'))$

Comme la relation $(x=x'$ et $y=y')$ entraîne $(x,y)=(x',y')$ (§ 1), on voit que, dans la théorie du couplage, la relation $(x,y)=(x',y')$ est <u>équivalente</u> à $(x=x'$ et $y=y')$.

Enfin, on a pour dernier axiome :

(E_{VII}) $(\forall\, u,v)(\exists\, w)(\forall\, z)(((\exists\, x,y)(x\in u$ et $y \in v$ et $z=(x,y))) \rightleftarrows (z \in w))$.

De cet axiome, on déduit que, dans la théorie du couplage, la relation $(\forall\, z)(((\exists\, x,y)(x\in u$ et $y\in v$ et $z=(x,y))) \rightleftarrows (z \in w))$ est <u>fonctionnelle en w</u> , en vertu du schéma (e'19) ; les arguments libres de cette relation étant u et v , nous prendrons comme symbole fonctionnel qui lui est attaché l'assemblage de signes $u \times v$ qu'on appelle <u>le produit de u et de v</u> . La relation $z \in u \times v$ est donc <u>équivalente à</u> $(\exists\, x,y)(x\in u$ et $y\in v$ et $z=(x,y))$.

74

<u>Proposition 1</u>. <u>La relation</u> $(x,y)\in u\times v$ <u>est équivalente à</u> ($x\in u$ et $y\in v$).

En effet, elle est équivalente à $(\exists x',y')(x'\in u$ et $y'\in v$ et $(x,y)=(x',y'))$; d'après (E_{VI}), elle est donc équivalente à $(\exists x',y')(x'\in u$ et $y'\in v$ et $x=x'$ et $y=y')$ ou encore à $((\exists x')(x'\in u$ et $x=x')$ et $(\exists y')(y'\in v$ et $y=y'))$; mais (§ 1, n°4) $(\exists x')(x'\in u$ et $x=x')$ est équivalente à $x\in u$, et de même $(\exists y')(y'\in v$ et $y=y')$ est équivalente à $y\in v$.

<u>Proposition 2</u>. <u>La relation</u> ($u\subset u'$ et $v\subset v'$) <u>entraîne</u> $u\times v\subset u'\times v'$.

En effet, la relation $u\times v\subset u'\times v'$ est équivalente à $(\forall z)(z\notin u\times v$ ou $z\in u'\times v')$, c'est-à-dire à $(\forall z)((\forall x,y)(x\notin u$ ou $y\notin v$ ou $z\neq(x,y))$ ou $(\exists x,y)(x\in u'$ et $y\in v'$ et $z=(x,y)))$. Or, cette relation est entraînée par $(\forall z)(\forall x,y)(x\notin u$ ou $y\notin v$ ou $z\neq(x,y)$ ou $(x\in u'$ et $y\in v'$ et $z=(x,y))$ qui est équivalente à

$(\forall z)(\forall x,y)((x\notin u$ ou $y\notin v$ ou $z\neq(x,y)$ ou $x\in u')$ et $(x\notin u$ ou $y\notin v$ ou $z\neq(x,y)$ ou $y\in v')$ et $(x\notin u$ ou $y\notin v$ ou $z\neq(x,y)$ ou $z=(x,y)))$

Comme $(x\notin u$ ou $y\notin v$ ou $z\neq(x,y)$ ou $z=(x,y))$ est vraie, la relation précédente est donc entraînée par

$(\forall z)(\forall x,y)((x\notin u$ ou $x\in u')$ et $(y\notin v$ ou $y\in v'))$

qui est équivalente à $((\forall x)(x\notin u$ ou $x\in u')$ et $(\forall y(y\notin v$ ou $y\in v'))$ c'est-à-dire à ($u\subset u'$ et $v\subset v'$).

2. <u>La théorie du produit de deux ensembles</u>. La "théorie du produit de deux ensembles E,F" est une théorie subordonnée à la théorie du couplage, et comportant <u>deux</u> arguments de base E,F. Avec les conventions du chap.I, § 3, elle ne comporte, en dehors des axiomes et schémas d'axiomes de la théorie du couplage, que la donnée d'<u>arguments typiques</u> ;

des arguments $x, x', ..$ <u>de type</u> E , des arguments $y, y', ..$ <u>de type</u> F , des arguments $z, z', ..,$ <u>de type</u> $E \times F$ (c'est-à-dire satisfaisant aux relations obtenues en remplaçant ξ par ces arguments dans $\xi \in E \times F$) , et enfin des arguments $X, X', ..$ (resp. $Y, Y', ..; Z, Z' ...$) du type $\mathfrak{P}(E)$ (resp. $\mathfrak{P}(F)$, $\mathfrak{P}(E \times F)$). La théorie du produit de E et F est donc subordonnée aux théories des parties de E , F et $E \times F$.

Avec ces conventions, notons tout d'abord que la relation $(x,y) \in E \times F$ est <u>vraie</u>, car elle est équivalente à $(\exists x \in E)(\exists y \in F)((x,y)=(x,y))$.

En second lieu, la relation $(\exists y \in F)(z=(x,y))$ est <u>fonctionnelle en</u> x. En effet, la relation $(\exists x \in E)(\exists y \in F)(z=(x,y))$ est synonyme de $(\exists x,y)(x \in E$ et $y \in F$ et $z=(x,y))$, donc équivalente à $z \in E \times F$, qui est vraie. D'autre part, la relation $((\exists y \in F)(z=(x,y))$ et $(\exists y \in F)(z=(x',y)))$ est équivalente à $((\exists y \in F)(z=(x,y))$ et $(\exists y' \in F)(z=(x',y')))$, donc à $(\exists y \in F)(\exists y' \in F)(z=(x,y)$ et $z=(x',y'))$; comme $(z=(x,y)$ et $z=(x',y')$ entraîne $(x,y)=(x',y')$, elle entraîne $(x=x'$ et $y=y')$ d'après (E_{VI}), et par suite elle entraîne $x=x'$; donc $((\exists y \in F)(z=(x,y))$ et $(\exists y \in F)(z=(x',y)))$ entraîne $(\exists y \in F)(\exists y' \in F)(x=x')$, c'est-à-dire $x=x'$.

On démontre de la même manière que $(\exists x \in E)(z=(x,y))$ est <u>fonctionnelle en</u> y . On prend comme symboles fonctionnels respectifs de ces deux relations $pr_1(z)$ et $pr_2(z)$; la relation $x=pr_1(z)$ est donc équivalente à $(\exists y \in F)(z=(x,y))$, la relation $y=pr_2(z)$ équivalente à $(\exists x \in E)(z=(x,y))$; l'assemblage $pr_1(z)$ (resp. $pr_2(z)$) s'appelle <u>première projection de z</u> (resp. <u>seconde projection de z</u>) ou <u>première coordonnée</u> (resp. <u>seconde coordonnée</u>) de z . Il est immédiat que les relations $x=pr_1((x,y))$ et $y=pr_2((x,y))$ sont vraies. D'autre part, la relation $z=(x,y)$ est équivalente à $(x=pr_1(z)$ et $y=pr_2(z))$.

En effet, ($x=pr_1(z)$ et $y=pr_2(z)$) est équivalente à $((\exists y'\in F)(z=(x,y'))$ et $(\exists x'\in E)(z=(x',y)))$, donc à $(\exists x'\in E)(\exists y'\in F)(z=(x,y')$ et $z=(x',y))$. Or ($z=(x,y')$ et $z=(x',y)$) entraîne $(x,y')=(x',y)$, donc ($x=x'$ et $y=y'$) d'après (E_{VI}) ; par suite ($z=(x,y')$ et $z=(x',y)$) entraîne $z=(x,y)$, donc ($x=pr_1(z)$ et $y=pr_2(z)$) entraîne $(\exists x'\in E)(\exists y'\in F)$ $(z=(x,y))$ qui est synonyme de $z=(x,y)$. Réciproquement, $z=(x,y)$ entraîne $((\exists x\in E)(z=(x,y))$ et $(\exists y\in F)(z=(x,y))$ donc ($x=pr_1(z)$ et $y=pr_2(z)$).

On en conclut que la relation $z=(pr_1(z),pr_2(z))$ est vraie.

Dans la théorie du produit $E\times F$, à une relation (normale) quelconque R dans laquelle x et y ne sont pas liés, on peut faire correspondre la relation $(pr_1(z)|x)(pr_2(z)|y)R$; on a les schémas de relation vraie

(e'20) $(\exists x\in E)(\exists y\in F)R \rightleftarrows (\exists z\in E\times F)(pr_1(z)|x)(pr_2(z)|y)R$

(e'21) $(\forall x\in E)(\forall y\in F)R \rightleftarrows (\forall z\in E\times F)(pr_1(z)|x)(pr_2(z)|y)R$

pourvu que z <u>ne soit pas libre dans</u> R.

En effet, $(pr_1(z)|x)(pr_2(z)|y)R$ est équivalente à $(\exists x\in E)(\exists y\in F)(x=pr_1(z)$ et $y=pr_2(z)$ et $R)$, donc à $(\exists x\in E)(\exists y\in F)(z=(x,y)$ et $R)$. Comme z n'est pas libre dans R, on voit que $(\exists z\in E\times F)(pr_1(z)|x)(pr_2(z)|y)R$ est équivalente à $(\exists x\in E)(\exists y\in F)(R$ et $(\exists z\in E\times F)(z=(x,y)))$; mais dans la théorie du produit $E\times F$, $(\exists z\in E\times F)(z=(x,y))$ est vraie ; d'où le schéma (e'20). Le schéma (e'21) s'en déduit en appliquant (e'20) à $\overline{R}$.

On en conclut que si R entraîne S, et si z n'est pas libre dans R ni dans S, $(pr_1(z)|x)(pr_2(z)|y)R$ entraîne $(pr_1(z)|x)(pr_2(z)|y)S$.

La théorie du produit $E \times F$ permet ainsi de __traduire__ en quelque sorte toute relation vraie contenant x et y, mais ne contenant pas z , en une relation vraie ne contenant plus x et y , mais contenant z .

Inversement, à une relation R dans laquelle z n'est pas lié, on peut faire correspondre la relation $((x,y)|z)R$; on a cette fois les schémas de relation vraie

(e'22) $(\exists z \in E \times F)R \rightleftarrows (\exists x \in E)(\exists y \in F)((x,y)|z)R$

(e'23) $(\forall z \in E \times F)R \rightleftarrows (\forall x \in E)(\forall y \in F)((x,y)|z)R$

pourvu que x __ni__ y __ne soient libres dans__ R .

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer ces schémas, par un raisonnement analogue à celui fait pour (e'20).

Remarquons enfin que la relation $((x',y')|z)pr_1(z)|x)(pr_2(z)|y)R$ est équivalente à $(x'|x)(y'|y)((x',y')|z)R$, et que la relation $(pr_1(z)|x)(pr_2(z)|y((x,y)|z)R$ est équivalente à $(pr_1(z')|x)(pr_2(z')|y)(z'|z)R$.

En effet, $(pr_1(z)|x)(pr_2(z)|y)R$ est équivalente à

$$(\exists x \in E)(\exists y \in F)(z=(x,y) \text{ et } R)$$

donc $((x',y')|z)(pr_1(z)|x)(pr_2(z)|y)R$ est équivalente à

$$(\exists x \in E)(\exists y \in F)((x',y')=(x,y) \text{ et } ((x',y')|z)R)$$

Mais comme $(x',y')=(x,y)$ est équivalente à $(x'=x \text{ et } y'=y)$, la relation $((x'y')|z)(pr_1(z)|x)(pr_2(z)|y)R$ est équivalente à $((\exists x \in E)(x'=x \text{ et } (\exists y \in F)(y'=y \text{ et } ((x',y')|z)R))$, ce qui démontre la première règle ; le lecteur établira de même la seconde.

Considérons la relation $(\exists y \in F)((x,y) \in Z)$, et fonctionnalisons-là par rapport à x ; nous prendrons comme symbole fonctionnel attaché à cette relation l'assemblage $pr_1(Z)$, appelé __première projection de__ Z ; la relation $x \in pr_1(Z)$ est donc équivalente à $(\exists y \in F)((x,y) \in Z)$.

78

On prendra de même $pr_2(Z)$ (<u>seconde projection de Z</u>) comme symbole fonctionnel attaché à la relation obtenue en fonctionnalisant par rapport à y la relation $(\exists x \in E)((x,y) \in Z)$.

Notons enfin que, d'après la proposition 2, la relation $X \times Y \subset E \times F$ est vraie dans la théorie du produit $E \times F$.

<u>Proposition 3. La relation</u> $X \times Y = \emptyset$ <u>est équivalente à</u> $(X=\emptyset$ ou $Y=\emptyset)$.

En effet, $X \times Y = \emptyset$ est équivalente à $(\forall z \in E \times F)(z \notin X \times Y)$, donc d'après le schéma (c'23), à $(\forall x \in E)(\forall y \in F)((x,y) \notin X \times Y)$; d'après la prop.1, la relation $(x,y) \notin X \times Y$ est équivalente à $(x \notin X$ ou $y \notin Y)$; donc $X \times Y = \emptyset$ est équivalente à $((\forall x \in E)(x \notin X)$ ou $(\forall y \in F)(y \notin Y))$, c'est-à-dire à $(X=\emptyset$ ou $Y=\emptyset)$.

<u>Proposition 4. La relation</u> $X \times Y \subset X' \times Y'$ <u>est équivalente à</u> $(X \times Y = \emptyset$ ou $(X \subset X'$ et $Y \subset Y'))$.

En effet, $X \times Y \subset X' \times Y'$ est équivalente à $(\forall z \in E \times F)(z \notin X \times Y$ ou $z \in X' \times Y')$, donc, d'après (c'23), à

$$(\forall x \in E)(\forall y \in F)((x \notin X \text{ ou } y \notin Y) \text{ ou } (x \in X' \text{ et } y \in Y'))$$

Par suite, elle est équivalente à

$(\forall x \in E)(\forall y \in F)(x \notin X$ ou $y \notin Y$ ou $x \in X')$ et $(\forall x \in E)(\forall y \in F)(x \notin X$ ou $y \notin Y$ ou $y \in Y')$.

Or, la relation $(\forall x \in E)(\forall y \in F)(x \notin X$ ou $y \notin Y$ ou $x \in X')$ est équivalente à $((\forall x \in E)(x \notin X$ ou $x \in X')$ ou $(\forall y \in F)(y \notin Y))$, c'est-à-dire à $(X \subset X'$ ou $Y=\emptyset)$; de même $(\forall x \in E)(\forall y \in F)(x \notin X$ ou $y \notin Y$ ou $y \in Y')$ est équivalente à $(Y \subset Y'$ ou $X=\emptyset)$. Donc $X \times Y \subset X' \times Y'$ est équivalente à $((X \subset X'$ ou $Y=\emptyset)$ et $(Y \subset Y'$ ou $X=\emptyset))$, c'est-à-dire à $((X \subset X'$ et $Y \subset Y')$ ou $(X \subset X'$ et $X=\emptyset)$ ou $(Y \subset Y'$ et $Y=\emptyset)$ ou $(X=\emptyset$ et $Y=\emptyset))$. Mais (§ 1,prop.5) $X=\emptyset$ entraîne $X \subset X'$, donc $(X=\emptyset$ et $X \subset X')$ est équivalente à $X=\emptyset$;

de même ($Y=\emptyset$ et $Y \subset Y'$) est équivalente à $Y=\emptyset$; enfin ($X=\emptyset$ ou $Y=\emptyset$ ou ($X=\emptyset$ et $Y=\emptyset$)) est équivalente à ($X=\emptyset$ ou $Y=\emptyset$), c'est-à-dire à $X \times Y=\emptyset$ d'après la prop.3 ; ce qui achève la démonstration.

<u>Proposition 5</u>. <u>La relation</u> ($X=\emptyset$ ou $Y\neq\emptyset$) <u>est équivalente à</u> $pr_1(X \times Y)=X$.

Notons d'abord que la relation $x \in pr_1(X \times Y)$ est équivalente à $(\exists y \in F)((x,y) \in X \times Y$, donc, d'après la prop.2, à $(\exists y \in F)(x \in X$ et $y \in Y)$, et par suite à ($x \in X$ et $(\exists y \in F)(y \in Y)$). Or, la relation $(\exists y \in F)(y \in Y)$ est équivalente à $Y\neq\emptyset$; donc la relation $x \in pr_1(X \times Y)$ est équivalente à ($x \in X$ et $Y\neq\emptyset$) .

On en déduit tout d'abord que $pr_1(X \times Y) \subset X$ est <u>vraie</u>, car ($x \in X$ et $Y\neq\emptyset$) entraîne $x \in X$. Il en résulte que la relation $pr_1(X \times Y)=X$ est équivalente à $X \subset pr_1(X \times Y)$. Or, cette dernière est équivalente à $(\forall x \in E)(x \notin X$ ou $x \in pr_1(X \times Y))$ c'est-à-dire à $(\forall x \in E)(x \notin X$ ou ($x \in X$ et $Y\neq\emptyset$)), ou encore à $(\forall x \in E)((x \notin X$ ou $x \in X)$ et ($x \notin X$ ou $Y\neq\emptyset$)) ; comme ($x \notin X$ ou $x \in X$) est vraie, elle est aussi équivalente à $(\forall x \in E)(x \notin X$ ou $Y\neq\emptyset)$, c'est-à-dire à $((\forall x \in E)(x \notin X)$ ou $Y\neq\emptyset)$; comme $(\forall x \in E)(x \notin X)$ est équivalent à $X=\emptyset$, la proposition est démontrée.

<u>Proposition 6</u>. <u>La relation</u> $Z \subset pr_1(Z) \times pr_2(Z)$ <u>est vraie</u> .

Il faut montrer que $z \in Z$ entraîne $z \in pr_1(Z) \times pr_2(Z)$; la proposition sera donc établie si on démontre que $(x,y) \in Z$ entraîne $(x,y) \in pr_1(Z) \times pr_2(Z)$. Or, $(x,y) \in Z$ entraîne $(\exists y \in F)((x,y) \in Z)$ c'est-à-dire $x \in pr_1(Z)$; de même $(x,y) \in Z$ entraîne $y \in pr_2(Z)$. Donc $(x,y) \in Z$ entraîne $((x \in pr_1(Z))$ et $(y \in pr_2(Z)))$, qui est équivalente à $(x,y) \in pr_1(Z) \times pr_2(Z)$ d'après la prop.1 .

<u>Proposition 7</u>. <u>Les relations suivantes sont vraies</u> :

(1) $(X \times Y) \cup (X' \times Y)=(X \cup X') \times Y$.

(2) $(X \times Y) \cap (X' \times Y')=(X \cap X') \times (Y \cap Y')$.

Nous laissons les démonstrations au lecteur.

3. <u>Relations et parties explicites d'un produit</u>. Soit R une relation quelconque, ne contenant pas l'argument z . La relation

$$(\forall x \in E)(\forall y \in F)(R \rightleftarrows ((x,y) \in Z))$$

est fonctionnelle par rapport à l'argument Z du type $\mathfrak{P}(E \times F)$, car elle est équivalente à $(\forall z \in E \times F)((pr_1 z|x)(pr_2 z|y)R \rightleftarrows (z \in Z))$. Si $\underline{E}_R$ est un symbole fonctionnel attaché à cette relation (symbole dans lequel x ni y ne sont plus arguments libres), la relation R est équivalente à $(x,y) \in \underline{E}_R$. On dit que $\underline{E}_R$ est <u>la partie de</u> $E \times F$ <u>définie par</u> R ; si R entraîne S (resp. est équivalente à S) la relation $\underline{E}_R \subset \underline{E}_S$ (resp. $\underline{E}_R = \underline{E}_S$) est vraie. Lorsque R ne contient pas d'arguments libres autres que x et y (qui d'ailleurs peuvent ou non figurer dans R) , $\underline{E}_R$ ne contient aucun argument libre, autrement dit, c'est une <u>partie explicite</u> de $E \times F$.

<u>Exercices</u>. 1) Montrer que la relation $(X \times Y = X' \times Y')$ est équivalente à $(X \times Y = \emptyset$ ou $(X = X'$ et $Y = Y'))$.

2) Montrer que la relation

$$\complement(X \times Y) = ((\complement X) \times F) \cup (X \times (\complement Y))$$

est vraie.

3) Montrer que la relation $pr_1(Z \cap (X \times F)) = (pr_1(Z)) \cap X$ est vraie.

§ 4. Fonctions.

1. <u>Conventions de langage</u>. A l'exception d'un dernier axiome (E_{VIII}), qui sera énoncé dans le paragraphe 5 , nous avons maintenant énuméré tous les axiomes et schémas d'axiomes qui définissent la théorie des ensembles, et nous en avons tiré les premières conséquences. Pour poursuivre l'exposé de la théorie, nous nous permettrons désormais d'atténuer la rigidité du langage que nous utiliserons, le lecteur étant en mesure de rétablir sans difficulté le langage correct s'il le désire.

81

De façon générale, nous nous efforcerons de nous rapprocher peu à peu du langage "ontologique" (cf. Introduction) qui sera employé dans tous le reste du Traité. Plus précisément :

1° Au lieu de dire explicitement qu'une relation R est vraie, nous nous bornerons souvent à dire : on a R", ou simplement à énoncer la relation R (notamment dans les "propositions").

2° Au lieu des signes $(\forall x \in E)$, $(\exists\ x \in E)$, nous écrirons désormais le plus souvent : "quel que soit $x \in E$", "il existe $x \in E$ tel que" ; au lieu de "quel que soit $x \in E$", nous dirons souvent "pour tout $x \in E$", ou "quand x parcourt E" ; nous nous permettrons même parfois, lorsqu' aucune ambiguité n'en résultera, d'écrire "R pour tout $x \in E$", ou "on a R pour tout $x \in E$", au lieu de "quel que soit $x \in E$,R". Au lieu de "R entraîne S", nous dirons aussi de nouveau "si R, S" ou "pour que R, il faut que S", ou "pour que S, il suffit que R", ou "S est une condition nécessaire pour que R", ou enfin "R est une condition suffisante pour que S" ; de même, au lieu de "R est équivalente à S", nous dirons aussi "pour que R, il faut et il suffit que S", ou "S est une condition nécessaire et suffisante pour que R" (cf. Introduction).

3° Nous ne distinguerons plus avec autant de netteté que ci-dessus les diverses "théories" partielles que les besoins de la démonstration nous amèneront à introduire, et nous ne préciserons plus dans laquelle de ces théories une relation est vraie, le contexte devant suffire au lecteur pour le reconnaître. L'introduction d'une "théorie" nouvelle ne se marquera plus que par celle des "arguments de base" ou des "arguments typiques" de la théorie, sous des formes telles que "soient x,y,z tels que A,B,C", "si x,y,z, sont tels que A,B,C,...", "soient E,F deux ensembles ...", "soit x un élément de E...", etc...

En outre la distinction entre arguments de base et arguments typiques ne sera pas toujours explicitée ; on ne s'apercevra souvent qu'un argument est typique que parce que des quantificateurs typiques opèreront sur cet argument.

Signalons en particulier un procédé fréquent, qu'on peut appeler l'introduction d'<u>arguments abréviateurs</u>. Il consiste à introduire de nouveaux arguments par des phrases telles que : "soit x tel que $x=f_R$ " ou "posons $f_R=x$ ", f_R étant un symbole fonctionnel (où x ne figure pas) d'écriture assez compliquée. Cela signifie tout simplement qu'on ajoute à la théorie que l'on considère l'argument de base x et l'axiome $x = f_R$.

En dehors de ces abus de langage, nous ferons de plus en plus usage de signes abréviateurs, chacun d'eux étant naturellement "défini" comme il a été expliqué au chap. I, § 1 .

2. <u>Applications de E dans F</u>. Soient E,F deux ensembles, x un élément arbitraire de E , y,y' des éléments arbitraires de F , u une partie arbitraire de $E\times F$. En fonctionnalisant par rapport à u la relation "quels que soient $x\in E$, $y\in F$, $y'\in F$, $((x,y)\in u$ et $(x,y')\in u) \rightarrow y = y'$), on obtient une relation fonctionnelle déterminant une <u>partie explicite</u> de $\mathfrak{P}(E\times F)$, que nous désignerons par $\phi(E,F)$ et appellerons <u>l'ensemble des applications d'une partie de E dans F</u> ; nous dirons qu'un élément arbitraire de $\phi(E,F)$ est une <u>application arbitraire d'une partie de E dans F</u> . Si u est un élément arbitraire de $\phi(E,F)$, la relation $((x,y)\in u$ et $(x,y')\in u)$ entraîne $y=y'$; $pr_1 u$ est appelé l'<u>ensemble de définition</u> de u , $pr_2 u$ l'<u>ensemble des valeurs</u> de u .

