ELEMENTS DE MATHEMATIQUE
PREMIERE PARTIE
LES STRUCTURES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE
LIVRE I
THEORIE DES ENSEMBLES

Rédaction n° 056

Nombre de pages : 151

Nombre de feuilles : 151

Livre I Th. des Ensembles
Chap 1 - 2 - 3 - 4 - 5 (Weil)

56

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

par

N. BOURBAKI, M.D.D.D.E.C.C.C.N

Première partie

Les structures fondamentales de l'Analyse

LIVRE I

Théorie des ensembles

Etat 2

AVERTISSEMENT A TOUT BOURBAKI

Ἐς Τροίην πειρώμενοι ἦλθον Ἀχαιοί.

C'est ici un livre de bonne foi, lecteur. Qui que tu sois, mathématicien de métier, honnête homme curieux de mathématique, physicien ou ingénieur en quête des outils que la mathématique peut fournir, ce livre veut s'adresser à toi ; si tu n'y trouvais pas, aussi simplement et clairement expliqué qu'il a été possible, ce que tu y cherches, ce serait de sa faute, et il aurait manqué son propos. Mais tu sens bien qu'un pareil dessein réclame de toi-même, comme aussi bien de l'auteur et de l'imprimeur, beaucoup de patience et un travail soutenu. Ce qui est publié n'est qu'un commencement : ne te rebute pas s'il te semble incomplet ; si ce sont les applications qui t'intéressent, accepte qu'elles aient dû attendre leur tour à la suite des théories générales dont elles se déduisent ; tout viendra en son temps et lieu. Si ces théories générales te paraissent trop abstraites, si tu n'as pas le loisir ou le désir d'en connaître toutes les démonstrations, des fascicules spéciaux en mettront les résultats principaux à ta portée, prêts à servir quand tu en auras besoin. Enfin, le plan de cet ouvrage embrasse tout ce qui est dans les Traités d'Analyse classiques, et tout ce qu'on voudrait qui y soit. A toi de dire si l'on a réussi.

CHAPITRE I.

Du raisonnement mathématique.

N-B. Il n'y a pas d'inconvénient à ce qu'en première lecture le lecteur parcoure ce chapitre très rapidement ; à condition qu'il en reprenne l'étude détaillée après avoir lu le chap. II .

§ 1. Analyse d'une démonstration. Les propositions.

(Citation à vérifier !)

Les mathématiques sont la science où l'on ne sait pas de quoi on parle ni si ce qu'on dit est vrai.

B. Russell

Dès l'abord, ami lecteur, il importe de nous entendre une fois pour toutes, afin que tu saches de quoi l'on parle dans cet ouvrage, et que tu aies le moyen de juger de la vérité de ce qu'on y dira. Si cela est nécessaire, c'est que le langage, en mathéma--tiques, sert à un usage pour laquelle, à proprement parler, il n'a pas été fait. Il ne suffit pas au mathématicien d'évoquer certaines images ; ni même, par une chaîne d'arguments bien disposés, d'entraîner la conviction du lecteur ; cette conviction, il faut qu'il la contraigne. La démonstration faite, et faite dans les règles, il faut que la question soit entièrement tranchée. Il est de bons esprits que cette violence choque, et qui ont peine à admettre qu'une question puisse jamais être tranchée entièrement. En effet, cela n'est possible que si l'on est sûr d'avoir examiné la question sous tous ses aspects ; ce qui n'arrive guère hors des mathématiques. Dans celles-ci, au contraire, les éléments dont ...

on s'occupe sont en petit nombre, se combinent d'après des règles fixes, et le doute ne trouve pas où s'exercer, puisqu'il ne s'agit que de savoir si les règles ont été observées. A la vérité, l'emploi du langage ordinaire masque parfois cet état de choses : emploi heureux lorsque le mathématicien, par le choix de mots évocateurs, par l'usage intelligent des infinies ressources du vocabulaire et de la syntaxe, sait, sans rien perdre de la rigueur du raisonnement, appeler l'imagination à son aide ; abus regrettable au contraire lorsque, suppléant aux lacunes de la démonstration ou au vague des définitions par les procédés ordinaires de la rhétorique, il tend à effacer, chez le lecteur peu averti, la notion du raisonnement mathématique correct. Qu'un tel raisonnement ne soit jamais autre chose que l'application, à des éléments primitifs en fort petit nombre, d'un petit nombre de règles simples et invariables, c'est un résultat d'expérience, qui résulte de l'analyse, faite par les logiciens, d'un grand nombre de ces raisonnements ; travail tout à fait analogue à celui que fait un philologue, lorsque, d'après des textes donnés, il écrit la grammaire de la langue dans laquelle ces textes sont écrits. L'outil dont se servent principalement les logiciens, dans ce travail, est le langage symbolique de la logique ; le lecteur curieux de le connaître en trouvera l'exposé détaillé dans les traités spéciaux, et pourra en tout cas lire avec fruit les réflexions générales contenues dans l'introduction de la Thèse de J. Herbrand (v. bibliographie). Mais, laissant aux spécialistes l'étude systématique des signes et des règles logiques, nous allons du moins, par l'examen d'une démonstration célèbre tirée de l'ancêtre de tous les traités mathématiques, faire apparaître ce qui est nécessaire à notre objet.

6

Euclide, Eléments. Livre IX, Proposition XX.

<u>Les nombres premiers sont en plus grand nombre que toute quantité donnée de nombres premiers</u>.

Soient a, b, c les nombres premiers donnés : je dis qu'il y a des nombres premiers en plus grand nombre que a, b, c.

Qu'on prenne en effet le plus petit commun multiple de a,b,c, et soit d ce nombre ; qu'on ajoute à d une unité. Ou d+1 est premier, ou il ne l'est pas. Si d'abord il est premier, on a donc trouvé des nombres premiers a, b, c, d+1, en plus grand nombre que a, b, c.

Soit au contraire d+1 non premier : il est donc divisible par un nombre premier. Qu'il soit divisible par e premier : je dis que e n'est pas le même qu'aucun des nombres a, b, c. Car, s'il se peut, qu'il le soit. Or a, b, c divisent d : e aussi divisera donc d. Mais il divise aussi d+1 : leur différence 1 sera donc aussi divisible par e, qui est un entier différent de 1 : ce qui est absurde. Donc e n'est pas le même qu'aucun des nombres a, b, c ; et il a été pris premier. On a donc trouvé des nombres premiers a, b, c, e en plus grand nombre que a,b,c : ce qu'il fallait démontrer.

Tout texte mathématique comprend des propositions, qui s'enchaînent les unes aux autres, par les procédés de la syntaxe quant à la forme, par les règles du raisonnement mathématique quant au fond. Par exemple, la phrase "les nombres premiers sont en plus grand nombre que toute quantité donnée de nombres premiers" constitue une proposition ; la phrase "ou d+1 est premier, ou il ne l'est pas " en est une autre, proposition complexe qui en comprend deux, "d+1 est premier", "d+1 n'est pas premier", que relient les mots "ou...ou..." . (On observera que nous ne considérons pas qu'une proposition est modifiée si l'on y substitue à un pronom le mot dont il tient la place, à un mot sa définition, etc. : l'aspect de la phrase est changé, mais c'est, mathématiquement, la même proposition ; par exemple la phrase "e n'est pas le même qu'aucun des nombres a,b,c" représente pour nous la même proposition que la suivante : "e est autre que ~~différent~~ a, est autre que b, et est autre que c" ; les deux phrases diffèrent grammaticalement, mais sont mathématiquement identiques.

Les exemples ci-dessus montrent que dans un texte mathématique, les propositions peuvent jouer des rôles tout à fait différents : il importe de s'en rendre compte nettement, sous peine des pires confusions. En certains cas, l'énoncé d'une proposition équivaut à une affirmation ; en l'énonçant, on entend dire qu'elle est <u>vraie</u> ; il en est toujours ainsi de l'énoncé d'un théorème ou d'un axiome. D'autres fois, l'on énonce des propositions à titre de simple intermédiaire dans une démonstration : ce qui peut être signalé à l'attention du lecteur par des moyens grammaticaux, par exemple par les mots "si...", "supposons que ...", par l'emploi du subjonctif, etc.; en tout cas, c'est le contexte qui décide.

Par exemple, dans la démonstration d'Euclide, la proposition "...e aussi divisera donc d", non seulement n'est pas vraie, mais on va même démontrer qu'elle est fausse ; de la proposition "d+1 est premier", il n'est pas question de savoir si elle est vraie ou fausse (les hypothèses faites n'entraînant ni sa vérité ni sa fausseté) ce qui importe, c'est que <u>si</u> elle est vraie le théorème l'est aussi, et qu'il l'est également si elle est fausse.

Qu'est-ce donc que la vérité ou la fausseté d'une proposition ? Et avant tout, à quoi reconnaît-on (abstraction faite de la vérité et de la fausseté) une proposition, c'est-à-dire une phrase mathéma-tiquement pourvue de sens ? Car les phrases "le nombre a est premier" "le nombre a est vertical" sont toutes deux grammaticalement bien formées, mais la seconde n'a aucun sens et nous lui refusons le nom de proposition, que nous accordons à la première. Si importantes que soient ces questions, si simple que soit la réponse, nous ne pourrons donner celle-ci qu'après avoir examiné les principes sui-vant lesquels les propositions se combinent entre elles. Examinons donc, de ce point de vue, le texte cité plus haut.

Dans ce texte, nous trouvons des propositions telles que celles-ci : "a,b,c sont premiers", "d+1 est premier ou il ne l'est pas", "e n'est pas le même qu'aucun des nombres a,b,c". On observera que ce sont là des propositions complexes : la première, par exemple, peut s'énoncer "a est premier, b est premier et c est premier" ; la dernière est encore plus compliquée, car elle se présente comme la négation de la proposition suivante : "e est le même nombre que a, ou c'est le même nombre que b, ou c'est le même nombre que c" . Nous avons fait apparaître ainsi trois procédés pour former des propositions à partir de propositions qu'on sait déjà énoncer. Désignons par exemple par p,q,r respectivement les trois proposi-tions "a est premier", "b est premier", "c est premier". Nous nous donnons le droit d'effectuer les opérations suivantes :

1. La négation d'une proposition. Par exemple la négation de p est "a n'est pas premier" ; elle s'écrit $\overline{p}$.

2. La conjonction des propositions p, q, r, qui est ici "a est premier, b est premier, et c est premier" ; comme elle s'exprime couramment par le mot "et", on la note "p et q et r", ou encore "p et q et r".

Cette opération, logiquement, s'applique aux propositions p,q,r sans qu'on ait rangées celles-ci dans un ordre déter-miné. La notation ci-dessus a l'inconvénient d'obliger à écrire p,q,r dans un certain ordre, et par suite à formuler, comme une règle logique, le fait que les propositions "p et q et r", "r et p et q", etc., ne doivent pas être considérées comme distinctes. D'autre part, de même qu'en algèbre on définira une somme de plusieurs nombres, a+b+c , par récurrence, en supposant a priori seulement qu'on sait former la somme de deux nombres, on pourrait ici partir de l'opération "et" pour deux propositions seulement. Cette réduction a de l'intérêt pour le logicien, mais non pas pour nous qui ne nous préoccupons pas de faire une discussion complète des opérations et des règles logiques que l'on applique en mathématiques.

3. La combinaison "ou", ou disjonction. Elle prête malheureu-sement à une confusion, qui existe déjà dans le langage ordinaire. Lorsqu'on dit "il faut qu'une porte soit ouverte ou fermée" l'on entend insister sur le fait que ces deux possibilités s'excluent mutuellement. Au contraire, le rhéteur de La Fontaine qui dit "le roi, l'âne, ou moi nous mourrons" n'annonce pas la mort de l'un des trois, à l'exclusion des deux autres, mais de l'un au moins des trois. De même quand on dit "si un nombre premier divise le produit de deux nombres, il divise l'un ou l'autre des facteurs" : il divise peut être tous les deux. Dans le texte d'Euclide, la phrase "ou d+1 est premier, ou,il ne l'est pas" peut donner à croire que

le mot "ou" y reçoit le premier des sens que nous venons de distinguer; mais un examen attentif de la démonstration fera apercevoir que l'im--portant, c'est que l'une (au moins) des propositions "d+1 est premier", "d+1 n'est pas premier" est vraie ; il est exact, mais sans intérêt pour la démonstration, qu'elles ne puissent être vraies à la fois. Nous conviendrons donc, une fois pour toutes, que la proposi--tion "a est premier ou b est premier" signifiera toujours "l'un au moins des nombres a, b est premier" ; tel est le sens que nous donnons à la proposition "p <u>ou</u> q" ; de même s'il s'agit de plus de deux propositions, par exemple "p <u>ou</u> q <u>ou</u> r ".

Mais un peu d'attention montre que l'on n'a pas l'habitude de considérer comme distinctes, dans un texte mathématique, toutes les propositions que l'on peut former par les opérations ci-dessus. Déjà nous avons dit que "p et q", "q et p" sont à considérer comme une seule et même proposition. De même, "p et p" ne diffère de p qu'en apparence. De même encore, si chacune des propositions u, v représente la conjonction de plusieurs autres, "u et v" ne sera autre que la conjonction de toutes celles-ci ; et le même principe vaut pour "<u>ou</u>" .

> On introduira en Algèbre (référence), pour qualifier les opérations qui obéissent à un principe de ce genre, le terme d'opération associative ; et le terme d'opération commutative pour qualifier celles qui sont indépendantes de l'ordre des éléments auxquels on peut les appliquer ; et l'on fera la théorie générale des opérations associatives et commutatives, qui par conséquent s'appliquera à "<u>et</u>" et "<u>ou</u>". Au sens qu'on définira en Algèbre, ces opérations sont même distributives l'une par rapport à l'autre.

Quant à la négation, elle est régie par la règle suivante, dite de la double négation : $\overline{p}$ <u>étant la négation de</u> p, p <u>est la négation de</u> $\overline{p}$.

....

Enfin, par la négation, les opérations "<u>et</u>", "<u>ou</u>" se ramènent l'une à l'autre ; et par exemple, la négation de "e est le même nombre que a, ou que b, ou que c" est "e n'est pas le même nombre que a, et ce n'est pas le même que b, et ce n'est pas le même que c"; ce qui se formule en général comme suit :

<u>La négation de</u> "p et q et r" <u>est</u> "$\overline{p}$ <u>ou</u> $\overline{q}$ ou $\overline{r}$" ; <u>celle de</u> "p <u>ou</u> q <u>ou</u> r" <u>est</u> "$\overline{p}$ et $\overline{q}$ et $\overline{r}$" . Et de même, bien entendu, pour des propositions en nombre quelconque.

Pour le logicien, il peut être avantageux de considérer cette règle comme la définition de "ou", la négation et la conjonction étant prises pour seules opérations primitives; ou comme la définition de "et", si l'on part de la négation et de "ou". C'est ce qu'on fait lorsqu'on désire réduire le plus possible le nombre des opérations primitives et des règles logiques ; en revanche, cela a l'inconvénient de détruire la symètrie entre "et" et "ou".

Du point de vue "naïf", ces règles sont "évidentes", c'est-à--dire qu'on les appliquera toujours sans hésitation dans le cours d'un raisonnement. Du point de vue de la logique pure, elles font simplement partie de la règle du jeu ; la dernière, par exemple, signifie que toutes les fois qu'on rencontre, dans une démonstration mathématique, la négation de la proposition "p et q", on se donne le droit de la remplacer par "$\overline{p}$ <u>ou</u> $\overline{q}$". Quant au cas que les logi--ciens font de "l'évidence" des règles, il nous suffira de dire que certains d'entre eux s'interdisent de faire usage de la règle de la double négation . (Du point de vue du logicien pur c'est aussi légitime qu'il le serait à des joueurs d'échecs de convenir de ne pas faire usage de leurs reines).

Reprenons maintenant l'examen du texte d'Euclide. Pouvons-nous à présent rendre compte de la formation de toutes les propositions qui s'y trouvent ? Et d'abord, que faut-il penser de l'emploi de "si" et des propositions conditionnelles ? Devons-nous voir là un nouveau moyen de formation de propositions complexes, distincts des précé-dents ?

Un moment de réflexion montre que ce n'est pas nécessaire. Soit la proposition (auquel notre texte se réfère implicitement) : "si le nombre e divise les nombres m, n, il divise leur différence". Le sens qu'on lui donne ne diffère pas de celui qu'on attribue à celles-ci : "un nombre e ne peut diviser m et n sans diviser leur différence" ou encore : "ou bien e ne divise pas à la fois les deux nombres m et n, ou il divise leur différence". Soient p la proposi-tion "e divise m et n", q la proposition "e divise la différence de m et n". On voit qu'au sens où on l'emploie en mathématiques, la proposition "si p, q" ne diffère pas de "$\overline{p}$ ou q". Il est donc inutile de considérer "si" comme désignant une opération logique distincte des précédentes ; par définition, "si p, q" sera simplement une autre manière d'écrire la proposition "$\overline{p}$ <u>ou</u> q" ; d'ailleurs la même proposition se formule encore par les termes "pour que q, il suffit que p", "pour que p, il faut que q" (par exemple, pour que e divise m et n, il est nécessaire qu'il divise leur différence), ou encore "p entraîne q" ; à cause de cette dernière formulation on la note souvent "p $\rightarrow$ q". Et ce n'est pas seulement pour le logi-cien qu'il est intéressant de savoir que toutes ces propositions doivent être regardées comme identiques (aux notations près) ; cela permet par exemple de voir aussitôt qu'elle en est la négation : c'est "p et $\overline{q}$" (par application des règles données plus haut) ;

cela permet aussi de voir que les propositions "$p \rightarrow q$" et "$\overline{q} \rightarrow \overline{p}$" ne sont pas distinctes. Une nouvelle règle, également tirée de la pratique courante des mathématiciens, est la suivante : la proposi-tion "p entraîne q et r" ne sera pas considérée comme distincte de la proposition "p entraîne q et p entraîne r".

Du type de proposition ci-dessus, on en déduit un autre, très important aussi : celui qui sans doute est surtout familier au lec-teur sous la forme "pour que p, il faut et il suffit que q" ; par exemple, "pour qu'un entier autre que 1 ne soit pas premier, il faut et il suffit qu'il admette un diviseur premier plus petit que lui". C'est la conjonction des propositions "pour que p, il faut que q" et "pour que p, il suffit que q", c'est-à-dire "$\overline{p}$ <u>ou</u> q", et "p <u>ou</u> $\overline{q}$" ou encore "$p \rightarrow q$" et "$q \rightarrow p$" : aussi la note-t-on souvent "$p \rightleftarrows q$" ; nous l'énoncerons le plus souvent "p, q sont équivalentes". Il résulte d'ailleurs des règles ci-dessus, et de celles qu'on énoncera plus loin, que cette proposition ne diffère pas non plus de la suivante : "p et q, <u>ou</u> $\overline{p}$ et $\overline{q}$" ; ce qu'on a souvent à utiliser.

Nous en savons assez maintenant pour pouvoir donner une première réponse à la question : qu'est-ce qu'une proposition vraie ? La vérité d'une proposition n'est pas une qualité métaphysique qu'on y attache ; si le mathématicien dit que telle proposition est vraie, c'est que la règle du jeu lui en donne le droit ; nous n'entendons nullement par là, d'ailleurs, que cette règle soit arbitraire comme la règle du jeu d'échecs, et qu'il puisse la modifier à son gré ; mais, quels que soient les motifs qui justifient l'adoption de la règle, une fois qu'il a accepté la règle, il doit s'y conformer.

Or, d'une part, certaines propositions sont tenues pour vraies de par leur seule structure ; par exemple, quelle que soit la proposition p, il est convenu de considérer comme vraie la proposition "p ou $\bar{p}$" : dans notre texte d'Euclide, nous avons un exemple de cette règle, connue sous le nom de "principe du tiers exclu".

Ici encore, du point de vue "naïf", ce principe est"évident"; ce qui n'a pas empêché certains logiciens et même quelques mathématiciens de s'en interdire l'usage ; quels que soient les arguments qu'ils ont avancés en faveur de ce tabou, il est de fait qu'ils aboutissent à substituer à la mathématique ordinaire une autre qui est effroyablement compliquée ; cependant, leurs tentatives ont servi en tout cas à distinguer entre les théories mathématiques où ce principe est véritablement indépendant des autres règles ordinairement admises, et celles où il ne l'est pas ; elles ont provoqué aussi des discussions intéres--santes, qui ont jeté sur certains problèmes un jour nouveau.

(Références!) Cf....

Remarquons d'autre part qu'il est indispensable, pour pou--voir poser ce principe, de réserver le nom de proposition aux phrases qui ont un sens mathématique. Il serait saugrenu de qualifier de proposition vraie la phrase "ou le nombre a est vertical, ou il ne l'est pas".

Voici un exemple un peu moins simple : p et q étant deux proposi--tions, les propositions "si p et q, p" et "si p, p ou q" sont vraies. Ici encore, nous ne discutons pas de l'"évidence" ~~ex~~ de ces règles : ayant constaté qu'elles sont appliquées à chaque pas dans tout raisonne--ment mathématique (par exemple dans notre texte : si a, b, c divisent d, a divise d), nous les formulons comme règles une fois pour toutes. En vertu du sens que nous avons donné à "si" , la première proposition peut s'énoncer : "$\bar{p}$ ou $\bar{q}$ ou p" ; la deuxième, de même, s'écrira "$\bar{p}$ ou p ou q", et ne s'en distingue donc (puisque l'ordre des termes est sans importance) que par la substitution de q à $\bar{q}$; puisque l'on a désigné par q une proposition arbitraire, les deux règles n'en font donc qu'une seule, qui peut aussi s'écrire comme suit : la proposition "si p et $\bar{p}$, q" est vraie.

Et enfin, voici le troisième type de proposition qui sera tenu pour vrai une fois pour toutes : "si p entraîne q, et si q entraîne r, p entraîne r". Mais bien entendu l'on n'irait pas loin si l'on ne pouvait, à partir de certaines propositions vraies, conclure la vérité de nouvelles propositions ; c'est en cela même que consiste l'essence de la déduction. Voici pour cela deux règles d'applica-tion constante : si les deux propositions p et q sont vraies, "p et q" l'est aussi ; si les deux propositions p et "p $\longrightarrow$ q" sont vraies, q l'est aussi ; celle-ci peut être considérée comme une forme du syllogisme classique. Le lecteur trouvera sans peine, dans le texte cité d'Euclide, un grand nombre d'applications de ces règles. En voici une qui peut sembler paradoxale : l'on a posé plus haut que la proposition "si p et $\overline{p}$, q" est toujours vraie. Si donc, dans une théorie quelconque, l'on a reconnu pour vraies une proposition p et sa négation $\overline{p}$, toute proposition q devra être tenue pour vraie dans cette théorie. Convenons de dire que q est fausse lorsque $\overline{q}$ est vraie ; on voit que si, dans une théorie, l'on a trouvé une proposition à la fois vraie et fausse, il en est de même de toutes les propositions de cette théorie, qu'on qualifie alors de contradictoire : une telle théorie est visiblement sans intérêt.

L'on a démontré de quelques théories mathématiques qu'elles sont non-contradictoires ; encore faut-il soigneu-sement préciser ce que l'on doit entendre par une telle démonstration, car celle-ci doit évidemment se faire en suivant des règles logiques déterminées dont à leur tour il faudrait démontrer qu'elles n'entraînent pas contradic-tion, et ainsi de suite ; sur ces questions, cf. (référen-ces). En général, tout ce qu'on peut faire, c'est de démontrer que telle théorie n'est pas contradictoire si telle autre ne l'est pas ; dans ce traité même, ...

admettant que la théorie des ensembles est non-contradictoire, on démontrera qu'il en est de même de toutes les théories que nous développerons.

En revanche, si, même sans en donner de véritable démonstration, tout mathématicien est convaincu que, dans les théories dont il s'occupe, il n'y a pas de proposition vraie et fausse à la fois, l'on ne connaît pas de théorie dont on ait des raisons de penser que toute proposition y soit ou vraie ou fausse ; que, dans une théorie, une proposition ne soit ni vraie ni fausse, cela signifie simplement que la théorie ne contient pas les moyens de démontrer cette proposition ni sa négation ; nous en verrons de nombreux exemples.

Notons enfin une conséquence, quelque peu choquante du point de vue du langage ordinaire, des définitions logiques que nous avons suivies. "si $\bar{p}$, p ou q" et "si q, $\bar{p}$ ou q" sont vrais ; donc "p $\rightarrow$ q" est vrai chaque fois que p est faux, et chaque fois que q est vrai, même si les propositions p et q sont entièrement sans rapport l'une avec l'autre. Pour choquant que cela soit, cela n'a aucun inconvénient pour le mathématicien, car l'occasion ne se présentera jamais d'écrire "p $\longrightarrow$ q" à moins que, précisément, p et q n'aient entre elles quelque lien ; comme d'ailleurs ces manières de parler ne peuvent jamais conduire à des résultats incorrects, il n'y a pas lieu d'essayer de les modifier.

Nous n'avons pas encore épuisé l'énumération des moyens que le mathématicien a à sa disposition pour démontrer des propositions, c'est-à-dire pour en reconnaître la vérité, à partir naturellement de propositions déjà posées comme vraies. Mais, dès maintenant, nous sommes en mesure d'énumérer quelques schémas importants de démonstration. Voici d'abord le type de démonstration "par l'absurde", dont notre texte d'Euclide fournit un bel exemple ; supposons qu'on sache que p est vrai ; et qu'on démontre que "$\bar{q} \longrightarrow \bar{p}$" : comme nous savons que cette dernière proposition ne diffère que par la forme de "p $\longrightarrow$ q", q se trouve alors démontré.

Lorsque, p étant vrai, l'on a démontré "$\bar{q} \rightarrow \bar{p}$", on exprime souvent ce résultat en disant que "$\bar{q}$ entraîne contradiction". En dépit de cette manière de parler, il est clair que la démonstration par l'absurde n'est que l'application des règles logiques ordinaires, et il ne faut

17

donc pas y voir une "horreur de la contradiction", aussi peu motivée que l'horreur du vide dans l'ancienne physique, qui obligerait, plutôt que de s'exposer au monstre Contradiction, à admettre n'importe quoi : apparence choquante, malheureuse-ment suggérée par les expressions dont on se sert tradition-nellement, et qui fait que de bons esprits répugnent à se laisser convaincre par ce genre de preuve et même peut être prennent là le dégoût de la méthode mathématique. Nous avons expliqué plus haut pourquoi il est à souhaiter que l'on ne rencontre pas de contradiction en mathématique ; mais en tout cas, qu'il y en ait ou non, cela n'a rien à voir avec la validité de notre procédé de démonstration.

Mais l'analyse que nous venons de faire montre en même temps que très souvent, au lieu de procéder par l'absurde en démontrant que "$\bar{q} \rightarrow \bar{p}$", il sera tout aussi facile, renversant la marche du raisonnement, de constater que "$p \rightarrow q$". Aussi doit-on considérer que le procédé par l'absur-de est important surtout pour la découverte. Très souvent lorsqu'on a été amené à conjecturer la vérité d'une proposi-tion et qu'on désire la démontrer, il est avantageux, plutôt que d'essayer de la rejoindre en partant de ce qu'on sait, à partir de la négation de ce qu'on veut démontrer et chercher à en tirer un résultat qui contredise ceux qui sont déjà connus. Autrement dit, au lieu de se demander "est-il certain que p soit vrai ?", le mathématicien se demande "est-il possible que p soit faux ?" ; ce qui, entre autres avantages, lui permet souvent, s'il s'est trompé dans sa conjecture, de s'apercevoir plus vite de son erreur. Il se peut naturellement que, si par cette voie il atteint son but et obtient une démonstration par l'absurde, il juge préférable, après coup, de la renverser et de la mettre sous forme directe : mais cela n'enlève rien à la valeur du procédé.

C'est justement à cause de l'extrême importance qu'il y a à savoir parfaitement manier cette méthode, qu'il est indispensable de savoir former sans se tromper la négation de toute proposition, si complexe soit-elle ; ce n'est pas là la moindre raison qui justifie la présence de ce chapitre de logique au début de notre ouvrage. Et nous ne saurions trop recommander au lecteur d'accorder toute son attention aux exercices qui terminent ce chapitre, et qui portent principalement sur ce point.

Voici encore d'autres schémas de démonstration, que le lecteur pourra facilement, s'il le désire, justifier à partir de ce qui précède. D'abord, si l'on a démontré que "$p \rightarrow q$" et que "$q \rightarrow r$", que "$q \rightarrow r$" et que "$r \rightarrow p$", les propositions p, q, r sont équivalen-tes: il s'ensuit que "$p \rightarrow r$". Si donc on a démontré que "$p \rightarrow q$", c'est le principe de la démonstration "en chaîne fermée". L'importance de la notion de propositions équivalentes (ou, en d'autres termes, de condition nécessaire et suffisante) se manifeste par la règle que voici : si l'on a démontré que "p et q sont équivalentes" (c'est-à-dire, rappelons-le, que "$p \rightarrow q$" et que "$q \rightarrow p$"), on a le droit, chaque fois que dans un raisonnement mathématique l'on rencontre la proposition p, de la remplacer par q, et inversement.

A la fin du § 1 : des exercices (principalement "former la négation des propositions suivantes").

Et un appendice, avec un tableau des règles logiques, et la démonstration de quelques-uns des résultats qui ont été énoncés dans le paragraphe.

§ 2. Structure de la proposition.
Propriétés, relations, variables.

Maintenant que nous savons décomposer une proposition complexe en propositions simples, combinées entre elles par les procédés que nous avons étudié, nous pouvons examiner la formation de celles-ci. Pour le mathématicien, énoncer une proposition simple, c'est dire que tel objet possède telle propriété, ou bien encore que tels objets ont entre eux telle relation : "a est premier", "1 est divisible par e". Mais nous avons déjà dit qu'on ne se donne le droit de parler de pro-position que si l'on a une phrase ayant un sens mathématique (sa vérité ou sa fausseté étant ici sans importance) ; or, on s'aperçoit aussitôt que la plupart des propriétés ne conviennent qu'aux objets d'un certain type, et qu'on obtient des phrases sensées en les attri-buant aux objets de ce type, et de ce type seulement ; "premier" est une propriété qui s'applique aux entiers ordinaires : "5 est

Vérifier! premier", "6 est premier", "$2^{2^{1000}} + 1$ est premier" sont des proposi-tions (l'une vraie, l'autre fausse ; quant à la troisième, on ignore si elle est vraie), "π est premier", "le plan P est premier" n'en sont pas. De même pour les relations.

Bien entendu, il arrive qu'on se serve du même mot, dans des théories différentes, pour désigner des propriétés qui se rapportent à des objets de types différents : cela peut être dû à la pauvreté du langage mathématique (ou à la pauvreté d'imagination du mathématicien qui a inventé tel terme), ou bien au fait qu'on veut insister sur telle analo-gie entre ces propriétés. Par exemple, on applique aussi le mot "premier" à des idéaux, dans la théorie des nombres algèbriques, c'est-à-dire à des objets qui ne sont pas des nombres : c'est qu'en effet il y a une étroite parenté entre les notions de nombre premier en arithmètique ordinaire et d'idéal premier dans cette théorie. En revanche, l'on parle, dans la théorie des fonctions analytiques, de familles nor-males de fonctions, et en algèbre d'extensions normales d'un corps, sans qu'il y ait le moindre rapport entre ces notions. Il va sans dire qu'il importe beaucoup au mathéma-ticien d'avoir une terminologie bien faite, c'est-à-dire qui mette en évidence les analogies, n'en suggère pas de fausses, et n'évoque pas non plus d'images trop grossière-ment en désaccord avec les notions mathématiques ; aussi le choix d'un terme nouveau est-il chose très délicate,et qui ne saurait être fait avec trop de scrupule ; dans ce traité même, et en dépit de graves inconvénients, que nous ne nous dissimulons pas, nous n'avons pas hésité, en nous inspirant de ces considérations, à modifier sur plusieurs points la terminologie reçue ; bien entendu, tous les éclaircissements nécessaires seront chaque fois donnés, et des lexiques très complets (et plurilingues) permettront chaque fois de repasser à volonté au langage mathématique courant. Nous ne sommes pas sans espérer que les motifs très sérieux aux quels nous avons chaque fois obéi seront pris en considération, et que notre terminologie se substituera de plus en plus à l'ancienne.

Quoi qu'il en soit, pour le logicien, il n'est d'aucune importance que le même mot serve à désigner des propriétés qui se rapportent à des objets de types différents, car alors, du point de vue logique, ce n'est plus le même mot, ce sont des mots distincts (de même que la langue courante, déjà, connaît des mots, indiscernables dans la prononcia-tion et parfois aussi dans l'écriture, et qui pourtant sont sans rapport l'un avec l'autre). En revanche, il serait catastrophique, aussi bien pour le logicien que pour le mathématicien, que l'on attribuât le même nom à des propriétés distinctes qui s'appliqueraient à des objets de même type : remarque qui n'est pas si triviale qu'elle peut le paraître, car il arrive très souvent qu'après avoir défini telle propriété (ou telle relation) pour certains objets particuliers d'un type déterminé, on la définit à nouveau pour tous les objets de ce type : il est indispen-sable alors de vérifier très soigneusement que, pour les objets particuliers dont il était question d'abord, les deux propriétés ne sont pas distinctes.

Il y a donc en général un certain rapport de convenance entre une propriété et certains types d'objets, ou, comme disent en abrégé les logiciens, entre une propriété et un type (au lieu de "propriété", les logiciens disent le plus souvent "un prédicat"). Aussi faut-il toujours, dans la désignation symbolique d'une propriété, indiquer à quel type ou à quels types elle peut convenir ;

nous avions le droit, au § précédent, de dire "désignons par p une proposition" ; mais s'il s'agit de propriété, il nous faudra dire le cas échéant "désignons par P une propriété de nombre entier", ou plus généralement "désignons par P une propriété d'objet du type T". On peut dire aussi qu'une propriété n'est pas autre chose qu'une matrice de propositions ; la propriété de nombre entier qui s'exprime par le mot premier n'est pas autre chose que le moyen de fabriquer des propositions, en nombre indéfini, de la forme "a est premier". De même qu'on peut signer un chèque en blanc, une proprié--té est, si l'on peut dire, une proposition en blanc

" est premier"

où le blanc est destiné à être rempli, non par n'importe quoi, mais par n'importe quel objet du type d'un entier.

Pour ce blanc, les mathématiques modernes ont créé un nom et une notation dont l'utilité est extrême ; il est même trois noms en usage, qu'il importe de connaître tous trois. Un tel blanc s'appelle un <u>argument</u>, ou bien une <u>variable</u>, susceptible de déterminations du type des entiers (ou, en abrégé, un argument ou une variable du type des entiers, ou encore à valeurs entières ; ou même un argument entier ou un entier variable) ; ou bien encore, un entier <u>générique</u> ; et l'on se donne le droit de le désigner par une lettre, qui souvent sera l'une des dernières de l'alphabet, x, y, z.

L'usage des variables est à tel point caractéristique des mathématiques modernes que, pour beaucoup de gens, la lettre x passe pour le symbole mathématique par excellence (et que la lettre X continue à désigner telle grande école où l'enseignement des mathématiques est censé tenir une grande place). Quant aux mathématiciens grecs, si proches qu'on les sente parfois de faire usage des variables, il semble que, pour des raisons logiques, ils se le soient

...

interdit systématiquement, fixant ainsi à leur science des limites qui ne furent franchies que bien plus tard ; en tout cas, c'est, entre autres, pour cette raison que tant de théorèmes sont formulés par les géomètres anciens tout autrement qu'on ne ferait aujourd'hui.

Quant à la terminologie en usage, le mot de variable, qui est de beaucoup le plus répandu, présente l'inconvé-nient d'évoquer l'idée de variation ou de changement, tout à fait étrangère à la notion dont il s'agit, et l'inconvénient, encore plus sérieux, de se prêter à certains emplois peu corrects (ainsi les expressions de variable dépendante et variable indépendante. Le mot "générique" dont se sert surtout l'école italienne de géomètrie algèbrique, a l'inconvénient d'être un adjectif: or, en dépit de la grammaire, un "entier générique" n'est pas un entier ; la même objection s'applique d'ailleurs au mot "variable" lorsqu'on dit "un entier variable". Le mot "argument" est donc en général à préférer ; cependant nous ne nous interdirons pas les deux autres.

