CHAPITRE II
PUISSANCE DES ENSEMBLES

Rédaction n° 052

Nombre de pages : 41

Nombre de feuilles : 41

Ensembles

Chap II - Chap II. (sic)

Chap III

52

A.52 2

Etat 1 bis

CHAPITRE II.

PUISSANCE DES ENSEMBLES.

I. 1. ENSEMBLES DE MEME PUISSANCE.

Définition. Soient, dans une théorie mathématique, E et F deux ensembles. S'il existe une application bi-univoque de F sur E, on dit que F a même puissance que E.

Il est clair qu'un ensemble E a toujours même puissance que E; que si F a même puissance que E, E a même puissance que F : car si f(x) est une application bi-univoque de F sur E, $\overset{-1}{f}$ est une application bi-univoque de E sur F. Si E, F, G sont trois ensembles tels que F ait même puissance que E et que G ait même puissance que F, G a même puissance que E. En effet, si f(x) est une application bi-univoque de F sur E et si g(y) est une application bi-univoque de G sur F, g(f(x)) est une application bi-univoque de G sur E.

Ces faits pourraient nous conduire à considérer le fait d'avoir même puissance comme une relation d'équivalence entre ensembles. Nous devons cependant nous en garder, car le domaine de définition de cette relation devrait comprendre tous les couples d'ensembles de la théorie, à quelques types que ces ensembles appartiennent. Or, l'ensemble de tous ces couples n'est pas de ceux que nous nous sommes donnés le droit d'introduire, puisqu'aussi bien nous considérons que les éléments d'un même ensemble doivent toujours être d'un seul et même type.

Par contre, si nous considérons deux ensembles fondamentaux $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ de la théorie, et si nous nous restreignons aux couples d'ensembles $E \subset \mathcal{E}$, $F \subset \mathcal{F}$, le fait d'avoir la même puissance

...

nous donne une relation entre éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ et éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{F})$. On peut dire que nous avons décrit d'un seul coup toutes ces relations, correspondant aux divers couples d'ensembles fonda- -mentaux.

Dans le cas où $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, la relation en question devient une relation d'équivalence entre éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{E})$.

On remarquera d'autre part que le mot "puissance" ne doit pas être considéré dans tout ceci comme un substantif, mais comme jouant le rôle d'un adjectif. Nous n'avons rien défini qui puisse s'appeler la puissance d'un ensemble.

Les résultats de V.1 nous donnent les résultats suivants (E, F, G, H désignant des ensembles) :

1. Si F a même puissance que E, $\mathcal{P}(F)$ a même puissance que $\mathcal{P}(E)$.

2. Si F a même puissance que E, et si H a même puissance que G, l'ensemble $F \times H$ a même puissance que $E \times G$.

Notons encore les faits suivants :

3. E, F étant des ensembles, $E \times F$ a même puissance que $F \times E$.

En effet, (x,y) étant un élément de $E \times F$ ($x \in E$, $y \in F$), posons $f(x,y) = (y,x)$: f est une application bi-univoque de $E \times F$ sur $F \times E$.

4. E, F, G étant trois ensembles, les ensembles, $E \times (F \times G)$ et $(E \times F) \times G$ ont même puissance.

En effet, $(x,(y,z))$ désignant un élément de $E \times (F \times G)$, ($x \in E$, $y \in F$, $z \in G$) posons $f(x,(y,z)) = ((x,y),z)$. La fonction f ainsi définie est une application bi-univoque de $E \times (F \times G)$ sur $(E \times F) \times G$.

....

$\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ étant des ensembles, supposons qu'on connaisse des décompositions

$$\mathcal{E} = \sum_{E \in \mathcal{K}} E \qquad\qquad \mathcal{F} = \sum_{F \in \mathcal{L}} F$$

de ces ensembles en parties communes telles qu'il existe entre les familles $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ une correspondance bi-univoque qui soit telle que deux éléments de ces familles qui se correspondent soient de même puissance. Dans ces conditions, $\mathcal{E}$ a même puissance que $\mathcal{F}$.

En effet, E étant un ensemble de $\mathcal{K}$, soit $f_E(x)$ une applica-tion bi-univoque de E sur l'ensemble F de $\mathcal{L}$ qui lui correspond. La fonction f(x) définie sur $\mathcal{E}$ par la formule $f(x) = f_E(x)$ si $x \in E$ est une application bi-univoque de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$.

Définition. E et F étant des ensembles, si E a la même puis-sance qu'une partie de F, sans que E et F aient la même puissance, on dit que E a une puissance plus faible que F .

Par exemple un ensemble vide a une puissance plus faible que tout ensemble non vide.

Théorème. Un ensemble E a une puissance plus faible que $\mathcal{P}(E)$.

1) x étant un élément de E, posons $f(x) = \{x\}$: f est une application bi-univoque de E sur une partie f(E) de $\mathcal{P}(E)$.

2) Montrons qu'il ne peut exister aucune application bi-univoque de E sur $\mathcal{P}$ (E). Supposons au contraire qu'il en existe une, soit f(x). Désignons par A l'ensemble des éléments $x \in E$ tels que l'on ait $x \notin f(x)$. Soit $a = \overset{-1}{f}(A)$. Si on avait $a \in A$, on aurait par définition de A, $a \notin f(a) = A$, d'où contradiction. Si on avait $a \notin A$, on aurait, toujours en vertu de la définition de A, $a \in f(a) = A$, d'où encore contradiction. L'hypothèse de l'existence de f(x) nous conduit donc à une contradiction : E et $\mathcal{P}$ (E) n'ont pas la même puissance.

L'étude des relations de puissance entre ensembles se trouvera de beaucoup facilitée par celle des relations d'ordre, que nous allons étudier dans le prochain chapitre.

II. 1. ENSEMBLES ORDONNÉS.

$\mathcal{E}$ étant un ensemble fondamental, on appelle relation d'ordre dans $\mathcal{E}$ une relation entre éléments de $\mathcal{E}$ (ou encore si on veut une partie de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$), qui se note généralement "$x < y$", et qui se lit "x est plus petit que y", cette relation satisfaisant aux conditions suivantes :

A. a et b étant des éléments de $\mathcal{E}$, une et une seule des propositions "$a < b$", "$a = b$", "$b < a$" est vraie.

B. Les relations "$x < y$" et "$y < z$" entraînent "$x < z$" .

L'axiome B exprime la transitivité de la relation "plus petit que". Il résulte immédiatement de A, que cette relation n'est ni réflexive ni symètrique. Au contraire, le prédicat "$x = x$" est toujours vrai, et la relation "$x < y$" entraîne la fausseté de "$y < x$" .

Nous supposerons donnée dans le fondamental $\mathcal{E}$ une relation d'ordre, ce qui lui confère une structure, qu'on appelle structure d'ensemble ordonné.

On peut, dans un ensemble ordonné, définir toute une série de nouvelles relations :

1) La relation "$x > y$" (x est plus grand que y) sera par définition équivalente à la relation "$y < x$" .

...

Il résulte de A. que, des trois propositions a"$<$ b","a = b", "a $>$b", il y en a toujours une et une seule de vraie.

Il résulte de B. que les relations "$x > y$", "$y > z$" entraînent "$x > z$" .

2) La relation "$x \leqslant y$". (x est au plus égal à y) sera par définition équivalente à la négation de la relation "$x > y$" .

Il résulte de A. que : chacune des relations "$x < y$", "$x = y$" entraîne "$x \leqslant y$". Inversement, si $x \leqslant y$, on a ou bien $x < y$ ou bien $x = y$.

Il résulte de B. que : les relations "$x \leqslant y$", "$y \leqslant z$" entraî-nent "$x \leqslant z$". Les relations "$x \leqslant y$", "$y < z$" entraînent "$x < z$" . Les relations "$x < y$", "$y \leqslant z$" entraînent "$x < z$" .

3) La relation "$x \geqslant y$" (x est au moins égal à y) sera par définition équivalente à la relation "$y \leqslant x$". On en déduit immédia-tement les propriétés de cette relation correspondant à celles que nous venons de donner pour la relation "$x \leqslant y$" .

On notera encore que <u>les relations</u> "$x \leqslant y$", "$y \leqslant x$" <u>entraî-nent</u> "$x = y$" .

Soit E une partie de $\mathscr{E}$. Supposons qu'il existe dans E un élément a qui soit au plus égal à tout élément de E : pour tout $x \in E$, on a $a \leqslant x$. Dans ces conditions, il n'en existe qu'un, car si un nouvel élément a' jouit de la même propriété, on a $a \leqslant a'$, $a' \leqslant a$, d'où $a = a'$. On appelle l'élément a le <u>plus petit élément</u> de E. On notera qu'il n'existe en général aucun élément jouissant de la propriété en question.

....

De même, s'il existe un élément $b \in E$ qui soit au moins égal à tout élément de E, il n'en existe qu'un et on l'appelle le <u>plus grand élément de</u> E.

x étant un élément de $\mathcal{E}$, on appelle <u>section de</u> $\mathcal{E}$ <u>déterminée par</u> x l'ensemble des éléments $y \in \mathcal{E}$ tels que $y < x$. Nous désigne-rons en général cet ensemble par la notation I_x.

Il est clair que x est le plus petit élément de l'ensemble $\complement I_x$, et que x est le plus grand élément de $I_x + \{x\}$.

L'ensemble I_x peut, suivant les cas, avoir un plus grand élément ou n'en pas avoir. S'il en a un, ce plus grand élément est appelé l'<u>antécédent de</u> x. De même, si l'ensemble $\complement I_x - \{x\}$ a un plus petit élément, ce plus petit élément est appelé le <u>consécutif</u> de x ; on vérifie immédiatement que :

<u>Les propositions</u> "y <u>est l'antécédent de</u> x" <u>et</u> "x <u>est le consécutif de</u> y" <u>sont équivalentes</u>.

Remarquons encore que le plus petit élément de $\mathcal{E}$, s'il existe, ne peut avoir d'antécédent, et que le plus grand, s'il existe, ne peut avoir de consécutif.

<u>II</u>. 11. <u>Structures induites</u>.

