THEORIE DES ENSEMBLES.
FASCICULE DE RESULTATS

Rédaction n° 049

Nombre de pages : 32

Nombre de feuilles : 32

Théorie des Ensembles

(Résultats - Delsarte)

A 49 Etat 1 2

THÉORIE DES ENSEMBLES. FASCICULE DE RÉSULTATS.

La Notion de collection d'un petit nombre d'objets distincts est commune à tous les hommes (1), la notion de continuum, de masse amorphe, formé d'un très grand nombre d'objets indiscernables, pour être moins courante, est cependant connue de beaucoup. Par exemple chacun se fait une idée précise d'une collection de dix pommes, et accepte sans difficulté qu'un certain volume d'eau, qu'un certain bloc d'acier, soient constitués par un nombre immense de molécules extrêmement petites, quoique cette seconde conception soit infiniment plus vague, plus théorique, que la première.

Ces deux notions semblent très différentes, presque opposées, et cependant, il est facile de voir qu'on peut leur appliquer, de façon identique, certaines opérations de l'esprit : si, dans notre collection de dix pommes, nous mettons de côté trois pommes déterminées, si, dans notre bloc d'acier, nous taillons au burin un bloc plus petit, nous faisons deux expériences réalisant l'application à nos deux collections d'une même opération mentale : l'opération de "partition" qui consiste à discerner dans une collection abstraite, une "partie" déterminée.

Cette remarque n'est que la première et la plus simple de celles en quoi consiste la partie de l'Analyse, connue sous le nom de "Théorie des ensembles" , car celle-ci n'est pas autre chose que l'énumération des procédés mentaux qu'il est possible d'appliquer à la notion abstraite de collection. En d'autres termes, le but de

---

(1)- Par "petit nombre" nous entendons un entier assez petit pour que sa signification expérimentale ne fasse de doute pour personne.

cette théorie est de réunir dans un même schéma abstrait les propriétés communes aux collections finies et aux continuums infinis.

Il est clair que l'origine de tous ces procédés mentaux, de toutes ces propriétés abstraites, est uniquement expérimentale. Leur vérification, beaucoup plus que leur démonstration, se tire d'expériences faites sur des collections finies. L'extension de ces procédés, de ces propriétés, aux collections abstraites se réalise par des conventions de langage convenables. Le choix de ces conventions résulte d'une analyse assez poussée des méthodes de la logique mathématique.

Nous renvoyons le lecteur curieux de ces questions au fascicule de logique, [cf.fasc.]. Il ne trouvera, dans le présent fascicule, qu'une sorte de "mode d'emploi" donnant les définitions et les moyens d'utiliser les notions et les symboles de la théorie des ensembles. Il n'y trouvera aucune démonstration. Le plus souvent, d'ailleurs, il aura l'impression qu'il n'y a pas besoin de démonstration, et ce sera la preuve que le langage a été bien choisi.

Pour donner nos définitions nous nous sommes nécessairement servis de quelques termes tirés du langage de la logique mathématique. Ces termes sont soulignés dans le texte (1). En toute rigueur on devrait les regarder comme "vidés de tout contenu intuitif" et se borner à constater que l'emploi qui en est fait, est conforme aux règles d'usage données dans le fascicule logique. Cependant ces termes sont choisis de telle sorte qu'il n'y ait presque jamais contradiction entre la façon dont on s'en sert, et leur sens vulgaire ; pratiquement, on pourra donc leur attribuer ce dernier sens.

---

(1) - soulignés deux fois dans le manuscrit.

I. Notions se rattachant à la considération d'un seul ensemble.

1.- Un ensemble est formé d'éléments susceptibles de possèder certaines propriétés et d'avoir entre eux certaines relations.

> L'ensemble des habitants de PARIS, au 1^{er} janvier 1938 à 0^h, a pour éléments les hommes vivant dans les limites de la ville de Paris à l'époque indiquée ; l'un de ces hommes peut être blanc ou noir, aveugle ou muet, il peut être le père, ou le fils, d'un autre homme du même ensemble.

2.- Relation d'appartenance.- Dire qu'un élément x appartient à un ensemble A , c'est établir entre x et A la relation d'appartenance, qu'on écrit

$$x \in A$$

3.- Les éléments d'un ensemble sont susceptibles de possèder certaines propriétés ; si on envisage inversement une propriété possible des éléments d'un ensemble, on est amené à considérer les éléments de l'ensemble possédant cette propriété. Ils constituent un nouvel ensemble qui est une partie du premier. A toute propriété correspond une partie ; deux propriétés définissant la même partie sont équivalentes ; toute partie correspond au moins à une propriété.

Soit A l'ensemble des habitants de PARIS au 1^{er} janvier 1938 à 0 heures. On peut considérer, pour ces habitants, la propriété d'être majeur, ou du sexe masculin, ou d'habiter le $19^{è}$ arrondissement. Ces propriétés définissent des parties X , Y, Z de A .

4.- Certaines propriétés pourront appartenir à tous les éléments de l'ensemble, la partie correspondante sera appelée la partie pleine.

Telle est, pour l'ensemble A définie plus haut, la propriété d'être né avant l'an 2000.

5.- Certaines propriétés pourront n'appartenir à aucun élément de l'ensemble, la partie correspondante sera appelée la partie vide et désignée, quel que soit l'ensemble, par la notation $\emptyset$.

Telle est, pour l'ensemble A , la propriété d'être né avant le 14 juillet 1789.

6.- Certaines propriétés pourront n'appartenir qu'à un seul élément x de l'ensemble ; la partie correspondante sera désignée par $\{x\}$.

7.- Lorsqu'on a déjà considéré un ensemble A , on se donne par le fait même, le droit de considérer l'ensemble de ses parties X . Ce nouvel ensemble , l'ensemble des parties de A , se désigne par P(A)

a) On a $\emptyset \in P(A)$

b) Si $x \in A$, on a $\{x\} \in P(A)$

c) Par abus de langage, la partie pleine de A se désigne encore par A .

8.- Relation d'inclusion.- Considérons deux propriétés des éléments de l'ensemble A définissant respectivement deux parties X et Y de A . Supposons que la première de ces propriétés entraîne la seconde, de sorte que tout élément x de A appartenant à X , appartienne aussi à Y . Nous dirons que X est une partie de Y et nous écrirons indifféremment

$$X \subset Y \quad \text{ou} \quad Y \supset X$$

On dit qu'il y a inclusion de X dans Y . La partie vide doit être considérée comme incluse dans toute autre partie : $\emptyset \subset X$

car une propriété partout fausse entraîne n'importe quelle propriété

La relation d'appartenance

$$x \in X$$

est équivalente à la relation d'inclusion

$$\{x\} \subset X$$

9.- Relation d'égalité.- Soient x et y deux éléments d'un même ensemble A . L'écriture $x = y$

qu'on lit " x égal à y " ou encore "x égale y " signifie qu'on établit entre les éléments x et y la relation d'égalité, dont l'emploi obéit aux règles suivantes :

E_1.- quel que soit x , on a "$x = x$" ; (ou encore $x = x$ est une propriété partout vraie). C'est la réflexivité de la relation d'égalité

E_2.- La relation "$x = y$" équivaut à la relation "$y = x$" . C'est symétrie de la relation d'égalité.