A reporter éventuel-lement au diction-naire (avec renvoi marginal au dictionnaire).

Désormais, donc, au lieu de dire "considérons la propriété d'entier qui s'exprime par le mot <u>premier</u>", on dira : x étant un argument du type des entiers, considérons la propriété "x est pre-mier" ; ou, plus généralement, au lieu de dire "considérons la propriété P d'objets du type T", on dira : x étant un argument du type T, considérons la propriété P(x). Avec cette dernière nota-tion, P(x) <u>n'est pas une proposition</u>, puisque x désigne en réalité une place en blanc ; l'on obtient une proposition si l'on remplit le blanc, c'est-à-dire si l'on substitue à x n'importe quel objet du type T ; par exemple, si T est le type des entiers, P(6) est une proposition ; rien n'oblige d'ailleurs à ce que l'objet qu'on substitue à x soit déterminé explicitement ; on a le droit de dire "soit a un nombre entier", après quoi P(a) devient une proposition. Bien que cette distinction, entre une lettre <u>a</u> qui désigne un objet, déterminé mais non explicitement fixé, du type T, et un argument susceptible de valeurs de ce type, puisse paraître ..

subtile, il importe de bien la saisir, sous peine de méconnaître tout à fait le principe de certaines démonstrations.

Quant aux relations, les mêmes principes s'y appliquent ; une relation doit être considérée comme une matrice de propositions qui renferme plusieurs places en blancs ; par exemple :

" est divisible par "

avec deux blancs qui doivent être considérés comme des arguments du type des entiers. Si on note ces arguments par x et y, notre relation s'écrit "x est divisible par y" et est de la forme R(x,y). De même, le cas échéant, pour les relations à plus de deux éléments.

Il y a tout avantage, d'ailleurs, au lieu d'établir une sépara--tion rigide entre propositions, propriétés, relations, à les consi--dérer comme cas particuliers d'une même notion, à savoir un schéma de proposition renfermant éventuellement un ou plusieurs signes représentant des arguments ; s'il n'y a aucun de ces signes on a une proposition, s'il y en a un seul on a une propriété ; si nous continuons à donner, à un tel schéma, le nom de relation, une propo--sition devra être considérée comme une relation où ne figure aucun argument, et une propriété comme une relation où figure un seul argument.

Enfin, l'on aura le droit, lorsque l'on a écrit une relation qui renferme plusieurs blancs c'est-à-dire plusieurs arguments de même type, d'y adjoindre une convention en vertu de laquelle on ne remplira jamais ces blancs que par un même objet ; c'est précisément là l'une des commodités de la notation par variables, car au lieu de formuler une telle convention l'on se contentera ordinairement d'écrire, à la place de tous ces blancs, une même lettre, par exemple x; et c'est l'ensemble de tous ces blancs, plutôt que chacun d'eux sépa--rément, qui sera l'argument x. Par exemple, si l'on adjoint une convention de cette nature à la relation " est divisible par ", on obtiendra une relation à un seul argument, ou si l'on préfère une propriété, qui se note "x est divisible par x".

Cela fait, tout le calcul des propositions, étudié au § 1, s'étend sans changement. Toutefois, lorsqu'il s'agit de propriétés ou de relations contenant des arguments, nous n'emploierons pas les mots "entraîne", "equivalent", ni les signes correspondants "$\rightarrow$", "$\rightleftarrows$" au sens où on les a défini au § 1 : car suivant toujours l'usage ordinaire des mathématiciens, nous leur donnerons tout à l'heure un sens un peu différent.

De par la nature même des propriétés et des relations, on peut en faire des propositions en substituant aux arguments qui y figurent n'importe quels objets du type voulu. Mais il est deux opérations bien plus importantes qui permettent de déduire, d'une propriété ou relation, une proposition ; opérations qui font la véritable originalité de la méthode mathématique par rapport à celles de la logique formelle. Ce sont celles qui s'expriment par les mots "quel que soit", "il existe".

Considérons d'abord une propriété, à un seul argument x, par exemple (x désignant un argument du type des entiers) "x est premier"; les opérations dont il s'agit en font respectivement les propositions "quel que soit x, x est premier" et "il existe x tel que x soit premier" (bien entendu, la première est fausse et la seconde est vraie)

Plus complexe est le cas où l'on a une relation, par exemple "x est divisible par y" : l'application de nos opérations par rapport à x donnera "quel que soit x, x est divisible par y" et "il existe un x tel que x soit divisible par y" : ces phrases seront considérées comme des propriétés de y ; de même l'on peut former les phrases "quel que soit y, x est divisible par y" et "il existe y tel que x soit divisible par y" . qui sont des propriétés de x.

D'une manière générale, l'application de nos opérations, par rapport à un argument x, à une relation où figure, entre autres, x, sera considérée comme donnant une relation (qui peut se réduire, le cas échéant, à une propriété ou à une proposition) contenant les mêmes arguments que celle dont on est parti, sauf x. Après quoi on peut répéter le procédé sur une autre variable ; par exemple "quel que soit y, il existe x tel que x soit divisible par y" est une proposition.

Pour simplifier l'énoncé des règles logiques portant sur ces opérations, il est commode de faire une convention de langage qui permette d'appliquer nos opérations, par rapport à un argument x, à des relations qui ne contiennent pas x : nous conviendrons que dans ce cas, nos opérations n'altèrent pas la signification de la relation à laquelle on les applique. Par exemple, si R(u,v) est une relation contenant deux arguments u et v, les phrases "quel que soit x, R(u,v)" et "il existe x tel que R(u,v)" seront des relations à arguments u, v et signifieront exactement la même chose que R(u,v).

Quant aux règles auxquelles ces opérations obéissent, elles concernent d'abord la "distributivité", comme on dit, de l'une par

par rapport à "et", de l'autre par rapport à "ou" : si R et S sont deux relations, la relation "quel que soit x, R et S" n'est pas considérée comme distincte de "quel que soit x, R, et quel que soit x, S" (on observera que, si R et S sont des propositions, cette règle ne contredit pas à celles du calcul des propositions ; car elle se réduit dans ce cas à une trivialité). De même, "il existe x tel que R ou S" ne diffère pas de "il existe x tel que R, ou il existe x tel que S" .

En revanche, un instant de réflexion montre que "il existe x tel que R et S" n'est pas du tout la même proposition (ou relation) que "il existe x tel que R, et il existe x tel que S" : il est visible que la première en dit bien plus que la seconde ; de même, "quel que soit x, R ou S" en dit bien moins que "quel que soit x, R, ou quel que soit x, S" ; il faut faire grande attention, ici, à ne jamais appliquer que les règles correctes que nous avons énoncées, et non les règles fausses qu'une analogie trop hâtive pourrait suggérer.

Suivant toujours la pratique des mathématiciens, nous observerons encore que "quel que soit", "il existe" se déduisent l'une de l'autre par la négation. Par exemple, la négation de "quel que soit x, x est premier" est "il existe x tel que x ne soit pas premier" (l'une de ces propositions est vraie et l'autre fausse) ; la négation de "quel que soit x, x est divisible par y" est "il existe x tel que x ne soit pas divisible par y" ; en général, si R est une relation quelconque, la négation de "quel que soit x, R" est "il existe x tel que $\overline{R}$" . Comme pour "et", "ou", cette règle pourrait, si l'on voulait, être considérée comme définition de l'une des opérations "il existe", "quel que soit", l'autre seule étant alors considérée comme opération primitive : ici encore, cette réduction est pour nous sans intérêt. Ce qui importe plus, c'est qu'elle permet de former la négation de propositions où plusieurs "il existe" et "quel que soit" se superposent ; par exemple, la négation de "quel que soit x, il existe y tel que x soit divisible par y" est "il existe x tel que, quel que soit y, x ne soit pas divisible par y".

Enfin, et c'est là l'essentiel, il y a des règles permettant de conclure de la vérité de propositions formées au moyen de "quel que soit", "il existe" à des propositions qui ne contiennent pas ces mots, et inversement. Soit P(x) une propriété contenant un seul argument x, de type T ; tout d'abord, si, a étant un certain objet du type T, on a démontré P(a), la proposition "il existe x tel que P(x)" sera considérée comme vraie ; et inver-sement, si l'on sait que "quel que soit x, P(x)" est vrai, et si a est un objet déterminé du type T, P(a) sera tenu pour vrai. Mais ce sont les règles que voici qui font vraiment la nouveauté des opérations "il existe" "quel que soit" : si, en désignant par a un objet déterminé du type T (qui n'est donc assujetti à aucune condition que celle d'être de type T), l'on a démontré P(a), on considérera qu'on a démontré la proposition "quel que soit x, P(x)"; et inversement, si l'on a démontré "il existe x tel que P(x)", l'on se donnera le droit d'introduire et d'employer dans les démons-trations un objet a de type T pour lequel P(a) sera vrai.

Les mathématiciens "intuitionnistes" auxquels nous avons déjà fait allusion s'interdisent l'usage de cette dernière règle, dont il importe en tout cas de bien com-prendre la nature. D'après ce qui précède, on a deux moyens de démontrer la proposition "il existe x tel que P(x)".

L'un, c'est de déterminer directement un objet a pour lequel P(a) sera vrai, et alors naturellement il est même inutile, si l'on veut, de formuler la proposition "il existe ...", puisque l'objet a se trouve construit et est prêt à servir chaque fois qu'on en aura besoin. L'autre moyen, c'est de démontrer que la proposition "quel que soit x, $\overline{P}(x)$" est fausse (et par exemple, au sens qu'on a expliqué au § 1, qu'elle entraîne contradiction") : il peut arriver alors que, tout en ayant démontré, suivant les règles ci-dessus, la proposition "il existe ...", l'on n'ait aucun moyen, même théorique, de construire un objet a pour lequel P(a) soit vrai ; ce qui n'empêche pas qu'on se donne le droit d'utiliser un tel objet dans le courant de n'importe quelle démonstration où ce pourra être utile. Pour prendre un exemple un peu grossier, le lecteur sait sans doute (et nous verrons dans ce traité même, cf. référence) qu'on démontre que toute équation algèbrique F(x) = 0, dont le premier membre est un polynome à coefficients réels ou complexes, possède au moins une solution réelle ou complexe ; or les démonstrations qu'on donne habituellement de ce théorème ne renferment aucun moyen explicite de construire c'est-à-dire de calculer avec telle approximation qu'on voudra une solution de l'équation ; ce qui n'empêche qu'on n'hésitera pas à s'en servir constamment dans la théorie des équations algèbriques. Il est vrai que cet exemple n'est pas tout à fait topique, car on possède par ailleurs les moyens de calculer les solutions d'une équation donnée ; il est quelques exemples d'objets qu'on se donne le droit d'utiliser parce qu'au sens des règles ci-dessus on en a démontré l'existence, bien que dans l'état actuel de la science l'on ne connaisse aucun moyen de les construire ; mais ces exemples sont un peu trop difficiles pour être indiqués ici.

Quant à la règle précédente, elle signifie qu'il revient au même de démontrer "quel que soit x, P(x)" ou bien de démon--trer P(a) pour un objet a du type T sur lequel on n'a fait aucune hypothèse particulière ; ou, si l'on veut, que dans une certaine mesure il est indifférent de considérer une variable de type T ou bien un objet a déterminé mais arbitraire du même type. Par exemple, c'est toujours à cette dernière manière de parler que s'arrêtaient les mathématiciens grecs. Cela ne veut pas dire cependant que l'introduction des variables soit superflue : ce qui la rend indispensable, ce n'est pas la règle que nous discutons en ce moment, mais l'ensemble des règles que nous avons données, et en particulier celle que nous venons de discuter auparavant.

Quant à l'attitude des mathématiciens grecs sur ces questions, elle est suffisamment caractérisée par le texte cité au § 1. Là où nous dirions "quels que soient les nombres premiers en nombre fini, p, p', p",..., il en existe un autre" il apparaît nettement, du texte et de la démonstration d'Euclide, qu'il veut dire "si l'on s'est donné des nombres premiers en nombre fini quelconque, l'on peut donner une règle qui permette d'en construire un autre". On remarquera à ce propos que le système de notations d'Euclide ne lui permet pas même de poser comme donnés des nombres premiers en nombre fini quelconque ; là où nous dirions "soient $p, p', p'', \ldots, p^{(n)}$ les nombres premiers donnés, il est obligé (pour fixer les idées, comme on dit dans certains textes modernes) de s'en donner trois ; il arrive même très souvent, dans des textes anciens, que, pour démontrer une proposition vraie pour tous les entiers (ou, comme nous dirions, une proposition "quel que soit x entier, $\bar{P}(x)$", l'on prenne un entier explicitement déterminé, par exemple 15, et que l'on fasse sur lui la démons-tration ; il appartient alors à l'auteur de construire sa démonstration de manière qu'il apparaisse que les propriétés particulières du nombre 15 n'apparaissent nulle part, et au lecteur de vérifier qu'il en est bien ainsi. On ne peut dire que que cette manière de faire soit incorrecte, mais elle s'expose à bien des erreurs ; de même qu'en géomètrie élémen-taire la méthode qui consiste à raisonner "sur une figure", et qui, elle aussi, exige une attention constante puisqu'en même temps qu'on fait la démonstration il faut vérifier à chaque pas qu'on n'utilise pas les propriétés particulières de la figure. Aussi est-il bien préférable de ne jamais se servir de figures (soit dessins, soit illustrations de tout autre genre qu'on peut donner aux raisonnements) que comme d'aides à l'imagination, qui doivent rester sans influence sur la démonstration elle-même.

Nous sommes en mesure maintenant de définir, pour les relations, les mots "entraîne", "équivalent", dont nous avions ajourné l'intro-duction ; ici encore, la définition que nous en donnons est choisie manière à suivre du plus près qu'il est possible la pratique des mathématiciens. Par définition donc, ces mots seront considérés comme renfermant implicitement un "quel que soit" portant sur tous les arguments qui figurent dans les relations sur lesquels ils portent. Par exemple, si $R(x, y)$ et $S(x,y,z)$ sont deux relations, "R entraîne S" signifiera "quels que soient x, y, z, si $R(x, y)$, $S(x, y,z)$" ou si l'on préfère, "quels que soient x, y, z, $\bar{R}$ ou S" ; l'on écrira alors "$R \longrightarrow S$" : c'est donc toujours une proposition.

Il est clair que si R et S se réduisent à des propositions, cette définition ne diffère pas de celle du § 1 ; de plus, "$R \rightarrow R$" est toujours vrai, car, si a, b sont n'importe quels objets des types qui figurent dans R, "$R(a,b)$ ou $\overline{R}(a,b)$" est une proposition vraie, donc aussi "quels que soient x, y, $R(x, y)$ ou $\overline{R}(x, y)$" c'est-à-dire justement "$R \rightarrow R$" ; et l'on voit de même que, si "$R \rightarrow S$" et "$S \rightarrow T$" sont vrais, "$R \rightarrow T$" l'est aussi. Enfin, l'on vérifie, encore de la même manière, que "$R(x,y) \rightarrow S(x,y,z)$" est vrai si "quels que soient x, y, $\overline{R}(x,y)$" est vrai, ou bien encore si "quels que soient x, y, z, $S(x,y,z)$" est vrai : ce qui nous servira au chap. II.

Enfin, la conjoncion de "$R \rightarrow S$" et de "$S \rightarrow R$" se note "$R \rightleftarrows S$" et se lit "R, S sont équivalentes" ; d'après les règles du calcul des propositions, cette proposition peut s'interprèter aussi "quels que soient x, y,z, R et S, ou $\overline{R}$ et $\overline{S}$". Comme pour les propositions, nous avons ici le schéma de démonstration en chaîne fermée : si "$R \rightarrow S$", "$S \rightarrow T$", "$T \rightarrow R$" sont vrais, R, S, T sont équivalentes. Comme pour les propositions, l'impor-tance de l'équivalence tient à ce que, lorsqu'on a démontré que des relations sont équivalentes, l'on s'est acquis le droit de les remplaçer l'une par l'autre dans le cours de tout raisonnement mathématique où elles apparaissent.

31

§ 3. Conseils sur la rédaction des travaux mathématiques (et de quelques autres).

L'inobservation des principes posés aux paragraphes précédents rend parfois inintelligibles, non seulement des textes mathématiques, mais beaucoup d'autres. En voici un exemple tiré de l'indicateur des chemins de fer pour l'hiver 1937-38 :

.... Train 193 (1è et 2è classes) : les voyageurs de 1è classe seulement porteurs de billets directs aller retour de fin de semaine sont admis dans ce train.

Il est impossible d'extraire de là un sens raisonnable. Renseignements pris, l'on a voulu dire que les voyageurs de 2è classe, porteurs de billets dits de fin de semaine, n'étaient pas admis dans le train 193, tous les autres voyageurs de 2è classe et tous les voyageurs de 1è y étant admis : l'auteur de ce texte n'a pas su formuler en termes sensés la négation de la propriété "le voyageur x est de 2è classe et porteur d'un billet de fin de semaine" ; il voulait dire que cette négation entraîne la propriété d'être admis dans le train 193.

Le premier point, donc, dans un raisonnement mathématique, c'est qu'on puisse, sans ambigüité, y reconnaître des propriétés et propositions se combinant et s'enchaînant par les règles que nous avons posées ; quelle que soit la variété de termes que le langage ordinaire offre parfois pour exprimer une même chaîne de propositions, il faut que celle-ci apparaisse avec clarté. Il est vrai qu'en une telle matière ce qui est clair pour l'un peut être obscur pour l'autre, et l'on ne doit pas, comme dit un écrivain contemporain, perdre de vue le lecteur probable ; par exemple écrivant pour les spécialistes d'une théorie, il sera légitime de s'abstenir de donner tout au long certains raisonnements qui ne feraient que reproduire des schémas familiers. Il est, d'autre part, des sujets si nouveaux et si difficiles que l'on peut pardonner, à ceux qui les abordent, de ne pas se soucier toujours d'une parfaite précision, et de laisser parfois à leurs successeurs le soin de transcrire leurs inductions dans un langage mathématique correct : c'est au succès à justifier les libertés qu'ils prennent avec la rigueur mathématique ; mais, étant entendu que le génie est en dehors de toute règle, il est hors de doute qu'à certaines époques des mathématiciens fort connus, en se plaçant ainsi au-dessus de la stricte logique, n'ont pas peu contribué à répandre la mode du travail mal fait et n'ont pas créé peu d'embarras à leurs élèves plus consciencieux. Dans un traité comme celui-ci, en tout cas, où tout raisonnement doit être immédia--tement vérifiable même pour l'étudiant peu expérimenté, nous nous efforcerons, malgré les longueurs où quelquefois ce principe pourra nous entraîner, de toujours indiquer clairement toutes les étapes de nos démonstrations.

S'il importe d'être "rigoureux", ou pour mieux dire de raisonner correctement, il ne faut pas en porter le souci jusqu'à le laisser nuire à la clarté ; que chaque proposition s'articule irréprochable--ment à la suivante, ce n'est pas assez pour être clair, c'en est même la moindre partie ; il est encore plus nécessaire que la marche générale des idées apparaisse bien, et soit, le moins qu'il est possible, obscurcie par des points de détail. Parfois la suppression

...;

pure et simple de ceux-ci, pourvu qu'ils puissent aisément être reconstitués, sera recommandable ; encore bien plus souvent, on verra qu'un langage bien choisi, des définitions heureuses, permettent de présenter le raisonnement sous une forme qui soit à la fois simple et complète. Tel détail technique, dont la répétition fastidieuse peut rendre déplaisant l'aspect d'un livre entier, pourra souvent avec avantage être relégué dans la démonstration d'un lemme unique, dont ensuite on disposera une fois pour toutes.

Mais il ne faut pas non plus, par une longue série de lemmes astucieusement préparés mais dont la signification n'est pas apparente, se donner tous les moyens techniques grâce auxquels ensuite la démonstration d'un théorème difficile paraîtra se réduire à une banalité. Autant l'on doit s'efforcer d'éliminer les difficultés factices ou accidentelles, et surtout celles qui tiennent à de mauvaises notations ou à l'insuffisante généralité des définitions, autant l'on doit se garder de dissimuler les difficultés véritables. Enfin, que l'on se rappelle qu'il est peu de sujets en mathématique dont on ne puisse faire tenir tout l'essentiel en un petit nombre de théorèmes simples, intelligemment formulés. Et sur ce, ami lecteur, fais de ton mieux; et que Dieu t'ait en sa sainte garde !

Chapitre II

Théorie des ensembles

§ 1. Ensembles ; calcul sur les ensembles ; l'égalité.

Nous sommes maintenant en possession des moyens voulus pour pouvoir aborder la première théorie dont nous ayons à traiter, celle des ensembles.

Pour expliquer l'origine des termes de cette théorie, nous nous servirons d'abord d'une image sensible, ou si l'on veut d'une figure. Supposons que tous les objets d'un certain type soient des objets donnés dans l'expérience sensible ; par exemple, qu'il s'agisse de tous les habitants de la France au 31 décembre 1937. L'ensemble de ces habitants, c'est la population de la France au 31 décembre 1937. L'ensemble de ces habitants, c'est la population de la France à cette date ; parmi eux, au moyen des diverses propriétés qu'on peut leur attribuer, on distinguera certaines parties de cet ensemble : par exemple, l'ensemble de tous les habitants majeurs, ou celui de tous les habitants masculins. Toute propriété détermine ainsi une certaine partie de la population, à savoir l'ensemble des habitants pour lesquels cette propriété est vraie ; dire que deux propriétés sont équivalentes, c'est dire que tout habitant de la France, ou bien possède à la fois ces deux propriétés (par exemple celle d'être majeur et celle d'être né avant le 1er janvier 1917), ou bien n'en possède aucune : donc aussi, qu'elles déterminent la même partie de la population. Qu'une propriété entraîne l'autre, c'est dire que tout objet du type considéré, s'il possède la première, possède la seconde ; par exemple, tout habitant majeur est né avant le 31 décembre 1925, donc l'ensemble des habitants majeurs de la France fait partie de l'ensemble de ceux qui sont nés avant le 31 décembre 1925, ou en d'autres termes y est contenu. On a défini ainsi une correspondance bien déterminée entre les propriétés des objets dont il s'agit, et les parties de l'ensemble de ces objets ; réciproquement, à toute partie de la population (définie, si l'on veut, au moyen d'une liste nominative) correspond une propriété : celle qui consiste précisément à s'y trouver compris (à figurer sur la liste). Il est facile d'interprèter, dans ce langage, les opérations du calcul étudié au chap. I : à la conjonction de deux propriétés P et Q (par exemple, d'être majeur <u>et</u> de sexe masculin), correspond l'ensem--ble des éléments communs aux deux ensembles définis respectivement par les propriétés P et Q ; la disjonction et la négation s'inter--prètent aussi facilement. Et, de même que le statisticien ou le militaire ne s'interdit pas de faire figurer sur ses "états" des propriétés qui n'appartiennent à aucun des objets dont il s'occupe, mais se réserve simplement d'écrire en face le mot "néant", de même le mathématicien n'exclut pas cette éventualité, mais dira alors que l'ensemble des objets pour lesquels la propriété est vraie est <u>vide</u> : il en sera ainsi, par exemple, de l'ensemble des habitants de la France qui sont nés avant le 14 juillet 1789, mais cet ensemble n'en sera pas moins considéré comme une partie, bien déterminée, de la population de la France ; l'ensemble des habitants nés avant l'an 2000 forme aussi, au 31 décembre 1937, une partie de la population, qui se confond avec la population tout entière (par une extension du sens du mot "partie", analogue à celle qu'a subie depuis bien plus longtemps le mot "fraction", et qui, bien que contraire aux usages du langage courant, est indispensable au mathématicien) .

Abandonnant notre "figure", nous allons d'abord nous occuper d'un type T, et de propriétés P(x) portant sur une variable x de ce type. Chacune de ces propriétés sera considérée comme définis- -sant un objet d'<u>un type nouveau</u>, qui sera appelé <u>l'ensemble des objets de type</u> T <u>qui possèdent la propriété</u> P(x), et que nous noterons par exemple E_p ; et nous conviendrons que deux propriétés définissent le même ensemble si elles sont équivalentes, et dans ce cas seulement ; nous considérerons aussi la phrase "x est élément de E_P" comme étant, par définition, une propriété de x équivalente à P(x) ; nous la noterons "$x \in E_P$", et sa négation "$x \notin E_P$" .

Observons en particulier que, si deux propriétés P(x), P'(x) sont telles que "quel que soit x, P(x)" et "quel que soit x, P'(x)" soient vraies toutes deux, elles sont équivalentes. (L'on peut énoncer de telles propriétés ; par exemple, comme nous le verrons dans un instant, "quel que soit x, x = x" est vrai ; si Q(x) est

En exercice !

une propriété quelconque d'un argument de type T, "quel que soit x, Q(x) ou $\overline{Q}(x)$" est vrai ; ou plus simplement encore, en vertu des conventions posées au chap. I, "quel que soit x, p" est vrai si p est n'importe quelle proposition vraie). Il y a donc un ensemble E, déterminé d'une manière unique lorsqu'on s'est donné le type T, et tel que "quel que soit x, $x \in E$" soit vrai, c'est-à-dire tel que tout objet du type T doive, d'après nos conventions, être considéré comme un élément de E ; E s'appelle l'<u>ensemble fondamental</u>

du type T (ou l'ensemble des objets de type T). Au lieu des objets de type T, il revient donc au même de parler des éléments de l'ensem--ble fondamental E ; c'est-à-dire qu'il est indifférent de se donner un type ou bien un ensemble fondamental.

On voit de même qu'une propriété $Q(x)$, telle que "quel que soit x, $\overline{Q}(x)$" soit vrai, définit un ensemble, déterminé d'une manière unique lorsqu'on s'est donné le type, qu'on désignera toujours (quel que soit le type) par $\emptyset$, et qu'on appellera l'<u>ensemble vide</u> du type T ; il est donc défini par la condition que "quel que soit x, $x \notin \emptyset$" soit vrai, ou, ce qui revient au même, que "il existe x tel que $x \in \emptyset$ " soit faux.

Quelle que soit la propriété $P(x)$ de l'argument x, l'ensemble E_P des objets de type T qui possèdent cette propriété sera dit une <u>partie</u> ou bien un <u>sous-ensemble</u> de l'ensemble fondamental E. Plus généralement, soient $P(x)$, $Q(x)$ deux propriétés telles que "$P(x) \longrightarrow Q(x)$" soit vrai : si elles définissent respectivement les ensembles E_P, E_Q, nous dirons que E_P est une <u>partie</u> de E_Q ou un <u>sous-ensemble</u> de E_Q, ou encore que E_P est <u>contenu</u> dans E_Q ou que E_Q <u>contient</u> E_P ; ce qui se notera, indifféremment, $E_P \subset E_Q$ ou $E_Q \supset E_P$; la négation de cette proposition se notant $E_P \not\subset E_Q$ ou $E_Q \not\supset E_P$. En particulier, on a toujours $E_P \subset E_P$ et $E_P \supset E_P$; réciproquement, si $E_P \subset E_Q$ et $E_P \supset E_Q$, c'est que "$P(x) \rightleftarrows Q(x)$" est vrai, donc que E_P ne diffère pas de E_Q. Si $P(x)$ est telle que "quel que soit x, $\overline{P}(x)$" soit vrai, "$P \longrightarrow Q$" sera vrai, donc $\emptyset \subset E_Q$ si $Q(x)$ est n'impor--te quelle propriété de l'argument x. Pour alléger le langage, un sous-ensemble de l'ensemble des parties de E sera le plus souvent appelé une <u>famille</u> de parties de E ; le mot "famille" ayant donc exactement le même sens que le mot "ensemble", mais étant réservé par l'usage à des cas spéciaux ("famille d'ensembles", "famille de fonctions", etc..).

Un type T, ou, si l'on préfère, un ensemble fondamental E étant donné, nous nous sommes donné le droit de considérer, comme des objets d'un type nouveau, les parties de E ; l'ensemble des objets de ce type s'appellera l'ensemble des parties de E, et se notera P(E) : premier exemple de la très importante opération qui consiste, un ou plusieurs types étant donnés, à en dériver de nouveaux types. Comme nous l'expliquerons plus tard, l'ensemble des parties de E doit être considéré, d'un certain point de vue que nous préciserons (cf. chap. III, §   , th.   ) comme plus riche que E, aussi dit-on quelquefois qu'en faisant cette opération on est monté dans l'échelle des types. Inversement, soit A une partie de E : chaque fois que ce sera utile, on considérera les éléments de A comme des objets d'un type nouveau T_A, distinct de T ; bien entendu toute propriété qui a un sens pour les objets de type T en conserve un pour les objets de ce nouveau type, mais il arrive assez souvent qu'on ait à définir des propriétés de ceux-ci qui n'ont aucun sens pour un objet quel- -conque de type T, et c'est ce qui justifie l'introduction d'un type nouveau.

Pour pouvoir poursuivre, il nous faut maintenant introduire la plus simple de toutes les relations, l'<u>égalité</u>, qui s'écrit "   =   ", les blancs ne devant être remplis que par des objets de même type, ou, avec la notation par arguments, "x = y", où x, y sont deux arguments de même type.

C'est donc l'une de ces relations où (contrairement à ce qu'enseignent certains logiciens) il n'est pas nécessaire d'assigner à chacun des blancs un type déterminé auquel devront appartenir les objets capables de le remplir, mais où les types des objets capables de remplir les divers blancs sont seulement assujettis à avoir un certain rapport les uns avec les autres. De même, dans la relation " $\supset$ " définie plus haut, les blancs doivent être remplis par deux objets du type des parties d'un même ensemble fondamental, celui-ci étant d'ailleurs quelconque.

Une fois de plus, c'est de la pratique courante que nous extrayons les règles qui concernent la relation $x = y$, et que voici. "quel que soit x, $x = x$" est vrai ; "$x = y \rightleftarrows y = x$" est vrai ; "$x = y$ et $y = z$ entraîne que $x = z$" est vrai. Enfin, si $P(x)$ désigne n'importe quelle propriété de l'argument x, "si $x = y$, $P(x) \rightleftarrows P(y)$" est vrai. Si donc a, b sont deux objets du type de l'argument x, et si $a = b$, $P(a)$ est équivalent à $P(b)$; si d'autre part "$a = b$" est faux, et qu'on désigne par $P(x)$ la propriété "$x = a$", $P(a)$ sera vrai et $P(b)$ sera faux : dire que $a = b$, c'est donc, si l'on veut, dire qu'il n'y a pas de propriété que a possède sans que b la possède aussi. Ou bien, si au lieu des propriétés l'on préfère parler des parties de l'ensemble fondamental qu'elles définissent, on voit que la relation "$x = y$" est équivalente à la relation "quel que soit la partie A de l'ensemble fondamental, si $x \in A$, $y \in A$ ".

On notera $x \neq y$ la négation de $x = y$. Quant à la partie de l'ensemble fondamental qui est définie par la propriété "$x = a$", on la note $\{a\}$; autrement dit, $x \in \{a\}$ est par définition équivalent à $x = a$; bien entendu, a et $\{a\}$ ne sont pas des objets de même type, et toute confusion entre eux exposerait à de graves erreurs.

Un ensemble tel que $\{a\}$ est dit un ensemble à un seul élément ; et si P(x) est équivalente à x = a, on dira que a est le seul élément de l'ensemble fondamental qui possède la propriété P ; il faut et il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que P(a) soit vrai et que "P(x) et P(y)" entraîne "x = y" (puisqu'alors P(x) entraîne "P(x) et P(a)" donc "x = a"). En général, quand "P(x) et P(y)" entraîne "x = y", on dit qu'il y a au plus un x tel que P(x) ; si de plus on sait qu'il existe un x tel que P(x), on dira qu'il existe un x et un seul tel que P(x) : schéma de proposition très important et qu'on rencon--trera très souvent.

Lorsque la proposition "il existe un x et un seul tel que P(x)" est vraie, on a le droit (chap. I, § 2) de dire : soit a un objet du type T tel que P(a) soit vrai ; et alors P(x) est équivalent à "x = a". Aussi dira-t-on, dans ce cas soit a l'objet de type T tel que P(a) soit vrai.

Enfin, en vertu de conventions déjà posées, P et Q étant deux propriétés d'objets d'un type T, E_P et E_Q étant les ensembles qu'elles définissent, $E_P = E_Q$ sera par définition une proposition équivalente à celle-ci : "~~p~~ P,Q sont équivalentes" ; d'après le chap. I, § 2, cette relation entre ensembles satisfait bien aux conditions généra--les que nous avons énoncées pour la relation d'égalité (c'est-à-dire qu'on a bien, quelles que soient les parties A, B, C d'un même ensemble fondamental, A = A ; A = B est équivalent à B = A ; A = B et B = C entraînent que A = C : tout cela en vertu des résultats qui nous sont connus sur l'équivalence des relations).

Nous pouvons maintenant donner l'interprétation, en termes d'ensembles, des opérations logiques sur les relations.

Désignons par E l'ensemble fondamental du type T ; soit $A \subset E$; la négation de $x \in A$ s'écrit $x \notin A$: l'ensemble des x tels que $x \in A$ s'appelle le <u>complémentaire</u> de A et se note $\complement A$ ou $\complement(A)$.

Soit $B \subset E$; considérons la propriété "$x \in A$ ou $x \in B$" : l'ensemble des objets qui la possèdent, c'est-à-dire qui sont éléments de l'un au moins des deux ensembles A, B, s'appelle la <u>réunion</u> de A et de B, et se note $A \cup B$ (ce qui se lit "A u B"). L'ensemble des objets qui possèdent la propriété "$x \in A$ et $x \in B$", c'est-à-dire qui sont à la fois éléments de A et de B, s'appelle l'<u>intersection</u> de A et de B, et se note $A \cap B$ (ce qui se lit "A inter B"). De même pour l'intersection et la réunion de plus de deux ensembles.

> On a parfois quelque difficulté, au début, à se rappeler lequel des deux signes désigne la réunion et lequel l'intersection ; on pourra, si l'on veut, s'aider du fait que $\cup$ ressemble à la lettre u, initiale du mot "union".

Des règles du calcul des propositions se déduisent immédiatement celles qui gouvernent le calcul des signes $\complement$, $\cup$, $\cap$, ainsi que leurs relations avec les signes $\supset$, $\subset$; voici ces règles, E désignant toujours le fondamental :

1. On a $\complement(\complement A) = A$; $\complement(E) = \emptyset$, $\complement(\emptyset) = E$.
2. On a $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$, $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$.
3. On a $A \cap A = A \cup A = A$; $A \cap \complement A = \emptyset$, et $A \cup \complement A = E$.
4. On ne change pas l'intersection ni la réunion de plusieurs ensembles en changeant l'ordre de ceux-ci, ou en groupant ceux-ci par des parenthèses.
5. On a $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, et $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

On a l'habitude d'exprimer 4. en disant que les opéra-tions $\cap$, $\cup$ sont commutatives et associatives, et 5. en disant qu'elles sont distributives l'une par rapport à l'autre. Ici encore, nous renvoyons à l'algèbre pour une étude plus détaillée de ces propriétés.

6. On a les équivalences suivantes :

$$A \subset B \rightleftarrows \complement A \supset \complement B \rightleftarrows A \cup B = B \rightleftarrows A \cap B = A.$$

Chacune de ces règles, en effet, est la traduction exacte d'une règle correspondante du calcul des propositions : nous laissons au lecteur le soin de la vérifier.

Dans le cas particulier où $A \supset B$, il est d'usage de noter $A - B$ l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B, c'est-à-dire l'ensemble $A \cap \complement B$. Avec cette notation, on a les formules suivantes (conséquences immédiates des règles ci-dessus) :

1. $\complement A = E - A$.
2. $(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C)$.
3. $(A \cup B) - A = B - (A \cap B)$.

Enfin, il arrive, dans certaines théories, qu'il soit commode d'employer le signe + au lieu du signe $\cup$ dans le cas particulier où il s'agit d'ensembles dont l'intersection est vide ; pour le moment nous ne ferons pas usage de cette notation, dont l'emploi d'ailleurs ne prête à aucune remarque.

§ 2. Relations, produits de types.

Nous avons défini les ensembles au moyen de propriétés d'un seul argument ; pour pouvoir faire rentrer aussi les relations dans le cadre de cette théorie, il est nécessaire de définir une notion très importante, celle du produit de types.