<u>Exemple</u>. La partie vide de $E\times F$ appartient à $\phi(E,F)$; en effet, la relation $((x,y)\in\emptyset$ et $(x,y')\in\emptyset)$ est fausse, donc elle entraîne $y=y'$. On dit que $\emptyset$ est l'<u>application vide</u>.

Si A est une partie de E , B une partie de F , on a $A \times B \subset E \times F$ (§ 3, prop. 2) ; par suite, si u est une partie arbitraire de $A \times B$, la relation $u \in \phi(A,B)$ entraîne $u \in \phi(E,F)$ parce que ($x \notin A$ ou $y \notin B$ ou $y' \notin B$) entraîne ($(x,y) \notin u$ ou $(x,y') \notin u$)). Autrement dit, on a $\phi(A,B) \subset \phi(E,F)$.

Si u est un élément arbitraire de $\phi(E,F)$, v une partie arbitraire de $E \times F$, la relation $v \subset u$ entraîne $v \in \phi(E,F)$; la relation $v \subset u$ s'énonce encore "u est un <u>prolongement</u> de v" , ou "v est une <u>restriction</u> de u" .

En particulier, si X est une partie arbitraire de E , u un élément arbitraire de $\phi(E,F)$, nous poserons $u_X = u \cap (X \times F)$; on a évidemment $u_X \subset u$, et on dit que u_X est la <u>restriction de u à</u> X ; on a $pr_1 u_X = (pr_1 u) \cap X$.

En effet, de façon générale, si Z est une partie arbitraire de $E \times F$, on a $pr_1(Z \cap (X \times F)) = (pr_1 Z) \cap X$. Pour le voir, notons que $x \in pr_1(Z \cap (X \times F))$ est équivalente à

$(\exists y \in F)((x,y) \in Z$ et $(x,y) \in X \times F)$, donc aussi à

$(\exists y \in F)((x,y) \in Z$ et $x \in X$ et $y \in F)$; comme $y \in F$ est vraie, cette relation est finalement équivalente à

$(x \in X$ et $(\exists y \in F)((x,y) \in Z))$, c'est-à-dire à

$(x \in X$ et $x \in pr_1 Z)$.

Soit X une partie arbitraire de E , Y une partie arbitraire de F ; considérons la relation "$pr_1 u = X$ et $pr_2 u \subset Y$ " et fonctionnalisons-là par rapport à u ; nous prendrons comme symbole fonctionnel attaché à cette relation l'assemblage Y^X , appelé l'<u>ensemble des applications de</u> X <u>dans</u> Y .

Chacune des relations $X=\emptyset$, $Y=\emptyset$ entraîne $Y^X=\{\emptyset\}$ (§ 3, prop. 3 et 6). Si $X\neq\emptyset$ et $Y\neq\emptyset$, pour tout $z\in Y$, $X\times\{z\}$ est un élément de Y^X, car on a $pr_1(X\times\{z\})=X$, $pr_2(X\times\{z\})=\{z\}$, et comme la relation $(x,y)\in X\times\{z\}$ est équivalente à ($x\in X$ et $y=z$), la relation ($(x,y)\in X\times\{z\}$ et $(x,y')\in X\times\{z\}$) est équivalente à ($x\in X$ et $y=z$ et $y'=z$), donc entraîne $y=y'$. On dit que $u=X\times\{z\}$ est l'<u>application constante égale à z</u> de X dans Y.

Nous dirons qu'un élément arbitraire de Y^X est une <u>application arbitraire dans</u> X, <u>à valeurs dans</u> Y. Si $X\neq\emptyset$, $Y\neq\emptyset$, et si u est une application arbitraire de X dans Y, la relation $(x,y)\in u$ (entre un élément arbitraire x de X et un élément arbitraire y de Y) est fonctionnelle en y, car la relation $pr_1 u=X$ est vraie, donc $x\in pr_1 u$ est vraie, ce qui signifie que $(\exists y\in Y)((x,y)\in u)$ est vraie ; d'autre part, comme $u\in\Phi(E,F)$ est vraie, ($(x,y)\in u$ et $(x,y')\in u$) entraîne $y=y'$. Nous prendrons comme symbole fonctionnel attaché à cette relation $u(x)$; la relation $(x,y)\in u$ est donc <u>équivalente</u> à $y=u(x)$. On dit encore que $u(x)$ est <u>la valeur de u pour x</u>, et que <u>u transforme x en</u> $u(x)$.

Tout élément u de $\Phi(E,F)$ est une application de $pr_1 u$ dans F ; si $u\neq\emptyset$, on a $pr_1 u\neq\emptyset$; si x est alors un élément arbitraire de $pr_1 u$, la relation $(x,y)\in u$ est fonctionnelle en y, et équivalente à $y=u(x)$, comme nous venons de le voir.

Si X est une partie quelconque de E, la restriction à X d'une application arbitraire u de E dans F est une application de X dans F, puisque la relation $pr_1 u=E$ entraîne $(pr_1 u)\cap X=X$.

<u>Proposition 1. Si</u> u <u>et</u> v <u>sont deux applications arbitraires de</u> E <u>dans</u> F, <u>la relation</u> $u=v$ <u>est équivalente à</u> (quel que soit $x\in E$, $u(x)=v(x)$).

En effet, la relation $u(x)=v(x)$ est équivalente à $(\forall y\in F)((x,y)\in u \rightleftarrows (x,y)\in v)$, donc $(\forall x\in E)(u(x)=v(x))$ est équivalente à $(\forall x\in E)(\forall y\in F)((x,y)\in u \rightleftarrows (x,y)\in v)$, et par suite à $(\forall z\in E\times F)(z\in u \rightleftarrows z\in v)$, ce qui est enfin équivalent à $u=v$.

Soit R une relation fonctionnelle en y ; si $\underline{E}_R$ est le symbole fonctionnel attaché à la relation fonctionnelle en Z (partie arbitraire de $E\times F$) : $(\forall x\in E)(\forall y\in F)(R \rightleftarrows ((x,y)\in Z))$ (§ 3, n° 3), on a vu que R est équivalente à $(x,y)\in \underline{E}_R$; il en résulte que $\underline{E}_R \in F^E$ est vraie ; donc, si u est une application arbitraire de E dans F, la relation $(\forall x\in E)(\forall y\in F)(R \rightleftarrows (y=u(x)))$ est fonctionnelle en u, et $\underline{E}_R$ est un symbole fonctionnel attaché à cette relation ; la relation fonctionnelle R est encore équivalente à $y=\underline{E}_R(x)$. Autrement dit, R est équivalente à la relation fonctionnelle <u>composée</u> de $y=u(x)$ et de $u=\underline{E}_R$; $E_R(x)$ est donc un symbole fonctionnel attaché à R. Lorsque R ne contient aucun argument libre autre que x et y, $\underline{E}_R$ est une <u>application explicite</u> de E dans F, qu'on dit <u>définie</u> par la relation fonctionnelle R. Si R et S sont deux relations fonctionnelles en y et <u>équivalentes</u>, $\underline{E}_R=\underline{E}_S$ est vraie.

<u>Exemple</u>. La partie de $E\times E$ définie par la relation $x=y$, fonctionnelle en y, est une application explicite de E dans E qu'on appelle <u>application identique</u> et qu'on note Δ (ou Δ_E s'il risque d'y avoir confusion) ; pour toute partie X de E, la restriction Δ_X de Δ à X appartient à F^X et est appelée l'<u>application canonique de</u> X <u>dans</u> E. Lorsque $X\neq\emptyset$, et que x est un élément arbitraire de X, R une relation ne contenant pas x et dans laquelle un argument y de type E n'est pas lié, la relation $(\Delta_X(x)|y)R$ est équivalente à $(x|y)R$. En effet, la relation $y=\Delta_X(x)$ est équivalente à $y=x$ (dans la théorie des parties du sous-ensemble X de E), donc $(\Delta_X(x)|y)R$ est équivalente à

$(\exists y \in E)(y = \Delta_X(x)$ et $R)$, et à $(\exists y \in E)(y=x$ et $R)$ qui est elle-même équivalente à $(\exists y \in E)(y=x$ et $(x|y)R$, et par suite à $((\exists y \in E)(y=x)$ et $(x|y)R)$; comme $(\exists y \in E)(y=x)$ est vraie, notre assertion est établie. On dit que la relation $(x|y)R$ s'obtient en <u>restreignant</u> l'élément y à appartenir à X.

<u>Notations</u>. Lorsque u est une application arbitraire de E dans F, au lieu de noter $u(x)$ le symbole fonctionnel attaché à la relation fonctionnelle en y : $(x,y) \in u$, on le note souvent u_x (<u>notation indicielle</u>).

Lorsque R est une relation fonctionnelle en y, et que f_R est un symbole fonctionnel attaché à cette relation (contenant en général x comme variable libre), on note souvent l'application explicite de E dans F définie par R, par la combinaison de signes $x \to f_R$, dans laquelle x naturellement doit être considéré comme un <u>argument lié</u>. Par exemple, l'application identique de E s'écrira $x \to x$, une application constante égale à z s'écrira $x \to z$.

Si u est une application arbitraire de E dans E, la relation $u(x)=x$ s'exprime encore en disant que x <u>est invariant par</u> u. Par exemple, tout $x \in E$ est invariant par l'application identique.

<u>3. Applications de</u> E <u>sur</u> F. <u>Applications biunivoques de</u> E <u>dans</u> F.

Soit X une partie arbitraire de E, Y une partie arbitraire de F ; considérons la relation "$pr_1 u=X$ et $pr_2 u=Y$" et fonctionnalisojns-là par rapport à u ; nous prendrons comme symbole fonctionnel de cette relation l'assemblage $S(X,Y)$, appelé <u>l'ensemble des applications de</u> X <u>sur</u> Y. Tout élément u de $\phi(E,F)$ est une application de $pr_1 u$ <u>sur</u> $pr_2 u$. On a évidemment $S(X,Y) \subset Y^X$.

<u>Exemples</u>.- L'application vide est une application de $\emptyset_E$ sur $\emptyset_F$, autrement dit on a $S(\emptyset_E,\emptyset_F) = \emptyset_F^{\emptyset_E}$.

L'application explicite pr_1 de $E \times F$ dans F (déduite de la relation $x=pr_1 z$ fonctionnelle en x) est une application de $E \times F$ <u>sur</u> E , car la relation $(\exists z \in E \times F)(x=pr_1(z))$ est vraie en vertu de la relation $pr_1(x,y)=x$.

Si u est un élément arbitraire de $\Phi(E,F)$, X une partie arbitraire de E , l'application $u \rightarrow u_X$ qui fait correspondre à u sa restriction à X est une application de $\Phi(E,F)$ <u>sur</u> $\Phi(X,F)$, car pour tout $u \in \Phi(X,F)$, on a $u_X = u$.

Considérons de même la relation "$u \in Y^X$ et $(\forall x \in E)(\forall x' \in E)(x \notin X$ ou $x' \notin X$ ou $(u(x)=u(x') \rightarrow x=x'))$" et fonctionnalisons-la par rapport à u ; nous prendrons comme symbole fonctionnel de cette relation $B(X,Y)$ appelé l'<u>ensemble des applications biunivoques de</u> X <u>dans</u> Y ; on a évidemment $B(X,Y) \subset Y^X$.

<u>Exemples</u>.- L'application vide est une application biunivoque de $\emptyset_E$ dans F , puisque la relation $x \notin \emptyset_E$ est vraie. L'application explicite $x \rightarrow \{x\}$ de E dans $\mathfrak{P}(E)$ est une application biunivoque, car la relation $\{x\} = \{x'\}$ entraîne $x=x'$.

L'application explicite $X \rightarrow X \times F$ de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(E \times F)$ est biunivoque, car la relation $X \times F = X' \times F$ est équivalente à $(X=X'$ ou $(X=\emptyset$ et $X'=\emptyset))$, donc entraîne $X=X'$.

Si X est une partie quelconque de E , la restriction à X d'une application biunivoque u de E dans F est une application biunivoque de X dans F ; c'est évident si $X=\emptyset$, puisqu'alors $u_X=\emptyset$; si $X \neq \emptyset$, la relation $u_X(x)=u_X(x')$ entraîne $u(x)=u(x')$, donc $x=x'$. En particulier, l'application canonique de X dans E est biunivoque.

On pose $I(X,Y)=S(X,Y)\cap B(X,Y)$, et cet ensemble est appelé l'<u>ensemble des applications biunivoques de</u> X <u>sur</u> Y .

Si on prend $X=\phi_E$, $Y=\phi_F$, on a donc $I(X,Y)=\{\phi\} = Y^X$.

Une application biunivoque u de X <u>dans</u> Y est une application biunivoque de X <u>sur</u> $pr_2 u$.

Si u est un élément arbitraire de $I(E,F)$, la relation ($y=u(x)$ et $y=u(x')$) entraîne $x=x'$, et la relation $(\exists x\in F)(y=u(x))$ est vraie ; autrement dit, la relation $y=u(x)$ est <u>fonctionnelle en x</u> aussi bien qu'en y (c'est donc ce que nous avons appelé une relation fonctionnelle biunivoque) ; si v est un élément arbitraire de E^F , la relation $(\forall x\in E)(\forall y\in F)((y=u(x)) \rightleftarrows (x=v(y)))$ est donc <u>fonctionnelle</u> en v ; nous désignerons provisoirement par $\bar{u}$ un symbole fonctionnel attaché à cette relation, et nous dirons que $\bar{u}$ est l'<u>application réciproque</u> de u . Comme $x=\bar{u}(y)$ est équivalente à $y=u(x)$, c'est une relation fonctionnelle biunivoque, donc $\bar{u}$ est une application biunivoque de F sur E ; en outre, comme $y=\bar{\bar{u}}(x)$ est équivalente à $y=u(x)$, il résulte de la prop.1 que $\bar{\bar{u}}=u$, autrement dit, u est l'application réciproque de $\bar{u}$. On dit que les applications biunivoques u et $\bar{u}$ <u>réalisent une correspondance biunivoque de</u> E <u>et de</u> F , et que E et F <u>sont mis en correspondance biunivoque par</u> u <u>et</u> $\bar{u}$.

Lorsque $F=E$, une application biunivoque de E sur E est aussi appelée <u>permutation</u> de E ; la relation $\bar{u}=u$ s'exprime alors en disant que u est une <u>permutation involutive</u> de E".

<u>Exemples</u>. L'application identique $x\rightarrow x$ de E est une permutation involutive de E . L'application $X\rightarrow \complement X$ est une permutation involutive de $\mathfrak{P}(E)$; en effet, la relation $Y=\complement X$ entraîne $\complement Y=\complement(\complement X)=X$, et $X=\complement Y$ entraîne $Y=\complement X$, donc ces deux relations sont équivalentes.

Z <u>Remarque</u>. L'ensemble F^E n'est jamais vide, puisque les applications constantes de E dans F appartiennent à F^E ; mais l'ensemble $S(E,F)$ ou l'ensemble $B(E,F)$ peut être vide (cf. chap.III).

4. <u>Extension d'une application aux ensembles de parties</u>. Soit u une application arbitraire de E dans F , X une partie arbitraire de E . La relation

$$(\exists x \in E)(x \in X \text{ et } y=u(x))$$

fonctionnalisée par rapport à y, donne une relation entre X,u et une partie arbitraire Y de F , fonctionnelle en Y ; si nous la désignons pour abréger par R et si v est une application arbitraire de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(F)$, la relation $(\forall X \subset E)(\forall Y \subset F)(R \rightleftarrows Y=v(X))$ est fonctionnelle en v ; nous désignerons provisoirement par $\hat{u}$ un symbole fonctionnel attaché à cette relation ; la relation $y\ \hat{u}(X)$ est donc équivalente à $(\exists x \in E)(x \in X \text{ et } y=u(x))$; $\hat{u}$ est appelée <u>l'extension de u aux ensembles de parties de</u> E <u>et de</u> F ; par abus de langage, on écrit le plus souvent $u(X)$ au lieu de $\hat{u}(X)$ (et même parfois u au lieu de $\hat{u}$), et on dit que $u(X)$ est <u>l'image de X par u</u> , ou <u>l'ensemble des valeurs prises par u sur</u> X ; on dit aussi que u <u>transforme</u> X <u>en</u> $u(X)$; la relation "$y \in u(X)$", s'énonce souvent "y <u>est de la forme</u> $u(x)$ où $x \in X$ "

On a $u(E)=pr_2 u$, car la relation $y \in pr_2 u$ est équivalente à $(\exists x \in E)(y=u(x))$, donc aussi à $(\exists x \in E)(x \in E \text{ et } y=u(x))$. On a $u(\{x\})=\{u(x)\}$, car $y \in u(\{x\})$ équivaut à $(\exists z \in E)(z \in \{x\} \text{ et } y=u(z))$; comme $z \in \{x\}$ équivaut à $z=x$, et $(\exists z \in E)(z=x \text{ et } y=u(z))$ à $y=u(x)$, $y \in u(\{x\})$ équivaut à $y=u(x)$, ou enfin à $y \in \{u(x)\}$.

On notera que la relation $(x \in X \text{ et } y=u(x))$, équivalente à $(x \in X \text{ et } (x,y) \in u)$ est donc équivalente à $(x,y) \in (X \times F) \cap u$ ou à $(x,y) \in u_X$; on a donc $u(X)=pr_2 u_X$.

<u>Exemples</u>.- L'application $Z \to pr_1(Z)$ de $\mathfrak{P}(E \times F)$ dans $\mathfrak{P}(E)$ n'est autre que l'extension de $z \to pr_1(z)$ aux ensembles de parties.

L'image de F par l'application $z \rightarrow E \times \{z\}$ de F dans F^E est dite <u>diagonale</u> de F^E : c'est donc l'ensemble des applications constantes de E dans F ; l'application $z \rightarrow E\times\{z\}$ est <u>biunivoque</u>

<u>Proposition 2</u>. <u>Les relations</u> $X=\emptyset$ <u>et</u> $u(X)=\emptyset$ <u>sont équivalentes</u>.

En effet, la relation $u(X)=\emptyset$ est équivalente à $(\forall y\in E)(y\notin u(X))$ donc à $(\forall y\in F)(\forall x\in E)(x\notin X$ ou $y\neq u(x))$, donc aussi à $(\forall x\in E)(x\notin X$ ou $(\forall y\in F)(y\neq u(x)))$; comme $(\forall y\in F)(y\neq u(x))$ est fausse, on voit que $u(X)=\emptyset$ est équivalente à $(\forall x\in E)(x\notin X)$, donc à $X=\emptyset$.

<u>Proposition 3</u>. <u>La relation</u> $X\subset X'$ <u>entraîne</u> $u(X)\subset u(X')$.

En effet, la relation $X\subset X'$ entraîne $(x\in X \rightarrow x\in X')$; donc elle entraîne aussi la relation

$$(\exists x\in E)(x\in X \text{ et } y=u(x)) \rightarrow (\exists x\in E)(x\in X' \text{ et } y=u(x))$$

c'est-à-dire $(y\in u(X)\rightarrow y\in u(X'))$. On en déduit que $(\forall y\in F)(X\subset X')$, qui est équivalente à $X\subset X'$, entraîne $(\forall y\in F)(y\in u(X)\rightarrow y\in u(X'))$, c'est-à-dire $u(X)\subset u(X')$.

<u>Proposition 4</u>. <u>On a</u> $u(X\cup X')=u(X)\cup u(X')$.

En effet, la relation $y\in u(X\cup X')$ est équivalente à

$(\exists x\in E)(x\in X\cup X'$ et $y=u(x))$, donc à $(\exists x\in E)((x\in X$ ou $x\in X')$ et $y=u(x))$, par suite aussi à $(\exists x\in E)((x\in X$ et $y=u(x))$ ou $(x\in X'$ et $y=u(x)))$, et finalement à

$(\exists x\in E)(x\in X$ et $y=u(x))$ ou $(\exists x\in E)(x\in X'$ et $y=u(x))$

qui est équivalente à $y\in u(X)\cup u(X')$.

On notera par contre que la relation $u(X\cap X')=u(X)\cap u(X')$ <u>n'est pas vraie</u>, car la relation $X\cap X'=\emptyset$ n'entraîne pas $u(X)\cap u(X')=\emptyset$.

En effet, si on substitue à u l'application constante égale à z , la relation $(X\neq\emptyset$ et $X'\neq\emptyset)$ entraîne $u(X)=u(X')=\{z\}$, donc $u(X)\cap u(X')=\{z\}$.

On a seulement la relation $u(X\cap X')\subset u(X)\cap u(X')$; en effet, la relation $X\cap X'\subset X$ est vraie, donc aussi $u(X\cap X')\subset u(X)$ d'après la prop.3 ; de même $u(X\cap X')\subset u(X')$ est vraie, donc il en est de même de $u(X\cap X')\subset u(X)\cap u(X')$.

<u>Proposition 5</u>. <u>Si u est une application biunivoque de</u> E <u>dans</u> F , <u>on a</u> $u(X\cap X')=u(X)\cap u(X')$.

Il suffit de montrer que la relation $u(X)\cap u(X')\subset u(X\cap X')$ est vraie. Or, la relation $y\in u(X)\cap u(X')$ est équivalente à

$$(\exists\, x\in E)(x\in X \text{ et } y=u(x)) \text{ et } (\exists\, x'\in E)(x'\in X' \text{ et } y=u(x'))$$

donc à

$$(\exists\, x\in E)(\exists\, x'\in E)(x\in X \text{ et } x'\in X' \text{ et } y=u(x) \text{ et } y=u(x'))$$

Mais comme $u\in B(E,F)$, $(y=u(x)$ et $y=u(x'))$ entraîne $x=x'$.

Donc $y\in u(X)\cap u(X')$ entraîne

$$(\exists\, x\in E)(\exists\, x'\in E))(x\in X \text{ et } x'\in X' \text{ et } y=u(x) \text{ et } x=x')$$

et par suite

$$(\exists\, x\in E)(\exists\, x'\in E)(x\in X \text{ et } x\in X' \text{ et } y=u(x))$$

c'est-à-dire

$(\exists\, x\in E)(x\in X\cap X'$ et $y=u(x))$, qui est équivalente à $y\in u(X\cap X')$.

<u>Corollaire 1</u>. <u>Si</u> u <u>est une application biunivoque de</u> E <u>dans</u> F , <u>on a</u> $u(X\cap \complement X')=u(X)\cap \complement u(X')$.

Pour déduire cette proposition de la précédente, remarquons que la relation $X''=X\cap\complement X'$ est équivalente à $(X''\cap X'=\emptyset$ et $X''\cup X'=X\cup X')$. En effet, $X''=X\cap\complement X'$ entraîne $X''\cap X'=X\cap(\complement X'\cap X')=X\cap\emptyset=\emptyset$, et $X''\cup X'=(X\cup X')\cap(X'\cup\complement X')=(X\cup X')\cap E=X\cup X'$. D'autre part, $X''\cap X'=\emptyset$ entraîne $X''\subset\complement X'$, donc $(X''\cup X')\cap\complement X'=(X''\cap\complement X')\cup(X'\cap\complement X')=X''\cap\complement X'=X''$; de même $(X\cup X')\cap\complement X'=X\cap\complement X'$; donc $X''\cup X'=X\cup X'$ entraîne $X''=X\cap\complement X'$.

Cela étant, on a $u(X'' \cap X') = u(\emptyset) = \emptyset = u(X'') \cap u(X')$ d'après les prop. 2 et 5 ; d'autre part $u(X'' \cup X') = u(X'') \cup u(X') = u(X \cup X') = u(X) \cup u(X')$; on en tire $u(X'') = u(X) \cap \complement\, u(X')$.

<u>Corollaire 2</u>. <u>Si u est une application biunivoque de E sur F, on a</u> $u(\complement X) = \complement\, u(X)$.

En effet, d'après le cor. 1, $u(\complement X) = u(E \cap \complement X) = u(E) \cap \complement\, u(X)$; comme $u(E) = F$ par hypothèse, le corollaire est démontré.