E_3.- Les relations "$x = y$" et "$y = z$" entraînent " $x = z$" . C'est la transitivité de la relation d'égalité.

E_4.- Si "$x = y$" et si x possède une propriété quelconque, y possède aussi cette propriété. Ou encore : la relation "$x = y$ " est équivalente à la relation "quelle que soit la partie X de A , si $x \in X$, $y \in X$ " .

Si a est un élément déterminé de l'ensemble A , la partie de A définie par la propriété " $x = a$ " n'est autre que $\{a\}$, partie réduite au seul élément a .

La négation de "$x = y$" s'écrit "$x \neq y$" et se lit : "x est différent de y". On notera que cette conception de l'égalité comme une relation est bien différente de l'identité logique des philosophes.

10.- Si deux **propriétés** sont **équivalentes**, et si elles définissent respectivement deux parties X et Y de A, on a

$$X = Y.$$

11.- **Complémentaire d'une partie**.- Une **propriété** des **éléments** d'un **ensemble** A, définit une partie X de A. La **négation** de cette **propriété** est une nouvelle **propriété** définissant une autre partie Y de A, qui est constituée par les **éléments** n'appartenant pas à X; Y est la partie **complémentaire** de X, on écrit

$$Y = \complement X$$

La **règle de la double négation** entraîne

$$X = \complement Y.$$

En particulier on a

$$\emptyset = \complement A \quad ; \qquad A = \complement \emptyset.$$

12.- **Réunion**.- Soient deux **propriétés** des **éléments** d'un **ensemble** A, définissant respectivement deux parties X et Y de A. La **disjonction** de ces deux **propriétés** est une nouvelle **propriété** que possèdent seuls les **éléments** de A appartenant soit à X, soit à Y. La partie correspondante se nomme la **réunion** d'X et d'Y, et se désigne par $X \cup Y$. Cette définition **entraîne** la commutativité de la réunion :

$$X \cup Y = Y \cup X$$

13.- **Intersection**. Soient deux **propriétés** des **éléments** d'un **ensemble** A définissant respectivement deux parties X et Y de A. La **conjonction** de ces deux **propriétés** est une nouvelle **propriété** que possèdent seuls les **éléments** de A appartenant à la fois à X et à Y. La partie correspondante se nomme l'**intersection** d'X et d'Y et se désigne par $X \cap Y$. Cette définition **entraîne** la commutativité de l'intersection.

$$X \cap Y = Y \cap X .$$

14.- On définit de la même façon la réunion ou l'intersection d'un nombre fini de parties de A .

Les règles du calcul des propositions entraînent les règles suivantes, qu'on appelle règles du calcul des réunions et intersections :

a) : Négation d'une disjonction : $\complement(X \cup Y) = (\complement X) \cap (\complement Y)$

b) : Négation d'une conjonction : $\complement(X \cap Y) = (\complement X) \cup (\complement Y)$

c) : Règle de redoublement : $X \cap X = X \cup X = X$

d) : Associativité de et : $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z = X \cup Y \cup Z$

e) : Associativité de ou : $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z = X \cap Y \cap Z$

f) : Distributivité de et par rapport à ou : $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup$

g) : Distributivité de ou par rapport à et :

$$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

h) : Implication : $X \subset Y$ équivaut à $\complement X \supset \complement Y$

équivaut à $X \cup Y = Y$

équivaut à $X \cap Y = X$

i) : Contradiction : $X \cap Y = \emptyset$ équivaut à $X \subset \complement Y$

équivaut à $Y \subset \complement X$

II - Notions se rattachant à la considération simultanée de deux ou d'un petit nombres d'ensembles.

1.- Fonctions.- Soient A et B deux ensembles, distincts ou non. Les éléments ~~qu~~ du premier seront désignés par des minuscules latines telles que x ; ceux du second par des minuscules grecques telles que ξ . Supposons qu'à tout élément x du premier, on fasse correspondre un élément ξ du second, parfaitement et uniquement déterminé. La relation ainsi établie entre éléments de A et éléments de B se traduit par, l'énoncé " ξ est fonction de x " et par l'écriture

$$\xi = f(x)$$

On notera qu'il y a ici un nouvel emploi du signe égal. On donne le nom de fonction à une telle correspondance et on dit que " ξ est la valeur de la fonction correspondant à x ". La fonction elle-même est dite "définie dans A et à valeurs dans B ". Si la valeur ξ de la fonction est indépendante de x , on dit que cette fonction est constante.

2.- Extension d'une fonction. Image d'une partie par une fonction. Soit X une partie de A . L'ensemble des éléments ξ de B , tels qu'il existe un élément x satisfaisant aux deux relations.

$$\text{" } x \in X \text{ "} \qquad \text{et} \qquad \text{" } \xi = f(x) \text{ "}$$

est une partie Ξ de B , qui est l'image de X par la fonction $\xi = f(x)$. Cette image est une nouvelle fonction, définie dans P(A) et prenant ses valeurs dans P(B) , qu'on dit obtenue par extension de la fonction $\xi = f(x)$ aux ensembles des parties. Par abus de langage, on la note encore

$$\Xi = f\,(X)$$

On a

$$\{\xi\} = f\,(\{x\}) \quad ; \qquad \emptyset = f(\emptyset)$$

3.- Fonction inverse.- Soit maintenant ξ un élément de B . L'ensemble des éléments x de A qui sont tels que la relation " $\xi = f(x)$ " soit satisfaite, forment une partie X de A . Cette partie peut se réduire à $\emptyset$ si ξ n'est pas une valeur prise effectivement par f(x) quand x parcourt A . En tous cas, nous obtenons ainsi une nouvelle fonction, définie dans B et prenant ses valeurs dans P(A). On l'appelle la *fonction inverse* de la fonction considérée, et on écrit

$$X = \overset{-1}{f}(\xi)$$

La *relation* $\xi = f(x)$ *entraîne*

$$X = \overset{-1}{f}(\xi) \supset \{x\}$$

4.- *Correspondance biunivoque*. Lorsque la fonction $\xi = f(x)$ est telle que, *quel que soit* ξ , la valeur de la fonction inverse $\overset{-1}{f}(\xi)$ soit une partie de A réduite à un seul *élément*, on dit que la foncti[on] elle-même est une *correspondance biunivoque*. La fonction inverse peut alors être regardée comme définie dans B et à valeurs dans A. On écrit alors $x = \overset{-1}{f}(\xi)$

Les deux *relations*

$$" \xi = f(x) " \quad \text{et} \quad " x = \overset{-1}{f}(\xi) "$$

sont cette fois *équivalentes*

Remarque. Il y a dans ce double emploi du -1 suscrit un abus de langage évident ; nous en verrons encore d'autres, provenant de la même notation.