$\mathcal{E}$ étant un ensemble ordonné, soit E une partie de $\mathcal{E}$. La relation d'ordre entre éléments de $\mathcal{E}$ donne, en restreignant son champ de définition aux éléments de E, une relation entre éléments de E, qui satisfait, comme on le voit tout de suite, aux axiomes qui définissent une relation d'ordre. L'ensemble E, muni de cette relation, constitue donc un ensemble ordonné. On dit que sa structure d'ordre est <u>induite</u> par celle de $\mathcal{E}$.

II. 2 . ENSEMBLES BIEN ORDONNÉS.

Définition. Un ensemble ordonné $\mathcal{E}$ est dit bien-ordonné lorsque toute partie non vide de $\mathcal{E}$ possède un plus petit élément.

Il en résulte que, si $\mathcal{E}$ n'est pas vide (ce que nous supposerons) $\mathcal{E}$ possède un plus petit élément. De plus, tout élément x, sauf le plus grand élément de $\mathcal{E}$ (s'il existe) possède un conséeutif, que nous désignerons par x^+.

Il est évident que si E est une partie de l'ensemble bien ordonné $\mathcal{E}$, considérée elle-même comme ensemble ordonné (avec la structure induite par celle de $\mathcal{E}$), E est lui-même un ensemble bien ordonné.

D'autre part, nous avons le théorème capital suivant :

Principe d'induction totale. $\mathcal{E}$ étant bien ordonné, soit P(x) un prédicat défini sur $\mathcal{E}$. Supposons que, pour tout élément x, la proposition "P(y) est vrai de tous les y qui sont éléments de I_x" entraîne la proposition "P(x)". Alors P(x) est vrai de tout élément.

Soit en effet E l'ensemble des x pour lesquels P(x) est faux. Si E n'était pas vide, il aurait un plus petit élément a. Ce qui signifie que P(y) serait vrai de tous les y qui sont $< a$, donc de tous les $y \in I_a$. Il en résulterait que P(a) est vrai, ce qui est impossible, puisque $a \in E$. Nous sommes arrivés à une contradiction.

Parallèlement au principe de démonstration par induction dont nous venons de parler, on a un principe de définition par induction, qui permet de définir de proche en proche des fonctions sur $\mathcal{E}$, en les définissant pour des éléments de plus en plus grands.

D'une manière précise, soit $\mathcal{F}$ l'ensemble dans lequel doivent se trouver les valeurs de la fonction à construire. x étant un élément de $\mathcal{E}$, $\Pi(x)$ une propriété des fonctions $\varphi(y)$ définies sur I_x et à valeurs dans $\mathcal{F}$. Donnons-nous une fonction $F(x, \varphi)$ qui à chaque $x \in \mathcal{E}$ et à chaque fonction φ définie sur I_x et jouissant de la propriété $\Pi(x)$ fasse correspondre un élément de $\mathcal{F}$.

Supposons maintenant que soit vraie, pour tout x, la proposi-tion suivante : $Q(x)$: si une fonction φ définie sur I_x est telle que, pour tout $y \in I_x$, la fonction $[\varphi]_{I_y}$ (nous désignerons ainsi la fonction définie sur I_y et égale sur I_y à φ) jouit de la propriété $\Pi(x)$, et que de plus, on ait pour tout $y < x$,

$$\varphi(y) = F(y, [\varphi]_{I_y})$$

alors, la fonction φ jouit de la propriété $\Pi(x)$.

Dans ces conditions, nous allons montrer qu'il existe une fonction $f(x)$ et une seule définie sur $\mathcal{E}$, à valeurs dans $\mathcal{F}$, telle que $[f]_{I_x}$ jouisse, quel que soit x, de la propriété $\Pi(x)$ et que l'on ait quel que soit x ,

$$f(x) = F(x, [f]_{I_x})$$

Nous désignerons au cours de la démonstration par J_x l'en-semble $I_x + \{x\}$. Nous aurons d'autre part besoin du lemme suivant:

Lemme. Supposons donnée, pour tout $y \in I_x$, une fonction f_y définie sur J_y et à valeurs dans $\mathcal{F}$, de telle manière que, si $z < y$, on ait $f_z = [f_y]_{J_z}$. Dans ces conditions, il existe une fonction g définie sur I_x et telle que l'on ait, pour tout $y \in I_x$, $f_y = [g]_{J_y}$.

Posons $g(y) = f_y(y)$: nous obtenons une fonction définie sur I_x. Par hypothèse, si $z < y$, on a $f_z = [f_y]_{J_z}$, et par suite $g(z) = f_y(z)$. L'égalité $f_y = [g]_{J_y}$ est donc bien vraie.

Ceci posé, nous allons démontrer par induction le prédicat suivant, que nous désignerons par $P(x)$: <u>il existe une fonction</u> f_x <u>définie sur</u> I_x <u>et à valeurs dans</u> $\mathcal{F}$, <u>telle que</u> : a) <u>pour tout</u> $y \leqslant x$, <u>la fonction</u> $[f_x]_{I_y}$ <u>jouisse de la propriété</u> $\Pi(y)$; b) <u>pour tout</u> $y \leqslant x$, <u>on ait</u>

$$f_x(y) = F(y, [f_x]_{I_y})$$

Supposons que $P(z)$ soit vrai pour tous les $z < x$. Remarquons que, si $z < y < x$, on a nécessairement $f_z = [f_y]_{J_z}$. En effet, soit E l'ensemble des éléments $t \leqslant z$ tels que $f_z(t) \neq f_y(t)$.
Si E n'était pas vide, il aurait un plus petit élément a. On aurait donc $[f_z]_{I_a} = [f_y]_{I_a}$, d'où en vertu de b),

$$f_z(a) = F(a, [f_z]_{J_a}) = F(a, [f_y]_{J_a}) = f_y(a)$$

d'où $a \notin E$, ce qui nous donne une contradiction.

En vertu du lemme, il existe donc une fonction g définie sur I_x et telle que l'on ait, pour tout $y < x$, $f_y = [g]_{J_y}$. En vertu de la proposition $Q(x)$, la fonction g jouit de la propriété $\Pi(x)$. Nous pouvons donc définir une fonction f_x sur J_x par les formules

$f_x(y) = g(y)$ si $y < x$; $f_x(x) = F(x, g)$. Il est clair que la fonction f_x ainsi obtenue jouit des propriétés a), b). Donc la vérité de $P(y)$ pour les $y < x$ entraîne $P(x)$. Il en résulte que $P(x)$ est vrai de tout x.

Définissons maintenant la fonction $f(x)$ sur $\mathcal{C}$ par la formule $f(x) = f_x(x)$. Au cours de la démonstration de $P(x)$, nous avons montré que si $z < y$, on a nécessairement $f_z = [f_y]_{J_z}$, d'où en ....

particulier $f(z) = f_y(z)$, et par suite, quel que soit y, on a $f_y = \left[f\right]_{J_y}$. Il en résulte que la fonction $f(x)$ jouit des propriétés voulues. De plus, si une nouvelle fonction $f'(x)$ jouit des propriétés indiquées, soit E l'ensemble des x tels que $f(x) \neq f'(x)$. Si E n'était pas vide, cet ensemble aurait un plus petit élément a, et on aurait

$$f(a) = F(a, \left[f\right]_{I_a}) = F(a, \left[f'\right]_{I_a}) = f'(a)$$

d'où $a \notin E$, ce qui nous conduit à une contradiction. On a donc $f = f'$, ce qui achève la démonstration de notre principe de construction par induction.

<u>Remarque</u>. Si a est le plus petit élément de $\mathcal{E}$, l'ensemble I_a est vide. On doit donc considérer qu'il existe une seule fonction φ définie sur I_a et à valeurs dans $\mathcal{F}$. La donnée de $F(a, \varphi)$ équivaut donc à la donné d'un élément $b \in \mathcal{F}$, et, $f(x)$ désignant la fonction construite, on a $f(a) = b$.

Nous allons maintenant appliquer nos principes d'induction à la démonstration du théorème fondamental suivant :

Théorème. <u>Soient</u> $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ <u>deux ensembles bien ordonnés. Des trois propositions</u>

A. $\mathcal{E}$ <u>est isomorphe à un ~~ensemble~~ segment de</u> $\mathcal{F}$

B. $\mathcal{E}$ <u>est isomorphe à</u> $\mathcal{F}$

C. $\mathcal{F}$ <u>est isomorphe à un segment de</u> $\mathcal{E}$

<u>il y en a une et une seule qui est vraie</u>.

Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

Lemme. <u>Soit F une partie de</u> $\mathcal{F}$. <u>Supposons que, pour tout</u> $\xi \in F$, F <u>contienne aussi le segment</u> I_ξ. <u>Alors F est ou bien égal à</u> $\mathcal{F}$ <u>ou bien égal à un segment de</u> $\mathcal{F}$.

Remarquons d'abord que si η est un élément de $\mathcal{F}$ tel qu'il y ait un $\xi \in F$ tel que $\xi \geqslant \eta$, on a $\eta \in F$. En effet, si $\eta < \xi$, on a $\eta \in I_\xi \subset F$; si $\eta = \xi$, on a $\eta \in F$.

Ceci posé, s'il n'y a dans $\mathcal{F}$ aucun élément plus grand que tous ceux de F, tout $\eta \in \mathcal{F}$ jouit de la propriété précédente, et on a $F = \mathcal{F}$. Si au contraire il y a dans $\mathcal{F}$ des éléments plus grands que tous ceux de F, soit α le plus petit de ces éléments. On a $F \subset I_\alpha$ et, pour tout $\eta \in I_\alpha$, il y a des $\xi \in F$ tels que $\xi \geqslant \eta$ on a donc $F = I_\alpha$.