Désignons par a, b, c des objets quelconques de type respectif T, T', T" ; la notation (a, b, c) désignera pour nous désormais un objet de type nouveau, ce type qu'on notera (T, T', T"), étant appelé le <u>produit</u> des types T, T', T" ; un argument de ce type pourra être noté (x, y, z), si x, y, z sont des arguments de type respectif T, T', T" ; on appellera a, b, c respectivement la première, la seconde, la troi-sième coordonnée de l'objet (a, b, c) de type (T, T', T"), et, de même, x, y, z la première, la seconde, la troisième coordonnée de l'argument (x, y, z) du même type. Par définition, on considérera la relation "(x, y, z) = (x', y', z')" comme équivalente à la conjonction des trois relations "x = x', y = y', z = z' ".

Comme le lecteur l'aura sans doute aperçu, ces défi-nitions et notations ont leur origine dans la géomètrie analytique ; en effet (cf., dans ce traité, référence), par un point de l'espace, en géomètrie analytique, on entend un système de trois nombres réels (a, b, c) qui sont les coordonnées du point ; de sorte que, si T dési-gne le type des nombres réels, l'espace de la géomètrie analytique apparaît comme l'ensemble des objets de type (T, T, T) ; et le plan de la géomètrie analytique est l'ensemble des objets de type (T, T) ; on aura avantage, dans ce qui suit, à se reporter, en esprit, au cas du plan ou de l'espace pour illustrer tout ce que nous dirons des produits de type, c'est-à-dire de s'en servir comme de <u>figures</u> ou d'aides à l'imagination.

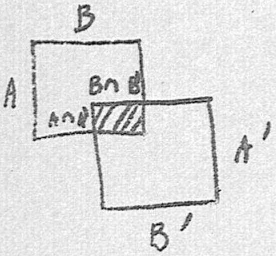
Il importe d'observer que, si nous parlons de première, seconde, troisième coordonnées, c'est que l'usage de l'écriture amène tout naturellement à les ranger dans un certain ordre et à les numéroter en consé-quence ; mais on pourrait aussi bien les écrire l'une au dessous de l'autre et les appeler les coordonnées supérieure, moyenne, inférieure ; ou bien encore, conve-nant de les écrire toujours, l'une en rouge, l'autre en noir, l'autre en bleu, les appeler la coordonnée rouge, la coordonnée noire, la coordonnée bleue, sans attacher aucune signification à l'ordre dans lequel elles se trouveraient écrites ; un peu plus loin, nous introduirons les notations qui nous mettront en état d'exprimer ces faits d'une manière adéquate ; pour l'instant, nous nous en tenons au procédé qui consiste à ranger les coordonnées dans un ordre déterminé et à les numéroter.

Soit maintenant une relation $R(x, y, z)$ contenant les arguments x, y, z de type T, T', T'' respectivement. Si $A = (a,b,c)$ est un objet de type (T, T', T''), la phrase "les trois coordonnées de A sont entre elles dans la relation R" sera considérée comme une autre manière d'énoncer la proposition $R(a,b,c)$, et par conséquent la phrase "les trois coordonnées de $X = (x,y,z)$ sont entre elles dans la relation R" sera une propriété de l'argument X, équivalente à la relation $R(x, y, z)$. Ces conventions de langage (que nous ne faisons que dégager, suivant notre méthode, du langage mathéma-tique usuel) s'étendent d'elles-mêmes au cas d'une relation R qui ne contienne que quelques-uns des arguments x, y, z, et par exemple d'une relation $R(x, y)$, à laquelle correspondra ainsi la propriété équivalente de l'argument X "les deux premières coordon-nées de X sont entre elles dans la relation R". Réciproquement, toute propriété de X pourra être considérée comme une relation contenant les arguments x, y, z (qui pourra d'ailleurs, éventuelle-ment, être équivalente à une relation où ne figurent pas tous ces arguments). Si alors nous appliquons les définitions du § 1, nous voyons que toute relation où ne figurent pas d'autres arguments que x, y, z définit un sous-ensemble de l'ensemble fondamental du type (T, T', T''), et réciproquement, et que deux relations définissent le même ensemble si elles sont équivalentes et dans ce cas seulement. En particulier, soient E, E', E'' les ensembles fondamentaux des types T, T', T'' ; soient $A \subset E$, $B \subset E'$, $C \subset E''$; la conjonction des trois relations "$x \in A$, $y \in B$, $z \in C$" définit dans l'ensemble fondamental du type (T,T',T'') un sous-ensemble qui sera noté $A \times B \times C$:

c'est l'ensemble des éléments $X = (x,y,z)$ dont les trois coordonnées soient éléments respectivement de A, de B, de C ; et par suite $E \times E' \times E''$ désignera l'ensemble fondamental lui-même.

De ces définitions résulte aussitôt la formule importante :

$$(A \times B \times C) \cap (A' \times B' \times C') = (A \cap A') \times (B \cap B') \times (C \cap C')$$



Tout ceci n'est que l'extension, à des ensembles fonda- -mentaux quelconques, de ce qu'on fait couramment en géomè- -trie analytique. Soit R l'ensemble des nombres réels (notation que nous suivrons dans tout ce traité), de sorte que l'espace de la géomètrie analytique sera $R \times R \times R$; les relations au moyen desquelles on définit des parties de l'espace sont très souvent des relations d'égalité ou bien d'inégalité contenant les trois arguments x, y, z ; par exemple elles sont de la forme $f(x,y,z) = 0$ ou $f(x,y,z) \geqslant 0$, $f(x,y,z)$ pouvant par exemple désigner un polynome en x, y, z, ou bien un polynome contenant seule- -ment une partie des arguments x, y, z. Si A, B, C sont, par exemple, les parties de R (dites "intervalles") définies respectivement par les inégalités $a \leqslant x \leqslant a'$, $b \leqslant y \leqslant b'$, $c \leqslant z \leqslant c'$, $A \times B \times C$ sera un parallélépipède rectangle, à côtés parallèles aux axes de coordonnées. La conjonction des deux relations "$x^2 + y^2 \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$" définit un cylindre droit de rayon 1, de hauteur 1, à génératrices verticales. Etc.

Nous sommes maintenant en possession de deux opérations qui, à partir d'un ou plusieurs ensembles fondamentaux donnés, permettent d'en construire de nouveaux : l'une consiste à prendre l'ensemble des parties d'un ensemble fondamental déjà construit, l'autre consis- -te à prendre le produit de deux ou plusieurs facteurs dont chacun soit un ensemble fondamental déjà construit. N'importe quel ensem- -ble fondamental qu'on aura ainsi, par application répétée (dans n'importe quel ordre) de ces opérations, construit à partie d'en- -sembles fondamentaux donnés, sera dit <u>dérivé</u> de ceux-ci ; le type correspondant sera dit <u>dérivé</u> des types des ensembles fondamentaux dont on est parti, ou bien l'on dira qu'il appartient à l'<u>échelle</u>

des types construits sur ceux-ci. L'on verra plus loin (chap. III) comment toute théorie mathématique fait intervenir certains types dits "primitifs", et un certain nombre de types dérivés de ceux-ci.

On notera que suivant nos conventions de langage, les types (T, T') et (T', T) doivent être considérés comme distincts si T, T' sont des types distincts ; de même (T,T',T"), ((T,T'),T"), (T,(T',T")), etc.: cela est indispensable si l'on veut que les expressions "première coordonnée, seconde coordonnée, etc." aient toujours un sens déterminé pour un objet d'un certain produit de type ; par exemple la première coordonnée de (a,b,c) est a, et celle de ((a,b),c) est (a,b). Mais l'on aperçoit aussitôt qu'il y a, entre ces différents types, un rapport étroit que nous apprendrons à exprimer, au § suivant, en définissant entre eux une certaine correspondance biunivoque bien déterminée (dite canonique). Bien entendu, l'on pourrait imaginer qu'au moyen de conventions de langage convenables on puisse se donner le droit de considérer comme identiques ces types que nous considérons comme distincts : ce serait peut-être avantageux pour une théorie de l'échelle des types, mais pour nous cela présenterait moins d'avantages que d'inconvénients. Par une image empruntée à la chimie, on peut dire, en un sens, que les types (T, T') et (T', T) sont des "isotopes" de l'échelle des types ; de même (T,T',T") et ((T,T'),T"), etc.

Plaçons-nous dans l'ensemble fondamental d'un type produit, par exemple $E \times E' \times E''$; x, y, z étant des arguments susceptibles respectivement de valeurs dans E, E', E". (A titre de "figure", nous recommandons au lecteur de se servir par exemple de l'espace de la géomètrie analytique). Soit A une partie de $E \times E' \times E''$; considérons la relation "il existe y et z tels que $(x,y,z) \in A$" : c'est une propriété de x, et l'ensemble des éléments de E qui la possèdent s'appellera la projection de A sur E ; de même, la relation "il existe z tel que $(x,y,z) \in A$" définit dans $E \times E'$ un sous-ensemble qui s'appellera la projection de A sur $E \times E'$. En particulier, si A est un ensemble à un seul élément, $A = \{(a,b,c)\}$, la projection de A sur E est $\{a\}$; par un "abus de langage" (cf. Mode d'emploi de Bourbaki), on dira quelquefois que a est la projection sur E de l'élément (a,b,c) de $E \times E' \times E''$.

A étant toujours une partie de $E \times E' \times E''$, soit c un élément de E" ; considérons l'intersection de A et de l'ensemble des points qui satisfont à z = c, c'est-à-dire (avec nos notations) de l'ensemble $E \times E' \times \{c\}$: cette intersection s'appelle souvent, d'une manière abrégée, la section de A par l'ensemble z = c. Considérons maintenant la projection de cette section sur $E \times E'$: c'est l'ensemble des éléments (x,y) de $E \times E'$ qui possèdent la propriété "il existe z tel que $(x,y,z) \in A$ et que z = c", ou en d'autres termes c'est l'ensemble des éléments (x,y) de $E \times E'$ tels que $(x,y,z) \in A$: cet ensemble s'appellera la <u>trace</u> de A pour z = c et se note Az = c ou Ac. De même, par exemple, l'ensemble des x tels que $(x,b,c) \in A$ s'appellera la trace de A sur E pour y = b, z = c et se note $A_{y = b,\ z = c}$ ou $A_{b,c}$; c'est la projection sur E de l'intersection de A avec l'ensemble $E \times \{b\} \times \{c\}$, c'est-à-dire de la section de A par l'ensemble y = b, z = c.

Enfin, observons que la notion de types produits peut, non seulement servir à considérer toute relation comme une propriété d'un seul argument, mais encore permettre, dans toute relation, de remplacer plusieurs arguments par un seul ; par exemple, si R(x,y,z,u,v) est une relation contenant cinq arguments, et si l'on pose X = (x,y,z), R apparaîtra comme une relation entre les trois arguments X, u, v ; si de plus on pose U = (u,v), R pourra être considérée comme relation entre X et U ; etc.

§ 3. Fonctions, correspondances.

Soient x, y deux arguments prenant leurs valeurs dans des ensem-bles fondamentaux E, E', et X = (x,y) un argument prenant ses valeurs dans $E \times E'$; considérons la relation entre x et X : "x est la pre-mière coordonnée de X". Chaque fois qu'on se donnera un élément A = (a,b) de $E \times E'$, on peut le substituer à X dans cette relation, qui devient alors "x est la première coordonnée de A", ce qui équi-vaut à "x = a". On dit, dans ces conditions, que notre relation définit x comme fonction de X, et que, lorsqu'on donne à X la valeur A = (a,b), la valeur de la fonction ainsi définie est a.

Soit maintenant, en général R(u,x,y,z) une relation quelconque, qui ne contienne pas d'autres arguments que u,x,y,z, de types res-pectifs U,T,T',T" ; supposons qu'on ait démontré la proposition

"quels que soient x,y,z, il existe un u et un seul tel que R(u,x,y,z)".

Alors, nous conviendrons que la relation R définit un objet nouveau, qui sera appelé la <u>fonction</u> de x,y,z définie par la rela-tion R, et qu'on notera par exemple $f_R(x,y,z)$; on dira aussi que R définit u comme fonction de x,y,z.

Nous conviendrons que deux relations R,S de cette nature défi-nissent la même fonction de x,y,z, et nous écrirons $f_R(x,y,z) = f_S(x,y,z)$ si R,S sont équivalentes, et dans ce cas seulement ; et nous conviendrons de considérer la combinaison de signes "$u = f_R(x,y,z)$" comme une relation équivalente à R(u,x,y,z). Il s'ensuit que, si a,b,c sont des objets de types respectifs T,T',T",

"$u = f_R(a,b,c)$" est équivalent à $R(u,a,b,c)$; mais, d'après l'hypo-thèse faite sur R, il existe un u et un seul tel que $R(u,a,b,c)$: soit donc d l'objet de type U tel que $R(d,a,b,c)$ soit vrai (nous avons le droit de parler ainsi, d'après ce chap., § 1), on aura donc $d = f_R(a,b,c)$: autrement dit, la fonction $f_R(x,y,z)$ joue le rôle d'un schéma, contenant des arguments x, y,z (c'est-à-dire des "blancs"), qui, chaque fois qu'on y a rempli les blancs x,y,z par des objets a,b,c des types voulus, dénote un objet d'un type déterminé, qu'on appelle la <u>valeur</u> de la fonction pour $x = a$, $y = b$, $z = c$. Si cette valeur est indépendante de celles qu'on donne à x,y,z, c'est-à-dire si l'on a, quels que soient x, y,z, x',y',z', $f(xyz) = f(x'y'z')$, on dira que la fonction f est <u>constante</u>.
Si E, E',E" sont les ensembles fondamentaux correspondant aux types des arguments x, y,z (c'est-à-dire si x, y, z sont des "élé-ments génériques" de E,E',E" respectivement), et si H est l'ensemble fondamental du type des valeurs de $f(x,y,z)$, on dira aussi que $f(x,y,z)$ est une fonction, à valeurs dans H, définie pour $x \in E$, $y \in E'$, $z \in E''$. Par exemple, soit $X = (x,y,z)$ un élément générique de $E \times E' \times E''$: la première, la seconde, la troisième coordonnée de X sont trois fonctions de X, à valeurs respectivement dans E, E', et E", et définies toutes trois pour $X \in E \times E' \times E''$. Soient X,Y,Z trois arguments du type des parties d'un ensemble fondamental E : la relation "$U = X \cap Y \cap Z$" définit U comme fonction de X,Y,Z, à valeurs du même type ; il apparaît, sur cet exemple, que toutes les fois qu'on définit une fonction au moyen d'une relation de la forme "$u = F(x,y,z)$", où $F(x,y,z)$ est une combinaison de signes qui ne

contienne pas d'autre argument que x,y,z, il sera inutile de fabri--quer un signe nouveau pour désigner la fonction ainsi définie : celle-ci sera désignée par la combinaison de signes $F(x,y,z)$ elle-même. Cette remarque s'applique encore, par exemple, à $X \times Y$, fonction des arguments $X \subset E$, $Y \subset E'$, à valeurs dans $P(E \times E')$. La projection sur E d'une partie X de $E \times E'$ est une fonction de X, à valeurs dans P(E) ; la trace X_x de $X \subset E \times E'$ pour la valeur x donnée à la première coordonnée est une fonction de $X \subset E \times E'$ et de $x \in E$, qui prend ses valeurs dans $P(E')$.

Comme on sait, la variété de notations employée en mathématique pour désigner des fonctions est extrême, et ne se laisse pas résumer en règles ; en voici quelques échan--tillons (x étant un argument du type des nombres réels) :

$$f(x),\ f_x\ ;\ \sin x,\ e^x,\ |x|,\ \langle x \rangle,\ x^2,\ |x|^x,\ \sqrt[3]{x}.$$

Nous attirons spécialement l'attention sur la notation f_x, dite <u>notation indicielle</u>, l'argument x s'appelant alors l'<u>indice</u>. Très souvent, lorsque l'indice sera susceptible de prendre ses valeurs dans l'ensemble des entiers plus petits qu'un entier déterminé, on le notera par la lettre i ; par la lettre n, s'il prend ses valeurs dans l'ensemble de tous les entiers ; par la lettre grecque ι (iota) s'il prend ses valeurs dans un ensemble fondamental quelconque : bien entendu, ces conventions n'ont rien d'obligatoire.

La notation fonctionnelle permet d'apporter un complément très important aux principes que nous avons formulés pour l'usage des arguments. Supposons que dans telle démonstration figurent des arguments u,x,y,z ; que $R(u,x,y,z)$ soit une relation définissant une fonction $u = f(x,y,z)$; et que toutes les propositions, dans la démonstration dont il s'agit, contiennent les mots "quel que soit u, si $R(u,x,y,z)$..." : ou, ce qui revient au même par définition, les mots "quel que soit u, si $u = f(x,y,z)$..." ; alors on conviendra, au lieu de répéter ces mots chaque fois, de remplacer l'argument u, partout où il figure, par les signes $f(x,y,z)$. Par exemple, soit $S(u,v)$ une relation où figure u et un autre argument v ; par la relation

$$S\left[f(x,y,z),v\right]$$

on entendra la relation "quel que soit u, si $u = f(x,y,z)$, $S(u,v)$". De même encore, soit $F(u,v)$ une fonction de u et v ; la relation

$$w = F\left[f(x,y,z),v\right]$$

équivaut à "quel que soit u, si $u = f(x,y,z)$, $w = F(u,v)$" : mais cette relation définit w comme fonction de x,y,z et v (fonction qu'on notera donc, d'après nos conventions, $F\left[f(x,y,z),v\right]$) : pour le voir, il suffit de montrer que, si a,b,c,e sont des objets ayant les types voulus pour pouvoir être substitués à x,y,z,v, il y a un w et un seul tel que "quel que soit u, si $u = f(a,b,c)$, $w = F(u,e)$" soit vrai ; or $f(a,b,c)$ désigne un objet du type correspondant à l'argument u, objet que nous pouvons désigner par d ; alors "quel que soit u, si $u = d$, $w = F(u,e)$" est équivalent à "$w = F(d,e)$", ce qui démontre le point annoncé. On peut donc, dans tout symbole de fonction, substituer à certains arguments des fonctions d'autres arguments, pourvu que les restrictions relatives aux types soient satisfaites.

Soit $f(x,y,z)$ une fonction de plusieurs arguments, définie par une relation $R(u,x,y,z)$, supposons que les arguments u,x,y,z prennent respectivement leurs valeurs dans H, E, E', E'' ; alors $X = (x,y,z)$ est un argument prenant ses valeurs dans $E \times E' \times E''$; $R(u,x,y,z)$ peut être considéré comme une relation comprenant les deux arguments u et X, et définira une fonction $f(X)$;

les relations "$u = f(x,y,z)$" et "$X = (x,y,z)$, et $u = f(X)$" sont équivalentes ; les produits de types permettent donc toujours de ramener l'étude d'une fonction de plusieurs arguments à celle d'une fonction d'un seul argument ; c'est même ce que nous trouverons presque toujours commode de faire.

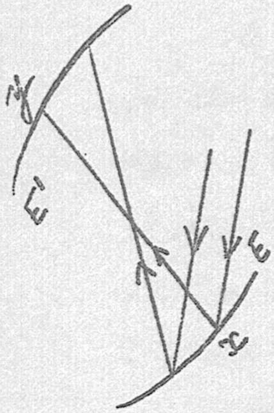
Par exemple, il y a presque toujours intérêt à considérer une fonction de trois variables réelles comme une fonction d'un seul argument prenant ses valeurs dans l'espace $R \times R \times R$ de la géomètrie analytique ; c'est même pour cette raison que l'on a été conduit à introduire les espaces à un nombre quelconque de dimensions, c'est-à-dire des produits $R \times R \times \ldots \times R$ à un nombre quelconque de facteurs, plutôt que de parler de fonctions de n variables réelles.

Nous plaçant à partir de maintenant à ce point de vue, nous ne parlerons plus, dans ce §, que de fonctions d'un seul argument. Soit $f(x)$ une telle fonction, définie pour $x \in E$ (ou, comme nous dirons aussi, définie <u>dans</u> E ou <u>sur</u> E), et à valeurs dans E'. La relation "$y = f(x)$", que nous lui avons associée, définit dans $E \times E'$ un ensemble A ; réciproquement, une partie A de $E \times E'$ définit une fonction $f(x)$, définie dans E, prenant ses valeurs dans E', si la proposition "quel que soit x, il y a un y et un seul tel que $(x,y) \in A$" est vraie.

L'ensemble A est bien connu dans l'enseignement élémentaire, lorsque x, y sont des arguments réels, sous le nom de <u>courbe représentative</u> de la fonction $f(x)$; de même, si l'on considérait une fonction $f(x,y)$, à valeurs dans R, les arguments x, y prenant aussi leurs valeurs dans R, on lui ferait correspondre, dans l'espace $R \times R \times R$, l'ensemble $z = f(x,y)$, <u>surface représentative</u> de la fonction $f(x, y)$.

Soit, plus généralement, A une partie quelconque du produit $E \times E'$: on dit que A définit une <u>correspondance</u> de E à E' (donc aussi, bien entendu, une correspondance de E' à E, les deux correspondances ainsi définies étant certainement distinctes si E, E' ne sont pas identiques, et l'étant en général même si $E = E'$) ; et la phrase "y correspond à x par la correspondance définie par A" (ou en abrégé "... par la correspondance A") sera considérée comme une autre manière d'exprimer la relation "$(x,y) \in A$". Si à tout x correspond ainsi un y et un seul, c'est que la relation $(x,y) \in A$ définit y comme fonction de x : souvent, par "abus de langage" (cf. Mode d'emploi de Bourbaki) on ne distinguera pas entre cette fonction et la correspondance définie par A, de sorte qu'une fonc--tion d'un seul argument apparaît alors comme une correspondance d'une espèce particulière. Par exemple, la relation "$y = x$" définit une correspondance d'un ensemble fondamental quelconque E à lui-même, qui s'appelle la <u>correspondance identique</u>, et une fonction de x, la fonction x.

Une correspondance A, quelle qu'elle soit, permet de définir certaines fonctions. Considérons d'abord l'ensemble des y qui cor--respondent à x par la correspondance A : ce n'est évidemment pas autre chose que la trace A_x de A lorsqu'on donne à la première coordonnée la valeur x ; c'est une fonction de $x \in E$, à valeurs dans $P(E')$. Soit maintenant X un argument prenant ses valeurs dans $P(E)$; soit Y l'ensemble des y qui correspondent à un élément au moins de X par la correspondance A, ou en d'autres termes l'ensem--ble des y tels qu'il existe un x tel que $x \in X$ et $(x,y) \in A$; Y est ainsi défini comme fonction de X, définie pour $X \subset E$, prenant ses valeurs dans $P(E')$; Y s'appelle l'<u>image</u> de X dans E' par la correspondance A, et pourra se noter $A(X)$.



On peut, de toute sorte de manières, illustrer l'emploi de ce mot par des "figures". Par exemple, imaginons que des rayons lumineux, issus de sources quelconques, viennent se réfléchir sur un miroir E et que certains d'entre eux, après réflexion, viennent frapper un objet E' ; nous dirons qu'un point y de E' correspond à un point x de E s'il y a un rayon, se réfléchissant sur E en x, qui après réflexion passe en y. Soit X une partie de E : supposons qu'on cache tous les points de E sauf ceux de X ; l'ensemble Y des points de E' qui sont éclairés dans ces conditions sera justement l'image de X par notre correspondance.

Exercices. 1) Montrer que l'image de X dans E', par A, n'est pas autre chose que la projection sur E' de l'intersection, dans $E \times E'$, de A et de $X \times E'$.

2) Montrer que l'on a, si A est une correspondance de E à E' et si X_1, X_2 sont des parties de E :

$$A(X_1 \cup X_2) = A(X_1) \cup A(X_2).$$

3) Donner un exemple de la relation

$$A(X_1 \cap X_2) \neq A(X_1) \cap A(X_2).$$

4) Montrer que si $X_1 \supset X_2$, on a $A(X_1) \supset A(X_2)$.

5) Montrer que l'on a $A(\emptyset) = \emptyset$.

En particulier, si $X = \{x\}$, l'image de X n'est pas autre chose que la trace A_x ; par "abus de langage" cette trace sera souvent appelée l'image de l'élément x de E. Par un "abus de langage" corrélatif, lorsque la correspondance étudiée est une fonction $f(x)$, l'image de $X \subset E$ dans E' se notera le plus souvent $f(X)$: l'abus de langage consistant ici, comme on voit, à employer le même signe f pour la fonction $f(x)$, définie dans E et prenant ses valeurs dans E', et pour la fonction $f(X)$, définie dans $P(E)$ et prenant ses valeurs dans $P(E')$; en particulier, si $f(x) = y$, on aura $f(\{x\}) = \{y\}$.

Exercice. Montrer que, si x est un argument prenant ses valeurs dans un produit d'ensembles fondamentaux $E \times E' \times E''$, et si l'on désigne par $f(x)$ la première coordonnée de x (fonction prenant ses valeurs dans E), l'image $f(X)$ d'une partie X de $E \times E' \times E''$ n'est pas autre chose que la projection de X sur E .

On voit aussi que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une correspondance A soit une fonction est que l'image par A de tout ensemble à un seul élément soit un ensemble à un seul élément. L'ensemble des x dont l'image est un ensemble non vide est la projection de A sur E ; la projection de A sur E' est l'image A(E) de E dans E' par la correspondance A.

Soit A une partie de $E \times E'$, qui définit donc une correspondan-ce de E à E' ; soit B une partie de $E' \times E''$, définissant de même une correspondance de E' à E" ; soient x, y, z des éléments généri-ques de E, E', E" respectivement (c'est-à-dire des arguments prenant leurs valeurs dans E, E', E") ; considérons la relation "il existe y tel que $(x, y) \in A$ et $(y,z) \in B$" : c'est une relation entre x et z, qui définit une partie C de $E \times E''$ et une correspon-dance de E à E" ; z correspond à x, par C, si z correspond, par B, à un y au moins qui corresponde à x par A. On dira que la corres-pondance C est le produit des deux correspondances A, B, et on écrira $C = BA$, dans cet ordre ; cet ordre étant précisément tel qu'on puisse énoncer le théorème suivant :

Théorème. Soient X une partie générique de E, $Y = A(X)$ son image par la correspondance A, $Z = B(Y)$ l'image de Y par la correspon-dance B ; alors Z est l'image de X par $C = BA$, c'est-à-dire que l'on a :

$$BA(X) = B\left[A(X)\right].$$

C'est immédiat si l'on remplace A(X), B(Y), C(X) par leur définition.

Pour revenir à la "figure" donnée plus haut, on pourra imaginer que E' est lui-même un miroir, qui réfléchit les rayons venus de E sur une troisième surface E".

La notion du produit de correspondances est extrêmement importante. Elle l'est tout particulièrement s'il s'agit de "transformations" d'un ensemble fondamental en lui-même, car alors elle sert à définir les "groupes de transformation", dont l'importance en mathématiques est sans doute déjà connue du lecteur.

Exercice. Démontrer que, si A, A' sont deux parties de $E \times E'$, B, B' deux parties de $E' \times E''$, on a $(A \cup A')B = AB \cup A'B$, et donner des exemples des relations $(A \cap A')B \neq AB \cap A'B$ et $A(B \cap B') \neq AB \cap AB'$.

Lorsque les correspondances qu'on étudie sont des fonctions, la notion du produit de correspondance se réduit à celle de fonction de fonction ; "$y = f(x)$" et "$z = g(y)$" étant deux relations défi--nissant les fonctions $f(x)$, $g(y)$, la correspondance définie par la relation "$z = g\left[f(x)\right]$" est le produit des correspondances définies par "$z = g(y)$" et "$y = f(x)$".

Soit maintenant A une partie de $E \times E'$ telle qu'à tout $x \in E$ ne corresponde au plus, par la correspondance A, qu'un élément de E' ; c'est-à-dire telle que l'image $A(\{x\}) = A_x$ soit, quel que soit $x \in E$, ou bien la partie vide de E' ou bien un ensemble à un seul élément. Soient P, Q, respectivement, les projections de A sur le premier facteur E et sur le second facteur E' du produit $E \times E'$; on dira, soit que la correspondance A est une <u>application</u> (ou une <u>représentation</u>) de P <u>dans</u> E', soit que c'est une <u>application</u> (ou une <u>représentation</u>) de P <u>sur</u> Q ; par là on entend donc, comme on voit, qu'à tout élément de P correspond, par A, un élément et un seul de E' ; que tout élément de Q correspond, par A, à un élé--ment au moins de P ; et qu'aux éléments de $\complement P = E - P$ ne corres--pond, par A, aucun élément de E'. On voit donc, en particulier, que, si l'on considère les éléments de P comme des objets d'un type nouveau, c'est-à-dire P comme un nouvel ensemble fondamental, A détermine une fonction, définie sur P, et à valeurs dans E' (ou, si l'on préfère, à valeurs dans Q).

Supposons maintenant que, non seulement à tout $x \in E$ ne corres- -ponde par A qu'un élément au plus de E', mais aussi que tout $y \in E'$ ne corresponde au plus qu'à un élément de E. Dans ce cas, P et Q désignant encore les projections de A sur E et E', on dira que A est une correspondance <u>biunivoque</u> de P à Q (ou, comme on dit aussi avec moins de précision, entre P et Q), ou une application <u>biunivoque</u> de P sur Q. Alors, si $(a,b) \in A$, les deux relations "$(x,y) \in A$, $x = a$" et "$(x,y) \in A$, $y = b$" sont équivalentes.

Considérons d'abord le cas particulièrement intéressant d'une correspondance biunivoque entre deux ensembles fondamentaux E, E' : elle détermine donc deux fonctions, l'une, $y = f(x)$, définie dans E et à valeurs dans E', l'autre, $x = g(y)$, définie dans E' et à valeurs dans E ; les deux relations "$y = f(x)$", "$x = g(y)$" étant alors équivalentes. Réciproquement, si les fonctions $f(x)$, défi- -nies dans E et à valeurs dans E', et $g(y)$, définie dans E' et à valeurs dans E, sont telles que les relations "$y = f(x)$", "$x = g(y)$" soient équivalentes, la correspondance de E à E' que ces relations déterminent est biunivoque. Lorsqu'il en est ainsi, on dira que les fonctions f, g sont <u>inverses</u> l'une de l'autre ; l'on a alors

$$g\left[f(x)\right] = x , \quad f\left[g(y)\right] = y ,$$

et l'on convient d'écrire :

$$g(y) = \overset{-1}{f}(y), \quad f(x) = \overset{-1}{g}(x).$$

Considérons, dans ces conditions, un argument X du type des parties de E ; soit $Y = f(X)$ son image par f dans E' ; par le théorème sur les produits de correspondances, on aura $g(Y) = g\left[f(X)\right] = X$; donc, des deux relations "$Y = f(X)$", "$X = g(Y)$", la première entraîne la seconde ; on voit de même que la seconde entraîne la première, elles sont donc équivalentes ; elles définissent donc une correspondance biunivoque de $P(E)$ à $P(E')$, qu'on dit <u>engendrée</u> par celle qu'on s'est donnée de E à E'?

Soit encore un produit d'ensembles fondamentaux, $E \times E' \times E''$; supposons qu'on se donne une correspondance biunivoque, définie par les relations équivalentes $y = f(x)$, $x = g(y)$, entre E et un ensemble fondamental F, et, de même, des correspondances biunivoques $y' = f'(x')$, $x' = g'(y')$ entre E' et F', et $y'' = f''(x'')$, $x'' = g''(y'')$ entre E'' et F'' : ces correspondances permettent de définir une correspondance biunivoque $Y = F(X)$, $X = G(Y)$ entre $E \times E' \times E''$ et $F \times F' \times F''$, celle-ci étant dite engendrée par celles-là, par les formules :

$$X = (x, x', x'') \in E \times E' \times E'', \quad Y = (y, y', y'') \in F \times F' \times F'',$$
$$Y = F(X) = \left[f(x),\ f'(x'),\ f''(x'')\right],$$
$$X = G(Y) = \left[g(y),\ g'(y'),\ g''(y'')\right].$$

Dans ces conditions, puisque l'échelle des types sur des ensembles fondamentaux donnés se construit par les deux opérations ci-dessus (formation du produit et formation de l'ensemble des parties), l'on voit que si l'on se donne des correspondances biunivoques entre des ensembles fondamentaux E et F, E' et F', E'' et F'', elles engendrent des correspondances biunivoques déterminées entre tout ensemble fondamental de l'échelle des types construite sur E, E', E", et l'ensemble correspondant (c'est-à-dire construit de la même manière) de l'échelle construite sur F, F', F".

Certaines correspondances biunivoques sont particulièrement importantes pour nous. Soient d'abord E, E' deux ensembles fondamen--taux quelconques, distincts ou non ; soient x, y des éléments génériques de E, E' respectivement, de sorte que $X = (x,y)$ sera un élément générique de $E \times E'$, et $X' = (y,x)$ un élément générique de $E' \times E$; ces deux derniers arguments ont entre eux une relation qu'on peut exprimer en disant que "la première coordonnée de X est égale à la deuxième de X', et la deuxième de X à la première de X'" : on a là une correspondance, visiblement biunivoque, entre $E \times E'$ et $E' \times E$, qui sera appelée la <u>correspondance canonique</u> entre ces deux produits. Elle engendre donc aussi, entre les parties Z de $E \times E'$ et les parties Z' de $E \times E$, une correspondance biunivoque : celle-ci est telle que si $A \subset E \times E'$ et $A' \subset E' \times E$ se correspondent ainsi, les relations "$(x,y) \in A$" et "$(y,x) \in A'$" sont équivalentes ; ou en d'autres termes, les relations "y correspond à x par la corres--pondance A" et "x correspond à y par la correspondance A'" sont équivalentes : aussi dit-on que les correspondances A, A' sont <u>inverses</u> l'une de l'autre ; et l'on écrit

$$A' = \overset{-1}{A} .$$

Exercice. Donner un exemple où la correspondance $\overset{-1}{A}A$, de E à E, n'est pas la correspondance identique. Montrer que, si P et Q sont les projections de A sur E et sur E', tout élément de P se correspond à lui-même par la corres--pondance $\overset{-1}{A}A$, et tout élément de Q se correspond à lui-même par $A\overset{-1}{A}$. Montrer que, pour que A soit une correspon--dance biunivoque entre E et E', il faut et il suffit que les deux correspondances $A\overset{-1}{A}$ et $\overset{-1}{A}A$ soient les correspon--dances identiques de E à E et de E' à E' respectivement.

C'est à cause de l'existence d'une correspondance biunivoque "canonique" entre $E \times E'$ et $E' \times E$ que l'on peut, comme nous l'avons déjà dit, attribuer à ces deux ensembles la même place dans l'échelle des types construite sur E et E' ; on pourrait dire, si l'on veut, que l'opération du produit des types est commutative à une correspondance biunivoque près ; du même point de vue, on peut dire qu'elle est associative, car on peut, de même, établir une correspondance biunivoque (qui sera dite aussi "la correspondance canonique") entre $E \times E' \times E''$ et, par exemple, $(E \times E') \times E''$: c'est celle qui, à l'élément générique (x, y, z) du premier ensemble, fait correspondre l'élément $((x,y),z)$ du second.

Revenons maintenant au cas plus général où une partie A de $E \times E'$ détermine une application biunivoque de la projection P de A sur E, sur la projection Q de A sur E' ; considérons la correspondance $\overset{-1}{A}A$: c'est une correspondance de E à E, et par définition du produit des correspondances, la relation "$(x,z) \in \overset{-1}{A}A$" est équivalente à "il existe y tel que $(x,y) \in A$ et que $(y,z) \in \overset{-1}{A}$", ou encore à "il existe y tel que $(x, y) \in A$ et que $(z,y) \in A$" : mais A est biunivoque, c'est-à-dire que, quel que soit y, il existe au plus un x tel que $(x,y) \in A$: donc, si $(x,y) \in A$ et $(z,y) \in A$, on a $x = z$. Par conséquent, "$(x,z) \in \overset{-1}{A}A$" est équivalent à "il existe y tel que $(x,y) \in A$ et que $x = z$", donc (puisque "il existe y tel que $(x,y) \in A$" est équivalent à "$x \in P$") à "$x \in P$, $x = z$". Autrement dit, les hypothèses faites, $\overset{-1}{A}A$ est la correspondance identique de P à P, et de même $A\overset{-1}{A}$ la correspondance identique de Q à Q. Par conséquent, si X désigne une partie générique de P, et que $Y = A(X)$ soit son image dans E' (donc une partie de Q), on aura $\overset{-1}{A}(Y) = X$: si X et Y désignent respectivement des parties génériques de P et Q, la première des deux relations "$Y = A(X)$", "$X = \overset{-1}{A}(Y)$" entraîne la seconde ; la seconde, de même, entraîne la première, elles sont donc équivalentes et déterminent une correspondance biunivoque entre les parties de P et celles de Q.