5. <u>Extension réciproque d'une application aux ensembles de parties</u>. Soit u une application arbitraire de E dans F, Y une partie arbitraire de F. La relation $u(x) \in Y$, fonctionnalisée par rapport à x, donne une relation entre Y, u et une partie arbitraire X de E, relation fonctionnelle en X ; si on la désigne pour abréger par R, et si w est une application arbitraire de $\mathfrak{P}(F)$ dans $\mathfrak{P}(E)$, la relation $(\forall X \subset E)(\forall Y \subset F)(R \rightleftarrows X = w(Y))$ est fonctionnelle en w ; nous désignerons par $\overset{-1}{u}$ un symbole fonctionnel attaché à cette relation ; la relation $x \in \overset{-1}{u}(Y)$ est donc équivalente à $u(x) \in Y$; $\overset{-1}{u}$ est appelée <u>l'extension réciproque de u aux ensembles de parties de E et de F</u> ; on dit que $\overset{-1}{u}(Y)$ est <u>l'image réciproque de Y par u</u>. On a $\overset{-1}{u}(F) = E$, car la relation $u(x) \in F$ est vraie. Par abus de langage, on écrit $\overset{-1}{u}(y)$ au lieu de $\overset{-1}{u}(\{y\})$; la relation $x \in \overset{-1}{u}(y)$ est donc équivalente à $y = u(x)$.

On notera que la relation $u(x) \in Y$ est équivalente à $(\exists y \in F)(y = u(x)$ et $y \in Y)$; or $(y = u(x)$ et $y \in Y)$ est équivalente à $((x,y) \in u$ et $y \in Y)$, et par suite à $(x,y) \in u \cap (E \times Y)$; on a donc $\overset{-1}{u}(Y) = pr_1(u \cap (E \times Y))$.

<u>Proposition 6</u>. <u>On a</u> $\overset{-1}{u}(\emptyset) = \emptyset$. <u>La relation</u> (quel que soit $Y \subset F$, $Y = \emptyset \rightleftarrows \overset{-1}{u}(Y) = \emptyset$) <u>est équivalente à</u> "u est une application de E sur F".

En effet, la relation $x \in \overset{-1}{u}(\emptyset)$ équivaut à $u(x) \in \emptyset$; comme cette dernière entraîne $(\exists\ y \in F)(y \in \emptyset)$, elle est fausse, et par suite équivalente à $x \in \emptyset$, ce qui démontre la première partie de la proposition.

Pour démontrer la seconde partie, supposons que u soit une application de E sur F . Si Y est une partie de F telle que $\overset{-1}{u}(Y)=\emptyset$, la relation $x \notin \overset{-1}{u}(Y)$ est vraie, donc aussi $u(x) \notin Y$; mais pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $u(x)=y$; donc $y \notin Y$ est vraie, ce qui signifie que $Y=\emptyset$. Inversement, supposons que $\overset{-1}{u}(Y)=\emptyset$ entraîne $Y=\emptyset$; alors u est une application de E sur F , car dans le cas contraire, il existerait $y \in F$ tel que $u(x) \neq y$ pour tout $x \in E$; autrement dit, $x \notin \overset{-1}{u}(y)$ serait vrai, donc $\overset{-1}{u}(y)=\emptyset$, bien que $\{y\} \neq \emptyset$.

<u>Proposition 7</u>. <u>La relation</u> $Y \subset Y'$ <u>entraîne</u> $\overset{-1}{u}(Y) \subset \overset{-1}{u}(Y')$.

En effet, si $Y \subset Y'$, la relation $y \in Y$ entraîne $y \in Y'$, donc $u(x) \in Y$ entraîne $u(x) \in Y'$, c'est-à-dire que $x \in \overset{-1}{u}(Y)$ entraîne $x \in \overset{-1}{u}(Y')$.

<u>Proposition 8</u>. <u>Si</u> Y <u>et</u> Y' <u>sont des parties arbitraires de</u> F , <u>on a</u>

$$\overset{-1}{u}(Y \cup Y') = \overset{-1}{u}(Y) \cup \overset{-1}{u}(Y') \tag{1}$$

$$\overset{-1}{u}(Y \cap Y') = \overset{-1}{u}(Y) \cap \overset{-1}{u}(Y') \tag{2}$$

$$\overset{-1}{u}(\complement\, Y) = \complement\, \overset{-1}{u}(Y) \ . \tag{3}$$

Démontrons par exemple (2) ; la relation $x \in \overset{-1}{u}(Y \cap Y')$ est équivalente à $u(x) \in Y \cap Y'$, c'est-à-dire à $(u(x) \in Y$ et $u(x) \in Y')$, donc à $(x \in \overset{-1}{u}(Y)$ et $x \in \overset{-1}{u}(Y'))$ et finalement à $x \in \overset{-1}{u}(Y) \cap \overset{-1}{u}(Y')$.

<u>Proposition 9</u>. <u>Si</u> u <u>est une application arbitraire de</u> E <u>dans</u> F , <u>on a</u>

$$X \subset \overset{-1}{u}(u(X)) \tag{4}$$

$$u(\overset{-1}{u}(Y)) \subset Y \ . \tag{5}$$

En effet, $x \in X$ entraîne $u(x) \in u(X)$ et par suite $x \in \overset{-1}{u}(u(X))$, ce qui démontre (5) ; d'autre part, $y \in u(\overset{-1}{u}(Y))$ est équivalente à $(\exists\ x \in E)(x \in \overset{-1}{u}(Y)$ et $y=u(x))$, donc à $(\exists\ x \in E)(u(x) \in Y$ et $y=u(x))$, ce qui entraîne $(\exists\ x \in E)(y \in Y)$, donc $y \in Y$.

Proposition 10. La relation (quel que soit $Y \subset F$, $u(\overset{-1}{u}(Y))=Y$) *est équivalente à* "u est une application de E sur F" .

En effet, si u est une application de E sur F , la relation $y \in Y$ entraîne $(\exists\, x \in E)(y \in Y$ et $y=u(x))$, donc $(\exists\, x \in E)(u(x) \in Y$ et $y=u(x))$ ou encore $(\exists\, x \in E)(x \in \overset{-1}{u}(Y)$ et $y=u(x))$, c'est-à-dire $y \in u(\overset{-1}{u}(Y))$. Inversement, si la relation (quel que soit $Y \subset F$, $u(\overset{-1}{u}(Y))=Y$) est vraie, u est une application de E sur F , car dans le cas contraire, il existerait $y \in F$ tel que $u(x) \neq y$ pour tout $x \in E$, c'est-à-dire $\overset{-1}{u}(y)=\emptyset$; on aurait donc $u(\overset{-1}{u}(y))=u(\emptyset)=\emptyset \neq \{y\}$ contrairement à l'hypothèse.

Corollaire. Si u est une application de E sur F , $\overset{-1}{u}$ est une application biunivoque de $\mathfrak{P}(F)$ *dans* $\mathfrak{P}(E)$.

Proposition 11. La relation (quel que soit $X \subset E$, $\overset{-1}{u}(u(X))=X$) *est équivalente à* "u est une application biunivoque de E dans F" .

En effet, si u est une application biunivoque de E dans F , la relation $x \in \overset{-1}{u}(u(X))$ qui est équivalente à $u(x) \in u(X)$, ou à $(\exists\, x' \in E)(x' \in X$ et $u(x)=u(x'))$ entraîne $(\exists\, x' \in E)(x' \in X$ et $x=x')$, donc $(\exists\, x' \in E)(x \in X)$, c'est-à-dire $x \in X$. Inversement, si la relation (quel que soit $X \subset E$, $\overset{-1}{u}(u(X))=X$) est vraie, u est une application biunivoque de E dans F ; car, dans le cas contraire, il existerait $x' \neq x$ tels que $u(x)=u(x')$, donc $x' \in \overset{-1}{u}(u(\{x\}))$ et $x' \notin \{x\}$ contrairement à l'hypothèse.

Corollaire 1. La relation (quels que soient $X \subset E$ et $Y \subset F$, $\overset{-1}{u}(u(X))=X$ et $u(\overset{-1}{u}(Y))=Y$) *est équivalente à* "u est une application biunivoque de E sur F" .

Corollaire 2. Si u est une application biunivoque de E sur F , $\hat{u}$ est une application biunivoque de $\mathfrak{P}(E)$ *sur* $\mathfrak{P}(F)$, *$\overset{-1}{u}$ est l'application réciproque de $\hat{u}$, et* $\overset{-1}{\hat{u}} = \overset{-1}{u}$, $\hat{\overset{-1}{u}} = \hat{u}$.

En effet, la relation $u(X)=u(X')$ entraîne $\overset{-1}{u}(u(X))=\overset{-1}{u}(u(X'))$, donc $X=X'$ d'après le cor.1 ; d'autre part, quel que soit $Y\subset F$, on a $u(\overset{-1}{u}(Y))=Y$, donc $\hat{u}$ est une application de $\mathfrak{P}(E)$ sur $\mathfrak{P}(F)$; la relation $Y=u(X)$ étant équivalente à $X=\overset{-1}{u}(Y)$, $\overset{-1}{u}$ est l'application réciproque de $\hat{u}$; enfin, la relation $x\in\overline{u}(Y)$ équivaut à $(\exists y\in F)$ $(y\in Y$ et $x=\overline{u}(y))$, donc à $(\exists y\in F)(y\in Y$ et $y=u(x))$, et entraîne par suite $u(x)\in Y$, c'est-à-dire $x\in\overset{-1}{u}(Y)$; inversement, $u(x)\in Y$ entraîne $(\exists y\in F)(y=u(x)$ et $u(x)\in Y)$, donc $(\exists y\in F)(y\in Y$ et $y=u(x))$, qui équivaut à $(\exists y\in F)(y\in Y$ et $x=\overline{u}(y))$, donc à $x\in\overline{u}(Y)$; on a donc $u(Y)=\overline{u}(Y)$ pour toute partie Y de F, donc $\overset{-1}{u}=\overline{u}$; de la même manière on voit que $\overset{-1}{\overline{u}}=\hat{u}$.

6. <u>Applications composées.</u> Soient E,F,G trois ensembles u une application arbitraire de E dans F, v une application arbitraire de F dans G. La relation $z=v(u(x))$ est une relation fonctionnelle en z, composée de $z=v(y)$ et de $y=u(x)$; si w est une application arbitraire de E dans G, la relation $(\forall x\in E)(\forall z\in G)(z=v(u(x)) \rightleftarrows z=w(x))$ est fonctionnelle en w ; nous désignerons par $v\circ u$, et appellerons <u>application composée de v et de u</u> le symbole fonctionnel attaché à cette relation. La relation $z=(v\circ u)(x)$ est donc équivalente à $z=v(u(x))$.

<u>Proposition 12.</u> <u>La relation</u> $w=v\circ u$ <u>entraîne</u> $\hat{w}=\hat{v}\circ\hat{u}$ <u>et</u> $\overset{-1}{w}=\overset{-1}{u}\circ\overset{-1}{v}$.

En effet, la relation $z\in w(X)$ est équivalente à $(\exists x\in E)$ $(x\in X$ et $z=v(u(x)))$; mais $z=v(u(x))$ équivaut à $(\exists y\in F)(y=u(x)$ et $z=v(y))$; donc $z\in w(X)$ est équivalente à $(\exists y\in F)(\exists x\in E)$ $(x\in X$ et $y=u(x)$ et $z=v(y))$, ou encore à $(\exists y\in F)(z=v(y)$ et $(\exists x\in E)(x\in X$ et $y=u(x)))$, ou finalement à $(\exists y\in F)(y\in u(X)$ et $z=v(y))$, c'est-à-dire à $z\in v(u(X))$.

Proposition 13. Si v est une application de F sur G, et u une application de E sur F, $v \circ u$ est une application de E sur G.

En effet, on a $u(E)=F$, donc $v(u(E))=v(F)=G$ par hypothèse.

Proposition 14. Si v est une application biunivoque de F dans G, u une application biunivoque de E dans F, v u est une application biunivoque de E dans G.

En effet, la relation $v(u(x))=v(u(x'))$ entraîne $u(x)=u(x')$, donc $x=x'$.

Corollaire. Si v est une application biunivoque de F sur G, u une application biunivoque de E sur F, $v \circ u$ est une application biunivoque de E sur G, et $\overline{u} \circ \overline{v}$ est égale à son application réciproque.

Il ne reste à démontrer que le dernier point ; or $z=v(u(x))$ est alors équivalente à $u(x)=\overline{v}z)$, donc à $x=\overline{u}(\overline{v}(z))$.

Si u est une application biunivoque de E sur F, $\overline{u}$ son application réciproque, on a $\overline{u} \circ u = \Delta_E$, car la relation $x'=\overline{u}(u(x))$ équivaut à $u(x')=u(x)$, donc à $x'=x$; de même, on a $u \circ \overline{u} = \Delta_F$. Ces propositions admettent une importante réciproque :

Proposition 15. Si u est une application arbitraire de E dans F, v une application arbitraire de F dans E, la relation ($v \circ u = \Delta_E$ et $u \circ v = \Delta_F$) entraîne "u est une application biunivoque de E sur F, et $v=\overline{u}$ ".

Tout d'abord u est une application biunivoque de E dans F, car la relation $u(x)=u(x')$ entraîne $v(u(x))=v(u(x'))$, donc $x=x'$ d'après l'hypothèse. En second lieu, u est une application de E sur F, car on a $u(v(F))=F$, et comme $E \supset v(F)$, a fortiori $u(E)=F$. De la même manière, on voit que v est une application biunivoque de F sur E ; cela étant, on a $u(v(y))=y=u(\overline{u}(y))$, donc $v(y)=\overline{u}(y)$ pour tout $y \in F$, ce qui prouve que $v=\overline{u}$.

<u>Proposition 16</u>. <u>Soient</u> u <u>une application arbitraire de</u> E <u>dans</u> F , v <u>une application arbitraire de</u> F <u>dans</u> G , w <u>une application arbitraire de</u> G <u>dans</u> H . <u>On a</u> $w\circ(v\circ u)=(w\circ v)\circ u$.

En effet, on a $(w\circ(v\circ u))(x)=w((v\circ u)(x))=w(v(u(x)))$, et $((w\circ v)\circ u)(x)=(w\circ v)(u(x))=w(v(u(x)))$.

On écrira encore $w\circ v\circ u$ au lieu de $w\circ(v\circ u)$, la prop.16 montre que cette notation ne peut créer d'ambiguité.

7. <u>Fonctions de deux arguments</u>. Soient E,F,G trois ensembles. Une application arbitraire u de l'ensemble produit $E\times F$ dans G est encore appelée <u>fonction de deux arguments</u> ; sa valeur pour l'élément $(x,y)\in E\times F$ se note encore $u(x,y)$, et l'application u elle-même se note $(x,y)\to u(x,y)$. La relation $t=u(x,y)$ est fonctionnelle en t ; par suite, la relation $(\forall x\in E)(\forall t\in G)(t=u(x,y) \rightleftarrows t=v(x))$ est fonctionnelle en v (application arbitraire de E dans G) ; les arguments libres de cette relation étant y et u , nous désignerons par u_y un symbole fonctionnel qui lui est attaché ; la relation $t=u(x,y)$ est donc équivalente à $t=u_y(x)$; on dit que u_y est l'<u>application partielle</u> engendrée par u , pour la valeur y du second argument de u ; on la désigne encore par $x\to u(x,y)$. On définit de même l'application partielle u_x (ou $y\to u(x,y)$) engendrée par u pour la valeur x du premier argument de u .

En particulier, l'application partielle $y\to(x,y)$ déduite de l'application identique $(x,y)\to(x,y)$ de $E\times F$ sur lui-même, est une application <u>biunivoque</u> de F <u>sur</u> $\{x\}\times F$, car la relation $(x,y)=(x,y')$ entraîne $y=y'$; son application réciproque n'est autre que la restriction à $\{x\}\times F$ de la projection pr_2 ; ces deux applications sont dites <u>canoniques</u>. On définit de même l'application canonique de E sur $E\times\{y\}$ et sa réciproque.

L'application $y \to u_y$ de F dans G^E est l'application partielle engendrée par $(u,y) \to u_y$ pour la valeur u de son premier argument ; si on la désigne par $\check{u}$, $u \to \check{u}$ est une application (dite <u>canonique</u>) de $G^{E\times F}$ dans $(G^E)^F$; montrons que c'est une application <u>biunivoque</u> de $G^{E\times F}$ <u>sur</u> $(G^E)^F$. En effet, la relation $\check{u}=\check{v}$ signifie $u_y=v_y$, donc $u_y(x)=v_y(x)$, ou encore $v(x,y)=u(x,y)$ quels que soient $x\in E$ et $y \in F$, donc finalement $u=v$. D'autre part, si w est une application arbitraire de F dans G^E , $w(y)$ est une application de E dans G , donc $(x,y) \to w(y)(x)$ est une application de $E\times F$ dans G ; si on la désigne par w' , on a $w'_y = w(y)$ pour tout $y\in F$, donc $\check{w}'=w$.

On définit de même une application biunivoque de $G^{E\times F}$ sur $(G^F)^E$, dite canonique.

En particulier, si u est une application <u>constante</u> de F dans G^E , on dit que u <u>ne contient pas</u> y ; cela équivaut à dire que $u(x,y)=u(x,y')$ quels que soient x,y,y' . On définit de même les fonctions de deux arguments qui "ne contiennent pas x" .

Soient maintenant E,F,E',F' quatre ensembles, u une application arbitraire de E dans E' , v une application arbitraire de F dans F' ; l'application $z \to (u(pr_1(z)), v(pr_2(z)))$ est une application de $E\times F$ dans $E'\times F'$, qu'on peut aussi noter, conformément aux conventions de ce n° , $(x,y) \to (u(x),v(y))$. Cette application est dite <u>extension de u et de v aux ensembles produits</u> ; par abus de langage, on la note (u,v) lorsqu'aucune confusion n'est possible avec le couple formé de u et de v .

<u>Proposition 17</u>. <u>Si u est une application de</u> E <u>sur</u> E' , <u>et v une application de</u> F <u>sur</u> F' , (u,v) <u>est une application de</u> $E\times F$ <u>sur</u> $E'\times F'$.

En effet, de façon générale, on a $(u,v)(X\times Y)=u(X)\times v(Y)$, car la relation $(\exists\, x\in E)(\exists\, y\in F)((x,y)\in X\times Y$ et $z=(u(x),v(y))$ est équivalente à $((\exists\, x\in E)(x\in X$ et $pr_1 z=u(x))$ et $(\exists\, y\in F)(y\in Y$ et $pr_2 z = v(y)))$, donc à $(pr_1(z)\in u(X)$ et $pr_2(z)\in v(Y))$, ou finalement à $z\in u(X)\times v(Y)$. En particulier, si $u(E)=E'$, $v(F)=F'$, on a $(u,v)(E\times F)=u(E)\times v(F)=E'\times F'$.

Proposition 18. Si u est une application biunivoque de E dans F ; v une application biunivoque de F dans F', (u,v) est une application biunivoque de $E\times F$ dans $E'\times F'$.

En effet, la relation $(u,v)(x,y)=(u,v)(x',y')$ équivaut à $(u(x),v(y))=(u(x'),v(y'))$, donc à $(u(x)=u(x')$ et $v(y)=v(y'))$, et l'hypothèse montre que cette relation entraîne $(x=x'$ et $y=y')$ qui est équivalente à $(x,y)=(x',y')$.

Corollaire. Si u est une application biunivoque de E sur E', une application biunivoque de F sur F', (u,v) est une application biunivoque de $E\times F$ sur $E'\times F'$.

8. Applications définies par des parties d'un produit. Soient E et F deux ensembles, U une partie arbitraire de $E\times F$. La relation $(\exists\, x\in E)(x\in X)$ et $(x,y)\in U)$, fonctionnalisée par rapport à y, donne une relation dont X, U et une partie arbitraire Y de F sont les arguments libres, et qui est fonctionnelle par rapport à Y ; si on désigne cette relation par R, et si u est une application arbitraire de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(F)$, la relation $(\forall\, X\subset E)(\forall\, Y\subset F)(R \rightleftarrows Y=u(X))$ est fonctionnelle en u ; nous désignerons par $\tilde{U}$ un symbole fonctionnel attaché à cette relation. La relation $(\exists\, x\in E)(x\in X$ et $(x,y)\in U)$ est donc équivalente à $y\in\tilde{U}(X)$. On dit que l'application $\tilde{U}$ de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(F)$ est la correspondance de E à F déterminée par U. On écrit le plus souvent $U(X)$ au lieu de $\tilde{U}(X)$ par abus de langage ;

on notera qu'on a $U(X)=pr_2(U\cap(X\times F))$, car $x\in X$ est équivalent à $(x,y)\in X\times F$.

Lorsque U appartient à F^E, autrement dit est une application de E dans F, on a, d'après la définition, $\widetilde{U}=\hat{U}$; la correspondance définie par U n'est autre que l'extension de U aux ensembles des parties.

Plus généralement, si u est une application d'une partie de E dans F, on a, pour toute partie X de E, $u(X)=u(X\cap pr_1 u)$, car la relation (x,y) u entraîne $x\in pr_1 u$, donc $((x,y)\in u$ et $x\in X)$ est équivalente à $((x,y)\in u$ et $x\in pr_1 u$ et $x\in X)$, ou encore à $((x,y)\in u$ et $x\in X\cap pr_1 u)$; $u(X)$ n'est donc autre que l'image de $X\cap pr_1 u$ par u, lorsqu'on considère u comme une application de $pr_1 u$ dans F.

L'application $x\to U(\{x\})$ est composée de $\widetilde{U}$ et de l'application $x\to\{x\}$; on écrit $U(x)$ au lieu de $U(\{x\})$ par abus de langage sauf lorsque $u\in\Phi(E,F)$, et on dit que $U(x)$ est la <u>coupe de U suivant x</u>. Nous désignerons par $\dot{U}$ l'application $x\to U(x)$ de E dans $\mathfrak{P}(F)$; nous allons voir que $U\to\dot{U}$ est une application <u>biunivoque</u> de $\mathfrak{P}(E\times F)$ <u>sur</u> $(\mathfrak{P}(F))^E$ (dite <u>canonique</u>). En effet, la relation $y\in U(x)$ est équivalente à $(\exists x'\in E)(x'\in\{x\}$ et $(x',y)\in U)$, donc à $(\exists x'\in E)(x'=x$ et $(x',y)\in U)$; elle entraîne donc $(\exists x'\in E)((x,y)\in U)$, c'est-à-dire $(x,y)\in U$, et réciproquement $(x,y)\in U$ entraîne $(\exists x'\in E)(x'=x$ et $(x',y)\in U)$, donc $y\in U(x)$ et $(x,y)\in U$ sont <u>équivalentes</u>. La relation $\dot{U}=\dot{V}$ entraîne $U(x)=V(x)$ pour tout x, donc elle entraîne $((x,y)\in U\rightleftarrows(x,y)\in V)$, c'est-à-dire $U=V$. D'autre part, si u est une application arbitraire de E dans $\mathfrak{P}(F)$, la relation $y\in u(x)$, fonctionnalisée par rapport à (x,y), donne une relation entre u et une partie arbitraire U de $E\times F$, fonctionnelle en U ; si u' est un symbole fonctionnel attaché à cette relation, la relation $y\in u(x)$ est équivalente à $(x,y)\in u'$, donc à

$y\in u'(x)$, ce qui prouve que $\mathring{u}'=u$.

On déduit de ce résultat que $U\longrightarrow\tilde{U}$ est une application *biunivoque* de $\mathfrak{P}(E\times F)$ *dans* $(\mathfrak{P}(F))^{\mathfrak{P}(E)}$, car la relation $\tilde{U}=\tilde{V}$ entraîne $\dot{U}=\dot{V}$ donc $U=V$ d'après ce qui précède.

Proposition 19. Pour toute partie U *de* $E\times F$, *on a* $U(\emptyset)=\emptyset$.

En effet, la relation $(\exists\, x\in E)(x\in\emptyset$ et $(x,y)\in U)$ entraîne $((\exists\, x\in E)(x\in\emptyset)$ et $(\exists\, x\in E)((x,y)\in U))$; comme cette dernière est fausse, il en est de même de $(\exists\, x\in E)(x\in\emptyset$ et $(x,y)\in U)$, c'est-à-dire de $y\in U(\emptyset)$. Donc $U(\emptyset)=\emptyset$.