5.- *Extension de la fonction inverse*.- Reprenons une fonction $\xi = f(x)$; l'extension de la fonction inverse $X = \overset{-1}{f}(\xi)$ aux *ensembles* des parties, telle qu'elle a été définie en 2, conduirait à une fonction définie dans P(B), prenant ses valeurs dans $P.\left[P(A)\right]$. Il existe une autre extension plus importante, qui se définit à partir de la fonction $\xi = f(x)$ elle-même : soit $\mathcal{H}$ une partie de B .
L'*ensemble* des *éléments* x de A qui sont tels qu'*il existe* un *élément* ξ de B satisfaisant aux *relations*

$$" \xi \in \mathcal{H} " \quad ; \quad " \xi = f(x) "$$

est une partie X de A qui peut se réduire à $\emptyset$ sans que Ξ se réduise elle-même à $\emptyset$. Nous obtenons ainsi une fonction définie dans P(B) et à valeurs dans P(A). On l'écrit encore, par abus de langage

$$X = \overset{-1}{f}(\Xi)$$

On a

$$\emptyset = \overset{-1}{f}(\emptyset)$$

La relation

$$" X = \overset{-1}{f}(\xi) "$$

où $\overset{-1}{f}$ est la fonction inverse est équivalente à la relation

$$" X = \overset{-1}{f}(\{\xi\}) "$$

où il s'agit cette fois de l'extension de la fonction inverse ; enfin la relation " $\Xi = f(X)$ " entraîne

$$" Y = \overset{-1}{f}(\Xi) \supset X ".$$

Si $\xi = f(x)$ est une correspondance biunivoque, les deux relations " $\Xi = f(X)$ " et " $X = \overset{-1}{f}(\Xi)$ " sont équivalentes.

6.- Applications.- Considérons maintenant une fonction $\xi = f(x)$ définie seulement dans une partie P de A , et prenant ses valeurs dans B. Une telle fonction est dite une application de P dans B . A tout élément de P correspond un élément de B ; aux éléments de $\complement$ P ne correspond aucun élément de B . En particulier si P = A , la fonction est une application de A dans B .

Désignons par Π la partie de B définie par

$$\Pi = f(P)$$

de sorte que la fonction ne prend aucune valeur dans $\complement\,\Pi$, et que Π est l'ensemble de toutes les valeurs prises par la fonction. On dit que la fonction est une application de P sur Q .

Si la fonction $\xi = f(x)$ est une correspondance biunivoque entre les éléments de A et ceux de B , elle est une application de A sur B , tandis que la fonction $x = \overset{-1}{f}(\xi)$ est une application de B sur A .

7.- Restriction et prolongement. Soit $\xi = f(x)$ une fonction définie dans A , à valeurs dans B . Soit P une partie de A . Considérons la fonction $\xi = g(x)$, définie dans P , à valeurs dans Q , déterminée par les relations suivantes :

" $\xi = g(x) = f(x)$ si $x \in P$ "

" $g(x)$ n'est pas définie si $x \in \complement P$ "

Cette fonction $\xi = g(x)$ est la restriction de la fonction $f(x)$ à la partie P . Inversement, $\xi = f(x)$ est un prolongement de $\xi = g(x)$, dans A .

8.- Fonctions composées.- Soient A , B, C trois ensembles , distincts ou non. Leurs éléments seront désignés respectivement par des minuscules latines, grecques, et gothiques. Soient

$$\xi = f(x)$$

une fonction définie dans A et à valeur dans B , et

$$\mathfrak{x} = g(\xi)$$

une fonction définie dans B et à valeurs dans C. Les deux relations

" $\xi = f(x)$ " et " $\mathfrak{x} = g(\xi)$ "

établissent entre x et $\mathfrak{x}$ une correspondance qui est telle qu'à un élément x de A corresponde un élément et un seul de C .

$\mathfrak{x}$ est donc une fonction de x , cette fonction est définie dans A et prend ses valeurs dans C. C'est la fonction composée g par f ; on la désigne par la notation $g \circ f$, et on écrit la relation qu'elle représente :

$$\mathfrak{x} = g\left[f(x)\right] .$$

a). L'extension de cette fonction composée aux ensembles des parties est donnée par

$$\mathfrak{X} = g\left[f\,(X)\right]$$

b). La fonction inverse de cette fonction composée est donnée par

$$X = \overset{-1}{f}\left[\overset{-1}{g}\,(\,\mathfrak{X}\,)\right]$$

on observera que dans cette formule le symbole $\overset{-1}{g}$ désigne la fonction inverse de g , tandis que le symbole $\overset{-1}{f}$ désigne l'extension de la fonction inverse de f.

c) L'extension de la fonction inverse de la fonction composée $g \circ f$ est donnée par

$$X = \overset{-1}{f}\left[\overset{-1}{g}\,(\,\mathfrak{X}\,)\right]$$

9.- Caractérisation des applications.- Considérons une fonction $\zeta = f(x)$ définie dans A et prenant ses valeurs dans B . En général c'est une application de A dans B . Nous dirons qu'elle appartient à l'ensemble $\mathcal{A}$ des applications de A dans B . Certaines parties de cet ensemble $\mathcal{A}$ sont spécialement à considérer :

a). les applications de A sur B ; elles sont définies par la propriété " à tout élément ζ de B correspond au moins un élément x de A tel que $\zeta = f(x)$ "

Cette partie sera désignée par $\mathcal{B}$.

b). Les correspondances biunivoques entre A et une partie de B , qu'on appelle aussi applications biunivoques de A dans B ; elles sont définies par la propriété :

" à tout élément ζ de x correspond au plus un élément x de A tel que $\zeta = f(x)$ "

Cette autre partie de l'ensemble $\mathcal{A}$ sera désignée par $\mathcal{C}$.

c) L'intersection $\mathcal{D} = \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ n'est autre que l'ensemble des correspondances biunivoques entre A et B , appelées aussi applications biunivoques de A sur B .