Tout cela s'applique en particulier au cas d'une application biunivoque d'un ensemble fondamental E dans un autre ensemble fondamental E' ; si l'on désigne par F l'image de E dans E' par une telle application A, l'on détermine une correspondance biunivoque entre les parties de E et celles de F en faisant correspondre à toute partie de E son image dans E'. Il importe de remarquer que cela s'applique au cas dont nous avons parlé plus haut, où l'on considère les objets d'une partie A d'un ensemble fondamental E correspondant à un certain type T comme des objets d'un nouveau type T_A : en effet, l'on a alors une correspondance biunivoque, qui sera dite la correspondance canonique, entre objets de type T_A et objets de type T, à savoir celle qui fait correspondre, à tout objet de type T_A le même objet considéré comme de type T. Il s'ensuit que, si l'on désigne par E_A l'ensemble fondamental du type T_A, il y a correspondance biunivoque entre les parties de E_A et les parties de A, correspondance dans laquelle A correspond à E_A .

Cette distinction entre les éléments de A considérés comme objets de type T et les mêmes éléments considérés comme objets de type T_A pourra paraître subtile ; assurément on pourrait éviter de la faire, et se borner à considérer des objets de type T. Si néanmoins nous l'avons introduite, c'est que, sans en prendre peut-être conscience, les mathématiciens font très souvent des distinctions de cette nature. Par exemple, qu'on se rappelle la définition des points du plan projectif : un tel point, c'est un système de trois nombres non tous les trois nuls (x,y,z), définis à un facteur près ; autrement dit, c'est l'ensemble de tous les systèmes (x,y,z), autres que $(0,0,0)$ qu'on peut définir à partir d'un même système par multiplication par un facteur arbitraire ; c'est donc, à proprement parler, un sous-ensemble de l'espace ordinaire $R \times R \times R$; donc, un objet du type des parties de $R \times R \times R$. Cependant, presque rien de ce qu'on a à dire des points du plan projectif ne s'appliquerait à des sous-ensembles quelconques de $R \times R \times R$, de sorte qu'il est bien préférable (et conforme au langage mathématique usuel) de considérer ces points comme des objets d'un type nouveau, et l'ensemble fondamental de ce type, c'est-à-dire le plan projectif, comme étant seulement en correspondance biunivoque avec un ensemble de parties de $R \times R \times R$ et non pas identique à celui-ci.

On a un autre exemple d'application biunivoque d'un ensemble dans un autre si l'on considère l'ensemble des fonctions définies dans un ensemble fondamental donné E et prenant leurs valeurs dans un ensemble fondamental donné E' : nous savons, en effet, qu'il y a correspondance biunivoque entre un telle fonction $f(x)$ et le sous-ensemble de $E \times E'$ qui est déterminé par la relation "$y = f(x)$", donc application biunivoque de l'ensemble de ces fonctions dans l'ensemble des parties de $E \times E'$.

Dès maintenant, à titre de "figure", donnons encore un exemple que nous retrouverons en topologie, et à partir duquel on fabriquera autant d'exemples analogues qu'on voudra. Considérons, dans le plan $R \times R$, le cercle unité, c'est-à-dire la partie de $R \times R$ qui est déterminée par la relation $x^2+y^2 = 1$; considérons les éléments (ou "points") de ce cercle comme des objets d'un type nouveau. Une courbe fermée dans le plan apparaît alors comme l'image du cercle dans le plan par une certaine application (application assujettie à être "continue", terme qui sera défini en Topologie, référence) ; elle sera dite sans point double si l'application est biunivoque.

Nous venons de démontrer que toute application biunivoque d'un ensemble fondamental E dans un ensemble fondamental E' détermine une application biunivoque de $P(E)$ dans $P(E')$; et plus précisément, que si la première est de E sur $A \subset E'$, la seconde est de $P(E)$ sur l'ensemble des parties de E' qui sont contenues dans A ; celle-ci sera dite <u>engendrée</u> par celle-là. Supposons maintenant qu'on ait des ensembles fondamentaux E, E', E" et F, F', F" ; et des applica- -tions biunivoques de E dans F, de E' dans F', de E" dans F", défi- -nies respectivement par les fonctions $y = f(x)$, $y' = f'(x')$, $y'' = f(x'')$; alors les relations

$$X = (x,x',x'') \in E \times E' \times E'', \quad Y = (y, y', y'') \in F \times F' \times F''$$
$$Y = F(X) = \left[f(x), f'(x'), f''(x'')\right]$$

définissent une application biunivoque de $E \times E' \times E''$ dans $F \times F' \times F''$, qui est dite <u>engendrée</u> par les applications f, f', f''. On voit donc que celles-ci engendrent une application biunivoque de tout ensemble de l'échelle des types construite sur E, E', E" dans l'ensemble correspondant (c'est-à-dire construit de même) de l'échelle cons- -truite sur F, F', F".

Soient en particulier E un ensemble fondamental, A une de ses parties, E_A l'ensemble fondamental des objets du type "élément de A" ; étant aussi un ensemble fondamental, soit C une partie de $E \times E'$, qui détermine une correspondance de E à E'. La correspondance canonique entre E_A et A engendre une application de $E_A \times E'$ dans $E \times E'$, et plus précisément de $E_A \times E'$ sur $A \times E' \subset E \times E'$, donc une correspondance biunivoque entre les parties de $E_A \times E'$ et celles de $A \times E'$: on désignera par C_A la partie de $E_A \times E'$ qui correspond ainsi à $C \cap (A \times E')$; on voit que la relation "$(x,y) \in C_A$" équivaut à la relation "$x \in A, (x,y) \in C$" : on dit que la correspondance C_A, de E_A à E', est déduite de la correspondance C par <u>restriction</u> de celle-ci à A. En particulier, lorsque C est une fonction $f(x)$, définie dans E, à valeurs dans E', on obtient, en la restreignant à A, une fonction $f_A(x)$, définie sur E_A, à valeurs dans E', qu'on dit déduite de $f(x)$ par <u>restriction</u> à A. Inversement, on dit, lorsqu'il en est ainsi, que la fonction $f(x)$ est un <u>prolon-gement</u> de $f_A(x)$ à l'ensemble fondamental E.

§ 4. Réunions et intersections générales.

Nous avons montré comment, chaque fois qu'on se donne une re-lation (qu'on peut toujours supposer de la forme "$(x,y) \in A$") entre deux arguments $x \in E$, $y \in E'$, l'on peut définir une fonction A_x, définie pour $x \in E$, à valeurs dans $P(E')$, à savoir l'image par A de l'ensemble $\{x\}$, ou encore la trace de A pour la valeur x de la première coordonnée. Réciproquement, partons d'une fonction A_x, définie pour $x \in E$, à valeurs dans $P(E')$; considérons la relation "$y \in A_x$" entre x et y, et l'ensemble C que cette relation définit dans $E \times E'$; la trace C_x de C, lorsqu'on donne à la première coordonnée la valeur x, est l'ensemble des y tels que l'on ait $y \in A_x$, c'est-à-dire n'est pas autre chose que A_x : l'on voit donc que les deux points de vue sont entièrement équivalents, et qu'il est indifférent de se donner une partie A de $E \times E'$, ou une fonction A_x, définie dans E, à valeurs dans $P(E')$. Nous plaçant maintenant à ce dernier point de vue, nous allons traduire une partie des résultats du paragraphe précédent ; nous allons simplement changer de notation ; l'ensemble que nous notions E va se noter I et s'appel-lera l'ensemble des indices, et nous noterons ι un élément généri-que de I ; l'ensemble que nous notions E' va se noter E, et x sera un élément générique de cet ensemble.

Soient donc A_ι une fonction définie pour $\iota \in I$, à valeurs dans P(E) ; A la correspondance de I à E qui est définie par la relation "$x \in A_\iota$" ; J une partie de I. L'image A(J) de J dans E par la correspondance A est, d'après nos définitions, l'ensemble des x tels qu'il existe un $\iota \in J$ pour lequel $x \in A_\iota$; cette image s'appelle la <u>réunion</u> des A_ι pour $\iota \in J$, et se notera

$$A(J) = \bigcup_{\iota \in J} A_\iota .$$

En particulier, si J est l'ensemble vide, on a $A(\emptyset) = \emptyset$, donc :

$$\bigcup_{\iota \in \emptyset} A_\iota = 0$$

Si l'on prend pour J l'ensemble fondamental I lui-même, on remplacera souvent, au dessous du signe $\bigcup$, l'indication "$\iota \in I$" par la simple indication de l'indice ι, ou même on la supprimera purement et simplement ; ce qui permet d'alléger beaucoup certaines formules ; on écrira donc :

$$A(I) = \bigcup_{\iota \in I} A_\iota = \bigcup_\iota A_\iota = \bigcup A_\iota .$$

L'emploi du mot "réunion" et du signe $\bigcup$ se justifie par l'analogie entre cette notion et celle que nous avons définie plus haut sous ce nom ; plus précisément, la première se réduit à la seconde lorsqu'on prend pour I un ensemble fondamental dont les éléments soient des signes individuellement et explicitement donnés. Supposons par exemple que I soit l'ensemble ayant pour éléments les symboles 1,2,3 (considérés pour le moment comme dépourvus de signi-fication) ; autrement dit, on considère ces signes, et ces signes seulement, comme des objets de même type, et I comme l'ensemble fondamental de ce type ; de sorte que la proposition "quel que soit $x \in I$, $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 3$" est vraie (puisque chacun des objets du type possède la propriété "$x = 1$ ou

(N.B. Il y aura avantage à reporter ceci au chap. I, par. 2 .)

$x = 2$ ou $x = 3$") ; que, si $P(x)$ est une propriété des objets du type, la proposition "quel que soit x, $P(x)$" équivaut à "$P(1)$ et $P(2)$ et $P(3)$", et par conséquent la proposition "il existe x tel que $\overline{P}(x)$" équivaut à "$\overline{P}(1)$ ou $\overline{P}(2)$ ou $\overline{P}(3)$". En particulier, si A_i est une fonction, définie sur I, à valeurs dans $P(E)$, la réunion des A_i pour $i \in I$ sera l'ensemble des x tels qu'il existe un $i \in I$ pour lequel $x \in A_i$, donc l'ensemble des x tels que $x \in A_1$ ou $x \in A_2$ ou $x \in A_3$; on a donc (en convenant d'écrire, comme nous ferons souvent, "$i = 1,2,3$" au lieu de $i \in I$) :

$$\bigcup_{i=1,2,3} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 .$$

Un cas particulier important de la notion générale de réunion est celui de la réunion d'une famille d'ensembles, c'est-à-dire des ensembles d'une partie donnée de $P(E)$. C'est le cas où I n'est autre que $P(E)$ et où, à l'élément générique X de $P(E)$, nous faisons correspondre ce même élément, considéré comme partie de E ; alors, si F est une partie de $P(E)$, l'ensemble des x tels qu'il existe un $X \in F$ pour lequel $x \in X$ sera la réunion des ensembles X de F, et s'écrira :

$$\bigcup_{X \in F} X .$$

C'est, d'après ce qui précède, l'image de F par la correspondance Ω, de $P(E)$ à E, qui est définie par la relation "$x \in X$", c'est-à-dire qui à tout $X \in P(E)$ fait correspondre tous les éléments x de X.

En particulier, si F est la famille vide, on aura :

$$\bigcup_{X \in \emptyset} X = \emptyset .$$

L'importance des réunions de familles de parties de E tient à ce que toute réunion peut se ramener à une réunion de ce type.

Soit en effet $F(\iota) = A_\iota$ une fonction, définie pour $\iota \in I$, à valeurs dans $P(E)$; soient J une partie de I, $F(J)$ son image dans $P(E)$; on aura :

$$\bigcup_{\iota \in J} A_\iota = \bigcup_{X \in F(J)} X$$

C'est ce qu'il est facile de vérifier directement, en se reportant aux définitions ; mais on peut aussi considérer cette formule comme une application du théorème du § 3 sur les produits de correspondances ; en effet, la correspondance A de I à E qui est définie par la relation "$x \in A_\iota$" peut être considérée comme le produit de la correspondance F de I à $P(E)$ définie par la fonction $F(\iota) = A_\iota$, et de la correspondance Ω de $p(E)$ à E définie par la relation "$x \in X$" : on a $A = \Omega F$, donc $A(J) = \Omega\left[F(J)\right]$, ce qui est, avec d'autres notations, la formule même qu'il fallait vérifier.

Voici maintenant deux nouvelles versions du théorème sur les produits de correspondances, toutes deux très importantes. Soient d'abord A_ι une fonction définie pour $\iota \in I$, à valeurs dans $P(E)$; et B une correspondance de E à un ensemble fondamental E' ; si A désigne la correspondance, de I à E, définie par la relation "$x \in A_\iota$" considérons le produit BA : par définition, un $y \in E'$ correspondra, par BA, à un $\iota \in I$, lorsqu'il existera un $x \in E$ tel que l'on ait $(x, y) \in B$, $x \in A_\iota$: l'ensemble des $y \in E'$ qui correspondent, par BA, à ι, n'est donc autre que l'image $B(A_\iota)$ de A_ι par B dans E'. L'image $BA(J)$ de J par BA est donc la réunion des $B(A_\iota)$ pour $\iota \in J$; or c'est l'image, par B, de $A(J)$, qui est la réunion des A_ι pour $\iota \in J$. On a donc la formule :

$$\bigcup_{\iota \in J} B(A_\iota) = B\left(\bigcup_{\iota \in J} A_\iota\right)$$

Soit maintenant A_ι une fonction définie pour $\iota \in I$, à valeur dans $P(E)$;

et soit J_λ une fonction définie pour $\lambda \in L$, à valeurs dans $P(I)$; soient A la correspondance, de I à E, définie par "$x \in A_\iota$", et J la correspondance, de L à I, définie par "$\iota \in J_\lambda$" : l'image J(L) de L par J, dans I, est la réunion des J_λ pour $\lambda \in L$: son image par A, dans E, est la réunion des A_ι pour $\iota \in J(L)$; c'est aussi l'image par AJ de L dans E : mais l'ensemble des $x \in E$ qui corres- -pondent, par AJ, à $\lambda \in L$ est l'ensemble des $x \in E$ tels qu'il existe un $\iota \in I$ pour lequel $x \in A_\iota$ et $\iota \in J_\lambda$, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in E$ tels qu'il existe un $\iota \in J_\lambda$ pour lequel $x \in A_\iota$, c'est donc la réunion des A_ι pour $\iota \in J_\lambda$. On a donc :

$$\bigcup_{\iota \in \bigcup J_\lambda} A_\iota = \bigcup_\lambda \Big(\bigcup_{\iota \in J_\lambda} A_\iota \Big),$$

formule connue sous le nom de formule d'associativité du signe $\bigcup$, parce qu'elle se réduit à la formule d'associativité du signe $\cup$ lorsqu'on prend pour I et L des ensembles dont les éléments soient des signes explicitement donnés. Plus généralement, si I est quel- -conque et que L se compose, par exemple, des signes 1,2, on aura :

$$\bigcup_{\iota \in J_1 \cup J_2} A_\iota = \Big(\bigcup_{\iota \in J_1} A_\iota \Big) \cup \Big(\bigcup_{\iota \in J_2} A \Big),$$

ce qui permet d'écrire une réunion de deux réunions comme une réunion.

Considérons maintenant une intersection de deux réunions ; soient A_ι, $B_\varkappa$ deux fonctions, à valeurs dans P(E), définies res- -pectivement pour $\iota \in I$ et pour $\varkappa \in K$; si $x \in E$ appartient à la fois à la réunion des A_ι et à celle des $B_\varkappa$, cela veut dire qu'il existe $\iota \in I$ tel que $x \in A_\iota$ et $\varkappa \in K$ tel que $x \in B_\varkappa$, ou en d'autres termes qu'il existe $(\iota, \varkappa) \in I \times K$ tel que $x \in A_\iota \cap B_\varkappa$. Donc :

$$\Big(\bigcup_{\iota \in I} A_\iota \Big) \cap \Big(\bigcup_{\varkappa \in K} B_\varkappa \Big) = \bigcup_{(\iota, \varkappa) \in I \times K} (A_\iota \cap B_\varkappa),$$

formule dite de distributivité, parce qu'elle se réduit à la formule de distributivité entre $\cup$ et $\cap$ quand I et K dont des ensembles dont les éléments soient explicitement donnés.

On démontre tout à fait de la même manière que, si A_ι est une fonction définie sur I, à valeurs dans P(E), et B une fonction définie sur K, à valeurs dans P(E'), on a :

$$\Big(\bigcup_{\iota} A_\iota\Big) \times \Big(\bigcup_{x} B_x\Big) = \bigcup_{(\iota,x)} (A_\iota \times B_x).$$

Un cas particulier intéressant de la formule de distributivité est celui où l'ensemble K se réduit à un seul élément ; si B est la valeur de la fonction B_x quand on prend pour x cet élément, on aura donc :

$$\Big(\bigcup_{\iota} A_\iota\Big) \cap B = \bigcup_{\iota} (A_\iota \cap B).$$

Nous allons maintenant introduire une opération qui généralise l'opération $\cap$ comme $\bigcup$ généralise $\cup$. Soit toujours A_ι une fonction $\iota \in I$, à valeurs dans P(E) ; soit J une partie de I. On appellera <u>intersection</u> des A_ι pour $\iota \in J$ l'ensemble des $x \in E$ tels que l'on ait $x \in A_\iota$ quel que soit $\iota \in J$; et cet ensemble se notera

$$\bigcap_{\iota \in J} A_\iota .$$

Comme pour la réunion, si les éléments de I sont les signes 1,2,3, l'intersection des A_i pour $i \in I$ n'est autre que $A_1 \cap A_2 \cap A_3$; et de même chaque fois que les éléments de I sont explicitement et individuellement donnés.

Comme $\cap$ et $\cup$, $\bigcap$ et $\bigcup$ se déduisent l'un de l'autre par formation du complémentaire ; en effet, la négation de la proposition "quel que soit $\iota \in J$, on a $x \in A_\iota$" est "il existe $\iota \in J$ tel que $x \in \complement A_\iota$", d'où la formule

$$\complement \Big(\bigcap_{\iota \in J} A_\iota\Big) = \bigcup_{\iota \in J} (\complement A_\iota),$$

et de même

$$\complement\left(\bigcup_{\iota \in J} A_\iota\right) = \bigcap_{\iota \in J} (\complement A_\iota).$$

d'où l'on déduit en particulier, si $J = \emptyset$:

$$\bigcap_{\iota \in \emptyset} A_\iota = E .$$

Cette formule signifie que l'intersection d'une famille vide de parties de E est E tout entier. Cet énoncé a un aspect paradoxal, qui disparaît aussitôt si l'on réfléchit que l'intersection des A_ι est l'ensemble des x qui satisfont à toutes les conditions "$x \in A_\iota$" : si la famille des A_ι est vide, cela veut dire qu'on n'assujettit x à aucune condition, donc tout naturellement l'on obtient l'ensemble fondamental tout entier.

Nous sommes maintenant en état d'indiquer un principe général, connu sous le nom de principe de dualité. Supposons qu'une partie A de E se déduise de parties B, C, D de E, et de fonctions F_ι , $G_\varkappa$ prenant leurs valeurs dans P(E), par application (dans n'importe quel ordre) des seules opérations $\cup$, $\cap$, $\bigcup$, $\bigcap$; on obtiendra le complémentaire $\complement A$ de A en remplaçant B, C, D, F_ι , $G_\varkappa$ par leurs complémentaires $\complement B$, $\complement C$, $\complement D$, $\complement F_\iota$, $\complement G_\varkappa$, et chaque opération $\cup$, $\cap$, $\bigcup$, $\bigcap$, par $\cap$, $\cup$, $\bigcap$, $\bigcup$ respecti--vement. Si donc on a démontré une formule où ne figurent, de chaque côté du signe = , que des expressions de ce genre, on a le moyen, par formation du complémentaire des deux membres, de déduire une autre formule équivalente. Appliquant ce principe aux formules que nous avons démontrées plus haut pour le signe $\bigcup$, nous en déduisons les suivantes :

$$\bigcap_{\iota \in J} A_\iota = \bigcap_{X \in F(J)} X \quad \text{pour } A_\iota = F(\iota) ;$$

$$\bigcap_{\iota \in \bigcup J_\lambda} A_\iota = \bigcap_{\lambda} \left(\bigcap_{\iota \in J_\lambda} A_\iota \right)$$

(formule d'associativité du signe $\bigcap$) ;

$$\bigcap_{\iota \in J_1 \cup J_2} A_\iota = \left(\bigcap_{\iota \in J_1} A_\iota \right) \cap \left(\bigcap_{\iota \in J_2} A_\iota \right)$$

(cas particulier de la précédente) ;

$$\left(\bigcap_\iota A_\iota\right) \cup \left(\bigcap_\varkappa B_\varkappa\right) = \bigcap_{(\iota,\varkappa)} (A_\iota \cup B_\varkappa)$$

(formule de distributivité) ;

$$\left(\bigcap_\iota A_\iota\right) \cup B = \bigcap_\iota (A_\iota \cup B)$$

(cas particulier de la précédente).

En revanche, notre principe de dualité n'est pas applicable à une formule où figure l'image d'un ensemble par une correspondance; la formule

$$\bigcup_\iota B(A_\iota) = B\left(\bigcup_\iota A_\iota\right)$$

n'a pas de duale. Il n'est pas applicable non plus à une formule où figure un signe de produit. Il se trouve cependant que la formule

$$\left(\bigcap_\iota A_\iota\right) \times \left(\bigcap_\varkappa B_\varkappa\right) = \bigcap_{(\iota,\varkappa)} (A_\iota \times B_\varkappa)$$

est bien exacte ; car le premier membre est l'ensemble des (x,y) tels que l'on ait, quel que soit $\iota \in I$, $x \in A_\iota$, et, quel que soit $\varkappa \in K$, $y \in B_\varkappa$: donc tels que l'on ait, quel que soit $(\iota, \varkappa) \in I \times K$, $x \in A_\iota$ et $y \in B_\varkappa$, c'est-à-dire $(x,y) \in A_\iota \times B_\varkappa$. Mais pour l'inter-section, on a aussi la formule suivante, encore plus intéressante, et qui, elle, ne correspond à aucune formule relative à la réunion :

$$\left(\bigcap_{\iota \in I} A_\iota\right) \times \left(\bigcap_{\iota \in I} B_\iota\right) = \bigcap_{\iota \in I} (A_\iota \times B_\iota),$$

qu'on démontre par un raisonnement analogue.

§ 5. Produits généraux ; axiome de choix.

Par les notions générales de réunion et d'intersection, nous avons, au sens qui a été expliqué, généralisé les notions définies sous ce même nom au § 1. On peut aussi étendre, d'une manière analo-gue, la notion de produit d'ensembles fondamentaux telle qu'elle a été définie au § 2.

Considérons en effet l'ensemble fondamental I dont les éléments sont les signes 1,2,3 ; soit x_i une fonction, définie pour $i \in I$, et prenant ses valeurs dans un ensemble fondamental E. A cette fonction, faisons correspondre l'élément (x_1, x_2, x_3) de $E \times E \times E$: on a ainsi défini, entre l'ensemble des fonctions définies sur I et prenant leurs valeurs dans E et l'ensemble $E \times E \times E$ une correspondance biunivoque, car réciproquement, si (u,v,w) est un élément de $E \times E \times E$, la relation "$i = 1$ et $x = u$, ou $i = 2$ et $x = v$, ou $i = 3$ et $x = w$" définit x comme fonction de i, à valeurs dans E, fonction à laquelle correspond bien, par notre définition, l'élément (u,v,w) de $E \times E \times E$.

Soit encore A_i une fonction définie dans I, prenant ses valeurs dans P(E) ; considérons l'ensemble des fonctions x_i définies dans I, prenant leurs valeurs dans E, et telles que, quel que soit $i \in I$, on sait $x_i \in A_i$: par la correspondance ci-dessus, l'ensemble de ces fonctions est mis en correspondance biunivoque avec l'ensemble des éléments (x_1,x_2,x_3) de $E \times E \times E$ tels que $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, x_3 \in A_3$, c'est-à-dire avec $A_1 \times A_2 \times A_3$.

Soient donc, en général, I un ensemble fondamental quelconque (l'ensemble des indices), et A_ι une fonction définie ; considérons l'ensemble des fonctions x_ι, définies pour $\iota \in I$, à valeurs dans E, et telles que l'on ait, quel que soit $\iota \in I$, $x_\iota \in A_\iota$: cet ensemble s'appellera le <u>produit</u> des A_ι pour $\iota \in I$, et se notera

$$\prod_{\iota \in I} A_\iota .$$

De même que pour les réunions et intersections, il est utile aussi d'étendre la définition au cas où l'on substitue à I une partie J de I. A_ι étant toujours une fonction définie sur I, à valeurs dans P(E), on entendra par

$$\prod_{\iota \in \emptyset} A_\iota$$

l'ensemble des applications de J dans E qui, à tout $\iota \in J$, font correspondre un élément x_ι de A_ι : c'est donc un ensemble de parties de $J \times E$; on l'appellera le produit des A_ι pour $\iota \in J$. En particulier, si $J = \emptyset$, $\emptyset \times E$ est la partie vide de $I \times E$, et n'a d'autre partie qu'elle-même, de sorte que

$$\prod_{\iota \in \emptyset} A_\iota$$

est un ensemble à un seul élément, à savoir la partie vide de $I \times E$.

Comme pour les réunions et intersections, lorsque J est l'en-semble fondamental I lui-même, on pourra alléger la formuler en remplaçant l'indication " $\iota \in I$" par " ι " ou en la supprimant.

Il convient d'observer que, tandis que les notions de réunion et d'intersection définies au § 1 se réduisent à des cas particuliers des notions correspondantes du § 4, il n'est pas possible de considérer un produit d'ensembles fondamentaux $E \times E' \times E''$ comme un cas particulier de la notion de produit que nous venons de définir ; ce qu'on peut dire, c'est que, si par exemple I est l'ensemble qui a pour éléments les signes 1,2,3, il y a correspondance biunivoque entre

$$\prod_{i \in I} A_i \qquad \text{et} \qquad A_1 \times A_2 \times A_3 \ ;$$

et l'existence de cette correspondance biunivoque (qu'on pourra qualifier, elle aussi, de "canonique") suffit, du point de vue mathématique, à établir la parenté sinon l'identité des deux notions. En revanche, si E, E', E'' sont les ensembles fondamentaux de trois types indépendants, nos définitions ne permettent en aucune manière de considé-rer $E \times E' \times E''$ comme un produit au sens de ce paragraphe.

Considérons le produit

$$P = \prod_{\iota \in I} A_\iota \ ;$$

c'est une partie de l'ensemble des fonctions définies sur I, à valeurs dans E. S'il existe $\iota \in I$ tel que $A_\iota = \emptyset$, alors d'après nos définitions $P = \emptyset$; car ~~xxx~~ sinon, soit x_ι un élément de P : quel que soit $\iota \in I$, on aura $x_\iota \in A_\iota$, donc, quel que soit ι , il existe x tel que $x \in A_z$, donc, quel que soit z, $A_z \neq \emptyset$: ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite (premier exemple, dans ce traité, d'une démonstration par l'absurde ; cf.chap.I,parag.).

Donc, des deux propositions "il existe z tel que $A_z = \emptyset$" et "$p = \emptyset$", la première entraîne la seconde. Dire que nous considérerons désormais ces deux propositions comme équivalentes, c'est énoncer une nouvelle "règle logique" portant sur l'emploi des opérations "il existe" et "quel que soit". Il est clair qu'il revient au même de l'énoncer sous la forme suivante : A étant une correspondance quelconque entre $x \in E$ et $z \in I$, les propositions "quel que soit $z \in I$, il existe un x qui corresponde à z par A" et "il existe une fonction x_z, définie dans I, à valeurs dans E, telle que, quel que soit z, x_z corresponde à z par la correspondance A" sont équivalentes, ou bien encore, en revenant aux notations du § 3 :

R(x,y) étant une relation entre les arguments x, y prenant respectivement leurs valeurs dans les ensembles fondamentaux E, E', on considérera comme équivalentes les propositions

"quel que soit x, il existe y tel que R(x, y)"

et "il existe une fonction y(x), définie dans E, à valeurs dans E', telle que l'on ait, quel que soit x, $R\left[x,y(x)\right]$".

On voit que ce principe permet, lorsque dans une proposition se trouve un "quel que soit" précédent un "il existe", d'échanger l'ordre de ces deux opérations, mais en introduisant un argument du type d'une fonction. On le nomme, "<u>principe de choix</u>".

En voici un cas particulier important ; E étant un ensemble fondamental, prenons pour E' l'ensemble des parties non vides de E (c'est-à-dire la partie de $P(E)$ définie par la relation "$X \neq \emptyset$", cette partie étant prise pour nouvel ensemble fondamental) ; et considérons la relation "$x \in X$", x étant un élément générique de E et X un élément générique de E' : par définition de E', quel que soit $X \in E'$ il existe bien un x tel que $x \in X$, donc, par le principe de choix, la proposition suivante (dite "axiome de choix" ou "axiome de Zermelo") sera vraie : "il existe une fonction $f(X)$, définie sur l'ensemble des parties non vides de E et prenant ses valeurs dans E, telle que l'on ait, quel que soit X, $f(X) \in X$".

Réciproquement, si cette proposition est considérée comme vraie, on peut en déduire l'énoncé général du principe de choix ; en effet, soit $f(X)$ une fonction satisfaisant à la condition ci-dessus ; soit A_ι une fonction définie pour $\iota \in I$, à valeurs dans l'ensemble des parties non vides de E : alors $x_\iota = f(A_\iota)$ est une fonction définie dans I, à valeurs dans E, et telle que l'on ait, quel que soit ι, $x_\iota \in A_\iota$. Donc, au lieu du principe de dhoix, il revient au même de convenir de considérer comme vrai l'"axiome de Zermelo".

L'histoire du principe de choix est remarquable. Il n'a été introduit qu'assez récemment (en 190?, par Zermelo), et a fait l'objet de très vives controverses. D'une part, en effet, il renferme un "il existe..." qui ne repose sur aucune règle de construction, et prête par suite aux mêmes objections dont nous avons fait mention au Chap. I, § 2 à propos de l'introduction de l'opération "il existe". D'autre part, il présente une certaine ressemblance avec des raisonnements que l'on avait parfois essayé de faire en théorie des ensembles, mais qui ont été reconnus illégitimes (c'est-à-dire inutilisables pour le mathématicien) parce qu'ils conduisaient à des contradictions ; mais cette ressemblance paraît purement fortuite, et, pas plus que pour le reste des règles de raisonnement que nous avons adoptées et qui sont universellement admises, l'on n'a de raison de penser que le principe de choix entraîne contradiction. Mais, chose plus intéressante, ce principe était inutile dans les mathématiques classiques parce que, toutes les fois qu'en analyse classique on aurait eu l'occasion de l'employer ....

on pouvait le "démontrer" c'est-à-dire le déduire des autres règles, principes et axiomes (cf. Chap. III) d'où l'on était parti. Même sous sa forme la plus générale, l'on ne peut actuellement, faute d'une démonstration, affirmer qu'il soit bien indépendant des autres règles, c'est-à-dire qu'il soit impossible de le déduire de celles-ci, telles qu'elles ont été posées au Chap. I ; du moins cela paraît-il très vraisem--blable. Si donc on admet qu'il est bien indépendant des autres règles, il y a lieu de se demander quels sont les théorèmes qu'on peut démontrer sans lui et quels sont les théorèmes où il est nécessaire d'en faire usage : c'est là une question qui n'est pas sans intérêt, pour le logicien d'abord, et même pour le mathématicien : car s'il apparais--sait que le principe de choix ne servît à démontrer que des résultats de peu de portée et dont le champ d'application fût assez restreint, on pourrait convenir, une fois pour toutes, d'essayer de s'en passer. Or, bien au contraire, il se révèle indispensable pour donner à la mathématique moderne quelques-uns de ses outils les plus puissants ; ce qui en justifie pleinement l'introduction dans ce traité.

Exercices. 1. Soient I, K deux ensembles fondamentaux, K_ι une fonction définie pour $\iota \in I$, à valeurs dans P(K) ; soient E un ensemble fondamental, $A_{\iota,x}$ une application, dans P(E), de l'ensemble des éléments (ι, x) de $I \times K$ tels que $x \in K_\iota$. Démontrer la formule (dite de distri--butivité généralisée).

$$\bigcap \Big(\bigcup_{x \in K_\iota} A_{\iota,x} \Big) = \bigcup_{x_\iota \in \prod K_\iota} \Big(\bigcap_\iota A_{\iota,x_\iota} \Big) ;$$

Formuler et démontrer la duale de cette formule. Montrer que si I se compose des signes 1,2, cette formule se réduit à un cas particulier de la formule de distributivité du § 4.

2. Les notations étant les mêmes que ci-dessus, démontrer les deux formules

$$\prod_\iota \Big(\bigcup_{x \in K_\iota} A_{\iota,x} \Big) = \bigcup_{x_\iota \in \prod K_\iota} \Big(\prod_\iota A_{\iota,x_\iota} \Big)$$

$$\prod_\iota \Big(\bigcap_{x \in K_\iota} A_{\iota,x} \Big) = \bigcap_{x_\iota \in \prod K_\iota} \Big(\prod_\iota A_{\iota,x_\iota} \Big)$$

En supposant que l'on ait, quel que soit $\iota \in I$, $K_\iota = K$, donner de la deuxième formule une démonstration qui ne fasse pas usage du principe de choix. (On peut montrer que, même dans ce cas, cela n'est pas possible pour la première formule, du moins si l'on admet l'indépendance de l'axiome de choix ; ce qui montre que, malgré l'apparence, les deux formules ne sont pas du tout de même nature).

3. $A_{\iota,\varkappa}$ étant une fonction de $\iota \in I$ et de $\varkappa \in K$, à valeurs dans $P(E)$, montrer que l'on a

$$\prod_{\iota} \left(\bigcap_{\varkappa} A_{\iota,\varkappa} \right) = \bigcap_{\varkappa} \left(\prod_{\iota} A_{\iota,\varkappa} \right).$$

(En remplaçant dans cette formule le signe $\bigcap$ par le signe $\bigcup$, on aurait une formule fausse ; cf., pour le cas où I se compo- -se des signes 1,2, la formule correspondante du § 4).

On peut, en les formulant convenablement, étendre aux produits que nous venons de définir la plupart des notions et propriétés que nous avons données au § 2. Pour l'instant, nous définirons seulement la notion de projection. A_{ι} étant toujours une fonc- -tion définie pour $\iota \in I$, à valeurs dans $P(E)$, posons

$$\prod_J = \prod_{\iota \in J} A_{\iota}$$

et en particulier $\prod_I = \prod$. Alors, si x_{ι} est un élément de $\prod$, l'application de J dans E qui, sur J, coïncide* avec x_{ι} est, d'après nos définitions, un élément de $\prod_J$, qui s'appellera la <u>projection</u>** de x_{ι} sur $\prod_J$: c'est une fonction, définie dans $\prod$ et prenant ses valeurs dans $\prod_J$; et l'image, par cette fonction, d'une partie X de $\prod$ s'appellera aussi (par "abus de langage") la projection de X sur $\prod_J$.

Enfin, notons que, lorsque l'on a $A_{\iota} = E$ quel que soit $\iota \in I$, le produit

$$\prod_{\iota \in I} A_{\iota}$$

qui n'est autre alors que l'ensemble des fonctions définies dans I et à valeurs dans E se note souvent A^I ; et l'opération qui consiste à former ce produit à partir de A et I reçoit parfois le nom d'exponentiation.

---

* (Il conviendra d'insérer au § 3 cette notion de correspondances de E à E' qui <u>coïncident</u> sur une partie A de E ; p.ex. après la notion de restriction de correspondance à un sous-ensemble).

** (On modifiera, en conformité avec cette définition, celle qui avait été donnée au § 2.)

§ 6. Partage en classes ; relations d'équivalence.