Passons maintenant à la démonstration du théorème. Nous supposerons la proposition C fausse, et nous allons montrer que l'une des propositions A, B est vraie. I_x étant un segment de $\mathcal{E}$, et φ une fonction définie sur I_x à valeurs dans $\mathcal{F}$, nous dirons que cette fonction jouit de la propriété $\pi(x)$ si elle est une isomorphie de I_x avec un segment de $\mathcal{F}$. Dans ce cas, l'ensemble $\mathcal{F} - \varphi(I_x)$ n'est pas vide ; nous désignerons par $F(x, \varphi)$ le plus petit élément de cet ensemble. On a donc $\varphi(I_x) = I_{F(x,\ \varphi)}$. Nous allons démontrer dans le cas qui nous occupe la proposition qui a été appelée Q(x) dans la démonstration du principe de définition par induction. φ étant une fonction définie sur I_x, supposons que, pour tout $y < x$, la fonction $[\varphi]_{I_y}$ jouissd de la propriété $\pi(y)$ et que de plus on ait

$$\varphi\ (y)\ =\ F(y,\ [\varphi]_{I_y}\ )$$

En vertu de la définition de F, on a $\varphi(I_y) = I_{F(y,\ [\varphi]_{I_y}\ )}$; par suite si $z < y < x$, on a $\varphi(z) < \varphi(y)$: φ réalise une isomorphie de I_x avec une partie de $\mathcal{F}$. Si $\xi \in \varphi(I_x)$, il existe un $y \in I_x$

tel que $\xi = \varphi(y)$, d'où $\varphi(I_y) = I_\xi \subset \varphi(I_x)$. En vertu du lemme, l'ensemble $\varphi(I_x)$ est ou bien égal à $\mathcal{F}$ ou bien à un segment de $\mathcal{F}$. Le premier cas est à exclure, puisque C est fausse. Donc φ jouit de la propriété $\pi(x)$, ce qui démontre la proposition Q(x).

Nous savons donc qu'il existe une fonction f(x) définie sur $\mathcal{E}$, à valeurs dans $\mathcal{F}$, telle que $[f]_{I_x}$ jouisse, quel que soit x, de la propriété $\pi(x)$ et que l'on ait

$$f(x) = F(x, [f]_{I_x}) .$$

Si $y < x$, on a $y \in I_x$, d'où en vertu de la définition de F, $f(y) < f(x)$. La fonction f est donc une isomorphie de $\mathcal{E}$ avec une partie de $\mathcal{F}$. Si $\xi \in f(\mathcal{E})$, il existe un $x \in \mathcal{E}$ tel que $\xi = f(x)$, d'où $I_\xi = f(I_x) \subset f(\mathcal{E})$. En vertu du lemme, l'ensemble $f(\mathcal{E})$ est ou bien égal à $\mathcal{F}$, et la proposition B est vraie, ou bien à un segment de $\mathcal{F}$, et la proposition A est vraie.

Pour démontrer que deux des propositions A,B,C ne peuvent être vraies en même temps, il suffit de démontrer qu'<u>il est impossible qu'il existe une isomorphie entre un ensemble bien ordonné $\mathcal{E}$ et une partie d'un segment de $\mathcal{E}$</u>. Supposons au contraire qu'il en existe une, donnée par une fonction f(x) définie sur $\mathcal{E}$ telle que $f(\mathcal{E})$ soit contenu dans un segment I_a de $\mathcal{E}$. Soit E l'ensemble des x tels que $f(x) < x$. E n'est pas vide, car il contient a. Soit b le plus petit élément de E. Pour tout $x \in I_b$, on a $x < b$, d'où $f(x) < f(b)$; mais d'autre part, on a pour $x < b$, $f(x) \geqslant x$, d'où $f(b) > x$. f(b) est donc plus grand que tout élément de I_b, d'où $f(b) \geqslant b$, ce qui nous donne une contradiction.

Notre théorème est donc complètement démontré.

D'autre part on a le théorème suivant :

<u>Si les ensembles bien ordonnés</u> $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ <u>sont isomorphes, il n'existe qu'une isomorphie entre</u> $\mathcal{E}$ <u>et</u> $\mathcal{F}$.

Soient en effet $f(x)$, $f'(x)$ des isomorphies de $\mathcal{E}$ avec $\mathcal{F}$. x étant un élément de $\mathcal{E}$, supposons que l'on ait $f(y) = f'(y)$ pour tous les $y \in I_x$. x est le plus petit élément de $\mathcal{E} - I_x$; donc $f(x)$ est le plus petit élément de $f(\mathcal{E}) - f(I_x) = \mathcal{F} - f(I_x)$, et $f'(x)$ est le plus petit élément de $\mathcal{F} - f'(I_x)$. Or on a par hypothèse $f(I_x) = f'(I_x)$ d'où $f(x) = f'(x)$. Donc la proposition $f(x) = f'(x)$ est vraie de tout x, ce qui démontre le théorème.

III. 1.- <u>NOMBRES ENTIERS NATURELS</u>.

Le lecteur qui possède quelque connaissance de l'arithmètique élémentaire n'aura pas manqué de remarquer que les relations de grandeur entre ces nombres y définissent une structure d'ensemble ordonné et même bien ordonné.

Considérons un ensemble ordonné $\mathcal{E}$ jouissant des propriétés suivantes :

A. $\mathcal{E}$ est bien ordonné et non vide.

B. Tout élément de $\mathcal{E}$, sauf le plus petit, possède un antécédent.

C. $\mathcal{E}$ ne possède pas de plus grand élément.

Nous admettrons le caractère non contradictoire de ces axiomes. Nous verrons d'ailleurs plus loin que cette non-contradiction peut être ramenée à une proposition beaucoup plus simple.

...

En tous cas, nous pouvons dès maintenant constater que deux ensembles jouissant des propriétés A., B., C. sont isomorphes. Il suffit, en vertu du théorème , § I de démontrer qu'un segment d'un ensemble $\mathcal{E}$ jouissant des propriétés A., B., C. ne peut pas possèder les propriétés A, C. Or, x étant un élément de $\mathcal{E}$, si x est le plus petit élément de $\mathcal{E}$, I_x est vide ; et si x n'est pas le plus petit élément de $\mathcal{E}$, I_x a comme plus grand élément l'anté--cédent de x.

La structure décrite par les axiomes A.,B.,C. s'appelle la structure des nombres entiers naturels. Toutes les théories mathéma--tiques que nous aurons à considérer comporteront un ensemble fondamental muni de cette structure (qui sera éventuellement une partie d'un autre ensemble fondamental de la théorie) : nous l'appellerons <u>ensemble des entiers naturels de la théorie</u>.

En vertu de C., tout entier n possède un consécutif, que nous désignerons par n^+. Nous désignerons par 0 le plus petit entier naturel, et nous poserons $1 = 0^+$, $2 = 1^+$, ...

Chaque entier $n \neq 0$ possède un antécédent, que nous désigne--rons par n^-. Il est évident que l'on a

$$(n^+)^- = (n^-)^+ = n$$

On peut donner, dans le cas des entiers naturels, une nouvelle forme au principe d'induction totale :

<u>Principe de récurrence</u> : <u>Soit</u> P(x) <u>un prédicat défini dans</u> $\mathcal{E}$. <u>Supposons que</u> P(0) <u>soit vrai</u>, <u>et que</u>, <u>pour tout</u> x, <u>la proposition</u> P(x) <u>entraîne</u> $P(x^+)$. <u>Alors</u> P(x) <u>est vrai de tout</u> x .

Il suffit en effet de montrer que la proposition "$P(y)$ est vrai de tous les y qui sont $< x$ " entraîne $P(x)$. C'est vrai si $x = 0$, puisque $P(0)$ est vrai. C'est aussi vrai si $x \neq 0$, car la proposition " $P(y)$ est vrai de tous les y qui sont $< x$ " entraîne $P(x^-)$, laquelle entraîne par hypothèse $P((x^-)^+) = P(x)$.

Il arrive fréquemment que l'on ait à démontrer la vérité d'un prédicat $P(x)$ pour les seules valeurs de l'entier x qui appartiennent à une certaine partie E de l'ensemble $\mathcal{E}$ des entiers naturels, le prédicat pouvant n'être pas défini ou être faux pour les valeurs de x qui ne sont pas dans E. On constate alors tout de suite que si on a démontré la vérité de $P(a)$, où a est le plus petit élément de E, et si on peut montrer que la vérité de $P(x)$ pour un élément $x \in E$ entraîne la proposition $P(x')$, où x' est le consécutif de x dans E, (s'il existe) le prédicat est vrai de tous les éléments de E.

Les cas que l'on rencontre le plus fréquemment sont celui où E est fini et celui où E se compose de tous les entiers qui ne sont pas inférieurs à un entier fixe donné.

On peut donner de même au principe de définition par induction la forme suivante : $\mathcal{F}$ étant un ensemble quelconque, donnons-nous un élément $a \in \mathcal{F}$, et une fonction $F(x, y)$ définie pour $x \in \mathcal{E}$, $y \in \mathcal{F}$ et à valeurs dans $\mathcal{F}$; il existe alors une fonction $f(x)$ et une seule définie sur $\mathcal{E}$ et à valeurs dans $\mathcal{F}$ jouissant des propriétés suivantes :

1) $f(0) = a$ 2) Pour tout x, $f(x^+) = F(x, f(x))$

En effet, φ étant une fonction définie sur I_x et à valeurs dans $\mathcal{F}$, posons $G(x, \varphi) = a$ si $x = 0$, et sinon

$G(x, \varphi) = F(x^-, \varphi(x^-))$.

Nous savons qu'il existe une fonction $f(x)$ telle que l'on ait, pour tout x, $f(x) = G(x\ ,\ [f]_{I_x})$. Cette fonction satisfait aux conditions 1),2). C'est la seule : soit en effet $f'(x)$ une nouvelle fonction satisfaisant à ces conditions. Soit E l'ensemble des entiers x tels que $f(x) \neq f'(x)$. Si E n'était pas vide, il aurait un plus petit élément b. On aurait $b \neq 0$, car $f(0) = f'(0) = a$. D'où $f(b^-) = f'(b^-)$ et $f(b) = F(b^-, f(b^-)) = F(b^-, f'(b^-)) = f'(b)$, ce qui est impossible.

III. 2.- Ensembles finis.

Définition. On appelle fini un ensemble qui a même puissance qu'un segment de l'ensemble $\mathcal{E}$ des entiers naturels.