Proposition 20. La relation $X\subset X'$ *entraîne* $U(X)\subset U(X')$.

En effet, si $X\subset X'$, $x\in X$ entraîne $x\in X'$, donc $(\exists\, x\in E)(x\in X$ et $(x,y)\in U)$ entraîne $(\exists\, x\in E)(x\in X'$ et $(x,y)\in U)$, autrement dit $y\in U(X)$ entraîne $y\in U(X')$.

Corollaire. On a $U(X\cap X')\subset U(X)\cap U(X')$.

En effet, on a $X\cap X'\subset X$ et $X\cap X'\subset X'$, donc $U(X\cap X')\subset U(X)$ et $U(X\cap X')\subset U(X')$; par suite on a $U(X\cap X')\subset U(X)\cap U(X')$.

Proposition 21. On a $U(X\cup X')=U(X)\cup U(X')$.

En effet $(\exists\, x\in E)(x\in X\cup X')$ et $(x,y)\in U)$ est équivalente à $(\exists\, x\in E)((x\in X$ et $(x,y)\in U)$ ou $(x\in X'$ et $(x,y)\in U))$, et par suite à $((\exists\, x\in E)(x\in X$ et $(x,y)\in U$ ou $(\exists\, x\in E)(x\in X'$ et $(x,y)\in U))$; cette dernière est équivalente à $(y\in U(X)$ ou $y\in U(X'))$ donc à $y\in U(X)\cup U(X')$.

Proposition 21.- Si $U\subset U'$, *on a pour tout* $X\subset E$, $U(X)\subset U'(X)$; *inversement, si* $U(x)\subset U'(x)$ *pour tout* $x\in E$, *on a* $U\subset U'$.

En effet si $U\subset U'$, $(x,y)\in U$ entraîne $(x,y)\in U'$, donc $(\exists\, x\in E)(x\in X$ et $(x,y)\in U)$ entraîne $(\exists\, x\in E)(x\in X$ et $(x,y)\in U')$ autrement dit $y\in U(X)$ entraîne $y\in U'(X)$, donc $U(X)\subset U'(X)$.

Réciproquement, si pour tout $x \in E$, on a $U(x) \subset U'(x)$, $y \in U(x)$ entraîne $y \in U'(x)$, c'est-à-dire que $(x,y) \in U$ entraîne $(x,y) \in U'$ donc on a $U \subset U'$.

Soient E, F, G trois ensembles, U une partie arbitraire de $E \times F$, V une partie arbitraire de $F \times G$. Si W est une partie arbitraire de $E \times G$, la relation

$$(\forall x \in E)(\forall z \in G)((\exists y \in F)((x,y) \in U \text{ et } (y,z) \in V) \rightleftarrows ((x,z) \in W))$$

est fonctionnelle en W, et ne contient que U et V comme arguments libres ; nous prendrons pour symbole fonctionnel attaché à cette relation $V \circ U$, que nous appellerons le <u>composé de V et de U</u>.
La relation $(x,z) \in V \circ U$ est donc équivalente à $(\exists y \in F)((x,y) \in U$ et $(y,z) \in V)$.

Lorsque U et V sont des applications (de E dans F et de F dans G) respectivement) $V \circ U$ est bien égal à l'application déjà désignée par cette notation (cf. n°6) ; car $(x,y) \in U$ est alors équivalente à $y = U(x)$ et $(y,z) \in V$ à $z = V(y)$; donc $(\exists y \in F)((x,y) \in U$ et $(y,z) \in V)$ est équivalente à $(\exists y \in F)(y = U(x)$ et $z = V(y))$, c'est-à-dire $z = V(U(x))$.

<u>Proposition 22. L'application</u> $X \to (V \circ U)(X)$ <u>de</u> $\mathfrak{P}(E)$ <u>dans</u> $\mathfrak{P}(G)$ <u>est composée de</u> $Y \to V(Y)$ <u>et de</u> $X \to U(X)$.

Il nous faut prouver que

$$(V \circ U)(X) = V(U(X)) \tag{6}$$

La relation $z \in (V \circ U)(X)$ équivaut à $(\exists x \in E)(x \in X$ et $(x,z) \in V \circ U)$ donc à $(\exists x \in E)(x \in X$ et $(\exists y \in F)((x,y) \in U$ et $(y,z) \in V))$, et par suite à $(\exists x \in E)(\exists y \in F)(x \in X$ et $(x,y) \in U$ et $(y,z) \in V)$. Elle équivaut donc à $(\exists y \in F)((\exists x \in E)(x \in X$ et $(x,y) \in U)$ et $(y,z) \in V)$, c'est-à-dire à $(\exists y \in F)(y \in U(X)$ et $(y,z) \in V)$, et finalement à $z \in V(U(X))$, d'où (6).

Proposition 23. La relation ($U \subset U'$ et $V \subset V'$) entraîne ($V \circ U \subset V' \circ U'$).

En effet, si $U \subset U'$ et $V \subset V'$, $(x,y) \in U$ entraîne $(x,y) \in U'$ et $(y,z) \in V$ entraîne $(y,z) \in V'$. Donc $(\exists y \in F)((x,y) \in U$ et $(y,z) \in V)$ entraîne $(\exists y \in F)((x,y) \in U'$ et $(y,z) \in V')$; autrement dit, $(x,z) \in V \circ U$ entraîne $(x,z) \in V' \circ U'$.

Proposition 24. Si U est une partie quelconque de $E \times F$, on a

(7) $$U \circ \Delta_E = \Delta_F \circ U = U .$$

En effet, la relation $(x,y) \in \Delta_E$ est équivalente à $x=y$, donc $(\exists y \in E)((x,y) \in \Delta_E$ et $(y,z) \in U)$ équivaut à $(\exists y \in E)(x=y$ et $(y,z) \in U)$ c'est-à-dire à $(x,z) \in U$, ce qui démontre que $U \circ \Delta_E = U$; on démontre de même que $\Delta_F \circ U = U$.

Proposition 25. Soient E,F,G,H quatre ensembles, U une partie arbitraire de $E \times F$, V une partie arbitraire de $F \times G$, W une partie arbitraire de $G \times H$. On a

(8) $$W \circ (V \circ U) = (W \circ V) \circ U$$

Nous laissons la démonstration au lecteur.

On écrira $W \circ V \circ U$ au lieu de $W \circ (V \circ U)$.

9. Applications canoniques des produits. Soient E et F deux ensembles ; l'application $z \to (pr_2 z, pr_1 z)$ de $E \times F$ dans $F \times E$ est une application biunivoque de $E \times F$ sur $F \times E$, car de $(pr_2 z', pr_1 z') = (pr_2 z, pr_1 z)$ on tire $pr_2 z' = pr_2 z$ et $pr_1 z' = pr_1 z$, donc $z' = z$; d'autre part quel que soit $t \in F \times E$, il existe $z \in E \times F$ tel que $t = (pr_2 z, pr_1 z)$; il suffit de prendre $z = (pr_2 t, pr_1 t)$. Cette application est dite canonique ; conformément aux conventions du n°7, on l'écrit aussi $(x,y) \to (y,x)$. On voit aussitôt que l'application réciproque n'est autre que l'application canonique de $F \times E$ sur $E \times F$.

Nous désignerons par $\overline{U}$ l'image d'une partie arbitraire U de $E \times F$ par l'application canonique de $E \times F$ sur $F \times E$; $U \to \overline{U}$ est donc l'extension de l'application canonique aux ensembles de parties ; c'est une application biunivoque de $\mathfrak{P}(E\times F)$ sur $\mathfrak{P}(F\times E)$. La relation $(y,x)\in \overline{U}$ est équivalente à $(x,y)\in U$; par suite, l'application $U\to\overline{U}$ est le prolongement à $\mathfrak{P}(E\times F)$ de l'application $u\to\overline{u}$ qui fait correspondre à une application biunivoque de E sur F son application réciproque (n^o3), ce qui justifie la notation adoptée.

Pour une application quelconque u de E dans F, on a $\tilde{\overline{u}}=\overset{-1}{u}$, car la relation $x\in\overline{u}(Y)$ est par définition équivalente à $(\exists y\in F)(y\in Y$ et $(y,x)\in\overline{u})$, donc à $(\exists y\in F)(y\in Y$ et $y=u(x))$; elle est par suite équivalente à $u(x)\in Y$, donc $x\in\overset{-1}{u}(Y)$.

En raison de cette relation, on écrit $\overset{-1}{U}$ au lieu de $\overline{U}$, sauf lorsque U est une application biunivoque de E sur F. On a $\overset{-1}{U}(Y)=pr_1(U\cap(E\times Y))\subset pr_1 U$. En particulier, si u est une application d'une partie de E dans F, $\overset{-1}{u}(Y)$ n'est autre que l'image réciproque de Y par u, lorsque u est considérée comme application de $pr_1 u$ dans E.

Il faut noter que la correspondance de F à E définie par la partie $\overset{-1}{U}$ de $F\times E$ <u>ne possède pas</u> en général les propriétés des extensions réciproques des applications de E dans F ; de façon plus précise, on ne peut dans les relations (2), (3), (4) et (5) remplacer une application u par une partie quelconque U de $E\times F$.

Toutefois, ces relations sont encore valables lorsqu'on y prend pour u une <u>application d'unepartie de E dans F</u>.

On remarquera en particulier que, si Δ_A est l'application canonique d'une partie $A\subset E$ dans E, on a, pour toute partie X de E, $\overset{-1}{\Delta}_A(X)=X\cap A$; en effet, on a $\Delta_A=\Delta\cap(A\times E)$, donc $\Delta_A(X)=pr_1(\Delta \cap (A\times E)\cap(E\times X))$; la relation $x \in \overset{-1}{\Delta}_A(X)$ équivaut donc à $(\exists\, y\in E)(x=y$ et $x\in A$ et $y\in X)$, donc à $(x\in A$ et $x\in X)$.

Proposition 26. Si X *est une partie arbitraire de* E , Y *une partie arbitraire de* F , *on a*

(9) $$\overset{-1}{\overbrace{X\times Y}} = Y\times X .$$

Nous laissons la démonstration au lecteur.

Proposition 27. Soient E,F,G *trois ensembles,* U *une partie arbitraire de* $E\times F$, V *une partie arbitraire de* $F\times G$. *On a*

(10) $$\overset{-1}{\overbrace{V\circ U}} = \overset{-1}{U}\circ\overset{-1}{V}$$

En effet, la relation $(z,x)\in \overset{-1}{\overbrace{V\circ U}}$ équivaut à $(x,z)\in V\circ U$, donc à $(\exists\, y\in F)((x,y)\in U$ et $(y,z)\in V)$, donc aussi à $(\exists\, y\in F)((z,y)\in \overset{-1}{V}$ et $(y,x)\in \overset{-1}{U})$, c'est-à-dire à $(z,x)\in \overset{-1}{U}\circ\overset{-1}{V}$.

Lorsque F=E , l'application canonique $(x,y)\rightarrow(y,x)$ est une *permutation involutive* de $E\times E$, qu'on appelle *symétrie canonique* . Pour que (x,y) soit *invariant* par cette application, il faut et il suffit que $x=y$, autrement dit l'ensemble des éléments invariants de $E\times E$ est Δ_E. On dit qu'une partie U de $E\times E$ est *symétrique* si $\overset{-1}{U}=U$. L'ensemble Δ_E est symétrique ; pour toute partie U de $E\times E$, $U\cup\overset{-1}{U}$ et $U\cap\overset{-1}{U}$ sont symétriques. Il en est de même de $U\circ\overset{-1}{U}$ d'après la prop.27.

Soient maintenant E,F,G trois ensembles, et soit t un élément arbitraire de $(E\times F)\times G$. L'application

$$t\rightarrow(pr_1(pr_1 t),(pr_2(pr_1 t),pr_2 t))$$

de $(E\times F)\times G$ dans $E\times(F\times G)$ est une application *biunivoque* de $(E\times F)\times G$ *sur* $E\times(F\times G)$; nous laissons au lecteur la démonstration. Cette application est encore dite *canonique* ; on peut l'écrire $((x,y),z)\rightarrow(x,(y,z))$. On écrit encore $E\times F\times G$ au lieu de $(E\times F)\times G$, $X\times Y\times Z$ au lieu de $(X\times Y)\times Z$ pour des parties arbitraires

X,Y,Z de E,F,G respectivement, (x,y,z) au lieu de $((x,y),z)$. On écrira de même $E\times F\times G\times H$ au lieu de $(E\times F\times G)\times H$ et ainsi de suite. En composant les applications canoniques définies ci-dessus, on définit aussi des applications biunivoques (dites canoniques) de $E\times F\times G$ sur $E\times G\times F$, $G\times E\times F$, et en général sur tous les ensembles qu'on obtient en permutant de toutes les manières possibles les trois lettres E,F,G ; de même pour un nombre quelconque d'ensembles ; on aura aussi une application canonique de $E\times F\times G\times H$ sur $(E\times F)\times(G\times H)$ par exemple, etc.

Exercices.- 1) Soient u une application arbitraire de E dans F, v une application arbitraire de F dans G. Montrer que si $v\circ u$ est une application biunivoque de E dans G, u est une application biunivoque de E dans F ; si $v\circ u$ est une application de E sur G, v est une application de F sur G.

2) Soit U une partie arbitraire de $E\times F$. Montrer que les ~~xxx~~ quatre relations suivantes sont équivalentes :

a) quel que soit $y\in F$, $((x,y)\in U$ et $(x',y)\in U) \rightarrow x = x'$.

b) quels que soient $X\subset E$, $X'\subset E$, $U(X\cap X')=U(X)\cap U(X')$

c) Quels que soient $X\subset E$, $X'\subset E$, $(X\cap X'=\emptyset) \rightarrow (U(X)\cap U(X')=\emptyset$

d) quels que soient $X\subset E, X'\subset E$, $U(X\cap \complement X')=U(X)\cap \complement U(X')$

3) Soit U une partie arbitraire de $E\times F$. Montrer que la relation (il existe $X\subset E$ tel que $U(\complement X)=\complement U(X)$) entraîne $U(E)=F$.

4) Soit U une partie arbitraire de $E\times F$. Montrer que les relations suivantes sont équivalentes :

a) quel que soit $X\subset E$, $U(\complement X)=\complement U(X)$

b) il existe une application u de F dans E telle que $U = \overset{-1}{u}$.

5) Soient U,U' deux parties arbitraires de $E\times F$. Montrer qu'on a $(U\cup U')(X)=U(X)\cup U'(X)$, $(U\cap U')(x)=U(x)\cap U'(x)$, mais que la relation $(U\cap U')(X)=U(X)\cap U'(X)$ est fausse.

6) Soit U une partie arbitraire de $E\times F$. Montrer que les relations suivantes sont équivalentes :

a) quel que soit $x\in E$, il existe $y\in F$ tel que $(x,y)\in U$.

b) quel que soit $X\subset E$, $X\subset \overset{-1}{U}(U(X))$.

7) Soit U une partie arbitraire de $E\times F$. Montrer que les relations suivantes sont équivalentes :

a) quel que soit $x\in E$, $((x,y)\in U$ et $(x,y')\in U)\rightarrow y=y'$.

b) quel que soit $Y\subset F$, $U(\overset{-1}{U}(Y))\subset Y$.

8) Soit U une partie arbitraire de $E\times F$, V une partie arbitraire de $F\times G$. Démontrer les relations

$$\emptyset\circ U=\emptyset\ ,\quad V\circ\emptyset=\emptyset\ ,\quad (F\times G)\circ U=(pr_1U)\times G\ ,$$

$$V\circ(E\times F)=E\times(pr_2V)\ .$$

9) Soient U,U' des parties arbitraires de $E\times F$, V,V' des parties arbitraires de $F\times G$. Montrer que $V\circ(U\cup U')=(V\circ U)\cup(V\circ U')$, et $(V\cup V')\circ U = (V\circ U)\cup(V'\circ U)$.

10) Soient X une partie arbitraire de E , Y,Y' des parties arbitraires de F , Z une partie arbitraire de G . Montrer que, si $Y\cap Y'=\emptyset$, on a $(Y'\times Z)\circ(X\times Y)=\emptyset$ et si $Y\cap Y'\neq\emptyset$, on a $(Y'\times Z)\circ(X\times Y)=X\times Z$.

11) Soient X une partie arbitraire de E , U une partie arbitraire de $E\times E$. Montrer que $U\circ(X\times X)\circ U = U(X)\times U(X)$.

12) Soient U une partie arbitraire de $E\times F$, V une partie arbitraire de $\cancel{E}$ $F\times E$. Montrer que les relations suivantes sont équivalentes :

a) quel que soit $x\in E$, $V(U(x))=\{x\}$;

b) quel que soit $x\in E$, il existe $y\in F$ tel que $y\in U(x)$ et $V(y)\neq\emptyset$, et quel que soit $y\in F$, $\overset{-1}{U}(y)=\emptyset$ ou $V(y)=\emptyset$ ou $(\overset{-1}{U}(y)=V(y)\neq\emptyset$ et $(x\in U(y)$ et $x'\in U(y))\rightarrow x=x'))$.

En déduire que les relations suivantes sont équivalentes :

c) quels que soient $x \in E$, $y \in F$, $V(U(x))=\{x\}$ et $U(V(y))=\{y\}$;

d) U est une application biunivoque de E sur F et $V = \overset{-1}{U}$.

§ 5. Réunion, intersection, produit de familles d'ensembles.

1. Familles d'éléments. Dans de nombreuses questions où interviennent les applications d'un ensemble dans un autre, il est commode d'introduire un langage différent de celui que nous avons utilisé jusqu'ici. Etant donnés deux ensembles I et F , une application u de I dans F sera encore appelée une famille d'éléments de F ; on utilisera alors en général la notation indicielle, et on dira que I est l'ensemble d'indices de la famille. Conformément aux conventions antérieures, la famille u pourra aussi s'écrire $\iota \rightarrow u_\iota$; on introduit encore pour la désigner la nouvelle notation $(u_\iota)_{\iota \in I}$, la plus souvent employée (par abus de langage, on écrit parfois (u_ι) lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur l'ensemble d'indices).

Une restriction de l'application u à une partie J de I est dite sous-famille de la famille $(u_\iota)_{\iota \in I}$, et notée $(u_\iota)_{\iota \in J}$.

En particulier, la restriction de u à la partie vide $\emptyset$ de I est dite la sous-famille vide de $(u_\iota)_{\iota \in I}$; elle est identique à la partie vide de $I \times E$ (§ 4, n°2) .

L'image de I par l'application $\iota \rightarrow u_\iota$ est appelée l'ensemble des éléments de la famille $(u_\iota)_{\iota \in I}$. Deux familles distinctes (ayant ou non même ensemble d'indices) peuvent avoir même ensemble d'éléments. Pour toute partie A de F , l'application canonique de A dans F définit une famille d'éléments dont A est l'ensemble d'indices et l'ensemble des éléments.

<u>2. Réunion d'une famille d'ensembles</u>. Soit E et I deux ensembles, $(X_\iota)_{\iota\in I}$ une <u>famille de parties de</u> E (c'est-à-dire une famille d'éléments de $\mathfrak{P}(E)$ ayant I pour ensemble d'indices) ; nous désignerons par $\mathfrak{F}$ l'ensemble des parties appartenant à cette famille. Soit J une partie arbitraire de I ; la relation

$$(\exists\iota\in I)(\iota\in J \text{ et } x\in X_\iota) \quad (\text{équivalente à } (\exists\iota\in J)(x\in X_\iota) \text{ lorsque } J\neq\emptyset)$$

fonctionnalisée par rapport à x , donne une relation fonctionnelle par rapport à une partie arbitraire de E ; nous prendrons pour symbole fonctionnel attaché à cette relation $\bigcup_{\iota\in J} X_\iota$, que nous appellerons la <u>réunion de la famille d'ensembles</u> $(X_\iota)_{\iota\in J}$. On observera que, dans ce symbole, ι est un argument <u>lié</u>.

D'après le §4, n°8, il existe une partie et une seule K de $I\times E$ telle que $X_\iota = K(\iota)$ pour tout ι ; la définition précédente revient à dire que $\bigcup_{\iota\in J} X_\iota = K(J)$. En particulier on a $\bigcup_{\iota\in\emptyset} X_\iota = \emptyset$ (§4, prop.19) : <u>la réunion de la famille vide est la partie vide de</u> E .

Si J,J' sont deux parties de I , la relation $J\subset J'$ entraîne $\bigcup_{\iota\in J} X_\iota \subset \bigcup_{\iota\in J'} X_\iota$ (§4,prop.20). En particulier, pour toute partie J de I, on a $\bigcup_{\iota\in J} X_\iota \subset \bigcup_{\iota\in I} X_\iota$; pour une partie $J=\{\varkappa\}$ réduite à un seul élément, on a $\bigcup_{\iota\in\{\varkappa\}} X_\iota = X_\varkappa$, donc pour tout $\varkappa\in J$, $X_\varkappa \subset \bigcup_{\iota\in I} X_\iota$. Inversement :

<u>Proposition 1</u>. <u>La relation</u> "<u>quel que soit</u> $\iota\in I$, $X_\iota\subset Y$" <u>entraîne</u> $\bigcup_{\iota\in I} X_\iota \subset Y$.

En effet, la relation $(x\in X_\iota \rightarrow x\in Y)$ entraîne $(\exists\iota\in I)(x\in X_\iota)\rightarrow$ $\rightarrow(\exists\iota\in I)(x\in Y)$, c'est-à-dire $(x\in\bigcup_{\iota\in I} X_\iota)\rightarrow(x\in Y)$; donc la relation $(\forall\iota\in I)(X_\iota\subset Y)$, équivalente à $(\forall\iota\in I)(\forall x\in E)$ $(x\in X_\iota \rightarrow x\in Y)$ entraîne $(\forall\iota\in I)(\forall x\in E)((x\in\bigcup_{\iota\in I} X_\iota)\rightarrow(x\in Y))$, c'est-à-dire $(\forall\iota\in I)(\bigcup_{\iota\in I} X_\iota\subset Y)$; comme ι est lié dans le symbole $\bigcup_{\iota\in I} X_\iota$, la dernière relation écrite est équivalente à

$\bigcup_{\iota\in I} X_\iota \subset Y$.

Corollaire. <u>La relation "quel que soit</u> $\iota\in I$, $X_\iota \subset Y_\iota$" <u>entraîne</u> $\bigcup_{\iota\in I} X_\iota \subset \bigcup_{\iota\in I} Y_\iota$.

En effet, on a, pour tout $\iota\in I$, $X_\iota \subset Y_\iota \subset \bigcup_{\iota\in I} Y_\iota$; d'où le corollaire, d'après la prop.1 .

Proposition 2. <u>Soit</u> $(J_\lambda)_{\lambda\in L}$ <u>une famille de parties de</u> I ; <u>on a</u>

$$\bigcup_{\iota\in\bigcup_{\lambda\in L} J_\lambda} X_\iota = \bigcup_{\lambda\in L}\left(\bigcup_{\iota\in J_\lambda} X_\iota\right)$$

(<u>associativité</u> de la réunion).

Proposition 3. <u>Soient</u> E,I,K <u>trois ensembles</u>, $(X_\iota)_{\iota\in I}$, $(Y_\varkappa)_{\varkappa\in K}$ <u>deux familles de parties de</u> E ; <u>on a</u>

(2) $$\left(\bigcup_{\iota\in I} X_\iota\right)\cap\left(\bigcup_{\varkappa\in K} Y_\varkappa\right) = \bigcup_{(\iota,\varkappa)\in I\times K}(X_\iota \cap Y_\varkappa)$$

(<u>distributivité</u> de l'intersection par rapport à la réunion).

Proposition 4. <u>Soient</u> E,F,I,K <u>quatre ensembles</u>, $(X_\iota)_{\iota\in I}$ <u>une famille de parties de</u> E , $(Y_\varkappa)_{\varkappa\in K}$ <u>une famille de parties de</u> F . <u>On a</u>

(3) $$\left(\bigcup_{\iota\in I} X_\iota\right)\times\left(\bigcup_{\varkappa\in K} Y_\varkappa\right) = \bigcup_{(\iota,\varkappa)\in I\times K}(X_\iota \times Y_\varkappa)$$

Proposition 5. <u>Soient</u> E,F,I <u>trois ensembles</u>, $(X_\iota)_{\iota\in I}$ <u>une famille de parties de</u> E . <u>Pour toute partie</u> K <u>de</u> E×F , <u>on a</u>

(4) $$K\left(\bigcup_{\iota\in I} X_\iota\right) = \bigcup_{\iota\in I} K(X_\iota)$$

Nous laissons au lecteur les démonstrations (immédiates) de ces propositions.