Nous avons trouvé que, si A est une correspondance d'un ensemble fondamental E à un ensemble fondamental E', et si X_ι est une fonc--tion définie pour $\iota \in I$ et à valeurs dans P(E), on a :

(1) $$A(\bigcup_\iota X_\iota) = \bigcup_\iota A(X_\iota).$$

Si dans cette formule on remplace le signe $\bigcup$ par $\bigcap$, nous savons qu'on obtient une formule qui n'est plus exacte en général. Mais nous allons maintenant examiner de plus près ce qui se passe. Tout d'abord, on a en tout cas

(2) $$A(\bigcap_\iota X_\iota) \subset \bigcap_\iota A(X_\iota) ;$$

en effet, le premier membre est l'ensemble des y qui possèdent la propriété suivante : "il existe x tel que $(x,y) \in A$ et que, quel que soit ι, $x \in X_\iota$" ; le second membre est l'ensemble des y qui possè--dent la propriété suivante : "quel que soit ι, il existe x tel que $(x, y) \in A$ et que $x \in X_\iota$" ; il est manifeste que la première propriété entraîne la seconde.

Mais de plus, les deux propriétés sont équivalentes lorsque $\overset{-1}{A}$ est une application d'une partie de E' sur une partie de E, c'est-à-dire lorsque, quel que soit y, il existe au plus un x tel que $(x,y) \in A$. En effet, soit b un élément de E ; supposons que, quel que soit ι, il existe x tel que $(x,b) \in A$ et que $x \in X_\iota$: c'est donc qu'il existe x tel que $(x,b) \in A$; comme par hypothèse il en existe un au plus, il en existe un et un seul : soit donc a l'élément de E tel que "$(x,b) \in A$" soit équivalent à "$x = a$" ; il s'ensuit que, quel que soit ι, il existe x tel que $x = a$ et que $x \in X_\iota$; en d'autres termes, quel que soit ι, on a $a \in X_\iota$; de sorte que b possède bien la propriété "il existe x tel que $(x,b) \in A$ et que, quel que soit ι, $x \in X_\iota$". Donc, si A satisfait à la condition indiquée, les deux membres de (2) sont égaux. En particulier, en prenant pour I l'ensemble formé des signes 1, 2, on voit qu'on aura alors, quels que soient $X \subset E$, $X' \subset E$, $A(X \cap X') = A(X) \cap A(X')$; et par suite (puisque $A(\emptyset) = \emptyset$), $X \cap X' = \emptyset$ entraîne $A(X) \cap A(X') = \emptyset$.

Inversement, supposons A tel que $X \cap X' = \emptyset$ entraîne $A(X) \cap A(X') = \emptyset$; en prenant $x \in E$, $x' \in E$, $X = \{x\}$, $X' = \{x'\}$, on voit que $x \neq x'$ entraîne $A_x \cap A_{x'} = \emptyset$; ou en d'autres termes la relation "il existe y tel que $y \in A_x \cap A_{x'}$", c'est-à-dire "il existe y tel que $(x,y) \in A$ et $(x',y) \in A$" entraîne "$x = x'$" : donc, si b est un élément de E', "$(x,b) \in A$ et $(x',b) \in A$" entraîne "$x = x'$", c'est-à-dire qu'il y a au plus un $x \in E$ tel que $(x, b) \in A$. Nous avons donc démontré l'équivalence des deux propositions "quel que soit y, il existe au plus un x tel que $(x,y) \in A$" et "$X \cap X' = \emptyset$ entraîne $A(X) \cap A(X') = \emptyset$". Une autre propo-sition, équivalente à celle-ci, est "$V \subset U \subset E$ entraîne $A(U - V) = A(U) - A(V)$" : en effet, nous savons* que la relation "$W = U - V$" (U, V, W étant du type des parties de E) est équivalente à "$V \cap W = \emptyset$ et $V \cup W = U$" ; par conséquent la proposition qu'on vient d'écrire est équiva-lente à "$V \cap W = \emptyset$ et $V \cup W = U$ entraînent $A(V) \cap A(W) = \emptyset$ et $A(V) \cup A(W) = A(U)$" ; mais $V \cup W = U$ entraîne en tout cas $A(V) \cup A(W) = A(U)$, donc on a bien l'équivalence annoncée.

* à insérer au § 1, ainsi que le cas particulier où $U = E$.

Nous avons donc démontré le théorème suivant :

Soit A une correspondance de E à E' ; il y a équivalence entre les propositions suivantes :

a) "quel que soit y, il existe au plus un x tel que $(x,y) \in A$".

b) " $\overset{-1}{A}$ est une application d'une partie de E' sur une partie de E".

c) "$X \cap X' = \emptyset$ entraîne $A(X) \cap A(X') = \emptyset$ ".

d) "quels que soient $X \subset E$, $X' \subset E$, on a $A(X \cap X') = A(X) \cap A(X')$".

e) "$V \subset U \subset E$ entraîne $A(U - V) = A(U) - A(V)$".

Et n'importe laquelle de ces propositions entraîne, si I est un ensemble fondamental, que, quelle que soit la fonction X_ι dé- -finie pour $\iota \in I$ et à valeurs dans P(E), on a :

$$A(\bigcap_\iota X_\iota) = \bigcap_\iota A(X_\iota).$$

Si de plus on a $A(E) = E'$, on aura $A(E - X) = E' - A(X)$, c'est-à-dire $A(\complement X) = \complement A(X)$; et inversement, s'il existe X tel que $A(\complement X) = \complement A(X)$, on aura $A(X \cup \complement X) = A(X) \cup \complement A(X)$, c'est-à-dire $A(E) = E'$. Dire que $A(E) = E'$, c'est dire que, quel que soit $y \in E'$, il existe un x tel que $(x,y) \in A$; s'il en existe un au plus, c'est que $\overset{-1}{A}$ définit x comme fonction g(y) de y. Nous écrirons dans ce cas $A = \overset{-1}{g}$, d'où le théorème suivant :

Soit g(y) une fonction définie pour $y \in E'$, à valeurs dans E. I étant un ensemble fondamental, X_ι une fonction définie pour $\iota \in I$, à valeurs dans P(E), on aura :

$$(1) \qquad \overset{-1}{g}(\bigcup_\iota X_\iota) = \bigcup_\iota \overset{-1}{g}(X_\iota),$$

$$(2) \qquad \overset{-1}{g}(\bigcap_\iota X_\iota) = \bigcap_\iota \overset{-1}{g}(X_\iota),$$

et, quel que soit $X \subset E$:

$$(3) \qquad \overset{-1}{g}(\complement X) = \complement \overset{-1}{g}(X).$$

Inversement, si une correspondance A possède ces trois propriétés, $\overset{-1}{A}$ est une fonction g, et $A = \overset{-1}{g}$

Il est intéressant (bien qu'on ne fasse ainsi que retrouver des formules que nous avons déjà obtenues) de considérer séparé-ment le cas particulier de la correspondance canonique (v. § 3) entre une partie B de E et cette partie même considérée comme nouvel ensemble fondamental, correspondance qui est alors biuni-voque, de sorte que les conditions du théorème ci-dessus sont bien satisfaites. On a alors, pour $x \in B$, $g(x) = x$; par la correspondance $\overset{-1}{g}$, à tout $x \in B$ correspond x lui-même, à tout $x \notin B$ ne correspond aucun élément de B, donc $\overset{-1}{g}(X) = X \cap B$, et notre théorème devient :

$$\left(\bigcup_\iota X_\iota\right) \cap B = \bigcup_\iota (X_\iota \cap B)$$
$$\left(\bigcap_\iota X_\iota\right) \cap B = \bigcap_\iota (X_\iota \cap B)$$
$$(\complement X) \cap B = B - (X \cap B) .$$

Revenant maintenant au cas général, nous allons faire une étude plus approfondie des correspondances g et $A = \overset{-1}{g}$. Pour cela, observons que, si l'on pose $B = g(E')$ et qu'on considère l'ensemble des éléments de B comme un nouvel ensemble fondamental E", la correspondance g de E' à E peut être considérée comme le produit d'une application de E' <u>sur</u> E" et de la correspondance canonique (biunivoque) entre E" et E ; celle-ci pouvant être considérée, d'après ce qui précède, comme suffisamment connue, il suffira d'examiner la première.

Pour cela, changeant les notations, nous désignerons mainte-nant par $\varphi(x)$ une application de l'ensemble fondamental E sur l'ensemble fondamental L, c'est-à-dire une fonction, définie pour $x \in E$, à valeurs dans L, et telle que $\varphi(E) = L$. Posons $A = \overset{-1}{\varphi}$, et, pour $\lambda \in L$, $A_\lambda = A(\{\lambda\}) = \overset{-1}{\varphi}(\{\lambda\})$. Par hypothèse, quel que soit $\lambda \in L$, il existe x tel que $\varphi(x) = \lambda$, donc $A_\lambda \neq \emptyset$. En vertu des relations démontrées plus haut, $\lambda \neq \mu$ entraîne $A_\lambda \cap A_\mu = \emptyset$, donc en particulier $A_\lambda \neq A_\mu$ (car sinon on aurait $A_\lambda = A_\mu = A_\lambda \cap A_\mu = \emptyset$) : la fonction A_λ, définie pour $\lambda \in L$, à valeurs dans P(E), détermine donc une application (biunivoque) de L sur une partie de P(E) ; et si l'on désigne celle-ci par $\mathfrak{A}$, on voit que $\mathfrak{A}$ est une famille de parties de E qui possède les propriétés suivantes :

a) si $X \in \mathfrak{A}$, $X \neq \emptyset$: les ensembles de la famille $\mathfrak{A}$ sont <u>non vides</u>.

b) si $X \in \mathfrak{A}$, $Y \in \mathfrak{A}$, on a $X = Y$ ou $X \cap Y = \emptyset$; ce qu'on exprime (d'une manière un peu imprécise) en disant que les ensembles de la famille $\mathfrak{A}$ sont <u>deux à deux sans élément commun</u>

c) l'on a :

$$\bigcup_{X \in \mathfrak{A}} X = E,$$

car nous savons que l'on a

$$\bigcup_{X \in \mathfrak{A}} X = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = A(L) = E.$$

Inversement, chaque fois qu'on aura une famille $\mathfrak{A}$ de parties de l'ensemble fondamental E qui possède ces trois propriétés, on dira que cette famille constitue un <u>partage de E en classes</u>, chaque ensemble de la famille $\mathfrak{A}$ étant appelé une <u>classe</u> apparte-nant à ce partage. Supposons qu'on se donne un partage en classes: quel que soit $x \in E$, il y a, d'après c), au moins un $X \in \mathfrak{A}$ tel que

$x \in X$, et d'autre part, d'après b), il y en a un au plus, donc il y en a un et un seul ; autrement dit, si x désigne un élément générique de E, X un élément générique de $\mathfrak{A}$, la relation "$x \in X$" définit X comme fonction de x, définie pour $x \in E$, à valeurs dans $\mathfrak{A}$; si alors on appelle $\Phi(x)$ la fonction ainsi définie, a) signifie que, quel que soit $X \in \mathfrak{A}$, il existe $x \in E$ tel que $x \in X$ c'est-à-dire tel que $X = \Phi(x)$, et par conséquent on a $\Phi(E) = \mathfrak{A}$. Donc, si une famille $\mathfrak{A}$ de parties de E constitue un partage de E en classes, la relation "$x \in X$" définit une application de E sur $\mathfrak{A}$. On voit donc qu'il revient exactement au même de se donner une application de E sur un ensemble fondamental L ou bien de se donner un partage de E en classes : les deux points de vue sont équivalents.

Exercice. L désignant l'ensemble fondamental composé des signes 1, 2, et E un ensemble fondamental quelconque, définir une correspondance biunivoque entre l'ensemble des applications de E sur L et l'ensemble des parties de E autres que E et $\emptyset$. Définir une correspondance biunivoque entre l'ensemble des applications de E dans L (c'est-à-dire l'ensemble L^E des fonctions définies dans E et à valeurs dans L) et l'ensemble des parties de E.

On peut aussi, et cela est extrêmement important, examiner ces faits d'un troisième point de vue. $\varphi(x)$ étant toujours une application de E sur L, considérons la relation "$\varphi(x) = \varphi(y)$" : c'est une relation entre deux éléments génériques de E, que nous désignerons par $\mathcal{E}(x,y)$. Cette relation partage, avec la relation d'égalité (qui en apparaît comme un cas particulier, celui où $\varphi(x)$ est l'application identique de E sur E) les propriétés suivantes :

a) quel que soit x, on a $\mathcal{E}(x,x)$: ce qu'on exprime en disant que la relation $\mathcal{E}$ est <u>réflexive</u>.

b) $\mathcal{E}(x,y)$ et $\mathcal{E}(y,x)$ sont équivalentes : ce qu'on exprime en disant que $\mathcal{E}$ est <u>symétrique</u>.

c) $\mathcal{E}(x,y)$ et $\mathcal{E}(y,z)$ entraînent $\mathcal{E}(x,z)$: ce qu'on exprime en disant que $\mathcal{E}$ est <u>transitive</u>.

Une relation sera appelée une <u>relation d'équivalence</u> si c'est une relation $\mathcal{E}(x,y)$ entre deux éléments génériques x, y d'un ensemble fondamental E et si elle satisfait aux conditions a), b), c). Nous conviendrons, chaque fois que nous aurons défini une relation d'équivalence $\mathcal{E}(x,y)$, de considérer la phrase "x est équivalent à y par la relation $\mathcal{E}$" et l'assemblage de signes

$$x \equiv y \quad (\mathcal{E})$$

comme des relations équivalentes à $\mathcal{E}(x,y)$. Chaque fois qu'il n'y aura pas de confusion possible, on pourra y sous-entendre l'indication de $\mathcal{E}$.

Donnons-nous donc une relation d'équivalence $\mathcal{E}(x,y)$: elle définit, comme toute relation entre x et y, une certaine partie R du produit $E \times E$; la trace R_x est l'ensemble des y qui sont équivalents à x par la relation $\mathcal{E}$; c'est une fonction de $x \in E$, à valeurs dans P(E) ; soit $\mathcal{U}$ la famille des ensembles R_x (c'est-à-dire l'image, par cette fonction, de E dans P(E)***) ; alors, quel que soit x, on a $\mathcal{E}(x,x)$, donc $x \in R_x$, et en particulier $R_x \neq \emptyset$ et $\bigcup_{x \in E} R_x = E$.

*** On introduira, au § 3, cette manière de parler ("l'ensemble des valeurs de la fonction f(x) pour $x \in E$") comme synonyme de "l'image de E par f".

De plus, ou $R_x = R_y$, ou $R_x \cap R_y = \emptyset$: en effet, s'il existe z tel que $z \in R_x \cap R_y$ c'est-à-dire tel que l'on ait $\mathcal{E}(x,z)$ et $\mathcal{E}(y,z)$, l'on aura aussi (d'après la symétrie et la transitivité de $\mathcal{E}$) $\mathcal{E}(x,y)$, ce qui entraîne (en vertu des mêmes propriétés de $\mathcal{E}$) que, quel que soit $u \in E$, si $\mathcal{E}(x,u)$, $\mathcal{E}(y,u)$, et si $\mathcal{E}(y,u)$, $\mathcal{E}(x, u)$, ou en d'autres termes que $\mathcal{E}(x,u) \rightleftarrows \mathcal{E}(y,u)$ c'est-à-dire que $R_x = R_y$. Par conséquent, la famille $\mathfrak{A}$ constitue bien ce que nous avons appelé un partage de E en classes, R_x étant justement la classe dont x est un élément (c'est-à-dire, dans les notations adoptées plus haut, la même chose que $\Phi(x)$). Par conséquent, il revient au même de considérer, soit une application de E sur un ensemble fondamental L, soit un partage de E en classes, soit une relation d'équivalence dans E : les trois points de vue sont équivalents.

Soit donc $\mathcal{E}(x,y)$ une relation d'équivalence dans E ; soit, comme plus haut, $\mathfrak{A}$ l'ensemble des classes dans le partage en classes qu'elle définit : $\mathfrak{A}$ est une partie de P(E). D'après les règles que nous avons adoptées sur la notion de type, on pourra considérer les classes définies dans E par la relation $\mathcal{E}(x,y)$, ou en d'autres termes les éléments de $\mathfrak{A}$, comme des objets d'un type nouveau, dont l'ensemble fondamental est en correspondance biunivoque avec $\mathfrak{A}$. Cette opération sur les types est si importante et d'un emploi si général qu'elle a reçu un nom spécial : l'ensemble fondamental ainsi défini, en correspondance biunivoque avec $\mathfrak{A}$, s'appelle le quotient de E par la relation $\mathcal{E}$, et se note $E/\mathcal{E}$.

Exercices. 1. E, E' étant des ensembles fondamentaux, u un élément générique de $E \times E'$, soit f(u) la première coor--donnée de u (fonction de u définie dans $E \times E'$, à valeurs dans E). Définir une correspondance biunivoque entre E' et le quotient de $E \times E'$ par la relation d'équivalence "f(u) = f(v)".

2. Soient E, E', des ensembles fondamentaux, x, y des éléments génériques de E, z, t des éléments génériques de E', $\mathcal{E}$ (x,y) une relation d'équivalence dans E, ξ (z,t) une relation d'équivalence dans E'. On désignera par $\mathcal{E} \times \xi$ la relation " $\mathcal{E}$(x,y) et ξ(z,t)" entre les éléments génériques (x,z) et (y,t) de $E \times E'$. Montrer que $\mathcal{E} \times \xi$ est une relation d'équivalence dans $E \times E'$. Définir une correspondance biunivoque entre les deux ensembles $(E \times E')/(\mathcal{E} \times \xi)$ et $(E/\mathcal{E}) \times (E'/\xi)$.

3. Soient E, I des ensembles fondamentaux ; A_ι une fonction définie pour $\iota \in I$, à valeurs dans P(E). Soit $\mathfrak{M}$ une famille de parties de I qui constitue un partage de I en classes. Etablir une correspondance biunivoque entre les ensembles

$$\prod_{\iota \in I} A_\iota \quad \text{et} \quad \prod_{J \in \mathfrak{M}} \Big(\prod_{\iota \in J} A_\iota \Big)$$

(le fait qu'on peut établir une telle correspondance est connu sous le nom de "propriété d'associativité généralisée" pour le produit). Examiner en particulier le cas où $\mathfrak{M}$ a pour éléments les parties J et $J' = \complement J$ de I.

§7. Vue d'ensemble sur les procédés de la démonstration et la construction des types.

Avec le principe de choix, nous avons achevé l'énumération des règles de raisonnement que nous nous donnons le droit d'uti--liser, règles que nous avons formulées au cours des chapitres I et II. Nous ne voulons pas dire, bien entendu, qu'il soit inconcevable que jamais les mathématiciens soient amenés à formuler et utiliser d'autres règles de raisonnement (comme il est arrivé, à date assez récente, pour le principe de choix lui-même) ; du moins celles que nous avons formulées suffisent-elles à notre objet. Elles suffisent même, semble-t-il, à toute la mathématique actuelle :

c'est là en tout cas une certitude, d'ordre non mathématique mais mi-psychologique et mi-expérimental, qui est partagée par presque tous les mathématiciens contemporains ; on veut dire par là que toute démonstration mathématique généralement reconnue comme valable ne comporte essentiellement (c'est-à-dire si l'on imagine rétablis tous les chaînons intermédiaires omis parce que familiers à tout mathématicien ou au moins à tout spécialiste, parce que semblables à des raisonnements déjà faits, etc.) que l'application de nos règles ; l'on veut dire aussi, inversement, que l'on s'accorde à ne pas reconn-aître pour valable toute démonstration dont il n'apparaisse pas avec évidence, du moins à un spécialiste, qu'elle puisse être rédigée de manière à ne comporter que l'application des mêmes règles. Le second point a une valeur avant tout subjective, car il est des démonstrations, universellement acceptées il y a une cinquantaine d'années, et qui ne sont plus reconnues comme telles. Quant au premier point, à la possibilité, au moyen de nos seules règles, d'atteindre dans toutes les directions le point extrême où soient parvenus les mathématiciens, le présent traité en constitue dans une assez large mesure la preuve expérimentale : car, si nous n'at-teindrons pas partout ce point extrême, du moins nous indiquerons presque toujours les principaux moyens qui permettent d'y arriver.

A côté des règles de raisonnement proprement dites, nous disposons, pour cela, d'une méthode extrêmement puissante : celle qui consiste en la formation de nouveaux types à partir de types préalablement donnés. A cause de l'importance des procédés de la formation des types, nous allons conclure ce chapitre en les énumérant à nouveau.

D'abord, nous avons les procédés suivants, qui méritent le nom de procédés primitifs :

A) A partir de deux ensembles fondamentaux E, E', formation du produit $E \times E'$.

B) A partir d'un ensemble fondamental E, formation de l'ensemble des parties de E, P(E).

C) A partir d'un ensemble fondamental E et d'une partie donnée A de E, formation de l'ensemble fondamental E_A du type "élément de A".

De ces procédés, A) et B) sont véritablement indispensables ; A) étant le plus ancien, B) étant d'introduction relativement récente (la considération de sous-ensembles "arbitraires" c'est-à-dire génériques d'un ensemble donné remontant à Cantor ; la con-sidération de "fonctions arbitraires" qui lui est à peu près équivalente remontant à Dirichlet). Quant à C), on pourrait à la rigueur s'en passer, au prix de quelques modifications et complications de langage, puisque l'ensemble fondamental E_A qu'il permet de définir est en correspondance biunivoque avec le sous-ensemble A de E, et qu'on pourrait si l'on voulait parler partout de A au lieu de parler de E_A ; mais, comme nous l'avons déjà dit, il paraît bien correspondre à la démarche naturelle de la pensée mathématique, et il y aurait plus d'inconvénients que d'avantages à vouloir l'éviter.

Les autres procédés que nous avons donnés pour la formation de types pourraient s'appeler procédés secondaires, parce que nous savons définir, pour chacun des ensembles fondamentaux qu'ils engendrent, une correspondance biunivoque (dite "canonique") avec un ensemble fondamental défini au moyen des procédés A), B), C). En voici la liste :

D) Produit de plusieurs ensembles fondamentaux, par exemple $E \times E' \times E''$: en correspondance biunivoque avec $(E \times E') \times E''$ (obtenu par application répétée de A)).

E) Ensemble des fonctions $f(x,y,z)$, définies pour $x \in E$, $y \in E'$, $z \in E''$, à valeurs dans F : en correspondance biunivoque avec une partie de l'ensemble des parties de $E \times E' \times E'' \times F$ (donc avec un ensemble fondamental obtenu par application succes- -sive des procédés D), B), C)).

F) Ensemble des correspondances de E à E' : en correspon- -dance biunivoque avec l'ensemble des parties de $E \times E'$.

G) Produit $\prod_{\iota} A_{\iota}$, A_{ι} étant une fonction définie pour $\iota \in I$, à valeurs dans $P(E)$: c'est une partie de l'ensemble des fonctions définies dans I, à valeurs dans E (donc on l'obtient par application successive des procédés E), C)).

H) Ensemble quotient $E / \mathcal{E}$ d'un ensemble fondamental E par une relation d'équivalence $\mathcal{E}(x, y)$ entre éléments généri- -ques x, y de E : en correspondance biunivoque avec une partie de l'ensemble des parties de E (application successive de B) et de C)).

Tels sont les outils dont nous disposons afin d'édifier la mathématique. Mais, tels qu'ils sont, ils s'appliquent à des ensembles fondamentaux sur lesquels on suppose qu'on ne possède, en dehors de nos règles elles-mêmes, aucune indication. Afin d'aller plus loin et de sortir de la théorie générale des ensembles pour aborder des théories mathématiques particulières, il est nécessaire de faire porter le raisonnement sur des ensembles fondamentaux auxquels on attribue des propriétés qui ne résultent pas simplement de nos règles. C'est ce que nous allons faire au chapitre suivant.

<u>Addendum</u> : Insérer dans le §4 l'exercice :

<u>Exercice</u>. Montrer que, si A_z est une fonction de $z \in I$, à valeurs dans $P(E)$, $\bigcap_z A_z$ est la <u>réunion</u> des ensembles X tels que l'on ait $X \subset A_z$ quel que soit z ; et que $\bigcup_z A_z$ est <u>l'intersection</u> des ensembles Y tels que $Y \supset A_z$ quel que soit z.

-=-=-=-=-=-

CHAPITRE III

Puissances ; ensembles finis et dénombrables.

§ 1. Puissance d'un ensemble.

Soit E un ensemble fondamental. On dira que deux parties X, Y de E sont <u>équipotentes</u> s'il existe une application biunivoque de X sur Y. C'est là, en vertu de ce que nous savons sur les corres-pondances (chap. II, § 3) une relation d'équivalence (chap. II, § 6) dans l'ensemble des parties de E, qui détermine donc un partage de P(E) en classes ; l'ensemble de ces classes, c'est-à-dire le quotient de P(E) par cette relation, s'appelle l'ensemble des <u>puis-sances</u> des parties de E ; la classe à laquelle appartient une partie X de E pour cette relation s'appellera la <u>puissance</u> de X ; les relations "X, Y sont équipotents" et "X, Y ont même puissance" sont donc équivalentes.

Plus généralement, si E et E' sont des ensembles fondamentaux, on dira qu'une partie X de E et une partie Y de E' sont <u>équipotentes</u> s'il existe une application biunivoque de X sur Y. Cette relation est encore symétrique et transitive ; mais, n'étant plus une rela-tion entre éléments d'un même ensemble fondamental, ce n'est plus une relation d'équivalence, et elle ne détermine aucun partage en classes. Si X, Y sont équipotents, toute partie X' de E, de même puissance que X, et toute partie Y' de E', de même puissance que Y, le sont aussi : la relation "X et Y sont équipotents" peut donc être considérée (chap. II, § 6) comme une relation entre la puissance de X et la puissance de Y ; plus précisément, cette relation est une correspondance biunivoque entre une partie de l'ensemble des puissances des parties de E et une partie de l'ensemble des puissances des parties de E' : cette correspondance sera dite <u>canonique</u>, et quand nous dirons que les puissances d'une partie X de E et d'une partie Y de E' sont <u>correspondantes</u> c'est toujours de cette correspondance canonique qu'il s'agira : cela reviendra donc à dire que X, Y sont équipotents.

D'une correspondance biunivoque entre ensembles fondamentaux E, E', nous avons appris (chap. II, § 3) à dériver une correspondance biunivoque entre P(E) et P(E') ; de même pour les produits. Nous pouvons donc énoncer les résultats suivants.

Si E, F sont équipotents, P(E), P(F) le sont aussi.

Si E et F, E' et F', E" et F" sont respectivement équipotents, il en est de même de $E \times E' \times E''$ et de $F \times F' \times F''$.

Dans tous les cas où nous avons appris à définir des correspondances biunivoques (dites "canoniques") entre ensembles fondamentaux dérivés, par les procédés que nous connaissons, de certains ensembles primitifs, nous pouvons en conclure que les ensembles dont il s'agit sont équipotents. Il en est ainsi, par exemple, de $E \times E'$ et $E' \times E$; de $E \times E' \times E''$, de $(E \times E') \times E''$, et de $E \times (E' \times E'')$.

Théorème I. Soient E, F, I des ensembles fondamentaux. Soient A_ι et B_ι des fonctions définies pour $\iota \in I$, à valeurs respectivement dans P(E) et P(F). Supposons : a) que $\iota \neq \varkappa$ entraîne $A_\iota \cap A_\varkappa = \emptyset$ et $B_\iota \cap B_\varkappa = \emptyset$; b) que, quel que soit $\iota \in I$, A_ι et B_ι soient équipotents. Alors, quel que soit $J \subset I$, $A(J) = \bigcup_{\iota \in J} A_\iota$ et $B(J) = \bigcup_{\iota \in J} B_\iota$ sont équipotents.

En effet, soit C_ι une application biunivoque de A_ι sur B_ι. Considérons C_ι comme une partie de $E \times F$, et posons $C(J) = \bigcup_{\iota \in J} C_\iota$:

$C(J)$ est une application biunivoque de $A(J)$ sur $B(J)$. En effet, soit $x \in A(J)$: il existe un $\iota \in J$ tel que $x \in A_\iota$, il en existe un seul puisque $A_\iota \cap A_\varkappa \neq \emptyset$ entraîne $\iota = \varkappa$; à l'élément ι de J tel que $x \in A_\iota$ correspond une application C_ι bien déterminée, et par cette application correspond à x un élément y bien déterminé de $B_\iota \subset B(J)$, qui est l'élément de F correspondant à x par $C(J)$. On voit de même que, par $C(J)$, tout $y \in B(J)$ correspond à un élément x et un seul de E, et que $x \in A(J)$.

Le théorème s'applique en particulier quand E et F sont un même ensemble fondamental. Soit alors $\mathfrak{A}_\iota$ une fonction de $\iota \in I$, prenant ses valeurs dans l'ensemble des puissances des parties de E; supposons qu'il existe une fonction A_ι de $\iota \in I$, prenant ses valeurs dans $P(E)$, telle que $\iota \neq \varkappa$ entraîne $A_\iota \cap A_\varkappa = \emptyset$ et que, quel que soit $\iota \in I$, la puissance de A_ι soit $\mathfrak{A}_\iota$. Alors, si A_ι, A'_ι sont deux fonctions possédant ces propriétés, $\bigcup_{\iota \in J} A_\iota$ et $\bigcup_{\iota \in J} A'_\iota$ ont même puissance quel que soit $J \in I$: cette puissance ne dépend donc que de J et de la fonction $\mathfrak{A}_\iota$; on l'appellera la somme des puissances $\mathfrak{A}_\iota$ pour $\iota \in J$, et on l'écrira :

$$\sum_{\iota \in J} \mathfrak{A}_\iota .$$

Cette somme n'est donc définie que lorsqu'il existe au moins une fonction A_ι ayant les propriétés indiquées.

Un cas particulier important est celui où I est un ensemble explicite. Si I se compose des signes 1,2, on conviendra d'écrire la somme des puissances $\mathfrak{A}_\iota$ pour $\iota \in I$ sous la forme $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$: expression qui n'est donc définie que s'il existe des parties A_1, A_2 de E, de puissances respectives $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, et telles que $A_1 \cap A_2 \neq 0$; lorsqu'il en est ainsi, $A_1 \cup A_2$ a pour puissance

$\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$, par définition. De même si I se compose des signes 1,2,3 : on conviendra de noter $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3$ la somme des puissances $\mathfrak{A}_\iota$ pour $\iota \in I$, lorsqu'elle est définie. Nos définitions montrent qu'une telle somme est indépendante de l'ordre dans lequel on écrit les termes (commutativité) et que l'on peut grouper arbitrairement les termes au moyen de parenthèses sans modifier la somme (associativité).

Soient E, F des ensembles fondamentaux. On dira que la puissance d'une partie X de E est inférieure à celle d'une partie Y de F, ou encore que celle-ci est supérieure à celle-là, s'il existe une application biunivoque de X dans Y ; on dira que la première est strictement inférieure à la seconde, ou la seconde strictement supérieure à la première, s'il existe une application biunivoque de X dans Y mais qu'il n'en existe pas de Y dans X.

> Dans notre terminologie, donc, toute puissance est à la fois supérieure ou inférieure à elle-même ; réciproquement, d'ailleurs, nous démontrerons plus loin (§ 3) que si la puissance de X est à la fois supérieure et inférieure à celle de Y, X et Y sont équipotents. Si nous nous écartons, sur ce point, des sens qu'on attribue communément aux mots "inférieur" et "supérieur", c'est pour les mêmes raisons pour lesquels nous avons convenu de considérer tout ensemble comme une partie de lui-même, et de considérer comme vraies les relations $X \subset X$ et $X \supset X$: ce langage est, mathématiquement, beaucoup plus commode qu'un langage où l'on conviendrait de considérer les relations "inférieur" et "supérieur" comme excluant l'égalité. Cf. Lexique.

Théorème II. Soit f une fonction définie sur E, à valeurs dans F ; quel que soit $X \subset E$, l'image f(X) de X par f a une puissance inférieure à celle de X .

Soit en effet Y = f(X) ; quel que soit $y \in Y$, l'ensemble $X \cap \overset{-1}{f}(\{y\})$ est non vide, par définition de f(Y) ; donc, par le principe de choix, il existe une application $g(y)$ de Y dans E, telle que l'on ait, quel que soit y, $g(y) \in X \cap \overset{-1}{f}(y)$: $g(y)$ est donc une application de Y dans X, et c'est une application biuni-voque, car nous savons que si $y \neq z$ on a $\overset{-1}{f}(\{y\}) \cap \overset{-1}{f}(\{z\}) = \emptyset$, donc $g(y) \neq g(z)$.

Ce théorème a une conséquence souvent utile, analogue au théorème I :

Théorème III. Soient E, F, I des ensembles fondamentaux ; soient A_z, B_z des fonctions définies pour $z \in I$, à valeurs dans P(E), P(F) respectivement ; supposons : a) que $z \neq x$ entraîne $A_z \cap A_x = \emptyset$; b) que, quel que soit z, B_z ait une puissance inférieure à celle de A_z. Alors, quel que soit $J \in I$, $B(J) = \bigcup_{z \in J} B_z$ a une puissance inférieure à celle de $A(J) = \bigcup_{z \in J} A_z$.

En effet, soit C'_z une application biunivoque de B_z dans A_z ; soit A'_z l'image de B_z par cette application, de sorte que $C_z = \overset{-1}{C'_z}$ soit une application biunivoque de A'_z sur B_z ; on voit, comme dans la démonstration du théorème I, que la réunion $C(J)$ des C_z pour $z \in J$ est une application de $A'(J) = \bigcup_{z \in J} A'_z$ sur B(J) ; donc, en vertu du théorème II, B(J) a une puissance inférieure à celle de $A'(J) \subset A(J)$, donc à celle de A(J).

Théorème IV. Soit E un ensemble fondamental : quel que soit $A \subset E$, A a une puissance strictement inférieure à celle de l'en-semble des $X \subset A$; en particulier, E a une puissance stricte-ment inférieure à celle de P(E).

En effet : a) si à tout $x \in A$ on fait correspondre l'ensemble $\{x\}$, on a bien $\{x\} \subset A$: c'est bien là une application biunivo-que de A dans l'ensemble des $X \subset A$.

b) Supposons qu'il existe une application biunivoque $f(X)$ de l'ensemble des $X \subset A$ dans A ; et montrons qu'il en résulte une contradiction. En effet, considérons la relation "$f(X) \notin X$" : soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des X qui y satisfont, de sorte que les relations "$f(X) \notin X$" et "$X \in \mathfrak{M}$" sont équivalentes ; soit M l'image de $\mathfrak{M}$ par f : f étant biunivoque, (les relations "$X \in \mathfrak{M}$" et "$f(X) \in M$" sont équivalentes, donc "$f(X) \notin X$" et "$f(X) \in M$" sont équivalentes : pour $X = M$, "$f(M) \notin M$" et "$f(M) \notin M$" sont donc équivalentes, ce qui est une contradiction : car en général, si p est une proposition et $\bar{p}$ sa négation, la proposition "$p \rightleftarrows \bar{p}$" signifie "$p \to \bar{p}$, et $\bar{p} \to p$" c'est-à-dire "$\bar{p}$ ou $\bar{p}$, et p ou p", donc en définitive "$\bar{p}$ et p" .

§ 2. Ensembles finis ; nombres entiers.

Soit E un ensemble fondamental. Si une partie X de E a même puissance que $\emptyset$, on a $X = \emptyset$: car il n'y a pas de correspondance biunivoque entre $\emptyset$ et un ensemble non vide.

Soit a un élément de E. Les propositions "X a même puissance que $\{a\}$", et "X est un ensemble à un seul élément" (c'est-à-dire par définition "il existe un x et un seul tel que $x \in X$", cf. Chap. II, § 1) sont équivalentes. Car soit $B = \{b\}$; la correspondance $C = \{(a,b)\}$ est une application biunivoque de A sur B. Réciproquement, s'il existe une correspondance biunivoque C entre A et une partie B de E, soit b l'élément de B qui corresponde à a par C : si $y \in B$, si x est l'élément de A auquel y correspond par C, on aura $x = a$, donc $y = b$; donc $B = \{b\}$.