En particulier : l'ensemble vide est fini, tout ensemble composé d'un seul élément est fini.

Lemme 1. Soient E un ensemble, a un élément de E, n un entier. Les propositions "E a même puissance que I_{n^+}" et "$E - \{a\}$ a même puissance que I_n" sont équivalentes.

1) Supposons que $E - \{a\}$ ait même puissance que I_n. L'ensemble $\{a\}$ a même puissance que $\{n\}$; donc E a même puissance que $I_n + \{n\} = I_{n^+}$.

2) Supposons qu'il existe une application bi-univoque $f(x)$ de E sur I_{n^+} . Soit $f(a) = i$: il est un entier $\leqslant n$, et on a $f(E - \{a\}) \quad I_{n^+} - \{i\}$. y étant un élément de $I_{n^+} - i$, posons

$$g(y) = y \quad \text{si } y < i \ ; \quad g(y) = y^- \quad \text{si } \ y > i$$

Si y' est un autre élément de $I_{n^+} - i$, et si on a $y' > y$, on a, comme on le voit tout de suite, $g(y') > g(y)$. Il en résulte que g est une application bi-univoque de $I_{n^+} - i$ dans $\mathcal{E}$.

Si z est un entier $< n$, on a $z = g(z)$ si $z < i$, et $z = g(z^+)$ si $z \geqslant i$: en tous cas $z \in g(I_{n^+} - \{i\})$, et $g(I_{n^+} - \{i\}) \supset I_n$. D'autre part, si $y < i$, on a $g(y) = y < n$, et si $y > i$, on a $g(y) = y^- < n$. D'où $g(I_{n^+} - \{i\}) \subset I_n$. De tout cela résulte que $I_{n^+} - \{i\}$ a même puissance que I_n, et il en est encore de même de $E - \{a\}$.

Lemme 2. m <u>étant un entier, il n'existe aucun entier</u> $n \neq m$ <u>tel que</u> I_n <u>ait même puissance que</u> I_m.

La proposition est vraie pour $m = 0$, car I_o est vide, tandis que I_n n'est pas vide si $n \neq 0$. Supposons la proposition vraie pour un entier naturel m. Soit n un entier tel qu'il existe une application bi-univoque de I_{m^+} sur I_n. Si a est le correspondant de m dans cette application, les ensembles I_m et $I_n - \{a\}$ ont même puissance. Or, nous savons déjà (lemme 1) que $I_n - \{a\}$ a même puissance que I_{n^-}. Donc I_m et I_{n^-} ont même puissance, d'où $m = n^-$; on en déduit $n = m^+$, ce qui démontre la proposition pour m^+.

Ceci nous prouve que si E est un ensemble fini, il n'existe qu'un seul entier n tel que E ait même puissance que I_n. Ce qui nous permet de poser la définition suivante :

Définition. <u>On appelle nombre d'éléments d'un ensemble fini</u> E <u>l'entier</u> n <u>tel que</u> E <u>ait même puissance que</u> I_n.

Il en résulte immédiatement la proposition suivante :

<u>La condition nécessaire et suffisante pour que deux ensembles finis aient même puissance est que leurs nombres d'éléments soient égaux</u>.

On peut donc considérer le nombre des éléments comme une sorte de mesure de la puissance des ensembles finis.

III. 3.- Addition des entiers naturels.

Lemme 3. m et n étant des entiers naturels, il existe un entier naturel $s \geqslant m$ tel que $I_s - I_m$ soit un ensemble de n éléments.

m étant considéré comme fixe, nous démontrerons la proposition par récurrence sur n. Elle est vraie pour $n = 0$: $s = m$. Supposons la vraie pour n ; s étant un entier tel que $I_s - I_m$ ait même puissance que I_n, l'ensemble $I_{s^+} - I_m = (I_s - I_m) + \{s\}$ a même puissance que I_{n^+} (lemme 1), ce qui démontre la proposition pour n .

Le lemme 3 nous apprend qu'il existe des ensembles finis A qui sont somme d'un ensemble de m éléments et d'un ensemble de n éléments. Tous ces ensembles A ont évidemment la même puissance, et sont finis. Nous pouvons donc poser la définition suivante :

Définition. On appelle somme de deux entiers m, n et on désigne par $m + n$ le nombre d'éléments d'un ensemble qui est la somme d'un ensemble de m éléments et d'un ensemble de n éléments.

Il en résulte que l'on a, pour tout entier m, $m + 0 = m$. D'autre part, le nombre d'éléments d'un ensemble composé d'un seul élément est 1. En vertu du lemme 1, on a donc $m^+ = m + 1$: le consécutif d'un entier s'obtient par addition de 1.

Il résulte immédiatement de la définition que l'on a toujours

$$m + n = n + m$$

On exprime ce fait en disant que l'addition des entiers naturels est commutative.

De plus, soit p un nouvel entier. Soient E, F deux ensembles sans point commun ayant l'un m et l'autre n éléments [1] ; soit G un ensemble sans point commun avec $E + F$ et ayant p éléments [1] .

(1) Tous ces ensembles peuvent être pris dans $\mathcal{E}$, comme on s'en assure facilement en vertu du lemme 3.

On a $E + F + G = (E + F) + G = E + (F + G)$, d'où

$$(m + n) + p = m + (n + p)$$

ce qu'on exprime en disant que l'addition des entiers naturels est <u>associative</u>.

<u>III</u>. 31.- <u>Soustraction des entiers naturels</u>.

Lemme 4. <u>Toute partie d'un ensemble fini</u> E <u>est un ensemble fini</u>.

Il suffit de démontrer la proposition dans le cas où $E = I_n$; n désignant un entier naturel. Nous la démontrerons par récurrence sur n. Elle est évidente si $n = 0$ (I_0 est vide). Supposons la vraie pour n ; soit F une partie de I_n ; si $n \notin F$, on a $F \subset I_n$ et F est fini ; si $n \in F$, on a $F - \{n\} \subset I_n$; $F - \{n\}$ est fini, et il en est de même de F d'après le lemme 1.

Ceci posé, m et n étant des entiers, on a en vertu du lemme 3, $m + n \geqslant m$. Inversement, soit p un entier $\geqslant m$. I_p contient I_m ; en vertu du lemme 4, $I_p - I_m$ est un ensemble fini. Si n est le nombre des éléments de cet ensemble, on a $p = m + n$. Donc :

p <u>et</u> m <u>étant des entiers</u>, <u>les propositions</u> "$p \geqslant m$" <u>et</u> "<u>il existe un entier</u> n <u>tel que</u> $p = m + n$" <u>sont équivalentes</u>.

Si l'une de ces conditions est remplie, il n'existe qu'un entier n tel que $p = m + n$. Supposons en effet que $p = m+n = m+n'$. Si $n' \geqslant n$, il existe un entier q tel que $n' = n + q$, d'où

$$p = m + n = m + (n + q) = (m + n) + q = p + q$$

Si on avait $q > 0$, on aurait $p + q = (p + q^-) + 1 > p + q^- \geqslant p$, ce qui est impossible. D'où $n' = n$; on raisonnerait de même si on avait n $n \geqslant n'$. Nous pouvons donc poser la définition suivante :

Définition : <u>p et m étant des entiers tels que $p \geqslant m$, on appelle différence de p et de m, et on désigne par $p-m$, l'entier n tel que</u> $p = m + n$.

En particulier, si $p > 0$, d'où $p \geqslant 1$, on voit que p^- est égal à $p-1$.

<u>Soient</u> m, n, m', n' <u>des entiers tels que</u> $m' \geqslant m$, $n' \geqslant n$. <u>On a</u> $m' + n' \geqslant m + n$, <u>et l'égalité</u> $m' + n' = m + n$ <u>n'est possible que si on a simultanément</u> $m' = m$, $n' = n$.

En effet, posons $q = m'-m$, $r = n'-n$. On a

$$m' + n' = (m + q)+(n + r) =((m + q)+ n) + r = (m+ (q + n)) + r$$
$$= (m +(n + q)) + r = ((m + n) + q) + r = (m + n) + (q + r)$$

On en déduit que $m' + n' \geqslant m + n$, et que de plus,

$$(m' + n') - (m + n) = (m'-m) + (n'-n)$$

De plus, l'égalité $m' + n' = m + n$ n'est possible que si $q + r = 0$, ce qui entraîne $q = r = 0$.

Remarque. Soient E, F des parties finies d'un ensemble quelconque. En vertu du lemme 4, $E \cap F$ et (dans le cas où $F \subset E$), $E-F$ sont finis. Si $E \cap F = 0$, l'ensemble $E + F$ est fini. Dans le cas général, l'ensemble $E \cup F = E + (F-E \cap F)$ est donc fini. De plus, soient m, n les nombres d'éléments de E, F, et q celui de $E \cap F$. Le nombre d'éléments de $E \cup F$ est $m + (n-q)$, qui est égal, comme on le voit tout de suite, à $(m + n)-q$. Donc le nombre d'éléments de $E \cup F$ est toujours $\leqslant m + n$, et n'est égal à $m + n$ que si E et F n'ont aucun élément commun.

.....

III. 32.- **Multiplication des entiers naturels.**

Lemme 5, m et n étant des entiers naturels, l'ensemble $I_m \times I_n$ est fini.

m étant considéré comme fixe, nous démontrerons cette proposi-tion par récurrence sur n. Elle est vraie pour $n = 0$, car $I_m \times I_0$ est vide. Supposons la vraie pour n. On a $I_m \times I_{n^+} = I_m \times I_n + I_m + \{n\}$. Le premier de ces ensembles est fini. Le second a même puissance que I_m, donc est fini. Leur somme est donc un ensemble fini, ce qui démontre la proposition pour n .

Définition. On appelle produit des entiers m, n et on désigne par $m \times n$, ou $m.n$, ou mn, le nombre d'éléments de $I_m \times I_n$.

Il en résulte immédiatement que $m.0 = 0$ et $m.1 = m$.

D'autre part, les ensembles $I_m \times I_n$ et $I_n \times I_m$ ont même puissance d'où : $mn = nm$

On exprime ce fait en disant que la multiplication des entiers naturels est commutative.