10.- La définition de l'extension des fonctions f et $\overset{-1}{f}$, ainsi que celle des fonctions composées, ont pour conséquences les deux propriétés suivantes :

$$f \circ \overset{-1}{f} \left(\boxed{E} \right) \subset \boxed{E} \quad ; \quad \overset{-1}{f} \circ f \, (X) \supset X .$$

11.- De là, et des définitions du n° 9 se déduisent les caractérisations suivantes des parties $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, de l'ensemble $\mathcal{Q}$ des applications de A dans B :

a) Les propriétés

" quelle que soit $\boxed{E}$, $\left[f \circ \overset{-1}{f} \right] \left(\boxed{E} \right) = \boxed{E}$ "

et

" $f \in \mathcal{B}$ "

sont équivalentes.

b) Les propriétés

" quelle que soit X , $\left[\overset{-1}{f} \circ f \right] (X) = X$ "

et

" $f \in \mathcal{C}$

sont équivalentes

c) Les propriétés

" quelles que soient X et $\boxed{E}$, $\left[f \circ \overset{-1}{f} \right] \left(\boxed{E} \right) = \boxed{E}$,

et $\left[f \circ \overset{-1}{f} \right] (X) = X$ "

et " $f \in \mathcal{D}$ "

sont équivalentes.

12.- **Les fonctions et le calcul des réunions - intersections**.- Le symbole f d'une application de A dans B peut se combinet avec les symboles du calcul des réunions-intersections. Il en est de même du symbole $\overset{-1}{f}$. Les relations obtenues découlent aisément des définitions de l'extension d'une fonction et de l'extension de la fonction inverses. Certaines d'entre-elles sont fort importantes :

a) Relations concernant f

$$\text{" } X \supset Y \text{ " entraîne " } f(X) \supset f(Y) \text{ "} \qquad (1)$$

$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y) \qquad (2)$$

$$f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y) \qquad (3)$$

$$f\left[\overset{-1}{f}(\Xi) \cap X\right] = \Xi \cap f(X) \qquad (4)$$

b) Relations concernant $\overset{-1}{f}$

$$\text{" } \Xi \supset H \text{ " entraîne } \overset{-1}{f}(\Xi) \supset \overset{-1}{f}(H) \qquad (1)'$$

$$\overset{-1}{f}(\Xi \cup H) = \overset{-1}{f}(\Xi) \cup \overset{-1}{f}(H) \qquad (2)'$$

$$\overset{-1}{f}(\Xi \cap H) = \overset{-1}{f}(\Xi) \cap \overset{-1}{f}(H) \qquad (3)'$$

$$\overset{-1}{f}(\complement \Xi) = \complement \overset{-1}{f}(\Xi) \qquad (4)'$$

Si f est une correspondance biunivoque, on peut dans (3) mettre le signe d'égalité au lieu du signe d'inclusion, et la relation analogue à (4') concernant f est aussi vraie.

Les relations (2') et (3') jouent un rôle capital dans un grand nombre de théories.

13.- **Produit de deux ensembles distincts**.- Soient A et B deux ensembles distincts. La considération simultanée d'un élément x de A et d'un élément ξ de B équivaut à celle du couple $(x\ ;\ \xi)$.

Inversement, la donnée d'un tel couple équivaut à celle de l'élément x de A et de l'élément ξ de B. x est la coordonnée du couple suivant A, ξ est la coordonnée du couple suivant B.

On se donne le droit de considérer l'ensemble de tous ces couples, et on l'appelle l'ensemble produit de A par B ; on le note $(A \times B)$.

La relation d'égalité

$$" (x\,;\,\xi) = (y\,;\,\eta) "$$

équivaut, par définition, à la conjonction des relations

$$" x = \xi " \quad \text{et} \quad " y = \eta "$$

Contrairement à ce que l'écriture pourrait suggérer, il n'intervient aucune question d'ordre dans cette définition ; il n'y a pas lieu de distinguer l'ensemble $(A \times B)$ de l'ensemble $(B \times A)$.

x, coordonnée suivant A du couple $(x\,;\,\xi)$ est une fonction définie dans $(A \times B)$ et à valeurs dans A ; cette fonction réalise une application de $(A \times B)$ sur A.

De même, y coordonnée du couple suivant B réalise une application du produit sur B.

Si A est l'ensemble des hommes habitant Paris le 1er janvier 1938 à 0 heures, si B est l'ensemble des femmes habitant Paris au même instant, $(A \times B)$ est l'ensemble de couples possibles, dans Paris, à cet instant.

14.- Produit d'un ensemble par lui-même.- L'ensemble $(A \times A)$ est l'ensembl des couples $(x\,;\,y)$ formés de deux éléments de A. Mais cette fois deux couples distincts peuvent différer, non seulement par la nature, mais encore par l'ordre des éléments x et y. On doit distinguer une première coordonnée x et une seconde coordonnée y. Par définition, la relation

$$" (x ; y) = (x' ; y') "$$

équivaut à la conjonction des relations exprimant l'égalité des coordonnées de même rang :

$$" x = x' " \quad ; \quad " y = y' "$$

En général

$$" (x ; y) \neq (y ; x) "$$

La partie du produit pour laquelle le contraire a lieu se nomme la diagonale du produit. C'est l'ensemble des couples $(x ; x)$.

Comme plus haut la première, et la seconde coordonnée d'un couple sont des fonctions définies dans $(A \times A)$ et à valeurs dans A, réalisant l'application de $(A \times A)$ sur A.

Si A est l'ensemble des nombres réels, le produit $(A \times A)$ est le plan de la géomètrie analytique. La diagonale est la première bisectrice. Les deux couples $(x ; y)$ et $(y ; x)$ correspondent à deux points du plan symétriques par rapport à la premiëre bissectrice

15.- Relations $R(x , \xi)$ et parties du produit $(A \times B)$.- Dire que l'élément x de A et l'élément ξ de B sont dans la relation $R(x , \xi)$ c'est dire que le couple $(x ; \xi)$ possède une certaine propriété ; c'est donc définir une partie $\mathcal{R}$ du produit $(A \times B)$. Inversement toute partie $\mathcal{R}$ du produit définit une relation telle que $R(x ; \xi)$. Il y a correspondance biunivoque entre $P(A \times B)$ et l'ensemble de ces relations.

En particulier si X est une partie de A et Ξ une partie de B, la conjonction

$$" x \in X \quad \text{et} \quad \xi \in \Xi "$$

est une relation entre x et ξ et définit une partie de $(A \times B)$ qui n'est autre que $(X \times \Xi)$. De cette définition résulte la relation

$$(X \times \Xi) \cap (Y \times H) = (X \cap Y) \times (\Xi \cap H).$$

On notera que la relation obtenue en remplaçant les intersections par des réunions, est partout fausse.

16.- Correspondances générales entre A et B, et parties du produit $(A \times B)$.-

Reprenons une partie $\mathcal{A}$ du produit qui définit une relation $R(x, \xi)$ entre éléments de A et éléments de B . Elle définit aussi deux correspondances générales, l'une, F de A vers B , qui fait correspondre à un élément x de A tous les éléments ξ de B pour lesquels la relation $R(x, \xi)$ est vraie , c'est-à-dire la partie Ξ de B formée de tous les éléments ξ satisfaisant à

$$(x, \xi) \in \mathcal{A},$$

l'autre G , de B vers A , fait correspondre à un élément ξ de B , la partie X de A formée de tous les éléments x satisfaisant à

$$(x ; \xi) \in \mathcal{A}$$

On écrit

$$\Xi = F(x) \qquad\qquad X = G(\xi).$$

Ces correspondances générales sont donc des fonctions ; l'une, F , est une fonction définie dans A , à valeur dans $P(B)$; l'autre , G est une fonction définie dans B , à valeurs dans $P(A)$.