Nous allons maintenant faire usage, dans le cas particulier qui va nous occuper, d'un procédé général extrêmement important et d'une grande portée. Supposons que l'on se donne, dans un ensem-ble fondamental E une famille H de parties de E, c'est-à-dire une partie H de P(E) ; et qu'on sache que l'intersection $A = \bigcap_{X \in H} X$ est un élément de H, qui est donc tel que $A \subset X$ quel que soit $X \in H$: on dira alors que A est <u>la plus petite partie de E qui appartienne à H</u> : manière de parler à laquelle nous n'attribuons donc un sens que lorsque la famille H possède la propriété indiquée. Il arrivera très souvent, en particulier, que E soit lui-même l'ensemble des parties d'un certain ensemble fondamental E' : dans ce cas, l'on parlera de la plus petite famille de parties de E' qui possède une certaine propriété, cette phrase n'ayant de sens que lorsqu'on sait que l'intersection des familles ayant cette propriété est une famille qui la possède encore.

Considérons maintenant, dans un ensemble fondamental E, les familles Φ' de parties de E qui satisfont aux conditions que voici: 1) $\emptyset \in \Phi'$; 2) quel que soit $X \in \Phi'$, et quel que soit $y \in E$, on a $X \cup \{y\} \in \Phi'$. L'intersection des familles Φ' est encore une telle famille, car $\emptyset$ appartenant à tous les Φ' appartient à leur intersection ; et si X appartient à l'intersection de tous les Φ', on a, quel que soit Φ', $X \in \Phi'$, donc $X \cup \{y\} \in \Phi'$ quel que soit $y \in E$ et quel que soit Φ', donc $X \cup \{y\}$ appar-tient bien à l'intersection de tous les Φ'.

Nous appellerons alors <u>ensemble des parties finies de E</u>, et nous désignerons par Φ, la plus petite famille de parties de E telle que 1) $\emptyset \in \Phi$ et 2) quels que soient $X \in \Phi$, $y \in E$, $X \cup \{y\} \in \Phi$.

Un élément X de Φ s'appellera une partie <u>finie</u> de E ; une partie de E qui n'appartient pas à la famille Φ sera dite <u>infinie</u>.

D'après 1) et 2), tout ensemble $\{y\}$ à un seul élément appar-tient à Φ. Nous allons démontrer maintenant les propositions suivantes :

1. Si X est une partie finie de E, toute partie Y de X est finie.

En effet, soit Φ_1 la famille des parties X de E telles que toute partie de X soit finie. On a $\emptyset \subset \Phi_1$; soient de plus $X \in \Phi_1$, $y \in E$, $X' = X \cup \{y\}$, $Z \subset X'$; on a $Z = Z \cap X' = (Z \cap X) \cup (Z \cap \{y\})$, et $Z \cap \{y\} = \emptyset$ si $y \notin Z$, $= \{y\}$ si $y \in Z$; donc on a, ou $Z = Z \cap X$, ou $Z = (Z \cap X) \cup \{y\}$: $Z \cap X$, comme partie de X, est fini, donc Z est en tout cas fini ; puisqu'il en est ainsi quel que soit $Z \subset X'$, on a $X' \in \Phi_1$, ou autrement dit la famille Φ_1 possède les duex propriétés 1), 2) au moyen desquelles nous avons défini Φ, et par définition de Φ on a donc $\Phi_1 \supset \Phi$; mais il est clair, d'autre part, que $\Phi_1 \subset \Phi$, donc $\Phi_1 = \Phi$, ce qui démontre la proposition.

2. Soit C une application d'une partie d'un ensemble fonda-mental E dans un ensemble fondamental F. L'image par C de toute partie finie de E est une partie finie de F.

Même raisonnement : on considère la famille Φ_2 des parties finies X de E dont l'image C(X) soit une partie finie de F ; alors $\emptyset \in \Phi_2$;et, si $X \in \Phi_2$, $y \in E$, on aura $C(X \cup \{y\}) = C(X) \cup C(\{y\})$

$C(\{y\})$ est vide ou est un ensemble à un seul élément, $C(X)$ est fini, donc $C(X \cup \{y\})$ est fini, et $X \cup \{y\} \in \Phi_2$. La famille Φ_2, qui est contenue dans Φ et possède les deux propriétés 1,2 qui ont servi à définir Φ, n'est donc autre que Φ ; et la proposition est démontrée.

Il s'ensuit que, si X est une partie finie de E et la correspondance C telle qu'à tout $x \in X$ corresponde au plus un élément de F, l'image $C(X)$ est une partie finie de F : car, si C' est la restriction de C à X (chap. II, § 3 : C' est la partie de $E \times F$ définie par $C' = C \cap (X \times F)$), C' est une application d'une partie de X dans F, donc $C'(X)$ est fini, et $C'(X) = C(X)$.

De la proposition 2. résulte que, si une partie X de E et une partie Y de F sont de même puissance, les propositions "X est une partie finie de E" et "Y est une partie finie de F" sont équivalentes. Il en sera ainsi, en particulier, si X et Y sont parties de E ; les puissances des parties finies de E forment une partie de l'ensemble des puissances des parties de E, dont les élément s'appelleront les <u>puissances finies</u> dans E.

3. Si X et Y sont des parties finies de E, $X \cup Y$ est fini. Même raisonnement que pour 1. et 2. Soit Φ_3 l'ensemble des X tels que, quel que soit $Y \in \Phi$, on ait $X \cup Y \in \Phi$. On a $\emptyset \in \Phi_3$; si $X \in \Phi_3$ et $y \in E$, on a, quel que soit $Y \in \Phi$, $Y \cup \{y\} \in \Phi$, donc $X \cup (Y \cup \{y\}) \in \Phi$ c'est-à-dire $(X \cup \{y\}) \cup Y \in \Phi$, et par suite $X \cup \{y\} \in \Phi_3$; la famille Φ_3 possède donc les propriétés 1,2, de sorte que $\Phi_3 \supset \Phi$; mais il est clair que $\Phi \subset \Phi$, donc $\Phi_3 = \Phi$.

On en déduit que si X, Y, Z sont finis, $X \cup Y \cup Z$ l'est aussi.

4. Soient X une partie finie de E, Y une partie finie de F ; $X \times Y$ est une partie finie de $E \times F$.

Soit B une partie finie de F ; soit Φ_4 la famille des parties finies X de E telles que $X \times B$ soit fini. On a $\emptyset \in \Phi_4$, puisque $\emptyset \times B$ est la partie vide de $E \times F$. Si $X \in \Phi_4$, on a $(X \cup \{y\}) \times B = (X \times B) \cup (\{y\} \times B)$: $X \times B$ est fini, $\{y\} \times B$ est en correspondance biunivoque avec B (par projection sur F) donc fini, leur réunion est donc finie et $X \cup \{y\} \in \Phi_4$.

5. Soient X une partie finie de E, Y une partie infinie de F. Il existe une application biunivoque de X dans Y.

Soit Φ_5 la famille des parties finies X de E telles qu'il existe une application biunivoque de X dans Y ; on a $\emptyset \in \Phi_5$. Soit $X \in \Phi_5$: il existe une application biunivoque de X sur $Y' \subset Y$; on a $Y' \neq Y$, sinon Y serait fini, donc il existe un $z \in Y - Y'$. Soit $y \in E$: si $y \in X$, $X \cup \{y\} = X \in \Phi_5$; si $y \notin X$, il y a une application biunivoque de $X \cup \{y\}$ sur $Y' \cup \{z\}$, celle qui prolonge l'application de X sur Y' et fait correspondre z à y ; donc $X \cup \{y\} \in \Phi_5$; de même que précédemment, cela démontre la proposition.

Nous allons maintenant introduire, dans notre système de règles, un élément essentiellement nouveau, indispensable à notre mathéma-tique.

Nous nous donnons le droit d'appliquer d'introduire une fois pour toutes un type T pour lequel la proposition suivante sera vraie : "l'ensemble fondamental E du type T est infini".

On pourrait être tenté d'exprimer ce principe comme suit: "il existe un type T tel que l'ensemble fondamental correspondant E soit infini"; mais il est essentiel de noter que cette phrase n'est pas une proposition et doit être considérée comme n'ayant aucun sens ; car nous n'avons le droit d'appliquer les mots "il existe..." qu'à un argument susceptible de prendre des valeurs d'un type déterminé ; or, non seulement nos règles ne nous permettent pas de considérer un type T comme un objet d'un type déterminé dont l'ensemble fondamental fût l'ensemble de tous les types), mais, si l'on avait l'imprudence de s'en donner le droit, on en déduirait très facilement des contradictions (c'est ce qu'on appelle souvent les "paradoxes" de la théorie des ensembles, et qui ne sont que des sortes de calembours, provenant de l'application de nos règles de raisonnement à des phrases du genre de celles qu'on vient d'énoncer).

Dans ces conditions, il est clair que tout ce qu'on peut demander au principe nouveau que nous venons de poser, c'est que, joint à nos autres règles, il n'entraîne pas contradiction. Il n'est pas de mathématicien qui ne soit certain qu'il en soit bien ainsi : c'est là une certitude d'ordre expérimental, qu'on doit considérer comme non moins fondée que n'importe laquelle de nos certitudes en dehors des mathématiques ; mais ce n'est pas à proprement parler une certitude mathématique.

Au lieu de se donner le droit de parler d'un type T pour lequel la proposition "l'ensemble fondamental du type T est infini" soit vraie, on pourrait se donner le droit de parler d'un type dont les objets possèderaient les propriétés caractéristiques des entiers naturels (telles que nous les énoncerons plus loin), et qu'on pourrait appeler le type des entiers. Cela reviendrait exactement au même : car, dans ce § même, nous allons, du principe énoncé plus haut, déduire la formation d'un type dont les objets possèdent toutes les propriétés des entiers ; et inversement, si les objets d'un type possèdent ces propriétés, il s'ensuit en particulier que l'ensemble de ces objets est infini.

Soit donc E un ensemble fondamental infini. Soit Z l'ensemble des puissances des parties finies de E : nous considérerons Z comme ensemble fondamental d'un type nouveau. La puissance de $\emptyset$ est un élément de Z qu'on notera 0 ; la puissance des ensembles à un seul élément est un élément de Z qu'on notera 1. Z sera appelé, une fois pour toutes, l'ensemble des entiers.

Soit F un ensemble fondamental quelconque. D'après le § 1 et la prop. 5 ci-dessus, il existe une application biunivoque de l'ensemble des puissances des parties finies de F dans Z. Par abus de langage, l'élément de Z qui correspond ainsi à une partie finie W de F sera encore appelé la puissance de W : comme à deux parties W, W' de F de même puissance correspond le même élément de Z, il ne résultera de cet abus de langage aucune confusion.

Soient $n \in Z$, $p \in Z$; soit X une partie de E, de puissance n; E - X est infini (sinon E serait fini), et contient donc (prop. 5) un ensemble Y de puissance p ; on a alors $X \cap Y = \emptyset$: donc l'expression $n + p$ a un sens, c'est la puissance de $X \cup Y$, donc (prop.3) un élément de Z. On voit de même que, si m,n,p sont des éléments de Z, $m + n + p$ a un sens et représente un élément de Z. D'après ce qu'on a vu au § 1, cette opération est commu-tative et associative, c'est-à-dire que le résultat ne dépend pas de l'ordre des termes, et ne change pas si on les groupe arbitrairement par des parenthèses (v. Algèbre, chap.I, pour une étude précise de ces lois). L'on a de plus $m + 0 = m$ quel que soit $m \in Z$.

Soient $n \in Z$, $p \in Z$; soient X, Y des parties de E de puis-sances respectives n, p : $X \times Y$ est une partie finie de $E \times E$ (prop. 4) ; sa puissance est une fonction de n et p, car si X' a même puissance que X, Y' que Y, $X' \times Y'$ aura même puissance que $X \times Y$; cette puissance sera appelée le <u>produit</u> de n et p, et se note $n.p$ (ou plus simplement np, ou quelquefois $n \times p$).

Si de même on considère des éléments m, n, p de Z, des parties X, Y, U de E de puissances respectives m, n, p, et la partie $X \times Y \times U$ de $E \times E \times E$, celle-ci est finie (à cause de l'existence d'une correspondance canonique avec $(X \times Y) \times U$) : sa puissance se notera m.n.p. Des correspondances canoniques entre $X \times Y$ et $Y \times X$, entre $X \times Y \times U$, $(X \times Y) \times U$ et $X \times (Y \times U)$ résulte qu'un produit d'éléments de Z ne change pas si on change l'ordre des "facteurs", ou si on y groupe ceux-ci arbitrairement par des parenthèses. De la relation $(X \cup Y) \times U = (X \times U) \cup (Y \times U)$, on déduit, si X, Y, U sont finis et que $X \cap Y = \emptyset$ (ce qui entraîne que $(X \times U) \cap (Y \times U) = \emptyset$) :

$$(m + n).p = m.p + n.p, \text{ quels que soient } m,n,p \in Z.$$

L'on a de plus $m.0 = 0$, $m.1 = m$ quel que soit $m \in Z$.

Exercice. Montrer que, si X est une partie finie d'un ensemble fondamental F, Y une partie finie d'un ensemble fondamental G, l'ensemble Y^X des applications de X dans Y est une partie finie de l'ensemble des correspondances de F à G.

Montrer que si n et p sont des éléments de Z, X et Y des parties de E de puissances respectives n, p, la puissance de Y^X est une fonction de n, p, à valeurs dans Z, qu'on notera p^n ; montrer que l'on a :

$$p^{m+n} = p^m.p^n, \quad p^0 = 1, \quad p^1 = p .$$

La définition de la famille Φ des ensembles finis se transpose en une propriété très importante de l'ensemble Z, connue sous le nom de <u>principe d'induction totale</u> (ou principe de <u>récurrence</u>)

Soit Z' une partie de Z. Si $0 \in Z'$ et si, quel que soit $n \in Z$, $n \in Z'$ entraîne $n + 1 \in Z'$, on a $Z' = Z$.

Soit en effet Φ' la famille des parties de E dont les puissances appartiennent à Z' ; on a $\emptyset \in \Phi'$.

Soient $X \in \Phi'$, n la puissance de X; de sorte que $n \in Z'$; soit $y \in E$: si $y \in X$, $X \cup \{y\} = X \in \Phi'$, et si $y \notin X$, $X \cup \{y\}$ a pour puissance $n + 1 \in Z'$, donc appartient à Φ'. Par conséquent $\Phi' \supset \Phi$, et, comme $\Phi' \subset \Phi$, on a $\Phi' = \Phi$, donc $Z' = Z$.

On énonce souvent le principe d'induction totale sous la forme suivante : n étant un argument prenant ses valeurs dans Z, soit P(n) une propriété de n. Alors, si P(0) est vraie et si la proposition "$P(n) \rightarrow P(n+1)$" est vraie, la proposition "quel que soit n, P(n)" est vraie.

Car il suffit d'appliquer I à l'ensemble Z' des éléments n de Z qui possèdent la propriété P(n).

Souvent, on a à appliquer ce principe au cas où P(n) est la négation $\overline{Q}(n)$ d'une propriété Q(n). Comme les propositions "$\overline{Q}(n) \rightarrow \overline{Q}(n+1)$", "$Q(n+1) \rightarrow Q(n)$" sont équivalentes, notre principe prend alors la forme suivante :

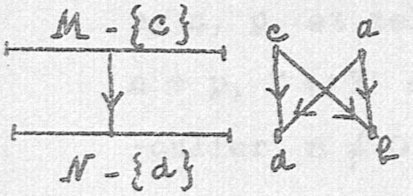
Q(n) étant une propriété de $n \in Z$, si $\overline{Q}(0)$ est vrai et si la proposition "$Q(n+1) \rightarrow Q(n)$" est vraie, la proposition "quel que soit n, $\overline{Q}(n)$" est vraie.

Nous allons appliquer ce principe à la démonstration de l'important théorème suivant :

Théorème I. Les relations "$m = n$" et "$m + p = n + p$" sont équiva-lentes.

Nous savons que $m = n$ entraîne $m + p = n + p$; considérons donc la propriété P(p) de $p \in Z$" quels que soient $m \in Z$, $n \in Z$, si $m + p = n + p$, on a $m = n$". P(0) est vrai, puisque $m + 0 = m$,$n+0 = n$.

Démontrons P(1) : soient M, N des parties de E de puissances respectives m, n ; soient $a \notin M$ et $b \notin N$, de sorte que $M' = M \cup \{a\}$ et $N' = N \cup \{b\}$ soient de puissances respectives m + 1 et n + 1 ; si m + 1 = n + 1, il y aura une correspondance biunivoque C entre M' et N'. Si, par cette correspondance, b correspond à a, C définit alors une correspondance biunivoque entre M et N, donc



m = n ; sinon, à a correspondra par C un élément d de N, et b correspondra à un élément c de M ; soit C' la correspondance entre M et N qui coïncide avec C sur $M - \{c\}$, et qui fasse correspondre d à c : c'est une correspondance biunivoque entre M et N ; donc en tout cas m = n, et P(1) est vrai. Il en résulte que P(p) entraîne P(p + 1) : car soit m + (p + 1) = n +(p + 1), c'est-à-dire, en vertu des propriétés de l'addition, (m + p) + 1 =(n + p)+ 1, donc, en vertu de P(1), m + p = n + p, donc, si P(p) est vrai, m = n. Alors, par application du principe d'induction totale, le théorème est démontré.

Soient maintenant $m \in Z$, $n \in Z$: m sera <u>inférieur</u> à n (suivant la définition du § 1) si, X et Y étant des parties de E de puissances m, n, il existe une application biunivoque de X dans Y ; si alors on désigne par Y' l'image de X par cette application, et par p la puissance de Y - Y', on aura m + p = n. Si l'on convient de considérer les relations "$m \leqslant n$" et "$n \geqslant m$" comme équivalentes à la relation "m est inférieur à n", on voit qu'elles sont équivalentes aussi à "il existe $p \in Z$ tel que m + p = n" ou bien à "il existe $Y \subset E$ de puissance n et $Y' \subset Y$ de puissance n" ; d'où résulte, en vertu des propriétés de la somme, que "$1 \leqslant m$ et $m \leqslant n$" entraîne "$1 \leqslant n$". Quel que soit $m \in Z$, on a $0 \leqslant m$; les relations "$m \neq 0$" et "$m \geqslant 1$" sont équivalentes, car, si X est un ensemble de puissance m, les relations "$X \neq \emptyset$", "il existe un x tel que $x \in X$" et "il existe un x tel que $\{x\} \subset X$" sont équivalentes. La relation "$m \leqslant n$" entraîne "$m + p \leqslant n + p$ quel que soit p" : car soient Y', Y, Z de puissances respectives m, n, p, et tels que $Y' \subset Y$, $Z \cap Y = \emptyset$; $Z \cup Y$ sera de puissance $n + p$, $Z \cup Y'$ de puissance $m + p$, et $Z \cup Y' \subset Z \cup Y$. En parti--culier, $n \neq 0$ entraîne $n \geqslant 1$, donc $p + n \geqslant p + 1$ quel que soit p.

En vertu du théorème I, il existe, si $m \leqslant n$, un $p \in Z$ et un seul tel que $m + p = n$; p s'appellera la <u>différence</u> de m et n, et l'on conviendra de considérer la relation "$p = n - m$" comme équivalente à "$m + p = n$".

Théorème II. Quels que soient $m \in Z$, $n \in Z$, on a $m \geqslant n$ ou $m \leqslant n$; et si $m \leqslant n$ et $m \geqslant n$, on a $m = n$.

a) Soit P(n) la propriété suivante de $n \in Z$: "quel que soit $m \in Z$, on a $m \leqslant n$ ou $m \geqslant n$". P(0) est vrai, car on a $m \geqslant 0$ quel que soit m. Si P(n) est vrai, on a, quel que soit m, $m \leqslant n$, donc $m \leqslant n + 1$, ou $m \geqslant n$ c'est-à-dire qu'il existe p tel que $m = n + p$, et alors, ou $p = 0$ et $m = n \leqslant n + 1$, ou $p \geqslant 1$ et alors $m = n + p \geqslant n + 1$: ce qui démontre que P(n) entraîne P(n+1). Par le principe d'induction totale, la proposition "quel que soit n, P(n)" est donc vraie ; ce qui démontre la première partie du théorème.

b) Soient m, n tels que $m \leqslant n$ et $m \geqslant n$, c'est-à-dire qu'il existe p, q tels que $n = m + p$ et $m = n + q$, d'où $m = m + (p + q)$, c'est-à-dire $m + 0 = m + (p + q)$; d'après le théorème I, il en résulte que $p + q = 0$, donc (puisqu'une réunion $P \cup Q$ ne peut être vide que si $P = Q = \emptyset$) $p = q = 0$, et $m = n$.

Ce théorème montre que, si m est inférieur à n, ou l'on a $m = n$ ou m est strictement inférieur à n, ces deux relations ne pouvant être vraies à la fois. Nous considérerons "$m < n$" et "$n > m$" comme des relations équivalentes à "m est strictement inférieur à n". Le théorème II peut alors s'énoncer comme suit :

Quels que soient $m \in Z$, $n \in Z$, on a $m < n$ ou $m = n$ ou $m > n$.

On voit aussi que la relation "$m < n$" est équivalente à "$m \leqslant n$ et $m \neq n$" ; et "$m > n$" à "$m \geqslant n$ et $m \neq n$".

Montrons maintenant que les relations "$m \leqslant n$", "$m < n + 1$" sont équivalentes. En effet, si $m \leqslant n$, on a $m \leqslant n + 1$ et $m \neq n+1$. Réciproquement, si $m < n + 1$, on aura $m \leqslant n + 1$, c'est-à-dire qu'il existe p tel que $m + p = n + 1$, et $m \neq n + 1$, donc $p \neq 0$ c'est-à-dire $p \geqslant 1$: il existe donc q tel que $p = q + 1$, et l'on a donc $m + q + 1 = n + 1$, ou, d'après le théorème I, $m + q = n$, donc $m \leqslant n$: la proposition est démontrée.

Il en résulte le théorème suivant :

Théorème III. L'ensemble Z_n des $m \in Z$ tels que l'on ait $m < n$ est une partie finie de Z, et sa puissance est égale à n.

Soit P(n) la propriété "Z_n est fini et de puissance n". P(0)est vrai, car $Z_0 = \emptyset$. L'ensemble Z_{n+1} est l'ensemble des m tels que $m < n+1$, c'est-à-dire des m tels que $m \leqslant n$; on a donc $Z_{n+1} = Z_n \cup \{n\}$, et, comme $n \notin Z_n$, cette relation montre que P(n) entraîne P(n + 1). Par induction totale, le théorème est démontré.

Soit donc X une partie finie d'un ensemble fondamental F : si n est sa puissance, il y a une correspondance biunivoque entre X et Z_n ; de sorte que souvent, au lieu de parler d'un ensemble fini de puissance n, on parlera de l'ensemble des éléments a_i, a_i étant une fonction de $i \in Z_n$ qui définisse une application biunivoque de Z_n dans F. On dit souvent aussi que X est un ensemble de n éléments de F, ou un ensemble à n éléments.

Nous pouvons maintenant donner une nouvelle forme, souvent utile, du principe d'induction totale :

Soit Z' une partie de Z. Si, quel que soit n, $Z_n \subset Z'$ entraîne $n \in Z'$, on a $Z' = Z$.

En effet, soit Z" l'ensemble des n tels que $Z_n \subset Z'$; puisque $Z_0 = \emptyset$, on a $0 \in Z''$; et par hypothèse, si $Z_n \subset Z'$, $n \in Z'$, donc $Z_{n+1} = Z_n \cup \{n\} \subset Z'$, et $n + 1 \in Z''$, donc $Z'' = Z$ par induction totale, et par suite aussi $n \in Z'$ quel que soit n.

Aux deux formes du principe d'induction totale correspondent deux méthodes de définition de fonctions dans Z. Voici la pre-mière et plus imple :

Soient F un ensemble fondamental, a un élément de F, F(n,x) une fonction définie pour $n \in Z$, $x \in F$, et à valeurs dans F. Il existe une fonction f(n) et une seule, définie dans Z, à valeurs dans F, telle que $f(0) = a$ et que l'on ait, quel que soit $n \in Z$: $f(n + 1) = F\left[n, f(n)\right]$.

En effet, soit Z' l'ensemble des $n \in Z$ tels qu'il existe une fonction $f_n(m)$ et une seule, définie pour $m \leqslant n$, à valeurs dans F, et telle que $f_n(0) = a$ et que l'on ait, pour $m < n$,

$f_n(m+1) = F\left[m, f(m)\right]$. On a $0 \in Z'$; supposons que $n \in Z'$: alors, en définissant $f_{n+1}(m)$ par les conditions $f_{n+1}(m) = f_n(m)$ pour $m \leqslant n$ et $f_{n+1}(n+1) = F\left[n, f_n(n)\right]$, on a une fonction satisfaisant aux conditions voulues ; s'il en existait une autre $f'_{n+1}(m)$, elle coïnciderait nécessairement avec $f_n(m)$, donc avec $f_{n+1}(m)$, pour $m \leqslant n$, puisque $n \in Z'$ et que par suite $f_n(m)$ est la seule fonction satisfaisant aux conditions énoncées pour $m \leqslant n$; mais alors on aura en particulier $f'_{n+1}(n+1) = F\left[n, f_n(n)\right]$, ce qui montre bien que $f'_{n+1} = f_{n+1}$, donc que $n+1 \in Z'$. Par conséquent $Z' = Z$, et en posant $f(n) = f_n(n)$ quel que soit n, on a une fonction satisfaisant aux conditions de l'énoncé. S'il y avait deux fonctions distinctes $f(n)$, $f'(n)$ satisfaisant à ces conditions, il existerait un $n \in Z$ tel que $f(n) \neq f'(n)$, et les restrictions $f_n(n)$, $f'_n(n)$ de ces fonctions à l'ensemble des $m \leqslant n$ seraient des fonctions distinctes, de sorte qu'on aurait $n \notin Z'$, contrairement à ce qui a été démontré.

Le second procédé est le suivant :

Soit $\mathcal{Z}$ la famille des parties Z_n de Z pour $n \in Z$. Soit $\mathcal{A}$ une famille d'applications d'ensembles de $\mathcal{Z}$ dans un ensemble fondamental F, et soit $F(A)$ une fonction définie pour $A \in \mathcal{A}$, à valeurs dans $\mathcal{A}$, et possédant la propriété suivante : si $A' = F(A)$, et si A est une application de Z_n dans F, A' est une application de Z_{n+1} dans F qui coïncide avec A sur Z_n (autrement dit, A' est un prolongement de A à Z_{n+1}). Dans ces conditions, il existe une fonction $f(n)$ et une seule, définie pour $n \in Z$, à valeurs dans F, et telle que, si A_n est la restriction de $f(n)$ à Z_n, l'on ait, quel que soit $n \in Z$, $A_n \in \mathcal{A}$ et $A_{n+1} = F(A_n)$.

La démonstration est analogue à celle qui a été donné pour le premier procédé, mais utilise la seconde forme du principe d'induction totale.

Exercice. Montrer par induction totale qu'il existe une fonction $f(p,n)$ et une seule, définie pour $p \in Z$, $n \in Z$, et telle que

$$f(p,0) = 1,$$
$$f(p,n+1) = p.f(p,n).$$

Cette fonction se note p^n (et n'est autre que celle qui a été définie plus haut par un autre procédé). Montrer que l'on a

$$(p.q)^n = p^n.q^n , \quad p^{m.n} = (p^m)^n.$$

Observons, pour terminer ce paragraphe, que si $\hat{E}$ est un ensemble fondamental infini, autre que E, on peut répéter toute la théorie ci-dessus sur l'ensemble $\hat{Z}$ des puissances des parties finies de $\hat{E}$: mais, en vertu de la prop. 5, la correspondance canonique entre puissances de parties de E et puissances de parties de $\hat{E}$ définit une application biunivoque de Z sur $\hat{Z}$; donc Z et $\hat{Z}$ sont équipotents ; de plus, l'on vérifie immédiatement que toute relation formée par les moyens ci-dessus entre éléments de Z est équivalente à la relation obtenue en y remplaçant chaque élé-ment de Z par l'élément correspondant de $\hat{Z}$. Ces faits seront précisés au chap. V par la notion d'isomorphie.

§ 3 . Ensembles dénombrables.

Commençons par un important théorème préliminaire.

Théorème I. X étant une partie non vide de Z, il existe un élément x de X, et un seul, tel que $x \leqslant z$ quel que soit $z \in X$: x s'appelle <u>le plus petit élément</u> de X. Si de plus X est fini, il existe aussi un élément x' de X, et un seul, tel que $x' \geqslant z$ quel que soit $z \in X$: x' s'appelle <u>le plus grand élément</u> de X.

Il est clair d'abord que si x et y sont des éléments de X, tels que $x \leqslant z$ et $y \leqslant z$ quel que soit $z \in X$, on aura $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, donc $x = y$: le plus petit élément, s'il existe, est unique ; de même le plus grand.

Occupons nous d'abord du cas où X est fini ; soit $P(n)$ la propriété "$n = 0$, ou toute partie X de Z de puissance n a un plus petit et un plus grand élément". $P(0)$ est vrai, de même $P(1)$, car si $n = 1$, X est un ensemble à un élément x, qui est alors plus petit et plus grand élément de X. Montrons que si $n \geqslant 1$, $P(n)$ entraîne $P(n + 1)$; soient X' une partie de Z de puissance $n + 1$, et $x \in X'$, de sorte que $X = X' - \{x\}$ a la puissance n ; soit y le plus petit élément de X : si $y \leqslant x$, ce sera aussi le plus petit élément de X' ; si $y \geqslant x$, x sera le plus petit élément de X' ; de même, soit z le plus grand élément de X : si $z \geqslant x$, z sera aussi le plus grand élément de X', et si $z \leqslant x$, ce sera x.

Reste à démontrer l'existence d'un plus petit élément de X si X est infini. Soit $n \in X$: l'ensemble des $m \leqslant n$ est fini, donc son intersection X' avec X est finie, et non vide, car $n \in X'$; soit x le plus petit élément de X' : on a en particulier $n \geqslant x$. Alors, quel que soit $z \in X$, on a $z \leqslant n$, donc $z \in X'$ et par suite $z \geqslant x$, ou $z \geqslant n$, donc encore $z \geqslant x$; x est le plus petit élément de X.

De là résulte un important corollaire : <u>l'ensemble Z est infini</u>. Sinon, en effet, il aurait un plus grand élément n ; ce qui en--traîne contradiction, puisque $n + 1 > n$.

Nous conviendrons maintenant de dire qu'un ensemble est <u>dénombrable</u> s'il est de puissance inférieure à celle de Z, c'est-à-dire s'il est équipotent à une partie de Z.

Théorème II. Tout ensemble dénombrable infini est équipotent à Z.

Cela revient à dire que toute partie infinie X de Z a même puissance que Z.

Quel que soit $n \in Z$, l'ensemble des éléments $\geq n$ de X est non vide ; car s'il existait n tel qu'il fût vide, X serait fini. Nous définirons alors une fonction f(n), par induction, au moyen de la loi suivante :

f(0) est le plus petit élément de X ; et $f(n+1)$ est le plus petit élément m de X tel que $m > f(n)$.

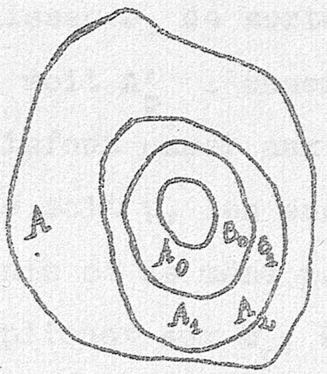
Montrons que $n < p$ entraîne $f(n) < f(p)$; cela revient à dire que, quel que soit q, on a $q = 0$ ou $f(n+q) > f(n)$: en effet, il en est ainsi pour $q = 0$, $q = 1$; et, si $q \geq 1$ possède cette propriété, il en est de même de $q + 1$ puisqu'alors $f(n+q+1) > f(n+q) > f(n)$. Alors $n \neq p$ entraîne $n < p$ ou $n > p$, donc $f(n) < f(p)$ ou $f(n) > f(p)$, donc $f(n) \neq f(p)$: et par suite f(n) définit une application biunivoque de Z dans X. De plus, quel que soit $x \in X$, il existe n tel que $x = f(n)$: en effet, l'ensemble des $m \in Z$ tels que $f(m) < x$ est fini (puisque la fonction f(m) définit une application biunivoque de cet ensemble dans l'ensemble des éléments $< x$ de Z) : soit p son plus grand élément, c'est-à- dire que $f(p) < x$ et $f(q) \geq x$ si $q > p$, donc en particulier $f(p+1) \geq x$: mais on ne peut avoir alors $f(p+1) > x$, car x serait alors un élément de X, $> f(p)$ et $< f(p+1)$, contrairement à la définition de $f(p+1)$;

on a donc $x = f(p+1)$. La fonction $f(m)$ est donc une application biunivoque de Z sur X, et le théorème est démontré.

Théorème III. Soient E, F des ensembles fondamentaux ; X, Y des parties dénombrables de E, F. Alors $X \times Y$ est une partie dénombrable de $E \times F$.

Il est clair que ce théorème sera démontré si nous démontrons la proposition suivante :

<u>L'ensemble</u> $Z \times Z$ <u>est dénombrable</u> (et est donc équipotent à Z, car il est infini comme contenant des parties $\{m\} \times Z$ en correspondance biunivoque avec Z).



Pour cela, nous nous appuyerons sur l'important lemme suivant :

<u>Lemme</u>. Soient E un ensemble fondamental, A_p une fonction de $p \in Z$, à valeurs dans $P(E)$, telle que l'on ait, quel que soit p, $A_p \subset A_{p+1}$. Soit A la réunion des A_p ; soit, quel que soit p, $B_p = A_{p+1} - A_p$. Alors $p \neq q$ entraîne $B_p \cap B_q = \emptyset$, et l'on a, quel que soit p : $A - A_p = \bigcup_{n \geqslant p} B_n$.

En effet, tout d'abord, $p \leqslant q$ entraîne $A_p \subset A_q$: cela revient à dire, en effet, que, quel que soit r, $A_p \subset A_{p+r}$, ce qu'on démontre aussitôt par induction sur r.

Si alors on a $x \in B_p$ et $x \in B_q$, soit par exemple $p \leqslant q$: on aura $x \in A_{p+1}$ et $x \notin A_q$: on ne peut donc avoir $q > p$, car il en résulterait $q \geqslant p+1$, donc $A_q \supset A_{p+1}$. Donc $p = q$; ce qui démontre le premier point.

Quel que soit n, on a $B_n \subset A$; si $n \geqslant p$, on a $B_n \subset \complement(A_n) \subset \complement(A_p)$, donc $B_n \subset A - A_p$.

Soit alors $x \in A - A_p$: puisque $x \in A$, l'ensemble des $m \in Z$ tels que $x \in A_m$ est non vide, et a un plus petit élément n ; puisque $x \notin A_p$, $x \in A_n$, on aura $n > p$; on aura $x \in A_n$, $x \notin A_{n-1}$ (sinon n ne serait pas le plus petit élément m de Z tel que $x \in A_m$), donc $x \in B_{n-1}$; et $n - 1 \geqslant p$: le lemme est démontré.

Revenons à notre théorème : soit A_p l'ensemble des éléments (m,n) de $Z \times Z$ tels que $m + n < p$: il est clair que la condition du lemme est satisfaite, que $A_0 = \emptyset$ et que la réunion des A_p est $Z \times Z$. De plus A_p est fini, car il est contenu dans l'ensemble fini $Z_p \times Z_p$ des (m,n) tels que $m < p$, $n < p$; soit $f(p)$ sa puissance, de sorte que $f(0) = 0$ et que $p \leqslant q$ entraîne $f(p) \leqslant f(q)$; et soit A'_p l'ensemble des $m \in Z$ tels que $m < f(p)$; les A'_p satisfont aussi aux conditions du lemme, et $A'_0 = \emptyset$. Alors, quel que soit p, les ensembles $B_p = A_{p+1} - A_p$, $B'_p = A'_{p+1} - A'_p$ sont finis et de même puissance $f(p+1) - f(p)$. Alors, nous pouvons appliquer aux B_p, B'_p le théorème I du § 1, d'où résulte bien que la réunion $Z \times Z$ des B_p est équipotente à la réunion des B'_p c'est-à-dire à une partie de Z (Exercice : démontrer que la réunion des B'_p n'est autre que Z) ; ce qui démontre le théorème.