Soit p un troisième entier. Les ensembles $(I_m \times I_n) \times I_p$ et $I_m \times (I_n \times I_p)$ ont même puissance. On a donc

$$m.(np) = (mn).p$$

On exprime ce fait en disant que la multiplication des entiers naturels est associative.

E et F étant des ensembles finis de m et de n éléments, l'ensemble $E \times F$ a même puissance que $I_m \times I_n$. Donc $E \times F$ est un ensemble fini de mn élements.

L'ensemble I_{n+p} est somme de I_n et d'un ensemble G de p éléments. On a donc $I_m \times I_{n+p} = I_m \times I_n + I_m \times G$, d'où :

$$m(n + p) = mn + mp$$

On exprime ce fait en disant que la multiplication est <u>distri-</u>
<u>-butive</u> par rapport à l'addition.

On remarquera que la condition $mn = 0$ ne peut se réaliser que si l'un des nombres m, n est nul. Enfin, notons le résultat suivant :

m, n, m', n' <u>étant des entiers tels que</u> $m' \geqslant m$, $n' \geqslant n$, <u>on a</u> $m'n' \geqslant mn$, <u>et l'égalité</u> $m'n' = mn$ <u>n'est possible que dans les cas suivants</u> : a) <u>si</u> $m = m'$, $n = n'$; b) <u>si</u> $m = m' = 0$; c) <u>si</u> $n = n' = 0$.

Posons $q = \overset{m'-m}{m'm}$, $r = n' - n$. On a

$$m'n' = (m + q)(n + r) = mn + (mr + (qn + qr))$$

d'où $m'n' \geqslant mn$. L'égalité $m'n' = mn$ n'est possible que si $mr + (qn + qr) = 0$, d'où $mr = 0$, $qn + qr = 0$ et finalement $mr = 0$, $qn = 0$, $qr = 0$. Supposons d'abord $m \neq 0$: il faut alors que $r = 0$, d'où $n = n'$, et $qn = 0$, d'où ou bien $q = 0$, c'est-à-dire $m = m'$ (cas a) ou bien $n = 0$ (cas c).

Si nous supposons maintenant $m = 0$, l'égalité $m'n' = mn = 0$ n'est possible que si ou bien $m' = 0$ (cas b), ou bien $n' = 0$, d'où $n = 0$ (cas c).

On remarquera que, dans le cas $q = 0$, la formule établie peut s'écrire

$$m(n'-r) = mn' - mr$$

On peut donc dire que la multiplication est distributive par rapport à la soustraction.

III. 33.- Exponentiation des entiers naturels.

E et F désignant deux ensembles, rappelons qu'on désigne par E^F l'ensemble des fonctions définies sur F et à valeurs dans E. Supposons que F soit la somme de deux ensembles G, H. A toute fonction $f(x) \in E^F$ correspondent des fonctions $g(x) \in E^G$ et $h(x) \in E^H$ qu'on obtient en restreignant le champ de définition de $f(x)$ à G ou à H. Associons à $f(x)$ le couple $(g(x), h(x))$ de $E^G \times E^H$. A deux fonctions f, f' différentes correspondent des couples (g, h), (g', h') différents ; en effet, il existe au moins un $x_0 \in F$ tel que $f(x_0) \neq f'(x_0)$; si $x_0 \in G$, on a $g(x_0) \neq g'(x_0)$ et si $x_0 \in H$, on a $h(x_0) \neq h'(x_0)$.

D'autre part, tout couple (g, h) se trouve évidemment être le correspondant d'un $f \in E^F$. Nous pouvons en conclure que les ensembles E^F et $E^G \times E^H$ ont même puissance.

Nous pouvons alors démontrer le

Lemme 6. Si E et F sont des ensembles finis, il en est de même de E^F.

Il suffit évidemment de démontrer le lemme dans le cas où $F = I_n$, n étant un entier. Nous procéderons par récurrence sur n. La proposition est vraie pour $n = 0$, car E^0 comporte un seul élément. Supposons la vraie pour un entier n. L'ensemble $E^{I_{n^+}}$ a même puissance que $E^{I_n} \times E^{\{n\}}$. Or E^n a évidemment même puissance que E, la correspondance étant obtenue en associant à chaque fonction $f(x)$ définie sur $\{n\}$ l'élément $f(n) \in E$. Donc $E^{\{n\}}$ est fini, ce qui démontre notre proposition pour n^+.

Définition. m et n étant des entiers naturels, on appelle puissance de m d'exposant n et on désigne par m^n le nombre d'éléments de $I_m^{I_n}$.

p étant un troisième entier, l'ensemble I_{n+p} est somme de I_n et d'un ensemble de p éléments. En appliquant ce qui vient d'être démontré, on en déduit que l'on a

$$m^{n+p} = m^n . m^p$$

Par ailleurs, on a évidemment

$$m^0 = 1 \qquad m^1 = m$$

Nous allons maintenant démontrer les formules

$$(mn)^p = m^p n^p \qquad m^{np} = (m^n)^p$$

Nous pourrions démontrer ces formules à partir de la définition de l'exponentiation. Il nous sera plus facile de les démontrer par récurrence sur p, m et n étant considérés comme fixes. Elles sont évidemment vraies pour p = 0. Supposons les vraies pour un entier p.

On a

$$(mn)^{p+1} = (mn)^p.(mn) = (m^p n^p).(mn) = ((m^p n^p)m)n = (m^p(n^p m))n$$
$$= (m^p(mn^p))n = ((m^p m)n)n^p = (m^p m)(n^p n) = m^{p+1}n^{p+1}$$
$$m^{n(p+1)} = m^{np+n} = m^{np}m^n = (m^n)^p m^n = (m^n)^{p+1}$$

ce qui démontre que les formules sont vraies pour p + 1.

IV. 1.- ENSEMBLES DENOMBRABLES.

Définition. On appelle infini un ensemble qui n'est pas fini

L'ensemble $\mathcal{E}$ des entiers naturels est infini.

En effet, n étant un entier, le nombre des éléments d'une partie de I_n est $\leqslant$ n . Au contraire $\mathcal{E}$ contient des parties finies dont ....

les nombres d'éléments sont $> n$ (I_{n+} par exemple). $\mathcal{E}$ ne peut donc pas être mis en correspondance biunivoque avec un ensemble I_n.

Définition. <u>On appelle dénombrable un ensemble qui a même puissance qu'une partie de</u> $\mathcal{E}$.

Par suite : les ensembles finis sont dénombrables ; toute partie de $\mathcal{E}$ est dénombrable.

Remarquons d'autre part que toute partie infinie E de $\mathcal{E}$ possède une structure d'ensemble bien-ordonné, induite par celle de $\mathcal{E}$. E, étant infini, n'est pas isomorphe à un segment de $\mathcal{E}$. D'autre part un segment de E est contenu dans un segment de $\mathcal{E}$ et est par suite un ensemble fini. Donc $\mathcal{E}$ n'est pas isomorphe à un segment de E. Donc E et $\mathcal{E}$ sont isomorphes. Donc :

<u>Tout ensemble dénombrable infini a même puissance que</u> $\mathcal{E}$.

Cela signifie qu'on peut numéroter les éléments d'un ensemble dénombrable infini, E, c'est-à-dire faire correspondre à chaque entier n un élément $u_n \in E$ de manière à ce qu'à deux entiers dif-férents correspondent des éléments différents, et que tout élément de E se trouve atteint.

Nous allons maintenant démontrer que :

<u>L'ensemble</u> $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ <u>a même puissance que</u> $\mathcal{E}$.

Nous commencerons par définir par récurrence une fonction $u(x)$ à valeurs dans $\mathcal{E}$ par les formules

$$u(0) = 1 \qquad u(x+1) = u(x) + (x+1)$$

Démontrons par récurrence sur y que, pour tout x, on a $u(x+y) \geqslant u(x)$. La proposition est vraie pour $y = 0$. Supposons la vraie pour un entier y : on a $u(x+(y+1)) = u((x+y)+1) = u(x+y) + ((x+y)+1 > u(x+y) \geqslant u(x)$, ce qui démontre la proposition pour $y+1$.

De plus, on voit que, si $y > 0$, on a $u(x + y) > u(x)$: x et x' étant deux entiers l'inégalité $x' > x$ entraîne $u(x') > u(x)$.

Ceci posé, (m, n) étant un élément de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ (donc, m et n étant des entiers), nous définirons la fonction $f(m, n)$ de la manière suivante :

$$f(m, n) = u(m + n) + m$$

Si les couples (m, n), (m', n') sont différents, on a $f(m,n) \neq f(m',n')$

En effet :

1) Si $m' + n' \neq m + n$, soit par exemple $m' + n' > m + n$. On a $f(m' + n') \geqslant u(m' + n')$, $f(m,n) \leqslant u(m,n) + (m + n) < u((m + n) + 1) \leqslant u(m' + n')$, d'où $f(m, n) < f(m', n')$.

2) Si $m' + n' = m + n$, on a nécessairement $m' \neq m$, d'où $f(m', n') \neq f(m, n)$.

La fonction $f(m, n)$ réalise donc une application biunivoque de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$. L'ensemble $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ est donc dénombrable. Etant évidemment infini, il a même puissance que $\mathcal{C}$.

On en conclut que :

<u>Le produit de deux ensembles dénombrables est dénombrable</u>.

En effet, le produit de deux ensembles dénombrables a même puissance qu'une partie de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$.

D'autre part, tout ensemble qui est image par une fonction f d'un ensemble dénombrable E est dénombrable. Il suffit de le démontrer dans le cas où $E \subset \mathcal{C}$. a étant un élément de $f(E)$, faisons lui correspondre le plus petit entier de l'ensemble $\overset{-1}{f}(a)$: nous obtenons une application bi-univoque de $f(E)$ dans E.

<u>La réunion d'une famille dénombrable</u> $\mathcal{F}$ <u>de parties dénombrables d'un ensemble</u> E <u>est un ensemble dénombrable</u>.