17.- Correspondances inverses.- Ces deux correspondances, F et G , sont dites inverses l'une de l'autre, on traduit ainsi la relation qui existe entre elles, et on écrit

$$G = \overset{-1}{F} \qquad\qquad F = \overset{-1}{G}$$

Si donc on considère l'ensemble $P(A \times B)$, l'ensemble $\mathcal{R}$ des relations $R(x , \xi)$ entre éléments de A et éléments de B , l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions définies dans A et à valeurs dans $P(B)$, qui est identique à l'ensemble des correspondances générales de A vers B , enfin l'ensemble $\mathcal{G}$ des fonctions définies dans B et à valeurs dans $P(A)$, identique à l'ensemble des correspondances générales de B vers A , on voit que les définitions précédentes établissent des correspondances biunivoques entre tous ces ensembles pris deux à deux. En particulier, l'inversion des correspondances générales est la correspondance biunivoque établie entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ en convenant que deux éléments F et G sont en correspondance lorsqu'ils sont définis par la même partie $\mathcal{A}$ de $P(A \times B)$.

18.- Cas où A est identique à B.- Il y a des modifications importantes à apporter aux conclusions du n° précédent lorsqu'on part du produit $(A \times A)$ d'un ensemble par lui-même. Soit toujours $\mathcal{A}$ un élément de l'ensemble $P(A \times A)$. Ici, il n'y a plus à considérer que le seul ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions définies dans A et à valeurs dans $P(A)$, ou correspondances générales de A vers A . A chaque élément $\mathcal{A}$ de $P(A \times A)$ correspondent cette fois deux éléments de $\mathcal{F}$, qu'on qualifie encore de correspondances inverses l'une de l'autre et qu'on note F et $\overset{-1}{F}$, réalisant ainsi une correspondance biunivoque de $\mathcal{F}$ avec lui-même. (1). Inversement d'ailleurs, si on part d'un élément de :

$$X = F(x)$$

suivant qu'on fait jouer à x le rôle de première ou de seconde coordonnée dans les définitions précédentes, on voit qu'il correspond

(1).- De telles correspondances biunivoques sont souvent qualifiées d'involutives.

à F <u>deux éléments</u> de $P(A \times A)$ qu'on qualifie de parties inverses l'une de l'autre et qu'on note $\mathcal{A}$ et $\overset{-1}{\mathcal{A}}$, ~~xmix~~ réalisant ainsi une correspondance biunivoque de $P(A \times A)$ avec lui-même. De plus, les couples $(F \,;\, \overset{-1}{F})$ et $(\mathcal{A} \,;\, \overset{-1}{\mathcal{A}})$ se correspondent, et cette fois biunivoquement.

19.- <u>Coupes d'une partie $\mathcal{A}$ de $(A \times B)$</u>. Reprenons le cas général où A et B sont distincts. Soit $\mathcal{A}$ une partie de $(A \times B)$. Elle définit une correspondance générale de A vers B :

$$\Xi = F(x).$$

Ξ s'appelle la <u>coupe</u> de $\mathcal{A}$ par x . De même si

$$X = G(\xi)$$

est la correspondance générale de B vers A définie par $\mathcal{A}$, X s'appelle la <u>coupe</u> de $\mathcal{A}$ par ξ .

20.- <u>Projections</u>. L'énoncé "<u>Il existe</u> ξ <u>tel que</u> $(x, \xi) \in \mathcal{A}$" est une <u>propriété</u> de x définissant une partie P de A qu'on nomme <u>projection</u> de $\mathcal{A}$ sur A . On définit de même la projection Π de $\mathcal{A}$ sur B .

21.- <u>Les fonctions comme correspondances générales</u>.- Si la partie $\mathcal{A}$ est telle que, <u>quel que soit</u> x , la partie $F(x)$ se réduise à un seul élément, et que par conséquent

$$\{\xi\} = F(x)$$

on substitue à la considération de F , celle de la fonction

$$\xi = f(x)$$

définie dans A et à valeurs dans B . On nomme alors $\mathcal{A}$ <u>l'ensemble représentatif</u> de la fonction. Les fonctions définies dans A et à valeurs dans B apparaissent donc comme des cas particuliers des correspondances générales de A vers B . On notera que la fonction inverse $\qquad X = \overset{-1}{f}(\xi)$

est la correspondance inverse de

$$\{\xi\} = \{f(x)\} = F(x)$$

Supposons que A soit l'ensemble des femmes mariées habitant Paris à un instant déterminé, et que B soit l'ensemble des hommes mariés habitant Paris au même instant. La relation " La femme x a, à un an près le même âge que l'homme ξ " définit une correspondance générale de A vers B .

La relation "La femme x est l'épouse de l'homme ξ " définit une fonction qui est une correspondance biunivoque entre A et B .

Si, au lieu de Paris, il s'agissait d'Alger, ou de toute autre ville ou la polygamie soit permise, à cette même relation serait attachée une fonction définie dans A , à valeurs dans B , qui ne serait plus une correspondance biunivoque.

22.- Correspondance identique. Dans le produit $(A \times A)$ d'un ensemble par lui-même, la diagonale Δ , regardée comme une partie de ce produit, définit la relation

$$" x = x "$$

entre éléments de A . Cette relation est qualifiée de relation identique. Il lui est attachée une correspondance biunivoque de A avec lui-même , qu'on appelle correspondance identique.

23.- Extension d'une correspondance générale. Considérons la correspondance générale de A vers B :

$$\Xi = F(x)$$

définie par une partie $\mathcal{A}$ de $(A \times B)$. Soit X une partie de A ; l'ensemble des éléments ξ de B , tels qu'il existe un élément x de A satisfaisant à la conjonction

$$"x \in X" \quad \underline{\underline{\text{et}}} \quad "(x, \xi) \in \mathcal{A}"$$

est une partie H de B qui est dite *l'image* de X par la correspondance F. Par abus de langage, on écrit

$$H = F(X)$$

et on obtient ainsi une fonction définie dans P (A) et à valeurs dans P (B) qui est l'*extension* de la correspondance F aux *ensembles* des parties. On définit de la même façon l'extension de la correspondance inverse

$$X = \overset{-1}{F}(\xi)$$

par la condition que $Y = \overset{-1}{F}(\Xi)$ soit *l'ensemble* des *éléments* x de A , *tels qu'il existe* un *élément* ξ de B satisfaisant à la *conjonction*

$$"\xi \in \Xi" \quad \underline{\underline{\text{et}}} \quad "(x, \xi) \in \mathcal{A}"$$

Ces deux extensions sont dites *inverses* l'une de l'autre. Si la correspondance est une application de A dans B , on retrouve ainsi l'extension de la fonction correspondante et l'extension de la fonction inverse.

