THEORIE DES ENSEMBLES
(FASCICULE DE RESULTATS)

Rédaction n° 048

Nombre de pages : 39

Nombre de feuilles : 39

Théorie des Ensembles
(Résultats - Dieudonné)

48

Etat 2 2

A 48

THÉORIE DES ENSEMBLES

(Fascicule de résultats).

Introduction.

Le lecteur trouvera dans le présent fascicule toutes les définitions et tous les résultats de théorie des Ensembles qui seront utilisés dans la suite de cet ouvrage ; il n'y trouvera aucune démonstration. En ce qui concerne les notions et termes du langage utilisés ci-dessous sans qu'il en soit donné de définition, il pourra se borner à leur attribuer le sens qu'ils ont dans le langage non mathématique, ce qui n'offre aucun inconvénient pour la lecture du reste de ce Traité, et rend presque immédiates la plupart des propositions énoncées dans ce fascicule. La lecture du Livre I (Théorie des Ensembles) n'est indispensable que pour les lecteurs désireux de savoir comment on peut surmonter les difficultés logiques que crée la présence de ces termes non définis, et pour ceux qui veulent connaître les démonstrations des théorèmes plus difficiles énoncés aux §§ 6 et 7 de ce fascicule (théorème de Zorn et ses conséquences).

§ 1. Eléments et parties d'un ensemble.

1. Un <u>ensemble</u> est formé d'<u>éléments</u> susceptibles de posséder certaines <u>propriétés</u> et d'avoir entre eux, ou avec des éléments d'autres ensembles, certaines <u>relations</u>.

2. Ensembles et éléments sont désignés dans les raisonnements par des symboles graphiques, qui sont en général des lettres (de divers alphabets) ou des combinaisons de lettres et d'autres signes ; les relations entre éléments d'un ou plusieurs ensembles se notent en insérant les symboles qui désignent ces éléments dans un schéma caractéristique de la relation envisagée ; de même pour les propriétés.

Une lettre peut désigner, soit un élément *déterminé*, soit un élément *arbitraire* (dit aussi élément *générique*) d'un ensemble ; lorsqu'une relation ou une propriété, dans laquelle interviennent des éléments arbitraires, est vraie *quels que soient ces éléments*, on dit que c'est une *identité*.* R et S étant deux relations (ou propriétés), on dit que R *entraîne* S lorsque S est vraie chaque fois qu'on fixe les éléments arbitraires qui entrent dans ces relations de manière que R soit vraie ; on dit que R et S sont *équivalentes* lorsque chacune de ces relations entraîne l'autre.

3. Lorsque deux symboles désignent des éléments d'un *même* ensemble, en les écrivant de part et d'autre du signe "=" (qui se lit "égale"), on a une relation dite relation d'*égalité* qui signifie que ces deux symboles représentent le *même* élément ; la *négation* de cette relation s'obtient en écrivant les mêmes symboles de part et d'autre du signe "≠" (qui se lit "différent de").

4. Etant donné un ensemble E, et une *propriété* d'un élément générique de E, ceux des éléments de E pour lesquels cette propriété est vraie forment un nouvel ensemble, qu'on appelle *partie* ou *sous-ensemble* de E , et qui est *défini* par la propriété envisagée. Deux propriétés *équivalentes* définissent la *même* partie, et réciproquement.

Si A est une partie de E, on écrit qu'un élément x de E est aussi élément de A sous la forme "$x \in A$" qu'on lit aussi "x appartient à A" ; c'est là une *propriété* qui *définit* évidemment A .

La *négation* de cette propriété se note "$x \notin A$" et se lit "x n'appartient pas à A" ; la partie de E qu'elle définit se note $\complement A$ et s'appelle le *complémentaire* de A .

5. Certaines propriétés ne sont vraies pour <u>aucun</u> élément de E , par exemple la propriété $x \neq x$; deux quelconques de ces propriétés sont <u>équivalentes</u> ; la partie qu'elles définissent est appelée la <u>partie vide</u> de E , et désignée par la notation $\emptyset$.

Inversement, certaines propriétés, par exemple $x = x$, sont vraies pour <u>tous</u> les éléments de E ; deux quelconques de ces propriétés sont encore équivalentes ; la partie qu'elles définissent, et qu'on appelle parfois <u>partie pleine</u> de E , n'est autre que l'ensemble E lui-même.