Proposition 6. <u>Soit</u> $(X_\iota)_{\iota\in I}$ <u>une famille de parties de</u> E , <u>et soit</u> $\mathfrak{F}$ <u>l'ensemble des éléments de la famille</u> $(X_\iota)_{\iota\in I}$ (<u>partie de</u> $\mathfrak{P}$(E)). <u>On a</u>

(5) $$\bigcup_{\iota\in I} X_\iota = \bigcup_{Y\in\mathfrak{F}} Y$$

(le second membre correspondant à la famille définie par l'application identique $Y \to Y$ de $\mathfrak{F}$ sur lui-même).

En effet, la relation $x \in \bigcup_{Y \in \mathfrak{F}} Y$ est équivalente à $(\exists Y \subset E)(Y \in \mathfrak{F}$ et $x \in Y)$; or $Y \in \mathfrak{F}$ est équivalente à $(\exists \iota \in I)(X_\iota = Y)$, donc $x \in \bigcup_{Y \in \mathfrak{F}} Y$ équivaut à $(\exists Y \subset E)(\exists \iota \in I)(X_\iota = Y$ et $x \in Y)$; mais $(\exists Y \subset E)(X_\iota = Y$ et $x \in Y)$ est équivalente à $x \in X_\iota$; d'où la proposition.

3. Recouvrements ; partitions ; somme d'une famille d'ensembles. On dit qu'une famille $(X_\iota)_{\iota \in I}$ de parties de E est un recouvrement d'une partie Y de E si $Y \subset \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$. En particulier, si (X_ι) est un recouvrement de E, on a $E \subset \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$, et comme $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota \subset E$ (prop. 1) on a $E = \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$.

On dit qu'une famille $(X_\iota)_{\iota \in I}$ de parties de E est une partition de E si (X_ι) est un recouvrement de E, et si en outre, les deux relations suivantes sont vraies :

a) quel que soit $\iota \in I$, $X_\iota \neq \emptyset$;

b) $(\iota \neq \varkappa) \rightarrow (X_\iota \cap X_\varkappa = \emptyset)$.

La condition b) s'exprime encore d'une façon quelque peu incorrecte, en disant que les X_ι sont deux à deux sans élément commun.

On en déduit que $(\iota \neq \varkappa) \rightarrow X_\iota \neq X_\varkappa$, car $X_\iota = X_\varkappa$ entraîne $X_\iota \cap X_\varkappa = X_\iota \neq \emptyset$ d'après a), donc $\iota = \varkappa$; autrement dit, $\iota \rightarrow X_\iota$ est alors une application biunivoque de I dans $\mathfrak{P}(E)$.

Lorsqu'une partie $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{P}(E)$ est telle que la famille de parties de E définie par l'application canonique $X \rightarrow X$ de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{P}(E)$ soit une partition, on dit, par abus de langage, que l'ensemble $\mathfrak{F}$ est une partition de E. Ce qui précède prouve que, pour toute partition $(X_\iota)_{\iota \in I}$ de E, l'ensemble des X_ι est une partition de E.

On dit qu'un ensemble E' est <u>somme</u> d'une famille $(X_\iota)_{\iota \in I}$ de parties non vides de E si, quel que soit $\iota \in I$, il existe une application biunivoque u_ι de X_ι dans E' telle que la famille $(u_\iota(X_\iota))$ soit une <u>partition</u> de E'. La partie $\bigcup_{\iota \in I} \{\iota\} \times X_\iota$ de $I \times E$ est somme de (X_ι) ; en effet, quel que soit ι, l'application $x \rightarrow (\iota, x)$ de E dans $I \times E$ est biunivoque ; sa restriction à X_ι est donc une application biunivoque u_ι de X_ι sur $\{\iota\} \times X_\iota$; on a évidemment $\{\iota\}\ X_\iota \neq \emptyset$ pour tout $\iota \in I$ (§ 3, prop.4) et la relation $\iota \neq \varkappa$ entraîne $(\{\iota\} \times X_\iota) \cap (\{\varkappa\} \times X_\varkappa) = (\{\iota\} \cap \{\varkappa\}) \cap (X_\iota \cap X_\varkappa)$ (§ 3, prop.7), d'où $(\{\iota\} \times X_\iota) \cap (\{\varkappa\} \times X_\varkappa) = \emptyset$.

4. <u>Intersection d'une famille d'ensembles</u>. Avec les notations du n°2, la relation ~~(J)(x X) lorsque J n'est pas vide,~~ $(\forall \iota \in I)(\iota \notin J$ ou $x \in X_\iota)$ équivalente à $(\forall \iota \in J)(x \in X_\iota)$ lorsque J n'est pas vide, fonctionnalisée par rapport à x, donne une relation fonctionnelle par rapport à une partie arbitraire de E ; nous prendrons pour symbole fonctionnel attaché à cette relation $\bigcap_{\iota \in J} X_\iota$, que nous appellerons l'<u>intersection de la famille d'ensembles</u> $(X_\iota)_{\iota \in J}$; ι est bien entendu un argument <u>lié</u> dans ce symbole fonctionnel.

<u>Proposition 7</u>.- <u>Pour toute famille</u> $(X_\iota)_{\iota \in I}$ <u>de parties de</u> E, <u>on a</u>

(6) $$\bigcap_{\iota \in J} X_\iota = \complement\Big(\bigcup_{\iota \in J} (\complement X_\iota)\Big)$$

En effet, la relation $x \in \bigcap_{\iota \in J} X$ étant équivalente à $(\forall \iota \in J)(x \in X_\iota)$, la relation $x \notin \bigcap_{\iota \in J} X_\iota$ est équivalente à $(\exists \iota \in J)(x \notin X_\iota)$, ou encore à $(\exists \iota \in J)(x \in \complement X_\iota)$, c'est-à-dire à $x \in \bigcup_{\iota \in J} (\complement X_\iota)$.

On peut généraliser la définition du <u>dual</u> d'un symbole fonctionnel Φ, suivant le procédé exposé au § 2, n°4, au cas où dans la formation de Φ interviennent aussi les symboles $\bigcup$, $\bigcap$ et des familles arbitraires departies de E : il faut seulement ajouter à la règle formulée au § 2, n°4 qu'on doit remplacer chaque signe $\bigcup$ par $\bigcap$ et vice-versa, chaque famille arbitraire $(X_\iota)_{\iota \in I}$ de parties de E par la famille $(\complement X_\iota)_{\iota \in I}$; dans cet énoncé, il est sous-entendu que les signes $\bigcup$, $\bigcap$ sont supposés porter sur des familles de parties de E ; on ne doit rien modifier aux opérations d'intersection ou de réunion portant sur des parties des <u>ensembles d'indices</u>, qui peuvent se trouver souscrites aux signes $\bigcup$ et $\bigcap$. La relation (6) permet encore de remplacer ϕ par un symbole égal où les signes $\complement$ ne portent que sur les arguments (du type $\mathfrak{P}(E)$) qui figurent dans ϕ, ou sur les X_ι pour chaque famille arbitraire (X_ι) de parties de E qui intervient dans la formation de ϕ ; alors le symbole dual aura la même propriété, une fois remplacée $\complement(\complement X)$, $\complement(\complement Y), \ldots, (\complement(\complement X_\iota)), \ldots$ par $X, Y, \ldots, (X_\iota), \ldots$ respectivement. On définit alors comme au § 2, n°3 la <u>duale</u> d'une relation de la forme $\phi = \psi$ (resp. $\phi \subset \psi$).

Par ce procédé de dualité, on déduit de chacune des propriétés de la réunion vue au n°2 qui peut s'exprimer comme une relation de l'un des types précédents, une propriété correspondante de l'intersection. C'est ainsi qu'on a $\bigcap_{\iota \in \emptyset} X_\iota = \complement \emptyset = E$. Si $J \subset J'$, $\bigcap_{\iota \in J} X_\iota \supset \bigcap_{\iota \in J'} X_\iota$; la prop.1 donne la suivante :

<u>Proposition 8</u>. <u>La relation "quel que soit</u> $\iota \in I$, $X_\iota \supset Y$" <u>entraîne</u> $\bigcap_{\iota \in I} X_\iota \supset Y$.

Il suffit en effet d'appliquer la prop.1 à la famille $(\complement X_\iota)$.

<u>Corollaire</u>. <u>La relation "quel que soit</u> ι, $X_\iota \subset Y_\iota$" <u>entraîne</u> $\bigcap_{\iota \in I} X_\iota \subset \bigcap_{\iota \in I} Y_\iota$.

En effet, on a, pour tout ι, $Y_\iota \supset X_\iota \supset \bigcap_{\iota \in I} X_\iota$.

Los dualos dos prop. 2,3 et 6 s'énoncent respectivement :

Proposition 9. Soit $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille de parties de I ; on a

(7) $$\bigcap_{\iota \in \bigcup_{\lambda \in L} J_\lambda} X_\iota = \bigcap_{\lambda \in L} \Big(\bigcap_{\iota \in J_\lambda} X_\iota \Big)$$

(associativité de l'intersection).

Proposition 10. Soient E,I,K trois ensembles, $(X_\iota)_{\iota \in I}$, $(Y_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ deux familles de parties de E ; on a

(8) $$\Big(\bigcap_{\iota \in I} X_\iota \Big) \cup \Big(\bigcap_{\varkappa \in K} Y_\varkappa \Big) = \bigcap_{(\iota,\varkappa) \in I \times K} (X_\iota \cup Y_\varkappa)$$

(distributivité de la réunion par rapport à l'intersection).

Proposition 11. Soit $(X_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de parties de E, et soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des éléments de la famille $(X_\iota)_{\iota \in I}$; on a

(9) $$\bigcap_{\iota \in I} X_\iota = \bigcap_{Y \in \mathfrak{F}} Y .$$

La relation (3) n'est pas du type qui permet la formation d'une relation duale (puisqu'elle contient le signe $\times$) ; mais on démontre immédiatement la proposition analogue :

Proposition 11. Soient I,K,E,F quatre ensembles, $(X_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de parties de E, $(Y_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ une famille de parties de F. On a

(10) $$\Big(\bigcap_{\iota \in I} X_\iota \Big) \times \Big(\bigcap_{\varkappa \in K} Y_\varkappa \Big) = \bigcap_{(\iota,\varkappa) \in I \times K} (X_\iota \times Y_\varkappa)$$

En outre, on a la propriété spéciale à l'intersection :

Proposition 12. Soient I,E,F trois ensembles, $(X_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de parties de E, $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de parties de F ayant même ensemble d'indices. Alors

(11) $$\Big(\bigcap_{\iota \in I} X_\iota \Big) \times \Big(\bigcap_{\iota \in I} Y_\iota \Big) = \bigcap_{\iota \in I} (X_\iota \times Y_\iota)$$

En effet, la relation $(x,y) \in \Big(\bigcap_{\iota \in I} X_\iota \Big) \times \Big(\bigcap_{\iota \in I} Y_\iota \Big)$ est équivalente à $((\forall \iota \in I)(x \in X_\iota)$ et $(\forall \iota \in I)(y \in Y_\iota))$, donc à $(\forall \iota \in I)$ $(x \in X_\iota$ et $y \in Y_\iota)$ c'est-à-dire à $(\forall \iota \in I)((x,y) \in X_\iota \times Y_\iota)$ d'où la proposition.

La formule (4) n'a pas non plus de duale. Pour une partie arbitraire K de $E \times F$ et une famille $(X_\iota)_{\iota \in I}$ de parties de E, on a seulement la relation

(12) $$K(\bigcap_{\iota \in I} X_\iota) \subset \bigcap_{\iota \in I} K(X_\iota)$$

qui résulte de la prop. 8 ci-dessus et de la prop. 3 du § 4.

<u>Proposition 13. Soient</u> I, E, F <u>trois ensembles,</u> f <u>une application arbitraire d'une partie de</u> E <u>dans</u> F, $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ <u>une famille de parties de</u> F. <u>On a</u>

(13) $$\overset{-1}{f}(\bigcap_{\iota \in I} Y_\iota) = \bigcap_{\iota \in I} \overset{-1}{f}(Y_\iota)$$

En effet, on peut se restreindre au cas où f est une application de E dans F ; la relation $x \in \overset{-1}{f}(\bigcap_{\iota \in I} Y_\iota)$ est alors équivalente à $f(x) \in \bigcap_{\iota \in I} Y_\iota$, c'est-à-dire à $(\forall \iota \in I)(f(x) \in Y_\iota)$, ou enfin à $(\forall \iota \in I)(x \in \overset{-1}{f}(Y_\iota))$, qui est par définition équivalente à $x \in \bigcap_{\iota \in I} \overset{-1}{f}(Y_\iota)$.

<u>5. Produit d'une famille d'ensembles</u>. Soient I et E deux ensembles, $(X_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de parties de E ayant I pour ensembles d'indices. Soit u une application arbitraire d'une partie J de I dans E, c'est-à-dire une arbitraire famille $(u_\iota)_{\iota \in J}$ d'éléments de E ; la relation

$(\forall \iota \in I)(\iota \notin J$ ou $u_\iota \in X_\iota)$ (équivalente à $(\forall \iota \in J(u_\iota \in X_\iota)$ lorsque $J \neq \emptyset$), fonctionnalisée par rapport à u, donne une relation fonctionnelle par rapport à une partie arbitraire de E^J ; nous prendrons pour symbole fonctionnel attaché à cette relation $\prod_{\iota \in J} X_\iota$, que nous appellerons le <u>produit de la famille d'ensembles</u> $(X_\iota)_{\iota \in J}$; ι est un argument lié dans ce symbole fonctionnel. On dit que les X_ι sont <u>les ensembles facteurs</u> du produit $\prod_{\iota \in J} X_\iota$. La relation $(u_\iota)_{\iota \in J} \in \prod_{\iota \in J} X_\iota$ est donc équivalente à $(\forall \iota \in I)(\iota \notin J$ ou $u_\iota \in X_\iota)$.

Si $X_\iota = E$ pour tout $\iota \in J$, on a $\prod_{\iota \in J} X_\iota = E^J$ puisqu'alors la relation $u_\iota \in X_\iota$ est vraie pour tout $\iota \in J$.

Comme la relation $\iota \notin \emptyset$ est vraie (ι élément arbitraire de I), le produit $\prod_{\iota \in \emptyset} X_\iota$ est identique à $E^\emptyset = \{\emptyset\}$ (ensemble réduit à l'élément $\emptyset$ de $\mathfrak{P}(I \times E)$).

D'autre part, pour tout $\varkappa \in I$, l'ensemble $\prod_{\iota \in \{\varkappa\}} X_\iota$ est l'image de $\{\varkappa\} \times X_\varkappa$ par l'application biunivoque $(\iota, x) \to \{(\iota, x)\}$ de $I \times E$ dans $\mathfrak{P}(I \times E)$; comme $x \to (\varkappa, x)$ est une application biunivoque de $X_\varkappa$ sur $\{\varkappa\} \times X_\varkappa$, l'application $x \to (\varkappa, x)$ est une application <u>biunivoque</u> de $X_\varkappa$ sur $\prod_{\iota \in \{\varkappa\}} X_\iota$, que nous appellerons <u>canonique</u> ainsi que l'application réciproque. <u>Dans le reste de ce n°, nous supposerons que</u> $\prod_{\iota \in I} X_\iota \neq \emptyset$ (cf. § 2, cor. de la prop. 7, et ci-dessous, n°6).

Soit $u = (u_\iota)_{\iota \in I}$ un élément arbitraire de $\prod_{\iota \in I} X_\iota$; l'application $u \to u_J$ (u_J restriction de u à J) est une application de $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ sur $\prod_{\iota \in J} X_\iota$, qui se note pr_J et est appelée <u>projection</u> de $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ sur $\prod_{\iota \in J} X_\iota$; on a donc $pr_J((u_\iota)_{\iota \in I}) = (u_\iota)_{\iota \in J}$. Pour toute partie J de I, on a donc $\prod_{\iota \in J} X_\iota \neq \emptyset$ (§ 4, prop. 2). En particulier, pour $J = \{\varkappa\}$ ($\varkappa$ élément arbitraire de I) la composée de l'application canonique de $\prod_{\iota \in \{\varkappa\}} X_\iota$ sur $X_\varkappa$, et de $pr_{\{\varkappa\}}$, est l'application de $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ sur $X_\varkappa$, qui, à toute application $z \in \prod_{\iota \in I} X_\iota$ fait correspondre sa valeur $z_\varkappa$ pour $\varkappa$; on la note $pr_\varkappa$ et on l'appelle <u>projection</u> ou <u>coordonnée d'indice</u> $\varkappa$; on a donc $pr_\varkappa((x_\iota)_{\iota \in I}) = x_\varkappa$, et, pour tout $z \in \prod_{\iota \in I} X_\iota$, $z = (pr_\iota z)_{\iota \in I}$.

<u>Proposition 14</u>. <u>Soit</u> $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ <u>une partition de</u> I ; <u>l'application</u> $z \to (pr_{J_\lambda}(z))_{\lambda \in L}$ <u>est une application biunivoque de</u> $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ <u>sur</u> $\prod_{\lambda \in L} \left(\prod_{\iota \in J_\lambda} X_\iota \right)$ ("associativité" du produit).

Montrons d'abord que la relation $(\mathrm{pr}_{J_\lambda}(z))_{\lambda \in L} = (\mathrm{pr}_{J_\lambda}(z'))_{\lambda \in L}$ entraîne $z=z'$. En effet, elle est équivalente à $(\forall \lambda \in L)(\mathrm{pr}_{J_\lambda}(z) = \mathrm{pr}_{J_\lambda}(z'))$; mais $\mathrm{pr}_{J_\lambda}(z) = (\mathrm{pr}_\iota z)_{\iota \in J_\lambda}$; donc $\mathrm{pr}_{J_\lambda}(z) = \mathrm{pr}_{J_\lambda}(z')$ est équivalente à $(\forall \iota \in I)(\iota \notin J_\lambda$ ou $\mathrm{pr}_\iota z = \mathrm{pr}_\iota z')$; la relation considérée initialement est donc équivalente à $(\forall \iota \in I(\forall \lambda \in L)$ $(\iota \notin J$ ou $\mathrm{pr}_\iota z = \mathrm{pr}_\iota z')$, et par suite à $(\forall \iota \in I)((\forall \lambda \in L)(\iota \notin J_\lambda)$ ou $\mathrm{pr}_\iota z = \mathrm{pr}_\iota z')$. Mais $(\forall \lambda \in L)(\iota \notin J_\lambda)$ est équivalente à $\iota \notin \bigcup_{\lambda \in L} J_\lambda$, et comme par hypothèse $\bigcup_{\lambda \in L} J_\lambda = I$, on voit finalement que la relation considérée est équivalente à $(\forall \iota \in I)(\mathrm{pr}_\iota z = \mathrm{pr}_\iota z')$, c'est-à-dire à $z=z'$.

Montrons maintenant que, quel que soit $(u_\lambda)_{\lambda \in L} \in \prod_{\lambda \in L}(\prod_{\iota \in J_\lambda} X_\iota)$, il existe $z \in \prod_{\iota \in I} X_\iota$ tel que $u_\lambda = \mathrm{pr}_{J_\lambda}(z)$ pour tout $\lambda \in L$. Considérons en effet, dans l'ensemble $I \times E$, la partie $z = \bigcup_{\lambda \in L} u_\lambda$; nous allons voir que $z \in \prod_{\iota \in I} X_\iota$. Tout d'abord, montrons que $z \in E^I$; en premier lieu, dans $I \times E$ on a $\mathrm{pr}_1 z = \mathrm{pr}_1(\bigcup_{\lambda \in L} u_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in L} \mathrm{pr}_1 u_\lambda = \bigcup_{\lambda \in L} J_\lambda = I$ par hypothèse ; d'autre part, la relation $((\iota, x) \in z$ et $(\iota, y) \in z)$ équivaut à $((\exists \lambda \in L)((\iota, x) \in u_\lambda)$ et $(\exists \mu \in L)((\iota, y) \in u_\mu))$, donc à $(\forall \lambda \in L)(\forall \mu \in L)((\iota, x) \in u_\lambda$ et $(\iota, y) \in u_\mu)$. Mais $((\iota, x) \in u_\lambda$ et $(\iota, y) \in u_\mu)$ entraîne $(\iota \in \mathrm{pr}_1 u_\lambda$ et $\iota \in \mathrm{pr}_1 u_\mu)$, c'est-à-dire $(\iota \in J_\lambda$ et $\iota \in J_\mu)$, donc $\lambda = \mu$ en vertu de l'hypothèse que $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ est une partition de I. On en conclut que $((\iota, x) \in z$ et $(\iota, y) \in z)$ est équivalente à $(\exists \lambda \in L)((\iota, x) \in u_\lambda$ et $(\iota, y) \in u_\lambda)$; mais par hypothèse $((\iota, x) \in u_\lambda$ et $(\iota, y) \in u_\lambda)$ entraîne $x=y$, donc on a bien $z \in E^I$. D'autre part, la relation $\iota \in J_\lambda$ est fonctionnelle en λ ; soit $\iota \to \varphi(\iota)$ l'application correspondante de I dans l'ensemble des éléments de la famille $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$; la relation

$(\iota, x) \in z$ est équivalente à $(\exists \lambda \in L)((\iota, x) \in u_\lambda)$, donc à $(\exists \lambda \in L)((\iota, x) \in u_\lambda$ et $\iota \in J_\lambda)$, donc à $(\exists \lambda \in L)((\iota, x) \in u_\lambda$ et $\lambda = \varphi(\iota))$ ou encore à $(\iota, x) \in u_{\varphi(\iota)}$, ce qui entraîne $x \in X_\iota$, d'où $z \in \prod_{\iota \in I} X_\iota$.

On voit en outre que, pour tout λ, on a $pr_{J_\lambda}(z) = u_\lambda$, ce qui achève la démonstration.

L'application biunivoque $z \to (pr_{J_\lambda} z)_{\lambda \in L}$ et son application réciproque sont dites <u>canoniques</u>.

D'une manière plus imagée, on peut interprèter la prop. 14 en disant que, pour définir une application de I dans E, on peut la définir arbitrairement sur chacun des ensembles J_λ d'une partition de I.

<u>Proposition 15. La relation "quel que soit</u> $\iota \in I$, $Y_\iota \subset X_\iota$" <u>entraîne</u> $\prod_{\iota \in I} Y_\iota \subset \prod_{\iota \in I} X_\iota$.

En effet, la relation $(\forall \iota \in I)(Y_\iota \subset X_\iota)$ est équivalente à $(\forall \iota \in I)(\forall x \in E)(x \in Y_\iota \to x \in X_\iota)$; elle entraîne donc la relation $(\forall z \in E^I)(\forall \iota \in I)(z_\iota \in Y_\iota \to z_\iota \in X_\iota)$; mais $(\forall \iota \in I)((z_\iota \in Y_\iota) \to (z_\iota \in X_\iota))$ entraîne $(\forall \iota \in I)(z_\iota \in Y_\iota) \to (\forall \iota \in I)(z_\iota \in X_\iota)$, c'est-à-dire $(z \in \prod_{\iota \in I} Y_\iota) \to (z \in \prod_{\iota \in I} X)$; d'où la proposition

<u>Proposition 16. Soit</u> $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ <u>une famille de parties de E telle que</u> $Y_\iota \subset X_\iota$ <u>pour tout</u> ι. <u>Pour tout</u> $\varkappa \in I$, <u>on a</u> $\overset{-1}{pr}_\varkappa(Y_\varkappa) = \prod_{\iota \in I} Z_\iota$, <u>où la famille</u> (Z_ι) <u>est définie par les conditions</u> : $Z_\varkappa = Y_\varkappa$, $Z_\iota = X_\iota$ <u>pour</u> $\iota \neq \varkappa$.