Remarque. Il ne faudrait pas croire que toute fonction, définie dans P(A) , à valeurs dans P(B) puisse être obtenue par extension d'une correspondance générale de A vers B .

24.- *Propriétés des correspondances générales*. Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux parties de (A × B) , posons

$$\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \; ; \quad \mathcal{A}_4 = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$$

Ces diverses parties de (A × B) définissent des correspondances générales de A vers B que nous désignerons respectivement par

F_1 ; F_2 ; F_3 ; F_4 .

Des définitions précédentes résultent alors les *propriétés* que voici:

a) <u>Quelle que soit</u> X

$$F_3(X) = F_1(X) \cup F_2(X)$$

b) <u>Quelle que soit</u> X

$$F_4(X) = F_1(X) \cap F_2(X)$$

c) " $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2$ " <u>équivaut</u> à " <u>quel que soit</u> x , $F_1(x) \subset F_2(x)$ "

En second lieu, F désignant toujours la correspondance de A vers B attachée à la partie $\mathfrak{A}$ de $(A \times B)$, on a , <u>quelle que soit</u> $\mathfrak{A}$

d) " $F(\emptyset) = \emptyset$ "

e) " $X \subset Y$ " <u>entraîne</u> " $F(X) \subset F(Y)$ "

f) " $F(X \cup Y) = F(X) \cup F(Y)$ "

g) " $F(X \cap Y) \subset F(X) \cap F(Y)$ "

On comparera ces dernières formules à celles qui concernent une fonction $\xi = f(x)$ définie dans A , à valeurs dans B , et sa fonction inverse.

25.- <u>Composition des correspondances générales</u>.- Soient A , B , C trois <u>ensembles</u> dont nous désignerons les <u>éléments</u> respectivement par des minuscules latines, grecques et gothiques. Soient $\mathfrak{A}$ une partie de $(A \times B)$ et $\mathfrak{B}$ une partie de $(B \times C)$. La partie $\mathfrak{A}$ définit une correspondance générale de A vers B :

$$\Xi = F(x)$$

La partie $\mathfrak{B}$ définit une correspondance générale de B vers C

$$\mathfrak{X} = \Phi(\xi)$$

Partons de x et considérons l'<u>ensemble</u> $\mathfrak{X}$ des <u>éléments</u> $\mathfrak{x}$ de C qui sont <u>tels qu'il existe</u> un <u>élément</u> ξ de B satisfaisant aux conditions $(x, \xi) \in \mathfrak{A}$, $(\xi ; \mathfrak{x}) \in \mathfrak{B}$

On définit ainsi une correspondance générale de A vers C qui résulte de la composition des correspondances F et Φ , et qu'on désigne par la notation $\Phi \circ F$. La définition précédente revient à poser

$$\mathfrak{X} = [\Phi \circ F](x) = \Phi[F(x)]$$

On notera que dans cette explicitation de $\Phi \circ F$, Φ est l'extension de la correspondance de même nom aux ensembles des parties.

a) L'extension de cette correspondance composée aux ensembles des parties est donnée par

$$\mathcal{Y} = [\Phi \circ F](X) = \Phi[F(X)]$$

b) L'inversion d'une correspondance composée est donnée par

$$(\Phi \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ \Phi^{-1}$$

c) Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux parties de $(A \times B)$, posons $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ désignons par F_1 , F_2 , F_3 les correspondances de A vers B attachées respectivement à chacune de ces parties ; on a

$$[\Phi \circ F_3](X) = [\Phi \circ F_1](X) \cup [\Phi \circ F_2](X)$$

d) Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux parties de $(B \times C)$, posons $\mathcal{B}_3 = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, désignons par Φ_1 ; Φ_2 ; Φ_3 les correspondances de B vers C attachées respectivement à chacune de ces parties ; on a

$$[\Phi_3 \circ F](X) = [\Phi_1 \circ F](X) \cup [\Phi_2 \circ F](X) .$$

26.- <u>Cas où les trois ensembles A , B et C sont les mêmes</u>.- Soient F_1 et F_2 deux correspondances générales entre <u>éléments</u> de A . Relativement au produit $(A \times A)$, regardons-les comme allant de la première coordonnée vers la seconde. Il leur est attachée alors respectivement deux parties bien déterminées $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ de $(A \times A)$. De même, si on regarde la correspondance composée $F_2 \circ F_1$ comme allant aussi de la première coordonnée vers la seconde, on lui attache une partie bien déterminée de $(A \times A)$, qu'on désigne par la notation $\mathcal{A}_2 \circ \mathcal{A}_1$

et qu'on appelle le produit des parties $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_1$ prises dans cet ordre. Ce produit n'est pas commutatif. La nouvelle opération ainsi définie dans l'ensemble $P(A \times A)$ possède les propriétés suivantes :

a) Δ désignant la diagonale du produit, on a quelle que soit la partie $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \circ \Delta = \mathcal{A} \qquad \Delta \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \circ \phi = \phi \qquad \phi \circ \mathcal{A} = \phi$$

b) Soit X une partie de A . Soit F une correspondance entre éléments de A , qui regardée comme allant de la première coordonnée vers la seconde, est attachée à la partie $\mathcal{A}$ de l'ensemble $(A \times A)$. On a

$$\mathcal{A} \circ (X \times X) \circ \mathcal{A} = F(X) \times F(X).$$

27.- Produit de trois ensembles.- Soient trois ensembles A , B, C d'éléments désignés respectivement par des minuscules latines, grecques et gothiques. Leur produit $(A \times B \times C)$ est l'ensemble des triplets $(x ; \xi ; \mathfrak{x})$, l'égalité de deux triplets

$$\text{"} (x ; \xi ; \mathfrak{x}) = (y , \eta , \mathfrak{y}) \text{"}$$

étant par définition équivalente à la conjonction

$$\text{"} x = y \text{"} \quad \text{et} \quad \text{"} \xi = \eta \text{"} \quad \text{et} \quad \text{"} \mathfrak{x} = \mathfrak{y} \text{"}$$

Au lieu du triplet $(x , \xi , \mathfrak{x})$ on peut envisager tout aussi bien l'un ou l'autre des couples

$$(x ; (\xi ; \mathfrak{x})) \; ; \quad ((x ; \xi) ; \mathfrak{x}) \; ; \quad (\xi ; (x ; \mathfrak{x}))$$

et on contient par suite, qu'il y a identité entre les ensembles

$$(A \times B \times C) \; ; \; ((A \times B) \times C) \; ; \; ((A \times C) \times B) \; ; \; (A \times (B \times C))$$

ce qui ramène la notion de produit de trois ensembles à celle de produit de deux ensembles. De même pour le produit d'un petit nombre d'ensembles. Ce qui vient d'être dit vaut que certains des ensembles facteurs soient identiques ou non.