Etablissons une correspondance bi-univoque entre $\mathcal{F}$ et une partie de $\mathcal{E}$; A étant un élément de $\mathcal{F}$, il lui correspond ainsi un entier que nous désignerons par ν_A. D'autre part, il existe une application bi-univoque ψ_A de A dans $\mathcal{E}$. L'ensemble $\psi_A(A) \times \{\nu_A\}$ contenu dans $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ est en correspondance bi-univo-que avec A. Désignons par f_A une application de cet ensemble sur A. Soit

$$F = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} \left(\psi_A(A) \times \{\nu_A\}\right)$$

Les ensembles $\psi_A(A) \times \{\nu_A\}$ sont deux à deux sans élément commun. On peut donc définir une fonction f sur F comme étant égale à f_A sur $\psi_A(A) \times \{\nu_A\}$, quel que soit A. La fonction f est une applica-tion de F, qui est dénombrable en tant que partie de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$, sur la réunion des ensembles $A \in \mathcal{F}$.

IV. 2.- Suites.

Définition. $\mathcal{f}$ étant un ensemble, on appelle suite d'éléments de $\mathcal{f}$ une application de l'ensemble $\mathcal{E}$ des entiers naturels dans $\mathcal{f}$.

Une suite se caractèrise généralement par la donnée de l'élément u_n qui correspond à l'entier n. On la représente souvent par le symbole $(u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots)$ ou, plus simplement par $\{u_n\}$.

A chaque suite d'éléments de $\mathcal{f}$ se trouve attachée une partie de $\mathcal{f}$, à savoir l'ensemble des éléments de $\mathcal{f}$ qui figurent dans la suite. Cet ensemble est toujours dénombrable et n'est jamais vide. Inversement toute partie F dénombrable non vide de $\mathcal{f}$ peut être considéré comme l'ensemble des éléments d'une suite d'éléments de $\mathcal{f}$.

En effet, si F est infini, il suffit de le mettre en correspondance bi-univoque avec $\mathcal{E}$. Si F est fini et contient m éléments, il existe une application bi-univoque f(n) de I_m sur F ; il suffit alors de poser $u_n = f(n)$ si $n < m$, et $u_n = f(m-1)$ si $n \geqslant m$.

Lorsque les éléments de la suite sont des parties d'un ensemble, la réunion (resp^t : l'intersection) de la famille de ces parties s'appelle la réunion (l'intersection) de la suite. $\mathcal{L}_0 \cdot (E_n)$ est la suite, on la note $\bigcup\limits_n E_n$ (resp^t $\bigcap\limits_n E_n$).

E étant une partie infinie de $\mathcal{E}$, supposons donnée une application $x \longrightarrow u_x$ de E dans $\mathcal{F}$. E étant considéré comme ensemble bien ordonné, avec la structure induite par celle de $\mathcal{E}$, on sait qu'il existe une isomorphie et une seule de $\mathcal{E}$ avec E. Soit g(n) l'application de $\mathcal{E}$ dans E qui réalise cette isomorphie. Si on pose $v_n = u_{g(n)}$, on obtient une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ qui est bien définie quand on connaît la correspondance $x \longrightarrow u_x$. On note quelquefois cette suite $\{u_x\}_{x \in E}$. On peut éventuellement remplacer l'indication "$x \in E$" par l'indication des conditions que doit remplir x pour être dans E. Par exemple, m étant un entier, on pourra avoir la suite $\{u_x\}_{x \geqslant m}$ (E est dans ce cas l'ensemble $\mathcal{E} - I_m$). On peut encore noter cette dernière suite de la manière suivante : $(u_m, u_{m+1}, \ldots\ldots)$.

Si maintenant nous nous donnons une suite $\{u_n\}$ et que nous prenions une partie infinie E de $\mathcal{E}$, la suite $\{u_n\}_{n \in E}$ s'appelle une <u>suite extraite</u> de la suite $\{u_n\}$. Il est évident qu'une suite ~~partie~~ extraite d'une suite extraite de la suite $\{u_n\}$ est encore une suite extraite de la suite $\{u_n\}$.

On utilise assez souvent le procédé suivant, dit procédé de la suite diagonale : supposons donnée une suite de suites, c'est-à-dire une loi qui à chaque $n \in \mathcal{E}$ fasse correspondre une suite $S_n = (u_{n,0}, u_{n,1}, \dots, u_{n,m}, \dots)$ d'éléments de $\mathcal{F}$. Supposons de plus que, pour chaque n, la suite S_{n+1} soit une suite extraite de S_n. Dans ces conditions, on peut former une suite $S = \{v_k\}$ qui sort telle que, pour chaque ~~m~~ n, la suite $(v_n, v_{n+1}, \dots)$ sort extraite de S_n. Il suffit de poser $v_k = u_{k,k}$. Remarquons en effet

1) n et p étant des entiers, S_{n+p} est une suite extraite de S_n. La proposition est vraie pour $p = 0$. Supposons la vraie pour un entier p. La suite $S_{n+(p+1)} = S_{(n+p)+1}$ est extraite de S_{n+p} qui est extraite de S_n ; donc elle est elle-même extraite de S_n, ce qui démontre la proposition pour $p + 1$.

2) Il existe donc une fonction $\varphi(m, n, p)$ des entiers m, n, p telle que l'on ait

$$u_{n+p,m} = u_{n,\varphi(m,n,p)}$$

d'où, si $k \geqslant n$, $v_k = u_{n,\varphi(k,n,n-k)}$, ce qui prouve notre assertion. assertion. En dehors des suites d'éléments de $\mathcal{F}$, on considère également souvent les applications dans $\mathcal{F}$ d'un segment I_n de $\mathcal{E}$: une pareille application est appelée une suite finie à n termes. Si u_k est l'élément de $\mathcal{F}$ qui correspond à un entier $k \in I_n$, on représente souvent la suite finie par le symbole $(u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$. Si E est une partie finie de $\mathcal{E}$, il existe une isomorphie et une seule de E avec un segment I_n de $\mathcal{E}$. De sorte que la donnée d'une application de E dans $\mathcal{F}$ détermine une suite finie $\{u_x\}_{x \in E}$. On rencontre par exemple souvent le cas où E se compose des entiers x tels que $m \leqslant x \leqslant n$, m et n étant des entiers tels que $n \geqslant m$: la suite finie se désigne alors par $(u_m, u_{m+1}, \dots, u_n)$.

V. 1.- THEOREME DE ZERMELO. APPLICATIONS.

Nous revenons maintenant à la théorie des ensembles quelconques; et nous allons montrer que tout ensemble peut être bien ordonné :

Théorème de Zermelo. $\mathcal{E}$ étant un ensemble, il existe une relation entre éléments de $\mathcal{E}$ qui est une relation d'ordre et qui fait de $\mathcal{E}$ un ensemble bien ordonné.

Soit $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ l'ensemble des parties de $\mathcal{E}$. En vertu de l'axiome de choix, il existe une fonction $f(A)$ définie sur $\mathcal{P}(\mathcal{E}) - \{0\}$ dont la valeur est dans $\mathcal{E}$ et qui fait correspondre à chaque partie A non vide de $\mathcal{E}$ un élément de A : $f(A) \in A$. Nous poserons $\varphi(A) = A - \{f(A)\}$.

Disons qu'une famille $\mathcal{K}$ de parties de $\mathcal{E}$ est une chaîne si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) Si $\mathcal{K}_1$ est une famille contenue dans $\mathcal{K}$, l'intersection des ensembles de $\mathcal{K}_1$ est un élément de $\mathcal{K}$ (on peut exprimer ceci en disant que $\mathcal{K}$ est fermé par rapport à l'opération d'intersection).

2) Si $A \in \mathcal{K}$ et si $A \neq 0$, on a $\varphi(A) \in \mathcal{K}$ (on peut exprimer ce fait en disant que $\mathcal{K}$ est fermé par rapport à l'opération φ).

Il existe certainement des chaînes, par exemple $\mathcal{K} = \mathcal{P}(\mathcal{E})$. D'autre part on voit tout de suite que l'intersection de toute famille de chaînes est encore une chaîne. (On notera qu'une famille de chaînes est une partie de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{E}))$.) Toute chaîne contient $\mathcal{E}$ en vertu de 1).

Nous désignerons par $\mathcal{K}_0$ l'intersection de toutes les chaînes. $\mathcal{K}_0$ est une chaîne ; et si une chaîne $\mathcal{K}$ est contenue dans $\mathcal{K}_0$, on a $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$: on peut dire que $\mathcal{K}_0$ est la plus petite chaîne.

Disons qu'un élément $A \in \mathcal{K}_0$ est <u>régulier</u> si la condition suivante est remplie : pour tout ensemble $B \in \mathcal{K}_0$ on a ou bien $B \subset A$ ou bien $B \supset A$. Nous voulons démontrer que tous les ensembles de $\mathcal{K}_0$ sont réguliers.

A étant un élément régulier non vide de $\mathcal{K}_0$, soit $\mathcal{K}'$ la famille des ensembles X satisfaisant aux conditions suivantes :

a) $X \in \mathcal{K}_0$; b) on a ou bien $X \supset A$ ou bien $X \subset \varphi(A)$.