Observons que $Z \times Z$ est la réunion, pour $m \in Z$, des ensembles $\{m\} \times Z$, dont chacun est en correspondance biunivoque avec Z et qui sont deux à deux sans élément commun. Appliquons donc le théorème III du § 1 ; et, pour abréger le langage, disons qu'une réunion $\bigcup_{\iota \in J} A_\iota$ est une réunion <u>dénombrable</u> si l'ensemble J est dénombrable (de même pour une intersection, ou pour un produit). Nous pouvons alors énoncer le corollaire suivant de notre th. III :

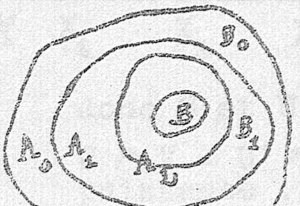
Corollaire. Toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Théorème IV. Soient E, F des ensembles fondamentaux ; si une partie X de E a une puissance à la fois inférieure et supérieure à celle d'une partie Y de F, X et Y sont équipotents.

Soient $f(x)$ une application de X sur une partie Y' de Y ; $g(y)$ une application de Y sur une partie X' de X ; soit X'' l'image de Y' par $g(y)$: $g[f(x)]$ est une application biunivoque de X sur X'' ; l'on a $X \supset X' \supset X''$; et Y est équipotent à X'. Nous sommes donc ramenés (en changeant les notations) à démontrer la proposition suivante :

Soient E un ensemble fondamental, X une partie de E, X' une partie de X ; si X, X' ont même puissance, tout ensemble Y tel que $X \supset Y \supset X'$ a même puissance que X.

Nous nous appuyerons pour cela sur un lemme analogue à celui du th. III :



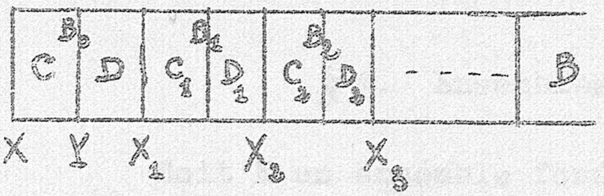
Lemme. Soient E un ensemble fondamental, A_p une fonction de $p \in Z$, à valeurs dans $P(E)$, telle que l'on ait, quel que soit $p \in Z$, $A_p \supset A_{p+1}$. Soit B l'intersection des A_p ; soit, quel que soit p, $B_p = A_p - A_{p+1}$. Alors $p \neq q$ entraîne $B_p \cap B_q = \emptyset$; et l'on a, quel que soit p : $A_p - B = \bigcup\limits_{n \geqslant p} B_n$.

Comme plus haut, on voit d'abord que $p \leqslant q$ entraîne $A_p \supset A_q$, donc $A_q \cap \complement(A_p) = \emptyset$. Alors, puisque $B_p = A_p \cap \complement(A_{p+1})$, d'où $B_p \cap B_q \subset A_q \cap \complement(A_{p+1})$, on voit que $q \geqslant p+1$ (c'est-à-dire $q > p$) entraîne $B_p \cap B_q = \emptyset$; de même $q < p$; ce qui démontre le premier point. De plus, quel que soit n, $B_n \subset \complement(A_{n+1}) \subset \complement(B)$, donc $B_n \cap B = \emptyset$; et si $n \geqslant p$, $B_n \subset A_n \subset A_p$, donc $B_n \subset A_p - B$.

Soit alors $x \in A_p - B$; puisque $x \notin B$, il existe $r \in Z$ tel que $x \notin A_r$, donc si $x \in A_m$ on a $m < r$, et par suite l'ensemble des m tels que $x \in A_m$ est fini ; puisque $x \in A_p$ il est non vide, et a donc un plus grand élément $n \geqslant p$. Alors $x \in A_n$ et $x \notin A_{n+1}$, donc $x \in B_n$. Le lemme est démontré.

Revenons au théorème. Soient $X' \subset Y \subset X \subset E$; soit $f(x)$ une application biunivoque de X sur X' ; définissons, par induction totale, une application biunivoque $f_n(x)$ de X dans X, par les conditions suivantes : a) $f_0(x)$ est l'application identique de X sur X, $f_0(x) = x$ quel que soit $x \in X$;

b) quel que soit n, on a $f_{n+1}(x) = f_n\left[f(x)\right]$. Soit A_n l'image de X par $f_n(x)$. Les A_n satisfont aux conditions du lemme ; soit donc B leur intersection, et soit $B_p = A_p - A_{p+1}$; l'on a d'ailleurs $A_0 = X$, $A_1 = X'$. Pour démontrer le théorème, il suffira de faire voir que X-B et Y-B ont même puissance. On a $X - B = \bigcup_{n \in Z} B_n$, $X' - B = \bigcup B_n$; et d'autre part $B_n = f_n(X) - f_n\left[f(X)\right] = f_n(X) - f_n(X')$, donc, puisque f_n est une application biunivoque (chap. II, § 6), $B_n = f_n(X - X')$. Posons maintenant $X - Y = C$, $Y - X' = D$, de sorte que $C \cap D = \emptyset$, $C \cup D = X - X'$; et $f_n(C) = C_n$, $f_n(D) = D_n$, d'où, puisque f_n est biunivoque, $C_n \cap D_n = \emptyset$, $C_n \cup D_n = B_n$.



Posons : $U = \bigcup_{n \in Z} C_n$, $V = \bigcup_{n \in Z} D_n$, $U' = \bigcup_{n \geqslant 1} C_n$. On a $U' = f(U)$, donc U et U' sont équipotents ; on a $X = U \cup V$, $Y = U' \cup V$; $U \cap V = U' \cap V = \emptyset$: donc (th. I, § 1), X et Y ont même puissance ; le théorème est démontré.

Remarque. On observera que la démonstration de ce théorème ne fait pas usage de l'axiome de choix.

Voici par exemple une application remarquable de ce théorème: L'ensemble Z^Z des fonctions définies dans Z, à valeurs dans Z, est équipotent à l'ensemble P(Z) des parties de Z.

En effet, nous connaissons une correspondance canonique de Z^Z avec une partie de l'ensemble des parties de $Z \times Z$; puisque $Z \times Z$ est équipotent à Z, il existe donc une application biunivoque de Z^Z sur une partie de P(Z). D'autre part, nous savons (chap. II, § 5) qu'il y a une correspondance biunivoque entre P(Z) et l'ensemble des fonctions définies sur Z, prenant leurs valeurs dans l'ensemble formé des signes 1,2. Notre proposition résulte alors de l'application du théorème IV.

CHAPITRE IV.

Ensembles ordonnés.

N.B. Pour la suite de ce traité, il suffira de lire les § 1, 2 de ce chapitre. Quant au § 3, c'est surtout pour des raisons historiques que nous le maintenons : la notion d'ensemble bien ordonné, qui s'y trouve étudiée, a constitué à une certaine époque un très utile instrument de découverte et de démonstration, qui est à présent remplacé entièrement par d'autres moyens et avant tout par le th. I du § 2. En première lecture, nous conseillons même de ne pas lire le § 2, et d'en renvoyer l'étude au moment où l'on en rencontrera des applications.

§ 1. Ensembles ordonnés : propriétés générales.

Soit E un ensemble fondamental ; soit $\omega(x,y)$ une relation entre deux arguments x, y, prenant leurs valeurs dans E, relation qui satisfasse aux conditions suivantes :

I. Les relations "$x = y$" et "$\omega(x,y)$ et $\omega(y,x)$" sont équivalentes.

II. "$\omega(x,y)$ et $\omega(y,z)$" entraîne "$\omega(x,z)$".

Alors on dira que $\omega(x,y)$ est une relation d'ordre ou qu'elle définit un ordre entre éléments de E ; ou encore que E se trouve ordonné par cette relation.

Exemples. 1. Soit E un ensemble fondamental ; P(E) est ordonné par la relation d'inclusion $X \subset Y$: car I) si $X \subset Y$ et $Y \subset X$, on a bien $X = Y$, et réciproquement ; II) si $X \subset Y$, $Y \subset Z$, on a bien $X \subset Z$.

2. L'ensemble Z est ordonné par la relation $x \leqslant y$.

3. L'ensemble des puissances des parties de E est ordonné par la relation "inférieur à", d'après le th. IV, § 3, ch. III.

Exercice. Soit E un ensemble fondamental ; soit $\varpi(x,y)$ une relation entre éléments génériques x, y de E, telle que "$\varpi(x,y)$ et $\varpi(y,z)$" entraîne "$\varpi(x,z)$". On désigne par $\varepsilon(x,y)$ la relation "$\varpi(x,y)$ et $\varpi(y,x)$". Montrer que $\varepsilon(x,y)$ est une relation d'équivalence dans E ; que la relation $\varpi(x,y)$ peut être considérée comme une relation entre les classes de x et y suivant la relation ε (cf. chapitre II, § 6) ; et que cette relation entre classes d'équivalence est une relation d'ordre dans E/ε.

Soit X une partie de l'ensemble fondamental E, ordonné par $\omega(x,y)$; si, quels que soient $x \in X$, $y \in X$, on a $\omega(x,y)$ ou $\omega(y,x)$, on dit que X est <u>strictement ordonné</u>. D'après cette définition, si $X \subset E$ est strictement ordonné, il en est de même de toute partie de X ; et la partie vide $\emptyset$ de E est strictement ordonnée. Il peut arriver que l'ensemble fondamental E lui-même soit strictement ordonné par $\omega(x,y)$. Par exemple, l'ensemble Z des entiers est strictement ordonné par la relation $x \leqslant y$.

Si E est strictement ordonné par $\omega(x,y)$, la proposition suivante sera vraie : Quels que soient $x \in E$, $y \in E$, il existe z tel que $\omega(x,z)$ et $\omega(y,z)$. Chaque fois que, pour une relation d'ordre $\omega(x,y)$, cette proposition est vraie, on dit que E est <u>semi-ordonné</u> par cette relation ; cette notion a quelque utilité en topologie. Par exemple, l'ensemble des parties d'un ensemble fondamental E est semi-ordonné par la relation d'inclusion $X \subset Y$; car, quels que soient $X \subset E$, $Y \subset E$, il y a Z (par exemple $Z = X \cup Y$) tel que $X \subset Z$, $Y \subset Z$. Mais il n'est pas strictement ordonné (à moins qu'il ne se réduise à un seul élément), car si $x \in E$, $y \in E$, $x \neq y$, $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$, on n'a ni $X \subset Y$ ni $Y \subset X$.

Chaque fois que ce sera commode et que cette notation n'exposera pas à confusion, on conviendra, lorsqu'un ensemble fondamental E se trouve ordonné par une relation $\omega(x,y)$, de considérer "$x \leqslant y$" et "$y \geqslant x$" comme des relations équivalentes à $\omega(x,y)$; et de considérer "$x < y$" et "$y > x$" comme équivalentes à "$\omega(x,y)$ et $x \neq y$" ; d'où résulte que "$x \leqslant y$" est équivalent à "$x < y$ ou $x = y$".

Donc, chaque fois qu'on aura donné un sens à la notation "$x \leqslant y$", les propositions suivantes seront vraies :

I. "$x = y$" $\rightleftarrows$ "$x \leqslant y$ et $y \leqslant x$".

II. "$x \leqslant y$ et $y \leqslant z$" $\rightarrow$ "$x \leqslant z$".

Il s'ensuit que "$x \leqslant y$ et $y < z$" entraîne "$x < z$" ; de même "$x < y$ et $y \leqslant z$" entraîne "$x < z$". De I résulte aussi que, quels que soient x, y, on n'a pas à la fois $x < y$ et $y < x$.

Dire que X est strictement ordonné par $x \leqslant y$, c'est dire que, quels que soient $x \in X$, $y \in X$, on a $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$; c'est donc dire que l'on a, soit $x < y$, soit $x = y$, soit $x > y$, ces trois relations s'excluant mutuellement.

Soit X une partie d'un ensemble fondamental E, ordonné par une relation qu'on supposera écrite sous la forme $x \leqslant y$. Il existe au plus un $x \in X$ tel que $z \in X$ entraîne $x \leqslant z$: car si x, x' ont tous deux cette propriété, on aura $x \leqslant x'$ et $x' \leqslant x$, donc $x = x'$. Lorsqu'il existe un $x \in X$ ayant cette propriété, on dira que c'est <u>le plus petit élément</u> de X, et que X possède un plus petit élément. De même, il existe au plus un $y \in X$ tel que $z \in X$ entraîne $z \leqslant y$; s'il en existe, on dira que c'est <u>le plus grand élément</u> de X, et que X possède un plus grand élément.

Par exemple, considérons l'ensemble P(E), ordonné par la relation d'inclusion. Soit F une famille de parties de E ; le plus petit élément de F, s'il existe, sera une partie X de E telle que $X \in F$ et que $Z \in F$ entraîne $X \subset Z$; soit W l'intersection des ensembles de F : $X \in F$ entraîne $X \supset W$; d'autre part, si, quel que soit $Z \in F$, on a $Z \supset X$, on aura aussi $W \supset X$; donc $W = X$. Par conséquent, pour que F contienne un plus petit élément, il faut et il suffit que l'intersection W des ensembles de F soit un élément de F ; et W est alors ce plus petit élément ; ce qui con- -corde bien avec la terminologie introduite au chap. III, § 2. De même, pour que F ait un plus grand élément, il faut et il suffit que la réunion U des ensembles de F soit un élément de F ; et U est alors ce plus grand élément.

Tout élément $x \in X$ tel qu'il n'existe pas de $z \in X$ tel que $z < x$ sera appelé un élément <u>minimal</u> de X ; tout $y \in X$ tel qu'il n'existe pas de $z \in X$ tel que $z > y$ sera appelé un élément <u>maximal</u> de X. L'ensemble M des éléments minimaux de X, l'ensemble N des éléments maximaux de X, sont des parties de X qui peuvent être vides (par exemple N est vide si X est une partie infinie de l'ensemble Z des entiers), et qui peuvent aussi (on en verra des exemples à l'occasion) être des ensembles infinis. L'on a cepen--dant la proposition suivante :

Si X a un plus petit élément x, l'ensemble des éléments minimaux de X est $M = \{x\}$; si X a un plus grand élément y, l'ensemble des éléments maximaux est $N = \{y\}$.

Il suffit de démontrer le premier point, le second se démon--trant de même. Supposons que X ait le plus petit élément x ; x est minimal, car sinon il existerait un $z \in X$ tel que $z < x$, ce qui entraîne contradiction, car on a $z \geqslant x$ quel que soit $z \in X$. Et, puisque $z \geqslant x$ quel que soit $z \in X$, et que si z est minimal on ne peut avoir $z > x$, il en résulte que si z est minimal on a $z = x$. La proposition est démontrée.

Soient E un ensemble fondamental, ordonné par une relation $x \leqslant y$; E' un ensemble fondamental, ordonné par une relation $x' \leqslant y'$; soit $f(x)$ une fonction définie dans E, à valeurs dans E' ; cette fonction sera dite <u>croissante</u> si $x \leqslant y$ entraîne $f(x) \leqslant f(y)$, <u>strictement croissante</u> si $x < y$ entraîne $f(x) < f(y)$: il est clair qu'une fonction strictement croissante est une fonction croissante.

Plus généralement, une application A d'une partie X de E dans E' sera dite <u>croissante</u> si, quels que soient $x \in X$, $y \in X$ tels que $x \leqslant y$, il leur correspond par A des éléments x', y' de E' tels que $x' \leqslant y'$; <u>strictement croissante</u>, si de plus $x < y$ entraîne $x' < y'$.

Si $f(x)$, définie dans E et à valeurs dans E', est telle que $x \leqslant y$ entraîne $f(x) \geqslant f(y)$, on dit que $f(x)$ est <u>décroissante</u> ; en modifiant de même les définitions ci-dessus, on définira la notion d'application décroissante, de fonction ou d'application strictement décroissante. Une fonction constante est, d'après ces définitions, à la fois croissante et décroissante.

Voici une proposition souvent utile :

Si E est strictement ordonné, toute application strictement croissante d'une partie X de E dans un ensemble ordonné E' est biunivoque.

En effet, si $x \in X$, $y \in X$, $x \neq y$ entraîne $x < y$ ou $y < x$, donc $f(x) < f(y)$ ou $f(y) < f(x)$, donc en tout cas $f(x) \neq f(y)$.

(N.B.- Le rédacteur n'a pas eu le courage de chercher des textes d'exercices ; ce serait particulièrement désirable, pour ce § . Prière de fournir des suggestions).

§ 2. Le théorème de Zorn-Cartan.

L'objet de ce paragraphe est la démonstration d'un théorème qui rend, lorsqu'il s'agit d'ensembles fondamentaux quelconques, à peu près les mêmes services que le principe d'induction totale sur les ensembles dénombrables. Il est dû à Max Zorn, qui l'avait énoncé, non pas sous la forme qui va être donnée, mais sous une forme équivalente qui sera donnée plus loin en corollaire, et d'ailleurs ne l'avait pas publiée. Un énoncé équivalent aussi, mais sous forme topologique, a été trouvé indépendamment et publié par H. Cartan ; nous le donnerons en son lieu (Topologie, chap. ,). Nous commencerons par établir un lemme qui nous servira aussi au prochain paragraphe.

Lemme. Soient E un ensemble fondamental, A une partie de E, Ω une famille de parties de A. Soit f(X) une fonction définie pour $X \in \Omega$, à valeurs dans A, et telle que, quel que soit $X \in \Omega$, l'ensemble $F(X) = X \cup \{f(X)\}$ appartienne à Ω. Alors, il y a une plus petite famille Φ de parties de A, possé-dant les propriétés suivantes : a) $\Phi \subset \Omega$; b) si $X \in \Phi$, $F(X) \in \Phi$; c) si Φ' est une famille contenue dans Φ, et telle que la réunion Z des ensembles de Φ' appartienne à Ω, Z appartient à Φ. De plus, si $X \in \Phi$ et $Y \in \Phi$, on a $Y \subset X$ ou $Y \supset F(X) \supset X$; et par suite Φ est strictement ordonné par la relation d'inclusion.

Tout d'abord, l'intersection des familles de parties de A, possédant les propriétés a), b), c), possède encore ces proprié-tés, comme on le vérifie sans peine ; cette intersection Φ est donc bien la plus petite famille qui les possède. La difficulté ne porte que sur le second point.

Soit X un élément de la famille Φ, qui possède la proprié-té suivante : quel que soit $Y \in \Phi$, on a $X \subset Y$ ou $Y \subset X$. Soit Ψ_X la famille des $Y \in \Phi$ tels que l'on ait $Y \subset X$ ou $Y \supset F(X)$. Nous allons montrer que la famille Ψ_X possède les propriétés a), b), c). En effet : a) on a $\Psi_X \subset \Phi \subset \Omega$.

b) Soit $Y \in \Psi_X$, on aura $Y \subset X$ ou $Y \supset F(X)$. $Y \supset F(X)$ entraîne $F(Y) \supset Y \supset F(X)$, donc $F(Y) \in \Psi_X$. Soit d'autre part $Y \subset X$; puisque $F(Y) \in \Phi$, on a, d'après l'hypothèse faite sur X, $F(Y) \subset X$, et alors $F(Y) \in \Psi_X$, ou $F(Y) \supset X$. Soit donc $Y \subset X$, $F(Y) \supset X$, d'où $F(Y) - Y \supset X-Y$: cela étant, si $X = Y$ on aura $F(Y) = F(X)$; sinon $X-Y$, donc $F(Y) - Y$, ne seront pas vides ; puisque $F(Y) = Y \cup \{f(Y)\}$, cela entraîne que $f(Y) \notin Y$, que $F(Y) - Y = \{f(Y)\}$, et que $X-Y = \{f(Y)\}$, donc $F(Y) = X$. Dans tous les cas, donc, on a bien $F(Y) \subset X$ ou $F(Y) \supset F(X)$, c'est-à-dire $F(Y) \in \Psi_X$. c) Soit Ψ' une partie de Ψ_X, telle que la réunion Z des ensembles de Ψ' appartienne à Ω ; Z appartiendra donc à Φ ; et, s'il y a un ensemble de Ψ' qui contienne $F(X)$, il en sera de même de Z ; sinon, tous les ensem--bles de Ψ' seront contenus dans X, et il en sera de même de Z ; Z appartient bien à Ψ_X.

Puisque donc Ψ_X possède les propriétés a), b), c) et est contenue dans Φ, $\Psi_X = \Phi$. Ce résultat peut encore s'énoncer comme suit : soit Φ' la famille des $X \in \Phi$ tels que l'on ait, quel que soit $Y \in \Phi$, $X \subset Y$ ou $Y \subset X$; alors, quel que soit $X \in \Phi'$ et $Y \in \Phi$, on a $Y \subset X$ ou $Y \supset F(X)$. Il en résulte que la famille Φ' possède les propriétés a), b), c). En effet : a) on a $\Phi' \subset \Phi \subset \Omega$; b) si $X \in \Phi'$, on a, quel que soit $Y \in \Phi$, $F(X) \subset Y$ ou $Y \subset X \subset F(X)$; c) si $Y \in \Phi$, si $\Phi'' \subset \Phi'$, et si la réunion Z des ensembles de Φ'' appartient à Ω, on a $Z \in \Phi$; de plus, si l'un des ensembles de Φ'' con--tient Y, il en est de même de Z ; sinon ils sont tous contenus dans Y, et il en est de même de Z ; en tout cas on a bien $Z \supset Y$ ou $Z \subset Y$.

Il s'ensuit que $\Phi' = \Phi$. Le lemme est démontré.

Nous pouvons maintenant aborder le théorème qui fait l'objet de ce paragraphe.

Théorème I. Soit E ordonné par $x \leqslant y$. Soit A une partie de E qui possède la propriété suivante : quelle que soit la partie X de A, strictement ordonnée par $x \leqslant y$, il existe $y \in A$ tel que $x \in X$ entraîne $x \leqslant y$. Alors $A \neq \emptyset$, et, quel que soit $a \in A$, il existe un élément maximal b de A tel que $b \geqslant a$.

En effet, l'hypothèse faite sur A s'applique à $X = \emptyset$, donc il existe $y \in A$, c'est-à-dire que A n'est pas vide. Soit alors Ω la famille des parties X de A, strictement ordonnées, et telles que $a \in X$. Par hypothèse, quel que soit $X \in \Omega$, il existe $y \in A$ tel que $x \in X$ entraîne $x \leqslant y$, de sorte qu'en particulier $a \leqslant y$; alors, ou y est maximal (et alors il existe un élément maximal $\geqslant a$), ou il existe $y' \in A$ tel que $y' > y$, donc tel que $x \in X$ entraîne $x < y$.

Supposons donc que A ne contienne pas d'élément maximal $> a$, et montrons que cela entraîne contradiction. D'après ce qu'on vient de dire et d'après le principe de choix, il y aura alors une fonction $f(X)$, définie pour $X \in \Omega$, à valeurs dans A, et telle que $x \in X$ entraîne $x < f(X)$; de sorte que $F(X) = X \cup \{f(X)\}$ sera strictement ordonné. Alors les conditions du lemme sont bien satisfaites ; soit Φ la plus petite famille de parties de A, telle que a) $\Phi \subset \Omega$; b) si $X \in \Phi$, $F(X) \in \Phi$; et c) si $\Phi' \subset \Phi$, et si la réunion Z des ensembles de Φ appartient à Ω, $Z \in \Phi$: quels que soient $X \in \Phi$, $Y \in \Phi$, on aura $X \subset Y$ ou $Y \subset X$.

Soit alors U la réunion des ensembles de Φ ; c'est un ensem-ble strictement ordonné, car si $x \in U$, $y \in U$, il y a $X \in \Phi$ et $Y \in \Phi$ tels que $x \in X$ et $y \in Y$; mais alors, ou $X \subset Y$, ou $Y \subset X$; si par exemple $X \subset Y$, x et y seront éléments de Y, donc, puisque $Y \in \Omega$, on aura $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$. Par conséquent U est strictement ordonné, donc, d'après la propriété c) de Φ, on a $U \in \Phi$: mais cela entraîne contradiction, car $F(U) = U \cup \{f(U)\}$ ne sera pas contenu dans U et pourtant appartient à Φ, ce qui est en contradiction avec la définition de U. Le théorème est démontré.

Le théorème de Zorn, auquel nous faisions allusion plus haut, nous apparaîtra comme un cas particulier du th. I (mais inversement, de ce cas particulier, on peut très facilement déduire le théorème lui-même) ; c'est le suivant :

Corollaire. (Théorème de Zorn). Soit E un ensemble fondamental. P(E) étant considéré comme ordonné par la relation d'inclusion $X \subset Y$, soit F une partie de P(E), c'est-à-dire une famille de parties de E, qui possède la propriété suivante :quelle que soit la famille $F' \subset F$ strictement ordonnée par la relation d'inclusion, la réunion des ensembles de F' appartient à F. Alors F n'est pas vide, et, quel que soit $X \in F$, il existe dans F un élément maximal (c'est-à-dire un ensemble de F qui ne soit contenu dans aucun autre ensemble de F) contenant X.

Nous allons donner immédiatement deux applications remarquables des théorèmes ci-dessus.

Théorème II. Soient E, F deux ensembles fondamentaux ; soient $X \subset E$, $Y \subset F$: il existe une application biunivoque de X sur une partie de Y, ou bien d'une partie de X sur Y .

En effet, considérons, parmi les parties de $E \times F$, celles qui définissent (chap. II, § 3) une correspondance biunivoque entre une partie de X et une partie de Y : soit Φ la famille de ces parties. Φ satisfait bien à la condition du théorème de Zorn ; car si $\Phi' \subset \Phi$ et est strictement ordonné par inclusion, si C et D appartiennent à Φ', et si à $x \in E$ correspond par C un $y \in F$, par D un $z \in F$, on a $y = z$, car $C \subset D$ ou $D \subset C$; et par conséquent, par la réunion Γ des ensembles de Φ' ne correspond à un $x \in E$ qu'un élément au plus y de F, c'est-à-dire que Γ est biunivoque; d'ailleurs la projection de Γ sur E, réunion des projections des $C \in \Phi'$ sur E (qui sont contenues dans X) est contenue dans X ; de même sa projection sur F est contenue dans Y ; donc $\Gamma \in \Phi$. Il y a donc, dans Φ, une correspondance C maximale ; C est une application biunivoque de $X' \subset X$ sur $Y' \subset Y$; le théorème sera démontré si nous faisons voir que l'on a $X - X' = \emptyset$ ou $Y-Y' = \emptyset$: sinon, en effet, soient $x \in X - X'$, $y \in Y - Y'$; soit $C' = C \cup \{(x,y)\}$: C' appartiendra aussi à Φ, ce qui est en contradiction avec la définition de C .

Corollaire. L'ensemble des puissances des parties d'un ensemble fondamental E est strictement ordonné par la relation "inférieur à " .

Théorème III. Tout ensemble infini est la réunion d'une famille d'ensembles dénombrables infinis, deux à deux sans élément commun.

Tout d'abord, il résulte du théorème II que tout ensemble infini possède une partie ~~dénombrable infini~~ dénombrable infinie, c'est-à-dire équipotente à l'ensemble Z des entiers (chap.III, § 3).

Soit maintenant Δ la famille des parties dénombrables infi-nies de E ; soit Φ l'ensemble des parties Δ' de Δ telles que 2 éléments distincts quelconques de Δ' soient des parties de E sans élément commun (c'est-à-dire telles que si $D \in \Delta'$, $D' \in \Delta'$, on ait $D = D'$ ou $D \cap D' = \emptyset$). Φ satisfait à la condition du théorème de Zorne ; par conséquent Φ contient un élément maximal Δ_0. Soient A la réunion des ensembles de Δ_0 (ensembles dénombrables infinis, deux à deux sans élément commun) ; $B = E - A$ est fini, car sinon il contiendrait une partie dénombrable infinie D, et $\Delta_0' = \Delta_0 \cup \{D\}$ appartiendrait encore à Φ. Soient D_0 un élément de Δ_0 ; $D_1 = D_0 \cup B$ est encore dénombrable infini ; soit $\Delta_1 = (\Delta_0 - \{D_0\}) \cup \{D_1\}$: c'est bien une famille d'ensembles dénombrables infinis, deux à deux sans élément commun, dont la réunion est E. Le théorème est démontré.

Théorème IV. Soient E un ensemble fondamental, Z l'ensemble des entiers ; si E est infini, $E \times Z$ est équipotent à E.

En vertu du th. III, il existe un partage de E en classes D équipotentes à Z, deux à deux sans élément commun ; ce partage détermine un partage de $E \times Z$ en les classes $D \times Z$, deux à deux sans élément commun ; quel que soit D, $D \times Z$ est équipotent à Z (chap. III, § 3, th.   ), donc à D ; alors, par application du th.   , § 1, chap. III, notre théorème est démontré.

Corollaire. Dans un ensemble fondamental E, la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles tous équipotents à un même ensemble infini X est équipotente à X.

Car elle a une puissance supérieure à celle de X ; et aussi, d'après le th. IV ci-dessus et le th.   , § 1, chap.III, une puissance inférieure à celle de $X \times Z$ c'est-à-dire à celle de X ; donc, d'après le th.   , § 3, chap. III, elle est équipotente à X.

§ 3. Ensembles bien ordonnés.

(N.B. Tout le paragraphe en petits caractères).

Soit E un ensemble, ordonné par une relation qu'on supposera écrite sous la forme $x \leqslant y$. On dira que $A \subset E$ est <u>bien ordonné</u> par cette relation s'il est strictement ordonné et si, de plus, toute partie non vide de A possède un plus petit élément. Par exemple, l'ensemble Z des entiers est bien ordonné par la relation $x \leqslant y$ (chap. III, § 3, th. I). Toute partie d'un ensemble bien ordonné est bien ordonnée.

La notion d'ensemble bien ordonné a joué un grand rôle dans l'histoire de la théorie des ensembles ; elle sert encore à établir des résultats intéressants sur les puissances. La possibilité de l'appliquer à n'importe quel ensemble résulte du théorème suivant, qui fut démontré en 1906 (? à vérifier) par Zermelo au moyen de l'axiome de choix (qu'il introduisit même pour cela) :

<u>Théorème I</u> (de Zermelo). Soient E un ensemble fondamental et A une partie de E ; il existe une relation d'ordre $\omega(x,y)$ dans E pour laquelle A soit bien ordonné.

Soit Ω l'ensemble des parties de A. Par l'axiome de choix, il existe une application $f(X)$ de Ω dans A ~~et~~ telle que $X \neq A$ entraîne $f(X) \notin X$. Posons $F(X) = X \cup \{f(X)\}$; et appliquons le lemme du § 2 à A, Ω, et $F(X)$. Il y aura une plus petite famille Φ de parties de A qui possède les propriétés suivantes : a) si $X \in \Phi$, $F(X) \in \Phi$; b) si Φ' est une famille contenue dans Φ, la réunion des ensembles de Φ' appartient à Φ. Et, si $X \in \Phi$, $Y \in \Phi$, on a $Y \subset X$ ou $Y \supset F(X)$.

Montrons que Φ est, non seulement strictement ordonné, mais même bien ordonné par inclusion. Soit Ψ une partie de Φ ; soit W l'intersection des ensembles de Ψ ; considérons tous les ensembles de Φ qui soient contenus dans W, et leur réunion U : U appartient à Φ d'après b), et $U \subset W$, U est donc le plus grand ensemble qui possède ces propriétés. Alors, si $X \in \Psi$, on a $X \supset U$; et d'autre part, puisque $X \in \Phi$ et $U \in \Phi$, $X \subset U$ ou $X \supset F(U)$. S'il existe $X \in \Psi$ tel que $X \subset U$, on aura donc $X = U$, donc (puisque $U \subset W \subset X$) $X = W$, c'est-à-dire que X est le plus petit élément de Ψ. Sinon, on aura $X \supset F(U)$ quel que soit $X \in \Psi$, donc $F(U) \subset W$; si l'on avait $F(U) \neq U$ il s'ensuivrait que U n'est pas le plus grand ensemble appartenant à Φ et contenu dans W ; on a donc $F(U) = U$, donc, d'après la manière dont on a choisi $f(X)$, $U = A$, $W = A$, et Ψ se réduit, soit à la famille $\{A\}$ comprenant l'unique élément A, soit à la famille vide. En tout cas, donc, Ψ est vide on a un plus petit élément, et la proposition est démontrée.

Montrons maintenant que la relation $x = f(X)$ établit une correspondance biunivoque entre A et la famille Φ_0 des ensem--bles de Φ autres que A. En effet, soit $x \in A$, et soit X la réunion des ensembles Z de Φ tels que $x \notin Z$, c'est-à-dire le plus grand ensemble de Φ auquel x n'appartienne pas ; on a donc $X \neq A$, donc $F(X) \neq X$, donc $x \in F(X)$ et par suite $x = f(X)$. Soient maintenant $X \in \Phi$ et $Y \in \Phi$: on a $Y \subset X$ ou $Y \supset F(X)$, et aussi $X \subset Y$ ou $X \supset F(Y)$; on aura donc $X \supset F(Y)$, ou $X = Y$, ou $F(X) \subset Y$; si alors on a $f(X) = f(Y)$, il s'ensuivra, si $X \supset F(Y)$, $f(X) \in X$ donc $X = A$, et de même, si $Y \supset F(X)$, $Y = A$;

130

si donc $X \neq A$ et $Y \neq A$, $f(X) = f(Y)$ entraîne $X = Y$. La relation $x = f(X)$ définit donc bien une correspondance biunivoque entre A et Φ_0 ; si donc on écrit $x \leqslant y$ chaque fois que les éléments X, Y de Φ_0 qui correspondent à x, y sont tels que $X \subset Y$, ce sera une relation d'ordre dans A, par laquelle A sera bien ordonné.

Les ensembles bien ordonnés ont une propriété qui généralise le "principe d'induction totale" du chap. III, § 2, et qui a reçu le nom de "principe d'induction transfinie" :

Théorème II. Soit A un ensemble fondamental, bien ordonné par la relation $x \leqslant y$; soit A_x l'ensemble des $z \in A$ tels que $z < x$. Supposons qu'une partie B de A possède la propriété suivante : quel que soit $x \in A$, $A_x \subset B$ entraîne $x \in B$; alors, on a $B = A$.

Il faut démontrer que CB est vide. S'il ne l'était pas, il aurait un plus petit élément x : alors $y < x$ entraînerait $y \notin CB$ c'est-à-dire $y \in B$; donc on aurait $A_x \subset B$, et par suite $x \in B$: ce qui contredit la définition de x.

Nous appellerons <u>segment</u> d'un ensemble bien ordonné A toute partie S de A telle que $x \in S$, $z \leqslant x$ entraînent $z \in S$. Il est clair que A est un segment de A ; et que toute réunion, et toute intersection, de segments de A, est un segment de A. De plus, on a la proposition suivante :

S étant un segment de A, ou $S = A$, ou il existe $x \in A$ tel que $S = A_x$, et alors $S \cup \{x\}$ est un segment de A.

En effet, si $S \neq A$, on aura $\complement(S) \neq \emptyset$; soit donc x le plus petit élément de $\complement(X)$: on aura donc $A_x \subset S$; et $y \geqslant x$ entraînera $y \notin S$ (car sinon on aurait $y \in S$, $x \leqslant y$, $x \notin S$, contrairement à la définition d'un segment) ; l'on a donc bien $S=A_x$.

Il en résulte que la famille des segments S de A est bien ordonnée par la relation d'inclusion. D'abord, en effet, elle est strictement ordonnée : car soient S, T deux segments ; si S = A, $S \supset T$; si T = A, $S \subset T$; sinon, on aura $S = A_x$, $T = A_y$; si $x \leqslant y$, $S \subset T$, et si $x \geqslant y$, $S \supset T$. Soit maintenant F une famille non vide de segments ; si $F = \{A\}$, A est son plus petit élément ; sinon soit x le plus petit élément de A tel que $A_x \in F$, A_x sera le plus petit élément de F.

Théorème III. Soient E, E' deux ensembles fondamentaux ordonnés; soient A une partie bien ordonnée de E, A' une partie bien ordonnée de E'. Alors il existe une correspondance et une seule entre A et A' qui soit une application strictement croissante de A sur un segment de A' ou d'un segment de A sur A'.

Nous nous appuyerons sur les lemmes suivants :

Lemme 1. Soit A bien ordonné par la relation $x \leqslant y$; soit f(x) une fonction strictement croissante, définie dans A, à valeurs dans A. Alors, quel que soit x, $f(x) \geqslant x$.