6. Si a est un élément de E , certaines propriétés ne sont vraies que pour le <u>seul</u> élément a , par exemple $x = a$; deux quelconques de ces propriétés sont équivalentes ; on désigne par $\{a\}$ la partie qu'elles définissent, et on dit que c'est la partie <u>réduite au seul élément</u> a .

7. Les <u>parties</u> d'un ensemble E sont les <u>éléments</u> d'un nouvel ensemble, qu'on appelle l'<u>ensemble des parties</u> de E et qu'on désigne par $\mathfrak{P}(E)$. On a donc $\emptyset \in \mathfrak{P}(E)$, $E \in \mathfrak{P}(E)$; et, quel que soit $x \in E$, $\{x\} \in \mathfrak{P}(E)$. Si x est un élément arbitraire de E , X un élément arbitraire de $\mathfrak{P}(E)$, la <u>relation</u> "$x \in X$" entre x et X est dite <u>relation d'appartenance</u>.

8. Si x et y sont deux éléments de E , la relation d'égalité "$x=y$" est <u>équivalente</u> à la relation "quelle que soit $X \in \mathfrak{P}(E)$, si $x \in X$, $y \in X$ " .

---

* Il faut bien remarquer que, lorsqu'on parle d'une <u>propriété d'un élément générique</u> d'un ensemble E , cela ne signifie nullement que la propriété soit vraie pour <u>tout</u> élément de E , mais simplement qu'elle <u>a un sens</u> pour <u>tout</u> élément de E , est vraie pour certains de ces éléments, et fausse pour les autres.

5

9. Soient X, Y deux parties d'un ensemble E ; si la propriété $x \in X$ entraîne la propriété $x \in Y$, autrement dit, si tout élément de X appartient aussi à Y, on dit que X <u>est contenu dans</u> Y, ou que Y <u>contient</u> X, ou que X <u>est une partie de</u> Y ; cette relation entre X et Y s'appelle relation d'<u>inclusion</u> (de X dans Y) et se note "$X \subset Y$" ou "$Y \supset X$" ; sa négation se note "$X \not\subset Y$".

Quelle que soit la partie X de E, on a $\emptyset \subset X$, et $X \subset E$. La relation d'appartenance "$x \in X$" est <u>équivalente</u> à "$\{x\} \subset X$".

La relation "$X \subset Y$ et $Y \subset Z$" <u>entraîne</u> "$X \subset Z$".

La relation "$X \subset Y$" n'exclut pas que l'on ait "$X=Y$" ; de plus, la relation "$X \subset Y$ et $Y \subset X$ est <u>équivalente</u> à "$X=Y$".

10. Soient X et Y deux parties quelconques de E ; la propriété "$x \in X$ ou $x \in Y$"* définit une partie de E qui se note $X \cup Y$ et s'appelle la <u>réunion</u> de X et Y ; la propriété "$x \in X$ et $x \in Y$" définit de même une partie de E qui se note $X \cap Y$ et s'appelle l'<u>intersection</u> de X et Y.

On définit de la même façon la réunion ou l'intersection de plusieurs parties de E.

Si x,y,z sont (par exemple) trois éléments de E, la réunion $\{x\} \cup \{y\} \cup \{z\}$ se note aussi $\{x,y,z\}$.

Lorsque X et Y sont deux parties de E telles que $X \cap Y = \emptyset$, on dit qu'<u>elles n'ont aucun élément commun</u> ; lorsqu'au contraire $X \cap Y \neq \emptyset$, on dit que X et Y <u>se rencontrent</u>.

11. Dans l'énoncé des propositions qui suivent, X,Y,Z désignent des parties quelconques d'un même ensemble E.

---

* Ce qui n'exclut pas que x appartienne <u>à la fois</u> à X et à Y.

a) On a $\emptyset = \complement E$, $E = \complement \emptyset$.

b) Quel que soit X, on a

(1) $\complement(\complement X) = X$;

(2) $X \cup X = X$, $X \cap X = X$;

(3) $X \cup (\complement X) = E$, $X \cap (\complement X) = \emptyset$;

(4) $X \cup \emptyset = X$, $X \cap E = X$;

(5) $X \cup E = E$, $X \cap \emptyset = \emptyset$.

c) Quels que soient X, Y, on a

(6) $X \cup Y = Y \cup X$, $X \cap Y = Y \cap X$ (commutativité) ;

(7) $X \subset X \cup Y$, $X \cap Y \subset X$;

(8) $\complement(X \cup Y) = (\complement X) \cap (\complement Y)$, $\complement(X \cap Y) = (\complement X) \cup (\complement Y)$.