Montrons que $\mathcal{K}'$ est une chaîne. En effet 1) soit $\mathcal{K}'_1$ une famille contenue dans $\mathcal{K}'$; et soit B l'intersection des ensembles de $\mathcal{K}'_1$. Alors : a) $B \in \mathcal{K}_0$; b) si tous les ensembles de $\mathcal{K}'_1$ contiennent A, on a $B \supset A$; sinon, l'un au moins est contenu dans $\varphi(A)$, et on a $B \subset \varphi(A)$. Donc $B \in \mathcal{K}'$; 2) Soit B un ensemble non vide de $\mathcal{K}'$. Alors : a) $\varphi(B) \in \mathcal{K}_0$; b) Si $\varphi(B) \supset A$, on a $\varphi(B) \in \mathcal{K}'$; si $\varphi(B) \not\supset A$, on a $\varphi(B) \subset A$ puisque A est régulier, et l'ensemble $A - \varphi(B)$ n'est pas vide ; B étant dans $\mathcal{K}'$, on a ou bien $B \subset \varphi(A)$, et alors $\varphi(B) \subset \varphi(A)$, et $\varphi(B) \in \mathcal{K}'$, ou bien $B \supset A$, et alors $B - \varphi(B) = (B-A) + (A-\varphi(B))$; le second terme de la somme étant non vide, le premier est vide puisque $B-\varphi(B)$ ne contient que le seul élément $f(B)$; dans ce cas donc, on a $B = A$, $\varphi(B) = \varphi(A)$, $\varphi(B) \in \mathcal{K}'$;

Donc $\mathcal{K}'$ est une chaîne. On a $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}_0$, d'où $\mathcal{K}' = \mathcal{K}_0$

Donc : si A est régulier, tout ensemble $B \in \mathcal{K}_0$ possède la propriété b). Soit maintenant $\mathcal{K}''$ la famille des ensembles réguliers de $\mathcal{K}_0$. Montrons que $\mathcal{K}''$ est une chaîne. En effet : 1) soit $\mathcal{K}''_1$ une famille contenue dans $\mathcal{K}''$, et soit A l'intersection des ensembles de $\mathcal{K}''_1$. On a $A \in \mathcal{K}_0$; B étant un ensemble quelconque

....

de $\mathcal{K}_0$, si tous les ensembles de $\mathcal{K}''$ contiennent B, on a $A \supset B$; sinon, les éléments de $\mathcal{K}''$ étant réguliers, il en existe au moins un qui est contenu dans B, d'où $A \subset B$: on a $A \in \mathcal{K}''$; 2) A étant un élément non vide de $\mathcal{K}''$ et B un élément quelconque de $\mathcal{K}_0$, nous avons vu que l'on a ou bien $B \supset A \supset \varphi(A)$, ou bien $B \subset \varphi(A)$. Donc $\varphi(A)$ est régulier.

Donc $\mathcal{K}''$ est une chaîne. On a, $\mathcal{K}'' \subset \mathcal{K}_0$, donc $\mathcal{K}'' = \mathcal{K}_0$: tous les éléments de $\mathcal{K}_0$ sont réguliers. Ce qui signifie que, <u>de deux ensembles de $\mathcal{K}_0$, il y en a toujours un qui contient l'autre</u>.

a étant un élément de $\mathcal{E}$, nous désignerons par A_a l'inter--section de la famille des ensembles de $\mathcal{K}_0$ dont a est élément. On a donc $A_a \in \mathcal{K}_0$, $a \in A_a$. Comme on n'a pas $A_a \subset \varphi(A_a)$, on a $a \notin \varphi(A_a)$, ce qui n'est possible que si $a = f(A_a)$. Inversement, soit A un ensemble de $\mathcal{K}_0$, et soit $a = f(A)$. On a $a \in A$, d'où $A \supset A_a$, mais $\varphi(A) \not\supset A_a$. En vertu de la propriété de régularité, on a $\varphi(A) \subset A_a$ et, puisque $A - \varphi(A)$ n'a qu'un seul élément, $A = A_a$.

Enfin, si b est un nouvel élément de $\mathcal{E}$, on a ou bien $A_a \supset A_b$ avec $A_a \neq A_b$, ou bien $A_a = A_b$, d'où $a = f(A_a) = b$, ou bien $A_b \supset A_a$ avec $A_a \neq A_b$, et ces trois éventualités s'excluent mutuellement.

Ceci posé, nous pouvons maintenant définir la relation d'ordre dans $\mathcal{E}$: la proposition "$x < y$" sera par définition équivalente à l'ensemble des propositions "$A_x \supset A_y$", "$A_x \neq A_y$". Il résulte de ce que nous venons de démontrer que, a et b étant des éléments de $\mathcal{E}$, une et une seule des propositions "$a < b$", "$a = b$", "$b < a$" est vraie. D'autre part, il est évident que les relations $x<y$, $y<z$ entraînent $x<z$. Nous avons donc bien une relation d'ordre.

Soit maintenant E une partie non vide quelconque de $\mathcal{E}$. Soit A l'intersection de la famille des ensembles X de $\mathcal{K}_0$ qui contien--nent E. On a $A \in \mathcal{K}_0$, $E \subset A$. Soit $a = f(A)$, d'où $A = A_a$. On a $E \not\subset \varphi(A)$, d'où $a \in E$. Soit x un élément quelconque de E autre que a : on a $A_x \neq A_a$. Si on avait $A_x \supset A_a$, on aurait aussi $A_x \supset E$, d'où $A_x \subset A_a$, et contradiction. Donc $A_x \subset A_a$, c'est-à-dire que $x > a$: a est le plus petit élément de E. L'ensemble $\mathcal{E}$ est bien ordonné.

La démonstration du théorème de Zermelo est achevée. Nous allons maintenant donner des applications de ce théorème à la théorie de la puissance des ensembles.

Lemme 1. <u>Un ensemble peut être bien ordonné de manière à posséder la propriété suivante : aucun segment de l'ensemble n'a même puissance que l'ensemble</u>.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble en question. Supposons y définie une relation de bonne ordination qui ne jouisse pas nécessairement de la propriété énoncée dans le lemme. Soit E l'ensemble des $x \in \mathcal{E}$ tels que le segment I_x ait même puissance que $\mathcal{E}$. Si E est vide, nous poserons $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}$; sinon, nous poserons $\mathcal{E}_1 = I_a$, où a est le plus petit élément de E. L'ensemble $\mathcal{E}_1$ est, en tant que partie de $\mathcal{E}$, un ensemble bien ordonné ; il a même puissance que $\mathcal{E}$, et il possède la propriété énoncée dans le lemme. Une correspondance bi-univoque entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_1$ ....

transporte dans $\mathcal{E}$ la structure d'ordre de $\mathcal{E}_1$. Nous avons ainsi une nouvelle relation de bonne ordination dans $\mathcal{E}$, qui satisfait à la condition énoncée dans le lemme.

Ceci posé, soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ deux ensembles quelconques. Nous pouvons les supposer bien ordonnés de manière à satisfaire à la condition du lemme 1. Dans ces conditions, ou bien $\mathcal{E}$ est isomorphe à un segment de $\mathcal{F}$, ou bien $\mathcal{E}$ est isomorphe à $\mathcal{F}$ ou bien $\mathcal{F}$ est isomorphe à un segment de $\mathcal{E}$. Supposons que nous soyons dans le premier cas. Nous allons montrer qu'il est alors impossible que $\mathcal{F}$ ait même puissance qu'une partie $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$. En effet, $\mathcal{E}'$ serait un ensemble bien ordonné avec la structure induite par celle de $\mathcal{E}$; $\mathcal{E}$ ne serait isomorphe à aucun segment de $\mathcal{E}'$, puisqu'un segment de $\mathcal{E}'$ serait contenu dans un segment de $\mathcal{E}$ et que $\mathcal{E}$ ne peut être isomorphe à aucune partie d'un segment de $\mathcal{E}$; donc ou bien $\mathcal{E}'$ serait isomorphe à $\mathcal{E}$ ou bien $\mathcal{E}'$ serait isomorphe à un segment de $\mathcal{E}$. Dans les deux cas, $\mathcal{E}'$ serait isomorphe à un segment de $\mathcal{F}$, ce qui est impossible, puisque $\mathcal{E}'$ aurait la même puissance que $\mathcal{F}$. De même, dans le troisième cas, il est impossible que $\mathcal{E}$ ait même puissance qu'une partie de $\mathcal{F}$.

On en déduit le

Théorème de comparaison des puissances. $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ étant des ensembles quelconques, ou bien $\mathcal{E}$ a une puissance plus faible que $\mathcal{F}$, ou bien $\mathcal{E}$ a même puissance que $\mathcal{F}$, ou bien $\mathcal{F}$ a une puissance plus faible que $\mathcal{E}$, ces trois éventualités s'excluant mutuellement.

Décomposition en parties dénombrables.

$\mathcal{E}$ étant un ensemble bien ordonné, nous dirons qu'un élément $a \in \mathcal{E}$ est de première espèce ou de seconde espèce suivant qu'il a ou qu'il n'a pas d'antécédent. Le plus petit élément de $\mathcal{E}$ est de seconde espèce ; le consécutif de tout élément est de première espèce.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des éléments de seconde espèce, avec la structure d'ordre qui y est induite par celle de $\mathcal{E}$. a étant un élément de $\mathcal{F}$, désignons par K_a l'ensemble $\mathcal{E} - I_a$. Définissons maintenant l'ensemble L_a de la manière suivante : si a est le plus grand élément de $\mathcal{F}$, $L_a = K_a$; sinon, $L_a = K_a - K_b$, où b est le consécutif de a dans l'ensemble $\mathcal{F}$. On a $a \in L_a$ et a est le plus petit élément de L_a. De plus tout élément autre que a de L_a est de première espèce. Donc L_a est un ensemble bien ordonné dans lequel tout élément autre que le plus petit possède un antécédent. Si L_a ne possède pas de plus grand élément, ce qui se produit certainement dans le cas où a n'est pas le plus grand élément de $\mathcal{F}$, L_a est isomorphe à l'ensemble des entiers naturels. Si L_a possède un plus grand élément, il est fini comme il résulte du

Lemme 2. Un ensemble bien ordonné L dans lequel chaque élément autre que le plus petit possède un antécédent et qui possède un plus grand élément est fini.

En effet, tout segment non vide de L possède les mêmes propriétés que L, le plus grand élément du segment déterminé par un élément x étant l'antécédent de x . Donc l'ensemble $\mathcal{N}$ ....

des entiers naturels n'est isomorphe ni à L ni à un segment de L. Donc L est isomorphe à un segment de $\mathcal{N}$.