Il n'y a donc rien à ajouter à ce qui précède relativement aux produits d'un petit nombre d'ensembles.

III. Notions résultant de la considération simultanée d'une infinité d'ensembles.

1.- Famille d'ensembles.- La considération d'une infinité d'ensembles n'est licite que lorsque ces ensembles sont tous des parties d'un même ensemble A . On dit alors qu'ils constituent une famille d'ensembles. Pour définir une telle famille on se ~~xxxxx~~ donne un ensemble d'indices I dont on désignera les éléments par des minuscules grecques telles que ι , et une fonction définie dans I , à valeurs dans P(A) , c'est-à-dire une correspondance générale de I vers A ; au lieu de représenter cette fonction par l'écriture

$$X = F(\iota)$$

on emploie la notation indicielle X_ι , et on dit que X_ι est un ensemble quelconque de la famille. Parfois on prend comme ensemble d'indices une partie $\mathfrak{F}$ de P(A) qui est justement la famille elle-même ; un ensemble de cette famille est alors simplement désignée par X , et on écrit $X \in \mathfrak{F}$. Nous avons employé plus haut des notations telles que $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ pour désigner trois parties explicitement désignées d'un ensemble. On peut regarder maintenant ces trois parties comme constituant une famille d'ensembles, l'ensemble d'indices I étant alors formé des trois éléments explicitement désignés 1 , 2 , 3 .

2.- Réunion générale.- Reprenons une famille $\mathcal{F}$ de parties de A définie par une correspondance de I vers P(A) : $X_\iota = F(\iota)$. Soit J une partie de l'ensemble d'indices, considérons l'image $Y = F(J)$ de cette partie par la correspondance, on lui donne le nom de réunion générale relative à la partie J de l'ensemble I et on écrit

$$Y = \bigcup_{\iota \in J} X_\iota$$

Lorsque J est l'ensemble I lui-même, on écrit souvent $Y = \bigcup_\iota X_\iota$ ou même $Y = \bigcup_{X \in \mathcal{F}} X$. Si on suppose que I soit un ensemble dont les éléments, explicitement et individuellement donnés, sont par exemple 1, 2, 3, on a

$$Y = X_1 \cup X_2 \cup X_3$$

comme on le voit en se reportant à la définition de l'image d'une partie par une correspondance. Le nom de réunion, donnée à cette image est donc parfaitement justifié.

3.- Propriétés de la réunion générale.- Soit toujours X_ι une fonction définie dans I à valeurs dans P(A) ; désignons encore par F la correspondance de I vers A qui lui est attachée, et soit G une autre correspondance de ~~x~~ A vers B . Soit enfin J une partie de I .

a) D'après la définition des correspondances composées, on a

$$[G \circ F](J) = \bigcup_{\iota \in J} G(X_\iota) = G\Big(\bigcup_{\iota \in J} X_\iota\Big)$$

- Soit maintenant L un autre ensemble d'indices, dont un élément quelconque sera désigné par λ ; soit J_λ une fonction définie dans L , à valeurs dans P (I) ; la correspondance de L vers I qui lui est attachée sera désignée par H ; un autre aspect de la définition des correspondances composées s'exprime par la relation

b) $$[F\circ H](L) = \bigcup_{\iota\in \bigcup_{\lambda\in L} J_\lambda} X_\iota = \bigcup_{\lambda\in L}\left[\bigcup_{\iota\in J_\lambda} X_\iota\right]$$

C'est la formule générale d'associativité pour la réunion ; quand I et L sont des ensembles à éléments explicitement désignés, on retrouve des relations connues ; si L seul est dans ce cas, on a, par exemple

(b') $$\bigcup_{\iota\in J_1\cup J_2} X_\iota = \left[\bigcup_{\iota\in J_1} X_\iota\right]\cup\left[\bigcup_{\iota\in J_2} X_\iota\right]$$

- Soient encore X_ι et $Y_\varkappa$ deux fonctions, à valeurs dans P(A), définies respectivement pour $\iota \in I$ et $\varkappa \in K$; on a

c) $$\left[\bigcup_{\iota\in I} X_\iota\right]\cap\left[\bigcup_{\varkappa\in K} Y_\varkappa\right] = \bigcup_{(\iota;\varkappa)\in(I\times K)} (X_\iota \cap Y_\varkappa)$$

formule dite de "distributivité car elle se réduit à la formule de distributivité entre $\cup$ et $\cap$ quand I et K sont des ensembles à éléments explicitement désignés. De la même façon, on a $Y_\varkappa$ étant cette fois une fonction définie dans K et à valeur dans P (B),

d) $$\left[\bigcup_{\iota\in I} X_\iota\right]\times\left[\bigcup_{\varkappa\in K} Y_\varkappa\right] = \bigcup_{(\iota;\varkappa)\in(I\times K)} (X_\iota \times Y_\varkappa)$$

4.- Intersection générale.- Par définition, l'ensemble

$$\complement\left[\bigcup_{\iota\in J}[\complement X_\iota]\right]$$

est l'intersection générale des ensembles X_ι de la famille $\mathcal{F}$, quand ι parcourt la partie J de ~~xxxx~~ l'ensemble I ; si J = I cet ensemble est l'intersection de la famille $\mathcal{F}$; en tous cas on le note

$$\bigcap_{\iota\in J} X_\iota$$

Cette intersection est l'ensemble des éléments x de A tels que l'on ait $x \in X$ quel que soit $\iota \in J$.

Si les éléments de I sont explicitement désignés, par exemple si ce sont 1,2,3 l'intersection des X_ι pour $\iota \in I$ n'est autre que

$X_1 \cap X_2 \cap X_3$.

De façon générale, on a aussi

$$\complement \left[\bigcup_{\iota \in J} X_\iota \right] = \bigcap_{\iota \in J} \left[\complement X_\iota \right]$$

En particulier, si $J = \emptyset$, il vient

$$\bigcap_{\iota \in \emptyset} X_\iota = A$$

<u>L'intersection de la famille vide est donc la partie pleine</u>.