Sinon, l'ensemble des x tels que $f(x) < x$ serait non vide : soit a son plus petit élément, et soit b = f(a), de sorte que $b < a$. Par définition de a, $x < a$ entraîne $f(x) \geqslant x$, et aussi (f étant strictement croissante) $f(a) > f(x)$, donc $f(a) > x$: ce qui, pour x = b, entraîne contradiction.

Lemme 2. Soit A bien ordonné par $x \leqslant y$; il n'existe pas d'application strictement croissante de A dans un segment S de A autre que A, ni d'application strictement croissante, autre que l'application identique, de A sur A.

Soit $f(x)$ une telle application ; dans le premier cas, soit $S = A_b$, donc $f(x) < b$ quel que soit x, donc $f(b) < b$: ce qui est impossible d'après le lemme 1. Dans le deuxième cas, $f(x)$ est une application biunivoque de A sur A, soit $g(y)$ l'application inverse : si cette application n'était pas l'application identique, il y aurait x tel que $f(x) \neq x$; si $f(x) < x$, cela contredit le lemme 1 ; si $f(x) > x$, on aura, en posant $f(x) = y$, $g(y) < y$, ce qui contredit aussi le lemme 1. Le lemme 2 est démontré.

Revenons maintenant au théorème. Soit C une application strictement croissante d'un segment S de A sur un segment S' de A' ; soit T un segment de A tel que $T \subset S$: C détermine une application, strictement croissante, de T sur une partie T' de S'. Montrons que T' est un segment de A'. Sinon, en effet, il y aurait x', y' tels que $x' \in T'$, $y' < x'$, $y' \notin T'$; on aurait $x' \in S'$, donc aussi $y' \in S'$, de sorte que x', y' seraient images, par C, d'éléments x, y de S ; puisque C est strictement croissante on aurait $y < x$; puisque $x' \in T'$ on aurait $x \in T$, donc $y \in T$, donc $y' \in T'$: ce qui est en contradiction avec les hypothèses faites.

Avec les mêmes notations, soit D une application strictement croissante de T sur un segment T'' de A : montrons que, sur T, D coïncide avec C (d'où $T'' = T'$). En effet, $C.\overset{-1}{D}$ est une application strictement croissante de T'' sur T' ; et l'on a $T' \subset T''$ ou $T'' \subset T'$: d'après le lemme 2, il faut pour cela que $T' = T''$, et que $C.\overset{-1}{D}$ soit l'application identique de T' sur T', c'est-à-dire que D coïncide avec C sur T.

Si donc, plus généralement, C et D sont des applications strictement croissantes, C d'un segment S de A sur un segment S' de A', D d'un segment T de A sur un segment T' de A', C et D coïncident sur le segment $S \cap T$ de A. Alors, considérons la famille de toutes les applications strictement croissantes C d'un segment S de A sur un segment S' de A', et la réunion C_0 de ces applications (considérées comme parties de $A \times A'$) : à tout $x \in A$ correspond, par C_0, au plus un $x' \in A'$ (puisque deux applications C coïncident toujours sur leur champ de définition commun), donc C_0 est une application de la réunion des S sur la réunion des S', donc d'un segment S_0 de A sur un segment S'_0 de A', et une application strictement croissante. Notre théorème sera démontré si nous faisons voir que $S_0 = A$ ou $S'_0 = A'$; supposons donc que $S_0 \neq A$ et $S'_0 \neq A'$; on aura donc $S_0 = A_a$, $S'_0 = A'_a$; posons $S_1 = S_0 \cup \{a\}$, $S'_1 = S'_0 \cup \{a'\}$: ce seront des segments de A, A' ; soit C_1 l'application qui sur S_0 coïncide avec C_0 et qui a fait correspondre a' : c'est une application strictement croissante de S_1 sur S'_1, contrairement à la définition de C_0.

Nous savons (§ 2, th. II) que l'ensemble des puissances des parties de E est strictement ordonné par la relation "inférieur à". Mais il y a plus :

Théorème IV. Soit E un ensemble fondamental. L'ensemble des puissances des parties de E est bien ordonné par la relation "inférieur à ".

Soit, dans E, $x \leqslant y$ une relation d'ordre par laquelle E soit bien ordonné. Soit A une partie de E : elle est bien ordonnée par

$x \ll y$, et il y a donc une application strictement croissante C de A sur un segment de E, ou d'un segment de A sur E. Si C applique sur E un segment S de A, ce segment ne peut être autre que A : sinon, C appliquerait sur E un segment A_x de A, avec $x \in A$; mais $A_x \subset E_x$: $\overset{-1}{C}$ appliquerait donc E dans E_x , contrairement au lemme 2 du th. III. Donc C applique A sur un segment de E qui peut être E lui-même ; et A a même puissance qu'un segment de E .

L'ensemble des puissances des parties de E n'est donc autre que l'ensemble des puissances des segments de E ; à toute puissance on peut faire correspondre le plus petit segment de E qui a cette puissance, et cette correspondance est biuni-voque ; autrement dit il y a correspondance biunivoque entre l'ensemble des puissances et une partie de l'ensemble des segments, par laquelle, à la relation d'inclusion entre segments correspond la relation "inférieur à" entre puissances. L'ensem-ble des segments étant bien ordonné par inclusion, le théorème est démontré.

CHAPITRE V.

Théories et structures

§ 1. Structure d'un ensemble fondamental.

La notion d'ensemble ordonné nous fournit un exemple particu-lièrement simple d'une méthode qui sera pour la suite de ce traité d'une importance capitale (cf. les observations sur la méthode axiomatique dans la préface générale).

E étant un ensemble fondamental, nous avons appelé relation d'ordre dans E une relation $\omega(x,y)$ satisfaisant aux conditions I, II du chap. IV, § 1, ou, ce qui revient au même (chap. II, § 2), une partie ω de $E \times E$, satisfaisant aux conditions suivantes :

I. "$x = y$" $\rightleftarrows$ " $(x,y) \in \omega$ et $(y,x) \in \omega$ ".

II. "$(x,y) \in \omega$ et $(y,z) \in \omega$" $\rightarrow$ "$(x,z) \in \omega$ ".

> On observera qu'avec les notations du calcul des corres-pondances (chap. II, § 3), ces conditions s'écrivent sous la forme très simple suivante (en désignant par ε la correspondance identique) : I. $\omega \cap \overset{-1}{\omega} = \varepsilon$. II. $\omega\omega \subset \omega$.

Les éléments ω de $P(E \times E)$ qui possèdent les propriétés I, II, forment une partie Ω de $P(E \times E)$. Tout élément de Ω définit donc une relation d'ordre dans E, ou, comme nous dirons maintenant, définit dans E une <u>structure d'ensemble ordonné</u>. Toute proposition qu'on peut démontrer sur les ensembles ordonnés est nécessairement conséquence des règles logiques des chap. I et II et des propriétés I, II ci-dessus, c'est-à-dire, en d'autres termes, de la proposi-tion unique " $\omega \in \Omega$ ". Toutes les propositions qu'on déduira ainsi de " $\omega \in \Omega$ " forment ce qu'on appellera la théorie des ensembles ordonnés (le début de cette théorie est constitué par les § 1-2 du chap. IV).

Si l'on impose de plus à ω la condition que toute partie de E possè-de, pour l'ordre défini par ω, un plus petit élément, l'ensemble des ω qui satisfont à cette condition sera une partie $\bar{\Omega}$ de Ω, et tout élément ω de $\bar{\Omega}$ sera dit définir dans E une structure d'ensemble bien ordonné (cf. chap. IV, § 3). Les propositions qu'on pourra déduire de " $\omega \in \bar{\Omega}$ " pourront alors être considérées à volonté, soit comme faisant partie de la théorie des ensembles ordonnés (auquel cas l'on énoncera ces propositions sous la forme "si l'ensemble ordonné E est bien ordonné,..." c'est-à-dire en d'autres termes "si $\omega \in \bar{\Omega}$, ..."), soit comme constituant une théorie autonome, la théorie des ensembles bien ordonnés ; ce sera là une simple question de rédaction, ou pour mieux dire une simple question de subdivision en chapitres, que le mathématicien pourra trancher suivant sa commodité ou sa fantaisie.

Bien entendu, si $\omega \in \bar{\Omega}$, $\omega \in \Omega$: si un ensemble est bien ordonné, il est à plus forte raison ordonné ; et toutes les proposi-tions qu'on aura pu démontrer pour les ensembles ordonnés (c'est à-dire "la théorie des ensembles ordonnés") s'appliquent aux bien ordonnés.

L'on a constaté que, dans l'ensemble P(E) des parties d'un ensemble fondamental, la relation "$X \subset Y$" est une relation d'ordre: d'où résulte que l'on peut appliquer à P(E), ordonné par cette relation, toute la théorie des ensembles ordonnés ; nous en avons vu un exemple particulièrement important au chap. IV, § 2, dans le théorème de Zorn. Du point de vue auquel nous nous plaçons ~~à~~ présent, voici comment on peut expliquer ce qu'on a fait ainsi: posons E' =P(E);

soit ω' la partie de $E' \times E'$ qui est déterminée par la relation "$X \subset Y$", c'est-à-dire l'ensemble des éléments (X,Y) de $E' \times E'$ tels que $X \subset Y$; soit Ω' la partie de $P(E' \times E')$ qui est construite à partir de E' comme Ω a été construit plus haut à partir de E (c'est-à-dire qui est définie dans $P(E' \times E')$ par les conditions correspondant à I, II). Dire que "$X \subset Y$" est une relation d'ordre dans $E' = P(E)$, c'est dire que $\omega' \in \Omega'$: toute proposition qu'on a su déduire de "$\omega \in \Omega$", c'est-à-dire toute proposition de la théorie des ensembles ordonnés, s'applique donc si l'on écrit partout E' au lieu de E, Ω' au lieu de Ω , ω' au lieu de ω ; de sorte que toute proposition qu'on a démontrée sur les ensembles ordonnés permet d'énoncer une proposition vraie sur $P(E)$: c'est là ce qu'il faut entendre par l'application de la théorie des ensembles ordonnés à $P(E)$ ordonné par inclusion. L'intérêt de cette théorie tient justement, pour une part, à ce qu'on peut ainsi "l'appliquer" à l'ensemble des parties d'un ensemble fondamental quelconque, et aussi, comme nous verrons, à l'ensemble des nombres réels, à l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies dans un espace donné, etc.

Prenons un autre exemple, dont on comprendra plus tard l'importance E étant un ensemble fondamental, soit O une famille de parties de E qui possède les propriétés suivantes : I. Toute réunion d'ensembles de O appartient à O ; II. Toute intersection finie d'ensembles de O appartient à O. O est une partie de $P(E)$, c'est-à-dire un élément de l'ensemble fondamental $P\left[P(E)\right]$, ensemble fondamental que nous désignerons par $\mathcal{E}E$: l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}_E$ qui possèdent ces propriétés est une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}_E$. Toute famille O est dite définir dans E une <u>structure topologique</u> ou une <u>topologie</u> ; si, E étant un ensemble fondamental, on a défini une famille O, on dit qu'on a défini E comme <u>espace topolo-gique</u>. Toutes les propositions qu'on démontrera comme conséquence de I, II, c'est-à-dire de la proposition "$O \in \mathcal{C}$", constituent la théorie des espaces topologiques (ou, comme on dit plus briève-ment, la topologie) ; les propriétés I, II qui définissent la partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}_E$ s'appellent les <u>axiomes</u> de cette théorie (et de même, les propriétés I, II données plus haut pour définir la notion d'ensemble ordonné s'appellent les axiomes de la théorie des ensembles ordonnés). Les conséquences de ces seules propriétés sont par elles-mêmes fort nombreuses, comme on le verra dans la Topologie (où elles constituent une grande partie des chap.I et II). Mais il est beaucoup de propriétés très intéressantes qu'on ne pourra démontrer en topologie que si l'on assujettit la structure à satisfaire à certains autres axiomes, c'est-à-dire si l'on part, non de la proposition "$O \in \bar{\mathcal{C}}$", mais d'une proposition de la forme "$O \in \bar{\mathcal{C}}$" où $\bar{\mathcal{C}}$ est une partie de $\mathcal{C}$ déterminée par certaines propriétés (ou "axiomes") supplémentaires qu'on adjoint à I et II ; par exemple, une telle partie est déterminée par la condition "pour la structure topologique définie par O, E est compact" (v., pour le sens de ce mot, Topologie, chap.) ; on obtient ainsi un grand nombre de propositions fort importantes, qu'on peut considérer à volonté comme formant une partie de la topologie (c'est ce que nous ferons) ou comme constituant une théorie autonome, celle des espaces topologiques compacts (où, bien entendu, toutes les propositions démontrées en topologie restent valables).

L'importance de la topologie tient, ici encore, en grande partie à la variété et à l'importance de ses "application" : c'est-à-dire que dans presque toutes les parties des mathématiques on rencontre d'une manière ou d'une autre, des familles O, familles de parties d'ensembles fondamentaux très variés, qui possèdent les propriétés I, II ; autrement dit, on rencontre dans presque toutes les parties des mathématiques des propositions de la forme "$O \in \mathcal{E}$" : et chaque fois qu'on en aura rencontré une, on aura le droit de considérer comme démontrées toutes les propositions de la topologie, avec simplement les changements de notation nécessaires.

Donnons, avec moins de détails, un troisième exemple non moins important. E étant un ensemble fondamental, supposons qu'on se soit donné deux fonctions de deux éléments génériques x, y de E, fonctions prenant leurs valeurs dans E et qu'on notera respectivement $x + y$ et $x.y$; et que ces deux fonctions possèdent les propriétés (commutativité, associativité, distributivité, etc.) qui seront énoncées en Algèbre (chap.   ) sous le nom d'"axiomes des corps" : on dira qu'on a défini dans E une structure de corps, ou que E, lorsqu'on a défini ces fonctions, est défini comme corps ; l'ensemble des propositions qu'on peut déduire des axiomes s'appellera la théorie des corps, et constitue une partie importante de l'algèbre (celle-ci se composant de l'étude de cette structure et de quelques autres qui lui sont intimement liées, structures de groupe, d'anneau, de système hypercomplexe, etc.). Ici l'on s'est donné deux fonctions ou d'une manière précise deux éléments de $E^{E \times E}$, satisfaisant à certaines relations ; il revient au même, bien entendu (chap. II, § 2) de dire qu'on s'est donné un élément k de $E_1 = (E^{E \times E}) \times (E^{E \times E})$, possédant certaines propriétés, à savoir celles qui se trouvent énoncées dans les axiomes de la théorie ; ceux-ci déterminent donc une partie K de E_1, et la théorie des corps consiste en les propositions qu'on déduira de la proposition "$k \in K$". Ici encore, l'importance de cette théorie tient à la fréquence et à l'importance de propositions de la forme "$k \in K$" qu'on rencontre en diverses circonstances, et pour des ensembles fondamentaux E assez variés (nombres rationnels, nombres réels, classes de nombres entiers modulo p, fonctions rationnelles, séries de puissances, fonctions algèbriques, etc.).

Nous pouvons maintenant formuler des principes généraux. Soient E un ensemble fondamental ; $\mathcal{E}_E$ un ensemble fondamental de l'échelle des types construite sur E, c'est-à-dire déduit de E, d'une manière explicitement déterminée, par application des procédés du chap. II, § 7 ; soit Θ_E l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}_E$ qui possèdent certaines propriétés (dites "axiomes") explicitement énoncées ; soit Σ un élément de Θ_E : on dira que Σ définit dans E une <u>structure</u>, structure d'un type défini par la règle de construction de $\mathcal{E}_E$ à partir de E, et par les "axiomes" qui déterminent Θ_E ; l'ensemble des propositions qu'on pourra déduire de la proposition "$\Sigma \in \Theta_E$" sera la théorie de la structure en question ; et chaque fois qu'on rencontrera, quelle que soit sa provenance, une proposition de la forme "$\Sigma \in \Theta_E$" ; on pourra, quelle que soit l'origine de l'ensemble fondamental E dont il s'agira (primitif ou non primitif), "appliquer" la théorie, c'est-à-dire considérer comme démontrées, après qu'on y aura fait les changements de notation voulus, toutes les propositions de la théorie. Bien entendu, la théorie sera d'autant plus intéressante que les circonstances où l'on rencontrera des propositions de la forme " $\Sigma \in \Theta_E$ " seront elles-mêmes plus intéressantes, et plus variées. Inversement, chaque fois qu'on se sera aperçu que des propositions d'une forme déterminée " $\Sigma \in \Theta_E$ " (dans chacune desquelle Θ_E est une partie, déterminée par des propriétés ou "axiomes" de même nature, d'un ensemble $\mathcal{E}_E$ formé, toujours par les mêmes règles, à partir d'un ensemble fondamental E, d'origine en général variable) jouent, en des circonstances diverses, un rôle important, il y aura lieu de chercher à dérouler, une fois pour toutes, autant de conséquences de la proposition " $\Sigma \in \Theta_E$ " qu'il paraîtra utile, ou autrement dit, de développer une "théorie" autonome constituée par les conséquences de cette proposition.

Il arrive très souvent, d'ailleurs, qu'on puisse formuler de diverses manières les "axiomes" d'une théorie. Revenons par exemple à la topologie ; soit E un espace où l'on a défini, au moyen d'une famille $O \in \mathcal{E}$, une structure topologique ; les ensembles Ω qui appartiennent à la famille O sont dits <u>ouverts</u> (pour la structure définie par O). Si $x \in E$, $X \subset E$, on considérera les phrases "il existe $\Omega \in O$ tel que $x \in \Omega \subset X$", "x est intérieur à X", "X est un voisinage de x" comme trois relations équivalentes entre x et X ; on dira qu'une propriété P(x) est satisfaite pour x assez voisin de $a \in E$ si l'ensemble A des x qui possèdent la propriété P(x) est un voisinage de a. Ces définitions étant posées, les propositions suivantes seront vraies : A) si X est un voisinage de x ,

on a $x \in X$; B) si X est un voisinage de x et si $Y \supset X$, Y est un voisinage de x ; C) toute intersection finie de voisinages de x est un voisinage de x (car si $x \in \bigcap_{i \in F} X_i$ et $x \in \Omega_i \subset X_i$, on aura $x \in \bigcap_i \Omega_i \subset \bigcap_i X_i$ et d'après l'axiome II des structures topologiques, $\bigcap_i \Omega_i \in O$) ; D) si X est un voisinage de x, X est un voisinage de y si y est assez voisin de x (car si $x \in \Omega \subset X$, X est un voisinage de tout point de Ω, et Ω est un voisinage de x). Enfin, les relations "X est ouvert", "quel que soit $x \in X$, X est un voisinage de x" sont équivalentes : car la première entraîne la seconde d'après nos définitions ; et la seconde entraîne que X est la réunion de tous les ensembles ouverts contenus dans X, donc (d'après l'axiome I des structures topologiques) que X est ouvert. Partons maintenant d'une relation V(X,x), donnée à priori, entre une partie générique X de E et un élément générique x de E ; et supposant qu'en considérant "X est un voisinage de x" comme une relation équivalente à V(X, x), les propositions A), B), C), D) soient vraies : ou, ce qui revient au même, considérons V comme une partie de $P(E) \times E$ c'est-à-dire comme un élément de l'ensemble fondamental $P\left[P(E) \times E\right]$, ensemble fondamental que nous désignerons par $\mathcal{E}'_E$: A), B), C), D) peuvent alors être considérées comme des propriétés de cet élément V, et l'ensemble des $V \in \mathcal{E}'_E$ qui possèdent ces propriétés est une partie $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{E}'_E$.
Soit donc $V \in \mathcal{C}'$; soit O la famille des parties Ω de E telles que, quel que soit $x \in \Omega$, Ω soit un voisinage de x (c'est-à-dire telles que $x \in \Omega$ entraîne $V(\Omega, x)$). Cette famille O satisfait à l'axiome I des structures topologiques, car si U est une réunion d'ensembles de O, quel que soit $x \in U$ il y aura $\Omega \in O$ tel que $x \in \Omega \subset U$, donc d'après B) on aura $V(U, x)$.

Elle satisfait à l'axiome II, d'après C). Enfin, la relation "il existe $\Omega \in O$ tel que $x \in \Omega \subset X$" est équivalente à $V(X,x)$, car elle entraîne $V(X,x)$ d'après B) ; et réciproquement, si l'on se donne X et qu'on désigne par Z l'ensemble des x tels qu'on ait $V(X,x)$, d'après D) on a $V(X,y)$ pour y assez voisin de x, donc Z contient un voisinage de tout $x \in Z$ et par conséquent $Z \in O$. Par ce qui précède, nous avons donc défini une correspondance biunivoque entre les $O \in \mathcal{C}$ et les $V \in \mathcal{C}'$: il revient au même de se donner, soit la famille O satisfaisant aux axiomes I et II, soit la relation V satisfaisant aux axiomes A), B), C), D), puisque de chacune on peut passer à l'autre par les règles qu'on vient de formuler. On exprime cette situation en disant que l'on peut définir une structure topologique dans E, soit en se donnant $O \in \mathcal{C}$, soit en se donnant $V \in \mathcal{C}'$; et que si O et V se correspondent par la correspondance qu'on a définie, O et V définissent dans E une même structure, à savoir une structure topologique. Ce sera donc pour de simples raisons de commodité qu'on définira suivant les cas une telle structure, soit par un élément O de $\mathcal{C}$, soit par un élément V de $\mathcal{C}'$; à toute partie $\bar{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$, déterminée par des axiomes supplémentaires imposés à O, correspondra une partie $\bar{\mathcal{C}}'$ de $\mathcal{C}'$, qu'on pourra définir au moyen d'axiomes supplémentaires imposés à V.

Soit donc en général E un ensemble fondamental. Soient $\mathcal{C}_E$, $\mathcal{C}'_E$ des ensembles de l'échelle des types construite sur E, ensembles qui se déduisent de E par des règles explicitement énoncées ; soient Θ_E une partie de $\mathcal{C}_E$, Θ'_E une partie de $\mathcal{C}'_E$, déterminé~~e~~s respectivement par certains axiomes.

Supposons qu'on ait défini, explicitement, une correspondance C entre Θ_E et $\Theta'_{E'}$, et qu'on ait démontré que C est une corres--pondance biunivoque entre éléments Σ de Θ_E et éléments Σ' de Θ'_E : on dira alors que Σ et Σ' définissent dans E la même structure ; et ce sera pour des raisons de pure commodité qu'on définira cette structure, soit au moyen de Σ, soit au moyen de Σ'.

Voici maintenant un point important, que nous avons laissé dans l'ombre. Supposons qu'on ait énoncé une règle qui, à partir d'un ensemble fondamental E, déterminent un ensemble $\mathcal{T}_E$ de l'échelle des types sur E, et des axiomes qui déterminent une partie Θ_E de $\mathcal{T}_E$. On aura ainsi le point de départ d'une théo--rie, constituée par toutes les propositions qu'on pourra démontrer à partir de " $\Sigma \in \Theta_E$ " : mais, si Θ_E était la partie vide de $\mathcal{T}_E$, la proposition " $\Sigma \notin \Theta_E$" serait vraie quel que soit $\Sigma \in \mathcal{T}_E$, de sorte que la théorie dont il s'agit serait "contradictoire" et sans aucun intérêt (toutes les propositions y seraient à la fois vraies et fausses, et bien entendu elle ne serait susceptible d'aucune "application" au sens défini plus haut). Il peut arriver que, E étant supposé donné arbitrairement, on puisse démontrer que $\Theta_E \neq \emptyset$: par exemple, s'il s'agit de topologie, la famille de toutes les parties de E satisfait aux axiomes topologiques I, II (il est vrai que la topologie ainsi définie dans E, qui est dite la topologie discrète de E, est rela--tivement peu intéressante ; mais pour l'instant nous pouvons nous contenter de cette indication). Il peut arriver aussi que, pour rendre légitimes les axiomes d'une théorie, on construise à partir d'un ensemble primitif qui en général sera l'ensemble Z des entiers un ensemble fondamental E tel que l'ensemble Θ_E dérivé de celui-ci soit non vide. Dans l'un ou l'autre cas, on dira qu'on a démontré que la théorie est non-contradictoire : la non-contradiction de toute théorie se trouvera ainsi, dans ce traité, ramenée à la non-contradiction d'une théorie qui renferme celle de l'ensemble Z des entiers.

Soient maintenant E, E' deux ensembles fondamentaux entre lesquels nous supposons définie une correspondance biunivoque C. Comme on a vu au chap. II, § 3, C permet de définir des correspondances biunivoques entre chaque ensemble $\mathcal{E}_E$ de l'échelle des types sur E et l'ensemble $\mathcal{E}_{E'}$ construit au moyen de la même règle à partir de E'. Soit Θ_E une partie de $\mathcal{E}_E$, définie au moyen de certains axiomes ; soit $\Theta_{E'}$ la partie de $\mathcal{E}_{E'}$ définie au moyen des mêmes axiomes : puisque toutes les relations de la théorie des ensembles se conservent par C et les correspondances qui en sont déduites, C détermine une correspondance biunivoque entre Θ_E et $\Theta_{E'}$: soient $\Sigma \in \Theta_E$, $\Sigma' \in \Theta_{E'}$ des éléments qui se correspondent ainsi ; on dira que la structure, définie par Σ' dans E', est celle qui correspond, par C, à la structure définie par Σ dans E ; et l'on dira que C est un <u>isomorphisme</u> entre l'ensemble E, pourvu de la structure définie par Σ, et E' pourvu de la structure définie par Σ'. Lorsque, E, Σ et E', Σ' étant donnés, il existe une correspondance biunivoque C entre E et E' qui fasse correspondre Σ' à Σ, on dira que E, E' (considérés comme pourvus de leurs structures respectives) sont __isomorphes__ ou qu'il y a __isomorphie__ entre E et E'. Dans ces conditions, toute proposition de la théorie dont il s'agit, démon-trée pour E, pourra, au moyen des correspondances biunivoques dérivées de C, se transporter par un simple changement de nota-tion à E'.

Nous pouvons maintenant indiquer un important principe de classification entre théories mathématiques. Deux ensembles E', E', pourvus tous deux de structures topologiques, ne sont pas néces-sairement isomorphes : ils ne le seront pas si ces structures sont définies, dans E, par la famille de toutes les parties de E ; dans E', par la famille consistant en E' et $\emptyset$ (à moins que E et E' soient des ensembles à un seul élément). On dira que la topologie est une théorie __multivalente__.

Conseidérons au contraire la théorie définie comme suit. Soit E un ensemble fondamental ; soient ω un élément de E, $s(x)$ une fonction, définie dans E, à valeurs dans E. Prenons pour axiomes les propositions que voici : I) Quel que soit $x \in E$, $s(x) \neq \omega$; II) si $X \subset E$ est tel que $\omega \in X$ et que $x(X) \subset X$, on a $X = E$; III) si $x \neq y$, $s(x) \neq s(y)$ (autrement dit, s est une application biunivoque de E dans E). On voit que l'on a là une structure de E, définie par la donnée de ω et de $s(x)$ c'est-à-dire par la donnée d'un élément de $E \times E^E$. Si l'on prend pour E l'ensemble Z des entiers, et qu'on pose $\omega = 0$, $s(x) = x + 1$, les axiomes I), II), III) sont satisfaits d'après le chap. III, § 2, donc la théorie est non-contradictoire. Soit maintenant E un ensemble où l'on ait défini, au moyen d'un élément $\omega \in E$ et d'une fonction $s(x)$, une structure de ce type.

Par récurrence (chap. III, § 3), nous savons montrer qu'il existe une fonction $f(n)$ et une seule, définie pour $n \in Z$, à valeurs dans E, et telle que $f(0) = \omega$, $f(n+1) = s\left[f(n)\right]$. $f(n)$ est une application biunivoque de Z dans E ; car si $n > 0$ on a $f(n) = s\left[f(n-1)\right] \neq \omega$, c'est-à-dire $f(n) \neq f(0)$; et, si m est tel que, quel que soit $n > m$, on ait $f(n) \neq f(m)$, il en est de même de $m + 1$, car d'après III) on aura $f(n+1) \neq f(m+1)$. Soit alors $X = f(Z)$: on a $\omega \in X$; et si $x \in X$ c'est qu'il existe $n \in Z$ tel que $x = f(n)$, d'où $s(x) = f(n+1) \in X$, donc d'après II) on a $X = E$, et $f(n)$ est une application biunivoque de Z sur E ; les relations $f(0) = \omega$, $f(n+1) = s\left[f(n)\right]$ montrent alors que c'est un isomorphisme entre Z et E. Tout ensemble où l'on a défini une structure satisfaisant à I), II), III) est donc isomorphe à Z : on dit que la théorie définie par ces axiomes est <u>univalente</u>.

Comme l'on verra, non seulement la théorie des nombres entiers, mais celle des nombres réels, celle de l'espace R^n, la géomètrie euclidienne, la géomètrie projective, sont des théories univalentes : la mathématique classique n'a même connu que de telles théories ; et le développement de théories multivalentes est le trait le plus caractéristique de la mathématique moderne, et celui qui sépare le plus visiblement ce traité de ses prédécesseurs. Sans doute la première introduction de théories multivalentes a été faite .... (date et références : géomètrie générale (sans axiome des parallèles)) Mais ce sont Riemann et Dedeking qui ont les premiers utilisé avec pleine conscience la notion de théorie multivalente, le premier en géomètrie (Ueber die Hypothesen...) le second par l'introduction des groupes abstraits...

Développer!

Voici maintenant une application importante de la notion d'isomorphie, que nous allons étudier d'abord sur un exemple, lui-même intéressant. Partons de l'ensemble Z des entiers, axiomatisé comme on vient de le dire, c'est-à-dire comme suit :

On suppose donnés dans Z un élément, noté 0, et une applica-
-tion biunivoque de Z dans lui-même, notée $x + 1$; et l'on prend pour axiomes les propositions : I) quel que soit $x \in Z$, $x + 1 \neq 0$; II) si $X \subset Z$ est tel que $0 \in X$ et que $x \in X$ entraîne $x + 1 \in X$, on a $X = Z$.

Ces axiomes étant posés, observons qu'on en déduit aisément la définition des fonctions $x + y$ et $x.y$; on n'a pour cela qu'à poser : 1) $x + 0 = x$, $x + (y + 1) = (x + y) + 1$, d'où par récurrence l'exis-
-tence et l'unicité de la fonction $x + y$;
2) $x.0 = 0$, $x.(y + 1) = x.y + x$, d'où l'existence et l'unicité de la fonction $x.y$.

Considérons maintenant l'ensemble explicite σ qui a pour éléments les deux signes +, - ; le produit $\sigma \times Z$, dont nous écrirons les éléments sous la forme $+ x$ si leur première coordon-
-née est +, $- x$ si c'est - ; et, dans $\sigma \times Z$, le partage en classes où toutes les classes sont des ensembles à un seul élément sauf une seule classe ω qui ait pour éléments $+ 0$ et -0 ; soit ZZ l'ensemble de ces classes, c'est-à-dire l'ensemble quotient de $\sigma \times Z$ par la relation d'équivalence déduite de ce partage ; soit Z' la partie de ZZ qui comprend la classe ω et toutes les classes $\{+ x\}$ pour $x \neq 0$.

Soit $u \in ZZ$; considérons la fonction $s(u)$ définie par les conditions suivantes : a) $s(\{+ x\}) = \{+(x + 1)\}$ si $x \neq 0$; b) $s(\omega) = \{+ 1\}$; c) $s(\{-1\}) = \omega$; d) $s(\{-x\}) = \{-(x-1)\}$ si $x > 1$. La fonction $s(u)$, restreinte à Z', est une applica-
-tion de Z' dans elle-même ; et la structure de Z', définie par la donnée de ω et de $s(u)$, satisfait aux axiomes des entiers, de sorte que Z', pour cette structure, est isomorphe à Z.

D'après ce que nous savons sur l'isomorphie, toute proposition démontrée au sujet de Z devient, par le changement de notations déterminé par la correspondance biunivoque définie entre Z et Z', une proposition vraie au sujet de Z'. Il n'y a donc pas d'incon-vénient à substituer entièrement, à la considération de Z, celle de Z', qui est capable de rendre précisément les mêmes services. Pour abréger le langage, on dira que l'ensemble fondamental ZZ qu'on vient de définir est un prolongement de Z ou que Z est une partie de ZZ ; et par entiers on entendra les éléments de Z'. C'est là en somme un abus de langage, qui consiste, lorsqu'on rencontre un ensemble E' isomorphe à un ensemble E déjà connu, à cesser de parler de E et à appliquer tous les termes qui dési-gnent des objets de E aux objets correspondants de E', ce qui permet, en vertu de l'isomorphie, de continuer à se servir de toutes les propositions qui ont été démontrées au sujet de E puisqu'elles restent vraies, avec ce nouveau langage, pour E'. Nous en rencontrerons de nombreux exemples dans la suite de ce traité.

§ 2. Extension à plusieurs ensembles fondamentaux

Dans tout ce qui précède, on est parti chaque fois d'un seul ensemble fondamental E, dans lequel on définissait une structure au moyen d'un élément $\sum$ d'une certaine partie Θ_E d'un en-semble fondamental $\mathcal{E}_E$ dérivé de E . Mais rien n'empêche de se donner plusieurs ensembles fondamentaux E, F, G ; dénoncer une règle qui détermine un ensemble $\mathcal{E}_{E,F,G}$ de l'échelle des types construite sur E, F, G, et des axiomes qui déterminent une partie $\Theta_{E,F,G}$ de cet ensemble : l'ensemble des propositions qu'on pourra déduire de la proposition " $\Sigma \in \Theta_{E,F,G}$" constituera alors une théorie, celle qui a pour axiomes ceux qu'on aura posés. On peut toujours dire que Σ définit une structure, structure qui éta--blit une sorte de liaison entre les ensembles fondamentaux E, F, G. La notion d'isomorphisme est alors à modifier d'une manière correspondante : un isomorphisme se composera ici de trois transformations biunivoques, de E à un ensemble E', de F à F', de G à G', de façon que, par la correspondance biunivoque de $\Theta_{E,F,G}$ à $\Theta_{E',F',G'}$ qui se déduit de celles-ci, à la structure Σ donnée sur E,F,G corresponde la structure Σ' qu'on s'est donnée sur E', F', G'.

Mais le cas qui se présente le plus souvent est celui où, parmi les ensembles fondamentaux E, F, G, il en est un qu'on considère comme jouant le rôle principal, tandis que les autres sont considérés comme jouant un rôle auxiliaire. Par exemple, soient E, A deux ensembles fondamentaux ; supposons qu'on se donne une fonction d'un élément générique x de E et d'un élément générique α de A, fonction prenant ses valeurs dans E, et qu'on notera αx ; A sera considéré comme ensemble auxiliaire, qu'on appellera souvent le domaine des opérateurs, tandis que E sera l'ensemble considéré comme principal ; en général, on imposera à la fonction αx des axiomes, qui pourront être de nature diverse : par exemple, en voici un qui figure dans la plupart des théories où apparaît une telle fonction : quels que soient

$\alpha \in A$ et $\beta \in A$, il existe $\gamma \in A$ tel que l'on ait, quel que soit x, $\gamma x = \alpha(\beta x)$. Il arrivera souvent même qu'on se donne une structure plus complexe, qui comporte à la fois la donnée de la fonction αx et la donnée d'une structure de A lui-même, et par laquelle parfois A se trouvera déterminé à une isomorphie près (par exemple A sera l'ensemble des entiers ; ou l'ensemble des nombres réels). Quoi qu'il en soit, l'on considé--rera, dans un pareil cas, que A est donné une fois pour toutes, et l'on dira que la structure qu'on se donne est une structure de E ; cette manière de parler, qui laisse A dans l'ombre, ne prête cependant en général à aucune confusion.

Lorsqu'alors on parlera d'isomorphisme, le plus souvent il s'agira d'un isomorphisme portant sur E seulement, A n'étant pas touché, c'est-à-dire d'une correspondance biunivoque de E à un ensemble E' qui, à la structure définie sur E (avec A comme ensemble auxiliaire) fasse correspondre la structure définie sur E' (avec A comme ensemble auxiliaire). Cela n'empêche pas cependant qu'on n'aie à considérer quelquefois des isomorphismes portant à la fois sur E et sur l'ensemble "auxiliaire" A : cette considération, après ce que nous venons de dire, n'implique aucune difficulté particulière, et il suffira de la signaler en son lieu.