En effet, la relation $z \in \overset{-1}{pr}_\varkappa(Y_\varkappa)$ équivaut à $pr_\varkappa z \in Y_\varkappa$; comme $(\forall \iota \in I)(pr_\iota z \in X_\iota)$ est vraie, on voit que $z \in \overset{-1}{pr}_\varkappa(Y_\varkappa)$ est équivalente à $(pr_\varkappa z \in Y_\varkappa$ et $(\forall \iota \in I)(\iota \neq \varkappa \to pr_\iota z \in X_\iota))$, ou encore, en vertu de la définition de la famille (Z_ι), à $(\forall \iota \in I)((pr_\varkappa z \in Z_\varkappa$ et $\iota = \varkappa)$ ou $(pr_\varkappa z \in Z_\varkappa$ et $pr_\iota z \in Z_\iota))$;

cette dernière est équivalente à $(\forall\iota\in I)(\mathrm{pr}_{\varkappa} z\in Z_{\varkappa}$ et $\mathrm{pr}_{\iota} z\in Z_{\iota})$; enfin, comme $(\forall\iota\in I)(\mathrm{pr}_{\iota} z\in Z_{\iota})$ entraîne $\mathrm{pr}_{\varkappa} z\in Z_{\varkappa}$ on voit finalement que $z\in \overset{-1}{\mathrm{pr}}_{\varkappa}(Y_{\varkappa})$ est bien équivalente à $(\forall\iota\in I)(\mathrm{pr}_{\iota} z\in Z_{\iota})$, c'est-à-dire à $z\in \prod_{\iota\in I} Z_{\iota}$.

<u>Proposition 17</u>. <u>Soit</u> $(Y_{\iota\lambda})_{(\iota,\lambda)\in I\times L}$ <u>une famille de parties de</u> E <u>telle que, pour tout</u> $\lambda\in L$ <u>et tout</u> $\iota\in I$, $Y_{\iota\lambda}\subset X_{\iota}$. <u>On a</u>

$$(14)\qquad \bigcap_{\lambda\in L}\Big(\prod_{\iota\in I} Y_{\iota\lambda}\Big) = \prod_{\iota\in I}\Big(\bigcap_{\lambda\in L} Y_{\iota\lambda}\Big).$$

En effet, la relation $z\in \bigcap_{\lambda\in L}\big(\prod_{\iota\in I} Y_{\iota\lambda}\big)$ est équivalente à $(\forall\lambda\in L)(z\in \prod_{\iota\in I} Y_{\iota\lambda})$, c'est-à-dire à $(\forall\lambda\in L)(\forall\iota\in I)(\mathrm{pr}_{\iota} z\in Y_{\iota\lambda})$; la relation $z\in \prod_{\iota\in I}\big(\bigcap_{\lambda\in L} Y_{\iota\lambda}\big)$ est de même équivalente à $(\forall\iota\in I)(\mathrm{pr}_{\iota} z\in \bigcap_{\lambda\in L} Y_{\iota\lambda})$ ou à $(\forall\iota\in I)(\forall\lambda\in L)(\mathrm{pr}_{\iota} z\in Y_{\iota\lambda})$, d'où la proposition.

<u>Corollaire</u>. <u>Si</u> $(Y_{\iota})_{\iota\in I}$ <u>est une famille de parties de</u> E <u>telle que</u> $Y_{\iota}\subset X_{\iota}$ <u>pour tout</u> $\iota\in I$, <u>on a</u>

$$(15)\qquad \prod_{\iota\in I} Y_{\iota} = \bigcap_{\iota\in I} \overset{-1}{\mathrm{pr}}_{\iota}(Y_{\iota}).$$

C'est une conséquence de la formule (14) appliquée à la famille $(Z_{\iota\lambda})_{(\iota,\lambda)\in I\times I}$, où $Z_{\iota\lambda}=Y_{\iota}$ et $Z_{\iota\lambda}=X_{\lambda}$ pour $\iota\neq\lambda$, en raison de la prop. 16.

<u>Proposition 18</u>. <u>Pour toute partie</u> Z <u>de</u> $\prod_{\iota\in I} X_{\iota}$, <u>on a</u>

$$(16)\qquad Z\subset \prod_{\iota\in I}\mathrm{pr}_{\iota}(Z).$$

En effet, $z\in Z$ entraîne $\mathrm{pr}_{\iota} z\in \mathrm{pr}_{\iota} Z$, donc aussi $(\forall\iota\in I)(\mathrm{pr}_{\iota} z\in \mathrm{pr}_{\iota}(Z))$, qui équivaut à $z\in \prod_{\iota\in I}\mathrm{pr}_{\iota}(Z)$.

<u>Proposition 19</u>. <u>Soit</u> F <u>un ensemble quelconque</u>, u <u>une application arbitraire de</u> F <u>dans</u> $\prod_{\iota\in I} X_{\iota}$; <u>l'application</u> $u\to(\mathrm{pr}_{\iota}\circ u)_{\iota\in I}$ <u>de</u> $\big(\prod_{\iota\in I} X_{\iota}\big)^{F}$ <u>dans</u> $\prod_{\iota\in I} X_{\iota}^{F}$ <u>est une application biunivoque du premier de ces ensembles sur le second</u>.

En effet, la relation $(pr_\iota \circ u)=(pr_\iota \circ v)$ signifie que, pour tout $x \in F$, et tout $\iota \in I$, $pr_\iota(u(x))=pr_\iota(v(x))$; il en résulte que $u(x)=v(x)$ pour tout $x \in F$, donc $u=v$. D'autre part, pour toute famille $(f_\iota)_{\iota \in I}$, où f_ι est une application de F dans X_ι, $x \to (f_\iota(x))$ est une application de F dans $\prod_{\iota \in I} X_\iota$, et on a, pour tout $\iota \in I$, $pr_\iota((f_\iota(x)))=f_\iota(x)$, d'où la proposition.

Par abus de langage, on désignera parfois par (f_ι) l'application $x \to (f_\iota(x))$ lorsqu'il ne peut y avoir confusion avec la famille des applications f_ι. L'application biunivoque définie dans la prop.19 et l'application réciproque sont dites canoniques.

Rremarque. Le lecteur n'aura pas été sans remarquer l'analogie entre les notions de réunion, intersection et produit d'une famille de parties d'un ensemble E, et celles de réunion, intersection et produit de deux ensembles, définies aux §§2 et 3 ; nous préciserons cette analogie au chap.III.

6. L'axiome de choix.

Au n°5, nous avons dû supposer que $\prod_{\iota \in I} X_\iota \neq \emptyset$ pour la famille $(X_\iota)_{\iota \in I}$ de parties de E. Nous avons vu que cette relation entraîne $X_\iota \neq \emptyset$ pour tout $\iota \in I$. Au chap.III, nous verrons que, sous certaine hypothèse relative à I (savoir, que I est un ensemble fini), la réciproque de cette proposition est vraie (autrement dit, est une conséquence de cette hypothèse et des axiomes de la théorie des ensembles énumérés jusqu'ici). Le développement de la mathématique moderne a conduit à introduire un nouvel axiome qui affirme la vérité de cette réciproque sans aucune hypothèse sur I. De façon précise, nous introduirons, comme dernier axiome de la Théorie des ensembles, l'axiome suivant, dit axiome de choix (ou axiome de Zermelo)

$(E_{VIII})(\forall I,E)(\forall X\in(\mathfrak{P}(E))^I)((\forall \iota\in I)(X_\iota\neq\emptyset)\rightarrow \prod_{\iota\in I} X_\iota \neq\emptyset)$

où I et E sont deux ensembles arbitraires, et $X=(X_\iota)_{\iota\in I}$ une famille arbitraire de parties de E , ayant I comme ensemble d'indices.

Dans la théorie des ensembles, on peut donc remplacer la condition $\prod_{\iota\in I} X_\iota \neq\emptyset$ introduite au n°5 par $(\forall \iota\in I)(X_\iota\neq\emptyset)$, qui lui est <u>équivalente</u>.

Il est souvent commode de donner à l'axiome de choix une autre forme ; nous allons montrer en effet qu'il revient au même d'introduire l'axiome (E_{VIII}), ou le <u>schéma d'axiome</u> suivant

(e3) $(\forall E,F)((\forall x\in E)(\exists y\in F)R \rightarrow (\exists u\in F^E)(\forall x\in E)(u(x)|y)R)$

où R est une relation normale dans laquelle x et y sont des arguments <u>libres</u>.

En effet, si dans le schéma d'axiome (e3), on remplace la lettre R par la relation $y\in Z_x$, où Z est une famille arbitraire de parties de F , la relation $(\forall x\in E)(\exists y\in F)(y\in Z_x)$ est équivalente à $(\forall x\in E)(Z_x\neq\emptyset)$, et la relation $(\exists u\in F^E)(\forall x\in E)(u_x\in Z_x)$ est équivalente à $\prod_{x\in E} Z_x\neq\emptyset$; on obtient donc ainsi (E_{VIII}) .

Inversement, partons de (E_{VIII}) et considérons une relation quelconque (explicitée) R ; soit $\underline{\underline{E}}_R$ la partie de $E\times F$ définie par R (§ 3,n°3) ; la relation R est donc équivalente à $(x,y)\in \underline{\underline{E}}_R$, ou encore (§ 4,n°8) à $y\in\underline{\underline{E}}_R(x)$; la relation $(\forall x\in E)(\exists y\in F)R$ est donc équivalente à $(\forall x\in E)(\underline{\underline{E}}_R(x)\neq\emptyset)$, et la relation $(\exists u\in F^E)(\forall x\in E)(u(x)|y)R$ est équivalente à $(\exists u\in F^E)(\forall x\in E)$ $(u(x)\in \underline{\underline{E}}_R(x))$, c'est-à-dire à $\prod_{x\in E}\underline{\underline{E}}_R(x)\neq\emptyset$; de (E_{VIII}) on déduit donc le schéma (e3) .

On notera que, dans le schéma d'axiome (E_{VIII}), on peut remplacer le signe $\rightarrow$ par le signe $\rightleftarrows$; en effet, la relation $(u(x)|y)R$ entraîne $(\exists y\in F)R$ (§ 1,n°2), donc $(\exists u\in F^E)(\forall x\in E)(u(x)|y)R$

entraîne $(\exists u \in F^E)(\forall x \in E)(\exists y \in F)R$, qui est équivalente à $(\forall x \in E)(\exists y \in F)R$.

L'axiome de Zermelo n'a été introduit qu'assez récemment en mathématique (cf. Note historique) et un grand nombre de propositions <u>n'en dépendent pas</u> (autrement dit, sont vraies dans la théorie (antécédente à la Théorie des ensembles) où on supprime (E_{VIII}) de la liste des axiomes et schémas d'axiomes) ; en raison de ce fait, nous signalerons parfois, dans ce Traité, les propositions qui dépendent de cet axiome.

<u>Exercices</u>.- 1) Soient I, L deux ensembles d'indices, $(L_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de parties de L ayant I pour ensemble d'indices, $(X_{\iota\lambda})$ une famille de parties d'un ensemble E ayant pour ensemble d'indices la partie de $I \times L$ formée des couples (ι, λ) tels que $\lambda \in L_\iota$. Démontrer (en utilisant l'axiome de choix) la formule

$$\bigcap_{\iota \in I}\Big(\bigcup_{\lambda \in L_\iota} X_{\iota\lambda}\Big) = \bigcup_{(\lambda_\iota) \in \prod_{\iota \in I} L_\iota}\Big(\bigcap_{\iota \in I} X_{\iota,\lambda_\iota}\Big)$$

Enoncer et démontrer la duale de cette formule.

2) Les notations étant les mêmes que dans l'exerc. 1, démontrer les formules

$$\prod_{\iota \in I}\Big(\bigcup_{\lambda \in L_\iota} X_{\iota\lambda}\Big) = \bigcup_{(\lambda_\iota) \in \prod_{\iota \in I} L_\iota}\Big(\prod_{\iota \in I} X_{\iota,\lambda_\iota}\Big)$$

$$\prod_{\iota \in I}\Big(\bigcap_{\lambda \in L_\iota} X_{\iota\lambda}\Big) = \bigcap_{(\lambda_\iota) \in \prod_{\iota \in I} L_\iota}\Big(\prod_{\iota \in I} X_{\iota,\lambda_\iota}\Big)$$

Dans le cas particulier où $L_\iota = L$ pour tout ι , donner de la seconde formule une démonstration qui ne fasse pas usage de l'axiome de choix.

3) Montrer que si $(X_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille de parties de E la relation $(\exists \iota \in I)(X_\iota = E)$ entraîne $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota = E$, la relation $(\exists \iota \in I)(X_\iota = \emptyset)$ entraîne $\bigcap_{\iota \in I} X_\iota = \emptyset$.

123

§ 6. Relations d'équivalence. Ensembles quotients.

1. Partitions et relations d'équivalence. Soit $(X_\iota)_{\iota \in I}$ une partition (§ 5, n°3) d'un ensemble E.

Proposition 1. Si on désigne par R la relation $(\exists \iota \in I)(u \in X_\iota$ et $v \in X_\iota)$ entre deux éléments arbitraires u,v de E, on a les propositions suivantes :

a) la relation $(x|u)(x|v)R$ est vraie ;

b) les relations $(x|u)(y|v)R$ et $(y|u)(x|v)R$ sont équivalentes ;

c) la relation "$(x|u)(y|v)R$ et $(y|u)(z|v)R$" entraîne $(x|u)(z|v)R$.

En effet, a) est équivalente à dire que $(\exists \iota \in I)(x \in X_\iota)$ est vraie ce qui résulte de la relation $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota = E$; b) est triviale ; enfin la relation $(\exists \iota \in I)(\exists \lambda \in I)(x \in X_\iota$ et $y \in X_\iota$ et $y \in X_\lambda$ et $z \in X_\lambda)$ entraîne $(\exists \iota \in I)(x \in X_\iota$ et $z \in X_\iota)$, car $(y \in X_\iota$ et $y \in X_\lambda)$ entraîne $X_\iota \cap X_\lambda \neq \emptyset$ donc $\iota = \lambda$; par suite $(\exists \iota \in I)(\exists \lambda \in I)$ $(x \in X_\iota$ et $y \in X_\iota$ et $y \in X_\lambda$ et $z \in X_\lambda)$ entraîne $(\exists \iota \in I)(\exists \lambda \in I)(x \in X_\iota$ et $z \in X_\lambda$ et $\iota = \lambda)$, donc $(\exists \iota \in I)$ $(x \in X_\iota$ et $z \in X_\iota)$.

De façon générale, étant donné une relation normale R, contenant (entre autres) deux éléments arbitraires u,v de E, qui sont des arguments libres dans R, nous dirons que R est une relation d'équivalence entre u et v si elle satisfait aux trois conditions a), b), c) de la prop. 1. On exprime souvent la condition a) en disant que R est réflexive, la condition b) en disant que R est symétrique, et la condition c) en disant que R est transitive.

Exemples. - La relation d'égalité $u=v$ est une relation d'équivalence ; on dit que c'est la relation d'équivalence la plus fine dans E (cf.chap.IV). La relation ($u \in E$ et $v \in E$) est aussi une relation d'équivalence ; on dit que c'est la relation d'équivalence la moins fine dans E (cf.chap.IV).

La prop.1 peut donc s'exprimer en disant que la relation $(\exists \iota \in I)$ $(u \in X_\iota$ et $v \in X_\iota)$ est une relation d'équivalence ; nous dirons qu'elle est associée à la partition $(X_\iota)_{\iota \in I}$.

Inversement, nous allons voir que toute relation d'équivalence peut être considérée comme associée à une partition. De façon précise :

Proposition 2. Soit R une relation d'équivalence, $\underline{E}_R$ la partie de $E \times E$ définie par R (§ 3, n°3), $\mathfrak{F}$ l'image de E par l'application $x \to \underline{E}_R(x)$ de E dans $\mathfrak{P}(E)$ (§ 4, n°8). La famille $(X)_{X \in \mathfrak{F}}$ est une partition de E, et la relation d'équivalence associée à cette partition est équivalente à R.

Montrons en premier lieu que pour tout $x \in E$, $\underline{E}_R(x) \neq \emptyset$, et que $\bigcup_{x \in E} \underline{E}_R(x) = E$; la première relation résulte de ce que $x \in \underline{E}_R(x)$ (équivalente à $(x,x) \in \underline{E}_R$) est vraie d'après a) ; la seconde signifie que $(\exists x \in E)(y \in \underline{E}_R(x))$ est vraie, ce qui est encore une conséquence dea a).

En second lieu, montrons que la relation $(x,y) \in \underline{E}_R$ entraîne $\underline{E}_R(x) = \underline{E}_R(y)$; en effet, elle entraîne la relation $((x,z) \in \underline{E}_R) \to$ $\to ((x,y) \in \underline{E}_R$ et $(x,z) \in \underline{E}_R)$; mais d'après les propriétés b) et c), $((x,y) \in \underline{E}_R$ et $(x,z) \in \underline{E}_R)$ entraîne $(y,z) \in \underline{E}_R$; donc $(x,y) \in \underline{E}_R$ entraîne $(z \in \underline{E}_R(x) \to z \in \underline{E}_R(y))$, et en vertu de b), elle entraine aussi $(z \in \underline{E}_R(y) \to z \in \underline{E}_R(x))$; elle entraîne donc bien $\underline{E}_R(x) = \underline{E}_R(y)$.

Prouvons maintenant que la relation $X \cap Y \neq \emptyset$ (X et Y éléments arbitraires de $\mathfrak{F}$) entraîne $X = Y$, ou, ce qui revient au même, que $\underline{E}_R(x) \cap \underline{E}_R(y) \neq \emptyset$ entraîne $\underline{E}_R(x) = \underline{E}_R(y)$. La relation $\underline{E}_R(x) \cap \underline{E}_R(y) \neq \emptyset$

est équivalente à $(\exists z \in E)((x,z) \in \underline{\underline{E}}_R$ et $(y,z) \in \underline{\underline{E}}_R)$; d'après b) et c), elle entraîne $(\exists z \in E)((x,y) \in \underline{\underline{E}}_R)$, qui est équivalente à $(x,y) \in \underline{\underline{E}}_R$; mais cette dernière relation entraîne $\underline{\underline{E}}_R(x)=\underline{\underline{E}}_R(y)$. On voit ainsi que $\mathfrak{F}$ est une partition ; en outre les relations $(x,y) \in \underline{\underline{E}}_R$ et $\underline{\underline{E}}_R(x)=\underline{\underline{E}}_R(y)$ sont <u>équivalentes</u> (puisque $\underline{\underline{E}}_R(x) \neq \emptyset$ pour tout x).

Enfin, la relation d'équivalence associée à la partition $\mathfrak{F}$ est la relation $(\exists X \in \mathfrak{F})(x \in X$ et $y \in X)$, qui est équivalente à $(\exists z \in E)(x \in \underline{\underline{E}}_R(z)$ et $y \in \underline{\underline{E}}_R(z))$, ou encore à $(\exists z \in E)((z,x) \in \underline{\underline{E}}_R$ et $(z,y) \in \underline{\underline{E}}_R)$; tenant compte de b), nous venons de voir que cette relation entraîne $(x,y) \in \underline{\underline{E}}_R$; d'autre part $(x,y) \in \underline{\underline{E}}_R$ entraîne $(x \in \underline{\underline{E}}_R(x)$ et $y \in \underline{\underline{E}}_R(x))$ d'après a), donc aussi $(\exists z \in E)(x \in \underline{\underline{E}}_R(z)$ et $y \in \underline{\underline{E}}_R(z))$. La proposition 2 est ainsi démontrée.

Nous dirons que la partie $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{P}(E)$ est l'<u>ensemble quotient de E par la relation d'équivalence</u> R, et nous le noterons en général E/R ; l'application $x \to \underline{\underline{E}}_R(x)$ sera dite <u>application canonique</u> de E sur E/R ; pour tout x, la partie $\underline{\underline{E}}_R(x)$ de E sera dite <u>classe d'équivalence de x suivant</u> R (ou <u>modulo</u> R). On utilisera quelquefois la notation $x \equiv y \pmod{R}$ au lieu de $(x,y) \in \underline{\underline{E}}_R$ (équivalente à R).

Pour la relation d'égalité, l'application canonique de E sur l'ensemble quotient correspondant E/R est l'application $x \to \{x\}$; on sait que cette application est <u>biunivoque</u>. Pour la relation d'équivalence la moins fine sur E, l'application canonique est l'application <u>constante</u> $x \to E$; l'ensemble quotient correspondant est la partie $\{E\}$ de $\mathfrak{P}(E)$.

<u>Remarque</u>.- Soit C une partie de $E \times E$; les conditions a), b), c) pour que la relation $(u,v) \in C$ soit une relation d'équivalence sont respectivement équivalentes aux suivantes (Δ désignant

la diagonale de $E\times E$) ; a') $\Delta \subset C$; b') $\overset{-1}{C}=C$; c') $C\circ C\subset C$.
Il n'y a à démontrer que l'équivalence de c) et c'). Or, c' est équivalent à $(\exists y\in E)((x,y)\in C$ et $(y,z)\in C) \rightarrow (x,z)\in C$; comme $((x,y)\in C$ et $(y,z)\in C)$ entraîne $(\exists y\in E)((x,y)\in C$ et $(y,z)\in C)$, on voit que c') entraîne c) ; d'autre part, c) entraîne $(\exists y\in E)((x,y)\in C$ et $(y,z)\in C) \rightarrow (\exists y\in E)((x,z)\in C)$; comme $(\exists y\in E)((x,z)\in C)$ est équivalente à $(x,z)\in C$, on voit que c) entraîne c').

Si φ est l'application canonique de E sur E/R , on notera que l'application $z \rightarrow \overset{-1}{\varphi}(z)$ (où z est un élément arbitraire de E/R) n'est autre que l'application identique de E/R sur lui-même.

On dit qu'une partie A de E est <u>saturée</u> pour la relation R si la relation $(x\in A$ et $x'\equiv x \pmod{R})$ entraîne $x'\in A$; autrement dit, A est saturé si pour tout $x\in A$, on a $\varphi(x)\subset A$; les ensembles saturés ne sont autres que les <u>réunions de classes d'équivalence suivant</u> R , puisque pour un tel ensemble A , on a $A=\bigcup_{x\in A}\varphi(x)$, la réciproque étant immédiate. On a donc $\varphi(A)=\bigcup_{x\in A}\{\varphi(x)\}$, d'où $\overset{-1}{\varphi}(\varphi(A))=\bigcup_{x\in A}\overset{-1}{\varphi}(\varphi(x))=\bigcup_{x\in A}\varphi(x)=A$; inversement, si Y est une partie quelconque de E/R , $\overset{-1}{\varphi}(Y)$ est un ensemble saturé pour R , car la relation $x\in\overset{-1}{\varphi}(Y)$ est équivalente à $\varphi(x)\in Y$, et $x'\equiv x$ entraîne $\varphi(x')=\varphi(x)\in Y$.

Soit maintenant X une partie quelconque de E ; l'ensemble $\overset{-1}{\varphi}(\varphi(X))$ est un ensemble saturé contenant X , et c'est l'<u>intersection</u> de tous les ensembles saturés qui contiennent X , car si A est un tel ensemble, on a $\varphi(X)\subset\varphi(A)$, d'où $\overset{-1}{\varphi}(\varphi(X))\subset\overset{-1}{\varphi}(\varphi(A))=A$. On dit que l'ensemble $\overset{-1}{\varphi}(\varphi(X))$ est l'ensemble obtenu en <u>saturant</u> X pour la relation R ; on a $\varphi(X)=\bigcup_{x\in X}\{\varphi(x)\}$, d'où $\overset{-1}{\varphi}(\varphi(X))=\bigcup_{x\in X}\overset{-1}{\varphi}(\varphi(x))=\bigcup_{x\in X}\varphi(x)$, autrement dit, $\overset{-1}{\varphi}(\varphi(X))$ est la <u>réunion des classes d'équivalence des</u>

des éléments de X . En particulier si X est contenu dans une classe d'équivalence $\varphi(x)$, on a $\varphi(x) = \overset{-1}{\varphi}(\varphi(X))$.