5.- <u>Règle de dualité</u>.- La définition de l'intersection générale permet d'énoncer la règle suivante : si une partie P de A se déduit d'autres parties X, Y, Z, et de fonctions X_ι , $Y_\varkappa$; Z_λ prenant leurs valeurs dans $\mathfrak{P}(A)$, par application, dans n'importe quel ordre, des <u>seules</u> opérations $\cap$, $\cup$, ainsi que par des intersections et réunions générales, on obtiendra le complémentaire $\complement P$ en remplaçant les parties X, Y, Z, X_ι , $Y_\varkappa$, Z_λ par les parties complémentaires, et les opérations $\cup$, $\cap$, $\bigcup$, $\bigcap$, par $\cap$, $\cup$, $\bigcap$, $\bigcup$, respectivement, l'ordre des opérations étant respecté, à condition toutefois de ne <u>rien</u> modifier aux opérations d'intersections,de réunions, générales ou non, appliquées à des parties des <u>ensembles</u> d'indices, qui peuvent se trouver souscrites aux signes $\bigcap$ et $\bigcup$.

6.- <u>Propriétés de l'intersection générale</u>.- On obtient les principales de ces propriétés en appliquant la règle précédente aux formules concernant la réunion générale auxquelles elle est applicable.

On trouve ainsi

a) associativité :

$$\bigcap_{\iota \in \bigcup_{\lambda \in L} J_\lambda} X_\iota = \bigcap_{\lambda \in L} \left[\bigcap_{\iota \in J_\lambda} X_\iota \right]$$

b) **distributivité** :

$$\left[\bigcap_{\iota\in I} X_\iota\right] \cup \left[\bigcap_{\varkappa\in K} Y_\varkappa\right] = \bigcap_{(\iota;\varkappa)\in(I\times K)} (X_\iota \cup Y_\varkappa)$$

Mais la formule (a) du n° 3 n'a pas de duale, car il y figure l'image d'un ensemble par une correspondance. On ne peut pas prendre non plus, en général, les duales des formules où figurent des produits ; cependant, la formule

c) $$\left[\bigcap_{\iota\in I} X_\iota\right] \times \left[\bigcap_{\varkappa\in K} Y_\varkappa\right] = \bigcap_{(\iota;\varkappa)\in(I\times K)} (X_\iota \times Y_\varkappa)$$

est partout vraie , comme la formule (d) du n° 3 . De plus il en est de même de la formule suivante, qui n'a aucune analogue pour les réunions générales :

d) $$\left[\bigcap_{\iota\in I} X_\iota\right] \times \left[\bigcap_{\iota\in I} Y_\iota\right] = \bigcap_{\iota\in I} (X_\iota \times Y_\iota)$$

7.- Produit général.- Soit X_ι une fonction définie pour $\iota\in I$ et prenant ses valeurs dans P(A) ; nous nous donnons le droit de considérer l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions définies dans I , à valeurs dans A et qui font correspondre à tout ι de I un élément x_ι de X_ι ; cet ensemble se nomme le produit général des ensembles X_ι pour $\iota\in I$ et se note

$$\mathcal{P} = \prod_{\iota\in I} X_\iota$$

Si J est une partie de I , on entend par

$$\mathcal{P}_J = \prod_{\iota\in J} X_\iota$$

l'ensemble des fonctions définies dans J , à valeurs dans E , et qui font correspondre à tout ι de J un élément x_ι de X_ι . On appelle cette ensemble le produit général des X_ι pour $\iota\in J$.

$\mathcal{P}$ est une famille de parties de $(I\times A)$; $\mathcal{P}_J$ est une famille de parties de $(J\times A)$.

Si I est l'ensemble qui a pour éléments explicitement désignés 1,2,3 il y a correspondante biunivoque entre $\mathcal{P}$ et l'ensemble $X_1 \times X_2 \times X_3$. La notion de produit d'ensembles n'a donc de rapports avec celle de produit général que lorsqu'il s'agit de produit de parties d'un même ensemble A .

8.- Axiome de choix . (ou axiome de Zermelo).- Le droit que nous nous sommes donné de considérer les produits généraux de parties d'un même ensemble A , équivaut à l'introduction de l'axiome de choix :

R (x , ξ) étant une relation entre les éléments x , ξ de deux ensembles A et B , il y a équivalence entre les propositions

" quel que soit x , il existe ξ tel que R (x ; ξ) "

et " Il existe une fonction $\xi = f(x)$ définie dans A , à valeurs dans B , telle que, quel que soit x , on ait $R\left[x , f(x)\right]$ "

9.- Notion générale de projection. Reprenons les ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_J$; soit $x = f(\iota) = x_\iota$ un élément de $\mathcal{P}$; l'application de J dans A , qui, sur J , coïncide avec la fonction $f(\iota)$, et dont cette fonction est par suite un prolongement, est un élément de $\mathcal{P}_J$ qui s'appelle la projection de l'élément considéré de $\mathcal{P}$, sur $\mathcal{P}_J$. La correspondance ainsi établie, entre éléments de $\mathcal{P}$ et éléments de $\mathcal{P}_J$ est une fonction définie dans $\mathcal{P}$ et prenant ses valeurs dans $\mathcal{P}_J$; l'image, par cette fonction, d'une partie $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{P}$ s'appellera aussi, par abus de langage, la projection de $\mathcal{Q}$ sur $\mathcal{P}_J$.

10.- Propriétés du produit général.- Les définitions qui viennent d'être données entraînent les relations suivantes.

a) : formule de distributivité générale

$$\bigcap_{\iota \in I} \Big[\bigcup_{\varkappa \in K_\iota} X_{(\iota,\varkappa)} \Big] = \bigcup_{\varkappa_\iota \in \prod_{\iota \in I} K_\iota} \Big[\bigcap_{\iota \in I} X_{(\iota,\varkappa_\iota)} \Big]$$

I et K sont deux ensembles d'indices ; K_ι une fonction définie dans I , à valeurs dans P(K) ; $X_{(\iota;\varkappa)}$ une fonction définie dans (I × K) , à valeurs dans P(A).

b) $$\prod_{\iota \in I} \Big[\bigcup_{\varkappa \in K_\iota} X_{(\iota;\varkappa)} \Big] = \bigcup_{\varkappa_\iota \in \prod_{\iota \in I} K_\iota} \Big[\prod_{\iota \in I} X_{(\iota;\varkappa_\iota)} \Big]$$

c) $$\prod_{\iota \in I} \Big[\bigcap_{\varkappa \in K_\iota} X_{(\iota;\varkappa)} \Big] = \bigcap_{\varkappa_\iota \in \prod_{\iota \in I} K_\iota} \Big[\prod_{\iota \in I} X_{(\iota,\varkappa_\iota)} \Big]$$

d) $$\prod_{\iota \in I} \Big[\bigcap_{\varkappa \in K} X_{(\iota;\varkappa)} \Big] = \bigcap_{\varkappa \in K} \Big[\prod_{\iota \in I} X_{(\iota,\varkappa)} \Big]$$

Ces formules généralisent celles qui sont données aux n° 5 et 6 ; il suffit d'y supposer, en effet, que I se compose des deux éléments explicités 1 et 2 , pour les retrouver. Elles sont plus curieuses qu'utiles.