D'autre part, on a

$$\mathcal{C} = \bigcup_{a \in \mathcal{F}} L_a = \sum_{a \in \mathcal{F}} L_a$$

En effet : 1) soit $x \in \mathcal{C}$; posons $J_x = I_x + \{x\}$, $F = \mathcal{F} \cap J_x$, et soit G l'ensemble des y tels que l'on ait $y \geqslant z$ pour tout $z \in F$. On a $x \in G$. Soit a le plus petit élément de G. a est de seconde espèce, car, s'il avait un antécédent a^-, on aurait encore $a^- \in G$. On a $x \geqslant a$, d'où $x \in K_a$; de plus, si a possède un consécutif b dans l'ensemble $\mathcal{F}$, on a $x \notin K_b$, car l'hypothèse $x \in K_b$ entraînerait $b \leqslant x$, $b \in \mathcal{F}$ qui est incompatible avec $b > a$. Donc $x \in L_a \subset \bigcup_{a \in \mathcal{F}} L_a$; 2) soient a, a' des éléments différents de $\mathcal{F}$; supposons $a' > a$; alors a possède un consécutif b dans $\mathcal{F}$, et on a $b \geqslant a'$, d'où $L_a \cap L_{a'} = 0$.

Supposons maintenant l'ensemble $\mathcal{C}$ infini. Tous les ensembles L_a sont alors infinis, sauf éventuellement celui qui correspond au plus grand élément a_1 de $\mathcal{F}$ (s'il en a un). Soit a_0 le plus petit élément de $\mathcal{C}$: on a $a_0 \neq a_1$, et on a

$$\mathcal{C} = (L_{a_0} + L_{a_1}) + \sum_{\substack{a_0 < a < a_1 \\ a \in \mathcal{F}}} L_a$$

Le premier de ces ensembles est dénombrable et infini, et il en est de même des ensembles qui figurent sous le $\sum$. Donc :

<u>Tout ensemble infini peut être décomposé en parties dénombrables infinies deux à deux sans élément commun</u>.

On peut en déduire que :

<u>Si $\mathcal{C}$ est un ensemble infini et si $\mathcal{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, l'ensemble $\mathcal{C} \times \mathcal{N}$ a même puissance que $\mathcal{C}$</u>.

En effet, il existe une famille $\mathcal{F}$ de parties infinies dénombrables D de $\mathcal{C}$ telle que

$$\mathcal{C} = \sum_{D \in \mathcal{F}} D$$

d'où

$$\mathcal{C} \times \mathcal{N} = \sum_{D \in \mathcal{F}} D \times \mathcal{N}$$

Or $D \times \mathcal{N}$ a même puissance que D puisque D est dénombrable infini. On en déduit que $\mathcal{C} \times \mathcal{N}$ a même puissance que $\mathcal{C}$.

De même on peut démontrer le résultat suivant :

<u>Soit</u> $(E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots)$ <u>une suite de parties infinies d'un ensemble, qui ont toutes la même puissance</u>. <u>Leur réunion</u> E <u>a même puissance que chacune d'elles</u>.

Soit $f_n(x)$ une application de E_0 sur E_n. Le couple (x, n) étant élément de $E_0 \times \mathcal{N}$ $(x \subset E_0,\ n \in \mathcal{N})$, posons $\varphi(x, n)$ $f_n(x)$. φ est une application de $E_0 \times \mathcal{N}$ sur E. En vertu de l'axiome de choix, il existe une fonction $g(y)$ définie sur E telle que l'on ait $g(y) \in \overset{-1}{\varphi}(y)$, pour tout $y \in E$. $g(y)$ est une application bi-univoque de E dans $E_0 \times \mathcal{N}$. Or $E_0 \times \mathcal{N}$ a même puissance que E_0 qui est une partie de E. Donc E a même puissance qu'une partie de E_0 et E_0 a même puissance qu'une partie de E : E a même puissance que E_0.

On remarquera que la démonstration subsiste sous la seule hypothèse que E_0 soit infini et que, pour tout n, E_n ait même puissance qu'une partie de E_0. De plus, on peut remplacer dans ceci E_0 par n'importe quel ensemble de la suite.

VI. 1.- CARACTÉRISATION DES ENSEMBLES FINIS. PERMUTATIONS.

$\mathcal{E}$ étant un ensemble non vide, a un élément de $\mathcal{E}$, nous savons que, si $\mathcal{E}$ est fini, $\mathcal{E} - \{a\}$ n'a pas la même puissance que $\mathcal{E}$. Au contraire, si $\mathcal{E}$ est infini, $\mathcal{E} - \{a\}$ a même puissance que $\mathcal{E}$. En effet, $\mathcal{E} - \{a\}$ est également infini, et contient par suite une partie D dénombrable infinie. Si on pose $E = (\mathcal{E} - \{a\}) - D$ on a $\mathcal{E} - \{a\} = D + E$, $\mathcal{E} = (D + \{a\}) + E$. Mais $D + \{a\}$ a même puissance que D, donc $\mathcal{E} - \{a\}$ a même puissance que $\mathcal{E}$.

Par suite : <u>les propositions suivantes sont équivalentes</u> :

A. $\mathcal{E}$ est fini

B. <u>Pour tout élément</u> $a \in \mathcal{E}$, <u>l'ensemble</u> $\mathcal{E} - \{a\}$ <u>n'a pas même puissance que</u> $\mathcal{E}$.

C. <u>Ou bien</u> $\mathcal{E}$ <u>est vide, ou bien il existe un</u> $a \in \mathcal{E}$ <u>tel que</u> $\mathcal{E} - \{a\}$ <u>n'ait pas même puissance que</u> $\mathcal{E}$.

Il en résulte tout de suite que ces propositions sont encore équivalentes à la suivante :

D. <u>Il n'existe aucune autre partie de</u> $\mathcal{E}$ <u>que</u> $\mathcal{E}$ <u>qui ait même puissance que</u> $\mathcal{E}$.

On remarquera que les propositions B), C), D) se formulent indépendamment de la théorie de l'ordination. Elles fournissent donc des définitions de la notion d'ensemble fini qui sont indépen--dantes de cette théorie.

On peut encore caractériser les ensembles finis par des propriétés relatives à leurs possibilités d'ordination :

E. <u>Toute relation d'ordination dans un ensemble fini</u> $\mathcal{E}$ <u>est une relation de bonne ordination</u>.

....

Nous le démontrerons par induction sur le nombre n des éléments de $\mathcal{E}$. Supposons la proposition démontrée pour tous les ensembles ayant moins de n éléments. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de n éléments, dans lequel on donne une relation d'ordre "$x < y$" . Soit E une partie non vide de $\mathcal{E}$, et soit b un élément de E. Si b est le plus petit élément de E, il en résulte que E a un plus petit élément. Sinon, l'ensemble E- $\{b\}$ n'est pas vide. Cet ensemble, est fini et a moins de n éléments. Il possède une structure d'ordre induite par celle de $\mathcal{E}$. Il a donc un plus petit élément a, et on a $a < b$. a est donc aussi le plus petit élément de E, ce qui démontre la proposition pour $\mathcal{E}$.

Au contraire un ensemble infini $\mathcal{E}$ possède toujours une relation d'ordination qui n'est pas une relation de bonne ordina--tion. En effet introduisons dans $\mathcal{E}$ une relation de bonne ordination "$x < y$". La relation "$x > y$" est aussi une relation d'ordre dans $\mathcal{E}$. De plus, nous savons que $\mathcal{E}$, étant infini, possède une partie qui n'a pas de plus grand élément au sens de la relation "$x < y$" . Cette partie n'a pas de plus petit élément au sens de la relation "$x > y$" .

La propriété E. est donc caractéristique des ensembles finis.

De plus, on en déduit tout de suite qu'on obtient toutes les ordinations possibles d'un ensemble fini $\mathcal{E}$ de n éléments en cherchant toutes les correspondances bi-univoques entre $\mathcal{E}$ et la section I_n de l'ensemble des entiers naturels. Soit $f_o(x)$ l'une de ces applications bi-univoques. f(x) en étant une autre, la fonction $\overset{-1}{f}(f_o(x))$ est une application bi-univoque de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$.

....

Inversement, si $g(x)$ est une application bi-univoque de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$, la fonction $f(x) = f_o(\overset{-1}{g}(x))$ est une application bi-univoque de $\mathcal{E}$ sur I_n, et on a $\overset{-1}{f}(f_o(x)) = g(x)$. Par suite l'ensemble des applica--tions bi-univoques de $\mathcal{E}$ sur I_n est en correspondance bi-univoque avec l'ensemble des applications bi-univoques de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$.

Définition. <u>On appelle permutation d un ensemble</u> $\mathcal{E}$ <u>une application bi-univoque</u> <u>de</u> $\mathcal{E}$ <u>sur</u> $\mathcal{E}$.

Il est clair que si l'ensemble $\mathcal{E}$ est fini, il en est de même de l'ensemble de ses permutations (qui est contenu dans $\mathcal{E}^{\mathcal{E}}$).

Définition. n <u>étant un entier</u>, <u>on désigne par</u> $n!$ (<u>factorielle</u> n) <u>le nombre des permutations d'un ensemble de</u> n <u>éléments</u>.

On a donc $0! = 1$, $1! = 1$. Nous allons établir une formule de récurrence pour la fonction $n!$. A cet effet, considérons un ensemble $\mathcal{E}$ de $n + 1$ éléments ; soit P l'ensemble des permutations de $\mathcal{E}$.

Choisissons dans $\mathcal{E}$ un élément a ; x étant un élément quelcon--que de $\mathcal{E}$, désignons par P_x l'ensemble des permutations f de $\mathcal{E}$ telles que $f(a) = x$. On a

$$P = \sum_{x \in \mathcal{E}} P_x$$

D'autre part P_x est en correspondance bi-univoque avec l'ensem--ble des applications bi-univoques de $\mathcal{E} - \{a\}$ sur $\mathcal{E} - \{x\}$. Ces deux ensembles possèdent chacun n éléments, et par suite si Q est l'ensemble des permutations de I_n, il existe une application bi-univoque $p_x(q)$ de Q sur P_x. $p_x(q)$ peut être considéré comme une application de l'ensemble $\mathcal{E} \times Q$ dans P : on vérifie tout de suite que cette application est une application bi-univoque de $\mathcal{E} \times Q$ sur P. Donc le nombre des éléments de P est $(n + 1).n!$, d'où la formule

$$(n + 1)! = (n + 1) \, . \, n!$$