2. Applications et relations d'équivalence. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F . Il est immédiat que la relation $f(x)=f(y)$ est une relation d'équivalence R entre x et y dans E ; nous dirons que c'est la relation d'équivalence associée à l'application f . La classe d'équivalence suivant R d'un élément $x\in E$ est l'ensemble des $y\in E$ tels que $f(y)=f(x)$, c'est-à-dire l'ensemble $\overset{-1}{f}(f(x))$. L'ensemble quotient E/R est donc l'ensemble des $\overset{-1}{f}(z)$, où z parcourt $f(E)\subset F$; en outre, l'application $z \rightarrow \overset{-1}{f}(z)$ de $f(E)$ sur E/R est biunivoque, car si $\overset{-1}{f}(u)\cap\overset{-1}{f}(v)\neq\emptyset$, il existe $x\in E$ tel que $x\in\overset{-1}{f}(u)$ et $x\in\overset{-1}{f}(v)$, c'est-à-dire $u=f(x)$ et ~~x∈f~~ $v=f(x)$, d'où $u=v$.

L'application réciproque de l'application $z \rightarrow \overset{-1}{f}(z)$ est une application biunivoque $\bar{f}$ de E/R sur $f(E)$, dite l'application biunivoque associée à f ; si φ est l'application canonique de E sur E/R (n°1), on a $\overset{-1}{f}(f(x))=\varphi(x)$, donc $\bar{f}(\varphi(x))=f(x)$; autrement dit, on peut écrire $f=\bar{f}\circ\varphi$. Il est parfois utile d'écrire cette relation sous la forme $f = \psi\circ\bar{f}\circ\varphi$, où ψ est l'application canonique de $f(E)$ dans F ; le second membre est dit décomposition canonique de l'application f .

Exemples. 1) Dans un ensemble produit $E\times F$, la relation d'équivalence R associée à la fonction pr_1 est la relation $pr_1 z=pr_1 z'$, et l'application biunivoque associée à pr_1 est une application biunivoque de $(E\times F)/R$ sur E . C'est de cet exemple que provient le nom d'ensemble quotient.

2) Toute relation d'équivalence R dans un ensemble E peut être considérée comme associée à une application, savoir l'application canonique de E sur E/R .

<u>3. Relation d'équivalence induite</u>. Soit f une application de E dans F , une relation d'équivalence dans F . Il est immédiat que la relation $f(x) \equiv f(y)$ (mod.R) est une relation d'équivalence entre x et y dans E ; nous dirons que cette relation est l'<u>image réciproque</u> par f de la relation d'équivalence R . Si φ est l'application canonique de F sur F/R , de sorte que $\varphi(z)$ soit la classe d'équivalence de $z \in F$ modulo R , la classe d'équivalence de $x \in E$ suivant l'image réciproque de R par f , est l'ensemble des y tels que $f(y) \subset \varphi(f(x))$, c'est-à-dire $\overset{-1}{f}(\varphi(f(x)))$.

Considérons en particulier le cas où f est l'application canonique d'une partie A d'un ensemble E dans E ; si R est une relation d'équivalence dans E , l'image réciproque de R par f , c'est-à-dire la relation R où on <u>restreint</u> les arguments x et y à être des éléments de A (§ 4, n° 2), est une relation d'équivalence dans A , qu'on appelle la relation d'équivalence <u>induite</u> par R dans A , et que nous noterons R_A . Si φ est l'application canonique de E sur E/R , la classe d'équivalence suivant R_A d'un élément $y \in A$ n'est autre que $\overset{-1}{f}(\varphi(x))=\varphi(x)\cap A$ Autrement dit, tout élément u de A/R_A est de la forme $v \cap A$ où $v \in E/R$; en outre, comme la relation $x \in u$ entraîne $x \in v$, v est la classe $\varphi(x)$ modulo R de tout élément de u , ou encore l'ensemble $\varphi(\varphi(u))$ obtenu en <u>saturant</u> u pour la relation R (n° 1). On voit donc que l'application $u \to \overset{-1}{\varphi}(\varphi(u))$ de A/R_A dans E/R est une application <u>biunivoque</u> ; si $B = \overset{-1}{\varphi}(\varphi(A)) = \bigcup_{x \in A} \varphi(x)$ est l'ensemble obtenu en <u>saturant</u> A pour R , et R_B la relation d'équivalence induite sur B par R , l'image de A/R_A par l'application $u \to \overset{-1}{\varphi}(\varphi(u))$ n'est autre que l'ensemble quotient B/R_B , puisque c'est l'ensemble des classes d'équivalence (suivant R) des éléments de A et que tout élément de B est par définition équivalent (modulo R) à un élément de A . L'application biunivoque $u \rightarrow \overset{-1}{\varphi}(\varphi(u))$ de A/R_A sur B/R_B et l'application réciproque $v \rightarrow v \cap A$ sont dites <u>canoniques</u>.

4. <u>Relations compatibles avec une relation d'équivalence</u>. Soit R une relation d'équivalence dans E , entre deux éléments arbitraires x,x' de E ; soit S une relation normale dans laquelle x n'est pas lié, et où x' ne figure pas. On dit que S est <u>compatible</u> avec la relation d'équivalence R , pour l'argument x , si la relation (S et $x' \equiv x$ (mod. R)) <u>entraîne</u> $(x'|x)S$. Soit $\underline{E}[S]$ l'ensemble des $x \in E$ où la relation S a lieu (§ 2, n°3), de sorte que S est équivalente à $x \in \underline{E}[S]$; dire que S est compatible (pour x) avec R , c'est dire que la relation ($x \in \underline{E}[S]$ et $x' \equiv x$ (mod. R)) entraîne $x' \in \underline{E}[S]$, ou encore que $x \in \underline{E}[S]$ entraîne $\varphi(x) \subset \underline{E}[S]$, en désignant par φ l'application canonique de E sur E/R ; en d'autres termes cela signifie que $\underline{E}[S]$ est un ensemble <u>saturé</u> pour la relation R (n°1).

Si z est un élément arbitraire de E/R , considérons alors la relation $z \subset \underline{E}[S]$, équivalente à $(\forall x \in E)(x \notin z$ ou S) ; elle est équivalente à $z \cap \underline{E}[S] \neq \emptyset$, ou encore à $(\exists x \in E)(x \in z$ et S) d'après ce qui précède ; nous dirons que cette relation est <u>déduite de S par passage au quotient pour l'argument</u> x (relativement à la relation d'équivalence R) ; si S' est cette relation, la relation $(\varphi(x)|z)S'$ est équivalente à S , car elle est équivalente à $\varphi(x) \subset \underline{E}[S]$, et nous avons vu ci-dessus que cette relation est équivalente à S .

Si S est compatible pour deux arguments x,y, respectivement avec deux relations d'équivalence R,R' (où R' est supposée ne pas contenir x, et R ne pas contenir y), la relation déduite de S par passage au quotient pour x est encore compatible (pour y) avec R' , car la relation (($\exists$ $x\in E$)($x\in z$ et S) et $y' \equiv y$ (mod.R')) est équivalente à ($\exists$ $x\in E$)($x\in z$ et S et $y' \equiv y$ (mod.R')) ; comme (S et $y' \equiv y$ (mod.R')) entraîne $(y'|y)S$, on voit que (($\exists$ $x\in E$)($x\in z$ et S) et $y' \equiv y$ (mod.R')) entraîne ($\exists$ $x\in E$) ($x\in z$ et $(y'|y)S$) ; de la même manière on voit que si on passe successivement aux quotients pour x , puis pour y , la relation obtenue est équivalente à celle qu'on obtient en faisant le passage aux quotients, d'abord pour y, puis pour x .

5. <u>Fonctions compatibles avec deux relations d'équivalence.</u> Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F , R une relation d'équivalence dans E , S une relation d'équivalence dans F . On dit que l'application f est <u>compatible avec les relations d'équivalence</u> R <u>et</u> S si la relation $x \equiv x'$ (mod.R) entraîne $f(x) \equiv f(x')$ (mod.S) . Autrement dit, si u est une classe d'équivalence quelconque suivant R , f(u) est <u>contenu dans</u> une classe d'équivalence v suivant S ; d'ailleurs la relation $f(u) \subset v$ est <u>fonctionnelle</u> en v , car les relations $f(u) \subset v$ et $f(u) \subset v'$ entraînent $v \cap v' \neq \emptyset$, d'où $v=v'$; on obtient ainsi une application $\mathring{f}$ de E/R dans F/S , qu'on dit <u>déduite de f par passage aux quotients</u> (relativement aux relations d'équivalence R et S) . Soient φ et ψ les applications canoniques respectives de E sur E/R et de F sur F/S . Pour tout $x\in E$, $\psi(f(x))$ est la classe d'équivalence de f(x) suivant S , donc la classe qui contient $f(\varphi(x))$, ou encore, par définition, la classe $\mathring{f}(\varphi(x))$; on a donc l'identité

(1) $$\psi \circ f = \dot{f} \circ \varphi$$

qui définit d'ailleurs l'application $\dot{f}$.

Un cas particulier important est celui où S est la relation d'égalité dans F ; dire que f est compatible avec les relations R et S signifie alors que $x \equiv x'$ (mod.R) entraîne $f(x)=f(x')$, ou encore que f est <u>constante sur toute classe d'équivalence modulo</u> R .

Il revient au même de dire que la relation $y=f(x)$ est compatible avec la relation R pour l'argument x ; la relation qu'on en déduit par passage au quotient (n°4) n'est autre que $z \in \overset{-1}{f}(y)$ (z élément arbitraire de E/R) ; cette relation est fonctionnelle en y , car elle est équivalente à $\{y\} = f(z)$; l'application f' de E/R dans F qu'elle détermine est dite <u>déduite de f par passage au quotient</u> (relativement à R) ; elle satisfait donc à l'identité

(2) $$f = f' \circ \varphi$$

qui la définit.

<u>Remarques</u>.- 1) L'application canonique ψ de F sur F/S est dans ce cas l'application biunivoque $y \to \{y\}$ et on a la relation $\dot{f} = \psi \circ f'$ entre l'application $\dot{f}$ de E/R dans F/S et l'application f' de E/R dans F .

2) Lorsque f est une application de E dans F , et R la relation d'équivalence <u>associée</u> à f (n°2), f est compatible avec R par définition de R , et l'application déduite de f par passage au quotient (pour R) n'est autre que l'application biunivoque <u>associée</u> à f , définie au n° 2 .

6. <u>Quotient de deux relations d'équivalence</u>. Soit R une relation d'équivalence dans un ensemble E , φ l'application canonique de E sur E/R .

Soit T une relation d'équivalence <u>dans</u> E/R , et S l'image réciproque (n°3) de T par l'application canonique φ , c'est-à-dire la relation $\varphi(x) \equiv \varphi(y)$ (mod.T). Il est clair que la relation $x \equiv y$ (mod.R), équivalente à $\varphi(x)=\varphi(y)$, <u>entraîne</u> $\varphi(x) \equiv \varphi(y)$ (mod.T), c'est-à-dire $x \equiv y$ (mod.S) ; on peut encore dire que toute classe d'équivalence modulo S est <u>saturée</u> pour R (ou est réunion de classes d'équivalence modulo R). Si ψ est l'application canonique de E/R sur (E/R)/T , la relation $x \equiv y$ (mod.S) est équivalente à $\psi(\varphi(x))= \psi(\varphi(y))$; les classes d'équivalence suivant S sont donc les ensembles $\overset{-1}{\varphi}(\overset{-1}{\psi}(z))$, où z parcourt (E/R)/T ($\overset{-1}{\varphi}(\overset{-1}{\psi}(z))$ n'est autre que la <u>réunion</u> des classes suivant R qui sont les <u>éléments</u> de la classe z) ; en outre, l'application $z \rightarrow \overset{-1}{\varphi}(\overset{-1}{\psi}(z))$ de (E/R)/T sur E/S est évidemment <u>biunivoque</u> (§4, cor. de la prop.10). Nous dirons que cette application et l'application réciproque sont <u>canoniques</u>.

Inversement, soient R et S deux relations d'équivalence dans E telles que R <u>entraîne</u> S (ou encore, telles que $\underline{E}_R \subset \underline{E}_S$ dans $E \times E$), ou, ce qui revient au même, telles que toute classe modulo S soit réunion de classes modulo R . On en déduit aussitôt que la relation $x \equiv y$ (mod.S) est <u>compatible</u> pour x et pour y avec la relation d'équivalence R (n°4). Par passage au quotient pour x et y , on en déduit une relation entre deux éléments u,v de E/R , qui équivaut à la suivante : il existe une classe d'équivalence modulo S qui contient u et u'. On vérifie aussitôt que cette relation T est une <u>relation d'équivalence</u> dans E/R ; on dit que cette relation est la relation <u>quotient</u> de S par R , et on la note S/R ; les classes d'équivalence modulo S/R sont les images, par l'application canonique φ de E sur E/R , des classes modulo S . La relation S est équivalente à $\varphi(x) \equiv \varphi(y)$ (mod.T) (n°4), autrement dit, à l'image réciproque de T par φ ; nous avons vu ci-dessus comment on définit une application biunivoque <u>canonique</u> de l'ensemble quotient $(E/R)/(S/R)$ sur E/S.

<u>7. Produit de deux relations d'équivalence</u>. Soient E et F deux ensembles, R une relation d'équivalence dans E, S une relation d'équivalence dans F. On vérifie aussitôt que la relation ($x \equiv x'$ (mod. R) et $y \equiv y'$ (mod. S)) est une relation d'équivalence entre (x,y) et (x',y') dans le produit $E \times F$; cette relation est dite <u>produit</u> des relations R et S, et notée $R \times S$. Si φ est l'application canonique de E sur E/R, ψ celle de F sur F/S, il est clair que l'application canonique de $E \times F$ sur $(E \times F)/(R \times S)$ est $(x,y) \rightarrow \varphi(x) \times \psi(y)$; autrement dit, les classes d'équivalence suivant $R \times S$ sont les ensembles $u \times v$, où u parcourt E/R et v parcourt F/S ; en outre, il est évident que l'application $(u,v) \rightarrow u \times v$ de $(E/R) \times (F/S)$ sur $(E \times F)/(R \times S)$ est <u>biunivoque</u> ; cette application et son application réciproque sont encore dites <u>canoniques</u>.

<u>Exercices</u>. 1) Soit f une application de E dans F, $A=f(E)$ R une relation d'équivalence dans F. Si S est la relation d'équivalence image réciproque de R par f, définir une application biunivoque canonique de E/S sur A/R_A.

* 2) a) Soit xRy une relation réflexive et symétrique entre deux éléments arbitraires d'un ensemble E. On dira que cette relation est <u>intransitive d'ordre</u> 1 si pour quatre éléments <u>distincts</u> x,y,z,t de E, les relations xRy, xRz, xRt, yRz et yRt entraînent zRt. On dira qu'une partie A de E est <u>stable</u> pour la relation R si, quels que soient x et y dans A, xRy est vraie. Si a et b sont deux éléments distincts de E, tels que aRb, montrer que l'ensemble $C(a,b)$ des $x \in E$ tels que aRx et bRx est stable, et que toute partie stable de E

contenant a et b est contenue dans $C(a,b)$. On dira que les ensembles $C(a,b)$ pour tout couple d'éléments distincts (a,b) tels que aRb, et les ensembles $\{x\}$ réduits à un seul élément x, pour tous les $x \in E$ tels qu'il n'existe aucun $y \neq x$ satisfaisant à xRy, sont les <u>composants</u> de E pour la relation R. Montrer que l'intersection de deux composants de E ne peut avoir plus d'un élément, et que trois composants distincts A,B,C de E ne peuvent deux à deux des intersections non vides toutes trois.

b) Réciproquement, soit (X_λ) une famille de parties de E formant un recouvrement de E, telles que : 1° pour deux indices distincts λ, μ, $X_\lambda \cap X_\mu$ ait au plus un élément ; 2° pour trois indices distincts λ, μ, ν, un au moins des trois ensembles $X_\lambda \cap X_\mu$, $X_\mu \cap X_\nu$, $X_\nu \cap X_\lambda$ est vide. Soit xRy la relation "il existe λ tel que $x \in X_\lambda$ et $y \in X_\lambda$" ; montrer que R est une relation réflexive, symétrique et intransitive d'ordre 1, et que les X_λ sont les composants de E pour cette relation.

c) On dira de même qu'une relation xRy entre deux éléments arbitraires de E, réflexive et symétrique, est intransitive d'ordre n, si, pour toute famille (x_i) de n éléments distincts, les relations $x_i R x_j$ pour tout couple $(i,j) \neq (n-1,n)$ entraînent $x_{n-1} R x_n$. Généraliser les propriétés a) et b) aux relations intransitives d'ordre n. Montrer qu'une relation intransitive d'ordre n est aussi intransitive d'ordre m pour tout $m > n$.
*

§ 7. Structures.

<u>1. Echelle des types sur des ensembles de base.</u> Soient par exemple E,F,G trois arguments ("ensembles de base"). Si on substitue de toutes les manières possibles ces arguments à u et v dans les symboles fonctionnels $\mathfrak{P}(u)$ et $u \times v$, on obtient douze symboles fonctionnels

$$\mathfrak{P}(E),\quad \mathfrak{P}(F),\quad \mathfrak{P}(G),\quad E\times E\,,\ E\times F\,,\ E\times G\,,\ F\times E\,,\ F\times F\,,\ F\times G\,,$$
$$G\times E\,,\ G\times F\,,\ G\times G\,.$$

Nous dirons que ces symboles sont les ensembles du premier échelon construits à partir de E,F,G . Si on substitue de toutes les manières possibles à u et v dans $\mathfrak{P}(u)$ et $u\times v$ les arguments E,F,G et les douze ensembles du premier échelon, on obtient les ensembles du premier échelon, et de nouveaux symboles fonctionnels composés, par exemple $E\times\mathfrak{P}(F)$, qui seront dits ensembles du second échelon construits à partir de E,F,G . En substituant à u et v les arguments E,F,G et les ensembles des deux premiers échelons, on retrouve ces derniers et de nouveaux symboles fonctionnels, dits ensembles du troisième échelon. On peut répéter la construction un nombre quelconque de fois ; un symbole fonctionnel obtenu par ce procédé sera appelé un ensemble de l'échelle des types (ou échelle d'ensembles) construite sur les ensembles de base E,F,G ; par exemple, $\mathfrak{P}(E\times\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(F\times G)))$ est un ensemble du cinquième échelon de cette échelle.

Il est clair, d'après cette définition, que si S et T sont deux ensembles de l'échelle des types sur E,F,G, $\mathfrak{P}(S)$ et $S\times T$ sont encore des ensembles de cette échelle. Ces considérations s'appliquent bien entendu à des "ensembles de base" en nombre quelconque.

Par abus de langage, quand on substitue à E,F,G , dans un symbole fonctionnel quelconque de l'échelle des types sur E,F,G, trois symboles fonctionnels d'une théorie quelconque $\mathcal{C}$, on dit encore que le symbole obtenu est un ensemble de l'échelle des types sur les ensembles substitués à E,F,G .

2. <u>La notion de structure</u>. Comme nous l'avons déjà dit, <u>toutes</u> les théories mathématiques actuelles sont subordonnées à la théorie des ensembles (c'est-à-dire la théorie sans argument de base définie par la donnée des huit axiomes (E_I) à (E_{VIII}) et des deux schémas d'axiomes (e1) et (e2)). Ces théories se présentent toutes sous la forme suivante : un certain nombre des arguments de base de la théorie sont qualifiés d'<u>ensembles de base</u> ; par abus de langage, on convient qu'on ne sort pas de la théorie considérée quand, pour un ensemble quelconque S de l'échelle des types construite sur les ensembles de base, on introduit un nombre quelconque d'arguments typiques de type S . Il se peut qu'en dehors des ensembles de base et des arguments typiques, la théorie ne fasse intervenir aucun autre argument de base ; les axiomes (autres que ceux, de la forme $z \in S$, qui introduisent les arguments typiques), ne contiennent donc aucun argument libre autre que les ensembles de base ; nous verrons un exemple de ce cas au chap.III, avec la théorie des ensembles <u>infinis</u>.

Mais le plus souvent, en dehors des ensembles de base et des arguments typiques, il y a encore un certain nombre d'autres arguments de base de la théorie ; chacun d'eux est un <u>élément</u> d'un des ensembles de l'<u>échelle des types</u> sur les ensembles de base (autrement dit, entre dans un axiome de la forme $z \in S$, où S est un ensemble de l'échelle), et en outre, figure comme argument <u>libre</u> dans un autre axiome au moins.

Montrons qu'on peut toujours se ramener au cas où il n'y a qu'<u>un</u> seul argument de base autre que les ensembles de base. En effet, dans la théorie considérée $\mathcal{T}$, supposons que x et y soient deux tels arguments, qui sont respectivement éléments des ensembles S et T de l'échelle des types. Soit $\mathcal{C}'$ la théorie obtenue en enlevant de la liste des axiomes de $\mathcal{C}$ tous ceux qui contiennent x et y comme arguments libres, sauf $x \in S$ et $y \in T$. Dire qu'une relation Q est vraie dans $\mathcal{C}$ équivaut à dire que $C \rightarrow Q$ est vraie dans $\mathcal{C}'$, C étant une conjonction des axiomes de $\mathcal{C}$ qui contiennent x et y. Or, en introduisant un argument z du type $S \times T$, distinct des arguments de base de $\mathcal{C}$ et désignant par C' (resp. Q') la relation obtenue en substituant $pr_1 z$ à x et $pr_2 z$ à y dans C (resp. Q), la relation $C' \rightarrow Q'$ est vraie dans $\mathcal{C}'$ et réciproquement (§ 3, n° 2) ; on voit donc que, si $\mathcal{C}_1$ désigne la théorie obtenue en remplaçant x par $pr_1 z$ et y par $pr_2 z$ dans les axiomes de $\mathcal{C}$, supprimant les axiomes $x \in S$, $y \in T$, et ajoutant l'axiome $z \in S \times T$, toute proposition vraie de la théorie $\mathcal{C}$ se traduira en une proposition vraie de $\mathcal{C}_1$ et vice-versa. Comme $S \times T$ appartient à l'échelle des types, on peut de proche en proche réduire à un seul le nombre des arguments de base autres que les ensembles de base, ainsi que nous l'avions annoncé. Il y a alors un certain nombre d'axiomes de la théorie (autre que l'axiome qui précise de quel ensemble de l'échelle des types l'argument considéré est élément) où figure cet argument comme argument libre ; si par exemple il y a trois de ces axiomes A,B,C, les propositions vraies de la théorie sont évidemment les mêmes que dans la théorie où on remplace A,B,C par l'axiome unique (A et B et C).

On voit donc que, si on met à part le cas où les ensembles de base sont les seuls arguments de base on peut considérer que, toute théorie mathématique $\mathcal{C}$ comporte : 1° la donnée d'un certain nombre d'ensembles de base ; 2° la donnée d'un argument de base s, élément d'un ensemble S de l'échelle des types construite sur les ensembles de base ; 3° éventuellement un ou plusieurs axiomes ne contenant que les ensembles de base comme arguments libres ; 4° un axiome A où s est un argument libre. La relation A est équivalente à $s \in \underline{E}[A]$, où $\underline{E}[A]$ est l'ensemble des $s \in S$ qui satisfont à A (§ 2, n°3) ; $\underline{E}[A]$ est une *partie explicite* de S , c'est-à-dire un symbole fonctionnel ne contenant comme arguments libres que les ensembles de base. Nous dirons que $\underline{E}[A]$ est l'*espèce de structures* qui intervient dans la théorie et l'argument de base s sera dit une *structure de l'espèce* $E[A]$; la théorie définie par la donnée des ensembles de base de $\mathcal{T}$, de l'argument de base s et de l'axiome $s \in \underline{E}[A]$ est dite *théorie des structures d'espèce* $\underline{E}[A]$.

Exemples.- Tout ce traité n'est qu'une suite de théories de structures très variées ; une des plus importantes, la théorie des *ensembles ordonnés*, est l'objet du chap.IV de ce Livre. Nous donnerons ici deux autres exemples de structures particulièrement simples et qui interviennent dans presque toutes les parties des mathématiques actuelles.

I. Structures de groupe. Etant donné un ensemble fondamental G , une *structure de groupe* sur G est une application f de $G \times G$ dans G , autrement dit, un élément de l'ensemble $G^{G \times G}$, partie lui-même de l'ensemble ((G G) G) de l'échelle des types sur G , qui satisfait aux deux axiomes suivants :

(G_I) $(\forall x \in G)(\forall y \in G)(\forall z \in G)(f(f(x,y),z)=f(x,f(y,z)))$

(G_{II}) $(\forall x \in G)(\forall y \in G)(\exists u \in G)(\exists v \in G)(f(u,x) = y$ et $f(x,v)=y)$.

Ces deux axiomes définissent une partie explicitée $\Gamma(G)$ de $G^{G \times G}$, l'*espèce* des structures de groupe, et la relation "f est une structure de groupe sur G" est par définition équivalente à "$f \in \Gamma(G)$" (cf. *Alg.*, chap.I, § 6) .

II. Structures topologiques. Etant donné un ensemble fondamental E , une structure topologique, ou topologie sur E est un ensemble de parties $\mathfrak{O}$ de E , autrement dit un élément de l'ensemble $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$ de l'échelle des types, qui satisfait aux trois axiomes suivants :

(O_I) $(\forall \mathfrak{X} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E)))(\mathfrak{X} \in \mathfrak{O} \to \bigcup_{X \in \mathfrak{X}} X \in \mathfrak{O})$.

(O_{IIa}) $(\forall X \in \mathfrak{P}(E))(\forall Y \in \mathfrak{P}(E))((X \in \mathfrak{O}$ et $Y \in \mathfrak{O}) \to X \cap Y \in \mathfrak{O})$

(O_{IIb}) $E \in \mathfrak{O}$.

Ces trois axiomes définissent une partie explicitée $\Omega(E)$ de $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$ l'espèce des topologies sur E , et la relation " $\mathfrak{O}$ est une topologie sur E" est par définition équivalente à " $\mathfrak{O} \in \Omega(E)$" (cf. Top.gén., chap.I, §1) .

Signalons encore que de nombreuses structures sont données comme "combinaisons" de structures plus simples : de façon précise, étant données un certain nombre d'espèces de structure $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$,... sur des ensembles de base donnés, on considère une théorie où les arguments de base sont, d'une part les ensembles de base, d'autre part une structure de chaque espèce considérée, soient $s, s', s'', \ldots$, avec les axiomes $s \in \mathcal{E}$, $s' \in \mathcal{E}'$, $s'' \in \mathcal{E}''$ ...; enfin, la théorie comporte d'ordinaire en outre un ou plusieurs axiomes dont chacun contient au moins deux arguments libres distincts, pris parmi les structures "simples" $s, s', s'', \ldots$ Nous avons vu ci-dessus comment on fait rentrer ce cas dans le schéma général , en définissant une nouvelle structure σ , dont la théorie est équivalente à celle de la théorie considérée. C'est ainsi que la "combinaison" d'une structure de groupe et d'une structure topologique donne les structures de groupe topologique (cf. Top.gén., chap.III), la combinaison d'une structure de groupe et d'une structure d'ensemble ordonné les structures de *groupe ordonné* (cf. *Alg.*, chap. VI), etc.

Si $\underline{\underline{E}}[A]$ et $\underline{\underline{E}}[B]$ sont deux espèces de structures, toutes deux contenues dans le *même* ensemble S de l'échelle des types, on dit que les structures d'espèce $\underline{\underline{E}}[A]$ sont *plus riches* que les structures d'espèce $\underline{\underline{E}}[B]$ si on a $\underline{\underline{E}}[A] \subset \underline{\underline{E}}[B]$, ou encore si la relation A *entraîne* la relation B ; le plus souvent, l'axiome A se présentera sous la forme "B et C", où C est un nouvel axiome.

Les structures mathématiques se classent ainsi par "familles", les structures d'une même famille dérivant, par "enrichissement" d'une même structure "fondamentale" ; c'est ainsi qu'à partir de l'espèce des structures d'ensemble ordonné, on obtient celles des structures d'ensemble ordonné filtrant, d'ensemble ordonné réticulé, d'ensemble totalement ordonné, d'ensemble bien ordonné, etc. (cf. Chap. IV). A partir de l'espèce des structures de groupe, on obtient celles des structures de groupe fini, de groupe abélien, de groupe cyclique, de groupe résoluble, etc. (cf. *Alg.* chap. I, 6). De l'espèce des structures topologiques découlent de même les structures d'espace séparé, d'espace régulier, d'espace normal, d'espace métrisable, d'espace compact, etc. (cf. *Top. gén.*, chap. I).

Par abus de langage, lorsque dans une théorie, on ne se donne que des ensembles de base E, F, G, ..., aucune structure sur ces ensembles et aucun axiome (étant entendu qu'on peut introduire autant d'arguments typiques que l'on veut, chacun d'eux étant élément d'un ensemble de l'échelle des types sur E, F, G, ...), on dit qu'on a défini sur E, F, G, ... la *structure vide* ; la théorie des parties d'un ensemble quelconque de cette échelle (§ 2, n° 5), la théorie du produit de deux ensembles quelconques de l'échelle (§ 3,n°2) et toutes les théories considérées au § 4 sont subordonnées à la théorie de la "structure vide" sur leurs ensembles de base.

3. Utilisation des structures. Non-contradiction des théories. L'intérêt qui s'attache à l'étude d'une espèce $\mathcal{E}$ de structures dépend du nombre et de l'importance de ses "applications". Rappelons ce qu'il faut entendre par là (cf. § 1) ; soit $\mathcal{T}_0$ la théorie des structures d'espèce $\mathcal{E}$; soit $\mathcal{T}$ une autre théorie, et supposons que, lorsqu'on substitue, dans la relation $s \in \mathcal{E}$, certains symboles fonctionnels de la théorie $\mathcal{T}$ à l'argument s et aux ensembles de base de $\mathcal{T}_0$, on obtienne une relation $\mathcal{T}$-vraie ; alors, si on fait les mêmes substitutions dans une relation $\mathcal{T}_0$-vraie quelconque, on obtient une relation $\mathcal{T}$-vraie. Par abus de langage, on dit encore alors que le symbole fonctionnel substitué à s est une structure de même espèce que s sur les symboles fonctionnels substitués aux ensembles de base de $\mathcal{T}_0$.

Par exemple, si on considère l'ensemble des parties de l'ensemble Q des nombres rationnels qui sont réunions d'intervalles ouverts, on montre que cet ensemble appartient à Ω (Q), autrement dit définit une topologie sur Q (cf.Top.gén., chap.IV, 1).

Le même processus permet d'établir la non-contradiction "relative" de la théorie des structures d'espèce $\mathcal{E}$ (cf. Introduction, § 4) : en effet, si on admet que la théorie $\mathcal{T}$ n'est pas contradictoire, la théorie $\mathcal{T}_0$ ne peut pas l'être non plus. Dans ce Traité, on montrera que toutes les théories qui seront considérées sont non-contradictoires si on admet que la Théorie des ensembles, ou une théorie subordonnée (par exemple celle qu'on obtient en supprimant l'axiome de choix), ou dans certains cas la théorie des ensembles infinis (chap. III), n'est pas contradictoire.

Par exemple, pour tout ensemble de base E , si on substitue à l'argument $\mathfrak{S}$ le symbole fonctionnel $\mathfrak{P}(E)$ dans les axiomes des structures topologiques, ces axiomes deviennent des relations vraies dans la théorie de l'appartenance (§ 2) ; la Topologie (théorie des structures topologiques) n'est donc pas contradictoire si on admet que la Théorie de l'appartenance ne l'est pas.

4. Transports de structures et isomorphismes. Soient (par exemple) trois ensembles E,F,G (ensembles de base d'une théorie, ou obtenus par substitution de symboles fonctionnels à trois ensembles de base) ; soit $\mathcal{E}(E,F,G)$ une espèce de structures sur E,F,G, contenue dans un ensemble S de l'échelle des types sur E,F,G . Soient f,g,h trois applications quelconques biunivoques de E,F,G respectivement sur trois ensembles E',F',G' (distincts ou non de E,F,G). Nous avons défini l'extension d'une application aux ensembles de parties (§ 4, n°4), et l'extension de deux applications aux ensembles produits (§ 4, n°7) ; d'échelon en échelon, on peut donc définir, pour un ensemble quelconque M de l'échelle des types sur E,F,G, l'extension φ_M des applications f,g,h , et on sait que φ_M est une application biunivoque de M sur l'ensemble M' de l'échelle des types sur E',F',G', obtenu en remplaçant E,F,G par E',F',G' respectivement dans le symbole fonctionnel M (§ 4, cor.2 de la prop.11 et prop.18).

Nous supposerons dans ce qui suit qu'on a $\varphi_S(\mathcal{E}(E,F,G)) = \mathcal{E}(f(E),g(F),h(G)) = \mathcal{E}(E',F',G')$; cette relation se vérifie trivialement pour toutes les espèces de structures qui interviennent actuellement en Mathématique.

Le lecteur le constatera sans peine pour les deux exemples donnés plus haut, compte tenu des schémas fondamentaux (e'17) et (e'18) relatifs aux relations fonctionnelles biunivoques (§ 1, n°4) et du fait que lorsque f est une application biunivoque de E sur E' , x un élément arbitraire de E , X une partie arbitraire de E , la relation $f(x) \in f(X)$ est équivalente à $x \in X$.

Cela étant, pour toute structure s d'espèce $\mathcal{E}$ sur E,F,G , $\varphi_S(s)$ est une structure de <u>même espèce</u> sur E',F',G' ; on dit qu'elle est obtenue en <u>transportant</u> la structure s par les applications biunivoques f,g,h . Inversement, si $s' \in \mathcal{E}$ (E',F',G') est une structure telle qu'il existe des applications biunivoques f,g,h transportant s sur s' , on dit que s et s' sont <u>isomorphes</u> (ou qu'il y a <u>isomorphie</u> entre s et s') ; tout triplet (f,g,h) d'applications biunivoques transportant s sur s' est alors appelé <u>isomorphisme de s sur s'</u> (ou <u>isomorphismes des ensembles</u> E,F,G, <u>munis de la structure</u> s , <u>sur les ensembles</u> E',F',G', <u>munis de la structure</u> s') ; il est clair que, si f_1, g_1, h_1 sont les applications réciproques de f,g,h respectivement, (f_1, g_1, h_1) est un isomorphisme de s' sur s , dit <u>réciproque</u> de (f,g,h). De même, si (f',g',h'), est un isomorphisme de s' sur une structure s" définie sur E",F",G" , (f' f, g' g, h' h) est un isomorphisme de s sur s" , qu'on appelle <u>composé</u> des isomorphismes (f',g',h') et (f,g,h).

Par exemple, un isomorphisme f d'une structure topologique $\mathfrak{O} \in \Omega$ (E) sur une structure topologique $\mathfrak{O}' \in \Omega$ (E') sera une application biunivoque de E sur E' telle que $f(\mathfrak{O}) = \mathfrak{O}'$ (autrement dit, que $\mathfrak{O}'$ soit identique à l'ensemble des f(X) , où X parcourt $\mathfrak{O}$).

De même, un isomorphisme f d'une structure de groupe $\varphi \in \Gamma(E)$ sur une structure de groupe $\varphi' \in \Gamma(E')$ sera une application biunivoque telle que φ' soit identique à l'ensemble des $(f(x),f(y),f(z))$, lorsque (x,y,z) parcourt φ ; autrement dit, f doit être telle que la relation $z=\varphi(x,y)$ soit <u>équivalente</u> à $f(z)=\varphi'(f(x),f(y))$.

Un isomorphisme d'une structure s <u>sur elle-même</u> prend le nom d'<u>automorphisme</u> de la structure s (ou des ensembles E,F,G, munis de la structure s).

Les exemples de structures donnés au n°2 sont des structures définies sur <u>un seul</u> ensemble de base. La plupart des structures importantes en Mathématique, ou bien sont de cette nature, ou bien sont définies sur plusieurs ensembles de base $E,F,G,\ldots$, mais parmi ces ensembles il y en a un qui joue un rôle prépondérant, par exemple E, les autres étant qualifiés d'<u>ensembles auxiliaires</u>. Dans ce cas, on dit, par abus de langage, que la structure est <u>définie sur</u> E ; en outre, on modifie légèrement la terminologie précédente, en appelant <u>poly-isomorphismes</u> (resp. <u>poly-automorphismes</u>) ce que nous avons qualifié ci-dessus d'isomorphismes (resp. automorphismes) ; on réserve le nom d'<u>isomorphismes</u> (resp. <u>automorphismes</u>) aux poly-isomorphismes (resp. poly-automorphismes) tels que celles des applications biunivoques qui le composent, qui sont définies sur les ensembles auxiliaires, se réduisent à l'<u>application identique</u> de chacun des ensembles auxiliaires sur lui-même.

Lorsqu'il n'y a qu'un seul ensemble auxiliaire, on dit <u>di-isomorphisme</u> (resp. <u>di-automorphisme</u>) au lieu de poly-isomorphisme (resp. poly-automorphisme).

Il peut arriver que deux structures quelconques de même espèce $\mathcal{E}$ soient nécessairement isomorphes ; nous verrons par exemple au chap.III qu'il en est ainsi pour l'espèce "structure d'ensemble d'entiers naturels". Une espèce de structure qui possède cette propriété est dite univalente ; dans le cas contraire, elle est dite multivalente.

L'espèce des structures topologiques est multivalente ; car $\mathfrak{O}_1 = \mathfrak{P}(E)$ et $\mathfrak{O}_2 = \{\emptyset, E\}$ sont deux structures topologiques sur E , et il n'existe pas d'application biunivoque f de E sur lui-même telle que $f(\mathfrak{O}_2) = \mathfrak{O}_1$ si E n'est pas réduit à un seul élément (puisque $f(\emptyset)=\emptyset$ et $f(E)=E$).

On peut montrer de même que l'espèce des structures de groupe est multivalente ; il en est ainsi de la plupart des structures que nous étudierons.

5. Identifications et dédoublements. Soit, dans une certaine théorie, E et F deux ensembles, et φ une application biunivoque explicitée de E dans F (c'est-à-dire un symbole fonctionnel, tel que $\varphi \in B(E,F)$, ne contenant d'autres arguments libres que les arguments de base de la théorie). Il est souvent commode de faire l'abus de langage suivant, qu'on appelle identifier E à son image $E' = \varphi(E)$ (ou encore plonger E dans F) au moyen de l'application φ : dans toute démonstration où figurent des symboles tels que $\varphi(x), \varphi(y), \ldots, \varphi(X), \varphi(Y), \ldots$, où $x, y, \ldots$ sont des éléments de E , $X, Y, \ldots$ des parties de E , on convient de remplacer ces symboles respectivement par $x, y, \ldots, X, Y, \ldots$; plus généralement, pour tout élément z appartenant à un ensemble S de l'échelle des types sur E , on remplacera partout $\varphi_S(z)$ par z . En vertu des schémas fondamentaux (e'17) et (e'18) du § 1, n°4 sur les relations fonctionnelles biunivoques, cet abus de langage n'offre aucun inconvénient

tant qu'il ne s'agit que de relations où les éléments des ensembles de l'échelle de base E n'entrent que sous forme de leurs images par les extensions de φ (autrement dit, pour qu'on puisse appliquer sans risque d'erreur le processus d'identification à une relation R , où par exemple les arguments $x \in E, X \subset E$ sont libres, il faut que cette relation provienne d'une autre relation R' , contenant des arguments $x' \in F$, $X \subset F$, par substitution de $\varphi(x)$ à x' et de $\varphi(X)$ à X') ; on aura soin, avant de procéder à une identification, de vérifier que toute relation de la théorie satisfait à cette condition, ou peut être remplacée par une relation équivalente qui y satisfait. Dans le cas contraire, il faudra examiner le résultat de l'identification pour chaque relation, et voir s'il ne peut en résulter de confusions graves.

<u>Exemples</u>.- 1) Soient E et F deux ensembles, et supposons que dans la théorie où ils interviennent, il y ait en outre deux arguments de base (ou plus généralement deux éléments explicités) $a \in E$, $b \in F$. Nous avons vu (§ 4, n°7) que pr_1 est une application biunivoque de $E' = E \times \{b\}$ sur E , pr_2 une application biunivoque de $F' = \{a\} \times F$ sur F , et par suite (pr_1, pr_2) une application biunivoque de $E' \times F'$ sur $E \times F$. On <u>identifie</u> souvent $E' \times F'$ à $E \times F$ par cette application, ce qui permet de considérer E' et F' comme des parties de leur produit. Dans le cas actuel, on rencontre précisément des relations qui ne satisfont pas à la condition mentionnée ci-dessus, par exemple $X = (pr_1 X) \times \{b\}$ pour toute partie X de E', qui donne après identification $X = X \times \{b\}$; on se donne cependant le droit d'écrire une telle relation lorsqu'on est

assez familiarisé avec la théorie du produit de deux ensembles pour ne pas risquer d'erreurs en l'utilisant.

2) Nous avons vu que l'application $x \to \{x\}$ d'un ensemble E sur l'ensemble quotient $E'=E/R \subset \mathfrak{P}(E)$ de E par la relation d'égalité, est une application biunivoque, qui permet d'identifier E à E'. Dans ce cas, un exemple de relation où il faut se garder de faire l'identification est la relation $x \in \{x\}$, qui donnerait $x \in x$, et pourrait conduire à de sérieuses erreurs.

Le plus souvent, lorsqu'on identifiera E à E' par une application biunivoque φ, E et E' seront munis de <u>structures</u> de même espèce s, s', et φ sera un <u>isomorphisme</u> de s sur s'.

On a parfois à faire l'opération inverse, en quelque sorte, de l'identification, savoir le <u>dédoublement</u> d'un ensemble E. Bien qu'elle ne soit jamais indispensable dans la Mathématique formalisée, et soit toujours faite en vue de préserver le point de vue "naïf" traditionnel (souvent commode, d'ailleurs), on peut la formaliser de la façon suivante: elle revient à introduire un nouvell ensemble de base E', et un argument de base φ, avec l'axiome $\varphi \in I(E,E')$ (on rappelle que $I(E,E')$ est l'ensemble des applications biunivoques de E sur E' ; cf. § 4, n°3). A toute relation contenant comme arguments libres des éléments de E (ou des ensembles de l'échelle des types sur E) correspond alors la relation obtenue en remplaçant ces éléments par leurs images par φ (ou les extensions de φ) ; si la relation initiale est vraie, il en est de même de la relation obtenue après substitution. On dit que φ et son application réciproque sont les applications <u>canoniques</u> de E sur l'ensemble "dédoublé" E' et de E' sur E.

Indiquons deux exemples de dédoublement. En premier lieu, nous avons défini au § 4 l'ensemble F^E des applications de E dans F comme une partie explicitée de $\mathfrak{P}(E \times F)$. Traditionnellement, ce qu'on désigne par F^E n'est pas cette partie de $\mathfrak{P}(E \times F)$ mais un ensemble dédoublé ; l'image canonique dans $\mathfrak{P}(E \times F)$ d'une application de E dans F est alors appelée le <u>graphe</u> (ou l'<u>ensemble représentatif</u>) de l'application considérée.

Un autre exemple concerne l'ensemble des structures d'une même espèce sur des ensembles de base donnés. Au lieu de considérer cet ensemble comme une partie explicitée $\mathcal{E}$ d'un ensemble de l'échelle des types, on le considère le plus souvent comme un ensemble $\mathcal{E}_0$ dédoublé de $\mathcal{E}$; on dit que l'image canonique d'un élément s de $\mathcal{E}$ est la structure <u>définie par s</u> ; l'image canonique dans $\mathcal{E}$ d'une structure $\sigma \in \mathcal{E}_0$ reçoit un nom qui dépend de l'espèce de structure considérée.

Par exemple, pour les structures de groupe (n°2), l'élément de $\Gamma(G)$ qui correspond à une structure de groupe est appelé la <u>loi de composition</u> de cette structure. De même, pour les topologies, l'élément de $\Omega(E)$ qui correspond à une topologie est appelé l'<u>ensemble des ensembles ouverts</u> de cette topologie.

On est en particulier amené à faire ce dernier dédoublement lorsque se produit la circonstance suivante, qui est assez fréquente. Il peut se faire qu'étant données plusieurs espèces de structure $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}'', \ldots$ sur des ensembles de base donnés ($\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}''$, n'étant pas nécessairement contenus dans le même ensemble de l'échelle des types), on puisse former des applications biunivoques <u>explicitées</u> de chacun de ces ensembles sur chacun des autres ; au moyen de ces applications, à toute proposition vraie de la théorie de l'une de ces espèces de de structure correspond par ces applications une proposition vraie dans chacune des autres, propositions qu'on peut appeler les <u>traductions</u> de la première. Aussi considère-t-on, par abus de langage, que toutes ces propositions font partie de la théorie d'une <u>même</u> structure, l'espèce $\mathcal{E}_0$ de ces structures étant dédoublé de chacun des ensembles $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$ ... étant entendu qu'on impose aux applications canoniques φ, φ' de $\mathcal{E}_0$ sur $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ la condition que φ' est composée de l'application explicitée de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$ et de φ (et une condition analogue pour deux quelconques des ensembles $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$, ...).

Un exemple typique de cette situation est fourni par les structures topologiques. Nous avons vu en effet qu'une telle structure est définie par la partie explicitée $\Omega(E)$ de $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$. Mais l'application explicitée biunivoque $X \to \complement X$ de $\mathfrak{P}(E)$ sur lui-même définit par extension une application biunivoque (explicitée) γ de $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$ sur lui-même, et en particulier sa restriction à $\Omega(E)$ est une application biunivoque explicitée de $\Omega(E)$ sur une partie $\phi(E)$ de $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$; pour tout $\mathfrak{O} \in \Omega(E)$, $\mathfrak{F} = \gamma(\mathfrak{O})$ est appelé l'<u>ensemble des ensembles fermés</u> de la topologie définie par $\mathfrak{O}$. En "traduisant" les axiomes (O_I), (O_{IIa}) et (O_{IIb}) c'est-à-dire en y remplaçant $\mathfrak{O}$ par $\overline{\gamma}(\mathfrak{F})$ (qui ici est égal à $\gamma(\mathfrak{F})$, puisque $X \to \complement X$ est identique à sa réciproque) on obtient les axiomes qui définissent les ensembles d'ensembles fermés ; tenant compte de ce que la relation $X \in \gamma(\mathfrak{F})$ est équivalente à $\complement X \in \mathfrak{F}$, le lecteur vérifiera aisément que ces axiomes sont équivalents aux suivants (cf. <u>Top.gén</u>, chap. I, § 1) :

150

(O'_{I}) $(\forall \mathfrak{X} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E)))(\mathfrak{X} \in \mathfrak{F} \to \bigcap_{X \in \mathfrak{X}} X \in \mathfrak{F})$

(O'_{IIa}) $(\forall X \in \mathfrak{P}(E))(\forall Y \in \mathfrak{P}(E))((X \in \mathfrak{F}$ et $Y \in \mathfrak{F}) \to X \cup Y \in \mathfrak{F})$

(O'_{IIb}) $\emptyset \in \mathfrak{F}$.

Mais on peut définir de bien d'autres manières des applications biunivoques explicitées de $\Omega(E)$ sur d'autres ensembles. Par exemple, l'application $\mathfrak{X} \to \complement \mathfrak{X}$ est une application biunivoque de $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$ sur lui-même (qu'on aura soin de ne pas confondre avec l'application γ précédente) ; restreinte à $\Omega(E)$, elle est donc une application biunivoque de cet ensemble sur une partie $\overline{\Omega}(E)$ de $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$; pour tout $\mathfrak{O} \in \Omega(E)$, $\overline{\mathfrak{O}} = \complement \mathfrak{O}$ est <u>l'ensemble des ensembles non-ouverts</u> de la topologie définie par $\mathfrak{O}$. Ici, la traduction des axiomes est encore plus facile, puisque $X \in \overline{\mathfrak{O}}$ est équivalente à $X \notin \mathfrak{O}$; on obtient :

(O''_{I}) $(\forall \mathfrak{X} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E)))(\bigcup_{X \in \mathfrak{X}} X \in \overline{\mathfrak{O}} \to (\exists X \in \mathfrak{X})(x \in \overline{\mathfrak{O}}))$

$(O''_{II}a)$ $(\forall X \in \mathfrak{P}(E))(\forall Y \in \mathfrak{P}(E))((X \cap Y \in \overline{\mathfrak{O}}) \to (X \in \overline{\mathfrak{O}}$ ou $Y \in \overline{\mathfrak{O}}))$

$(O''_{II}b)$ $E \notin \overline{\mathfrak{O}}$.

Au chap. I de Topologie générale (§ 1) le lecteur trouvera encore d'autres "manières" de définir une topologie, c'est-à-dire d'autres applications biunivoques explicitées de $\Omega(E)$ sur des parties d'ensembles de l'échelle des types sur E .