d) Les relations suivantes

$X \subset Y$, $\complement X \supset \complement Y$, $X \cup Y = Y$, $X \cap Y = X$

sont <u>équivalentes</u>.

e) Les relations suivantes

$X \cap Y = \emptyset$, $X \subset \complement Y$, $Y \subset \complement X$

sont <u>équivalentes</u>.

f) Les relations suivantes

$X \cup Y = E$, $\complement X \subset Y$, $\complement Y \subset X$

sont <u>équivalentes</u>.

g) Quels que soient X,Y,Z, on a (associativité et distributivité)

(9) $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z = X \cup Y \cup Z$; $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z = X \cap Y \cap Z$;

(10) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$, $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$.

h) La relation $X \subset Y$ entraîne les relations

$X \cup Z \subset Y \cup Z$ et $X \cap Z \subset Y \cap Z$.

i) La relation "$Z \subset X$ et $Z \subset Y$" entraîne $Z \subset X \cap Y$;
la relation "$X \subset Z$ et $Y \subset Z$" entraîne "$X \cup Y \subset Z$" .

12. D'après les identités (8), si une partie A de E se déduit d'autres parties, X,Y,Z de E par application, dans n'importe quel ordre, des <u>seules</u> opérations $\cup$, $\cap$, on obtiendra le complémentaire $\complement A$ en remplaçant les parties X,Y,Z par les parties complémentaires, et les opérations $\cup$, $\cap$, par $\cap$, $\cup$, respectivement, l'ordre des opérations étant respecté ; c'est la <u>règle de dualité</u>. Etant donnée une égalité $A = B$ entre parties de la forme précédente, considérons l'égalité équivalente $\complement A = \complement B$; si on remplace $\complement A$ et $\complement B$ par les expressions que fournit l'application de la règle de dualité, puis si, dans ces expressions, on remplace $\complement X$, $\complement Y$, $\complement Z$ par X,Y,Z et vice-versa, on obtient une égalité dite <u>duale</u> de $A = B$; on peut opérer de même sur une relation d'inclusion $A \subset B$, mais il faut avoir soin de remplacer le signe "$\subset$" par "$\supset$".

Les identités groupées ci-dessus par deux sous le même numéro sont duales l'une de l'autre.

13. Dans certaines questions, il est commode de fixer son attention sur une partie déterminée A d'un ensemble E ; si X est une autre partie arbitraire de E, on appelle alors <u>trace</u> de X sur A, l'ensemble $A \cap X$, qu'on note souvent aussi X_A, et qu'on considère toujours, dans ce cas, comme une partie de A. Quelles que soient les parties X, Y de E, on a

$\complement X_A = (\complement X)_A$ ($\complement X_A$ étant le complémentaire de X_A pris <u>par rapport à A)</u> ; $(X \cup Y)_A = X_A \cup Y_A$; $(X \cap Y)_A = X_A \cap Y_A$.

De même, si $\mathcal{E}$ désigne un <u>ensemble de parties</u> de E, on appelle <u>trace</u> de $\mathcal{E}$ sur A l'ensemble $\mathcal{E}_A$ des traces sur A des ensembles de $\mathcal{E}$.

§ 2. La notion de fonction.

1. Soient E et F deux ensembles, distincts ou non. Une relation entre un élément arbitraire x de E et un élément arbitraire y de F, est dite <u>relation fonctionnelle en</u> y , ou <u>relation fonctionnelle de E vers F</u> , si, <u>quel que soit $x \in E$, il existe un élément y et un seul de F qui soit dans la relation considérée avec x</u> .

On donne le nom de <u>fonction</u> à l'opération qui associe ainsi à tout élément $x \in E$ l'élément $y \in F$ qui se trouve dans la relation donnée avec x ; on dit que y est la <u>valeur</u> de la fonction pour l'élément x , et que la fonction est <u>déterminée</u> par la relation fonctionnelle considérée. Deux relations fonctionnelles <u>équivalentes</u> déterminent la <u>même</u> fonction.

D'une fonction déterminée par une relation fonctionnelle de E vers F, on dit qu'elle "prend ses valeurs dans F" et qu'elle est "définie dans E" , ou encore que c'est une "fonction d'un <u>argument</u> (ou d'une <u>variable</u>) parcourant E" (les mots <u>argument</u> et <u>variable</u> ayant donc le sens d'<u>élément générique</u>) ; plus brièvement, on dit aussi que c'est une <u>application de E dans F</u> .

2. Les applications d'un ensemble E dans un ensemble F sont les <u>éléments</u> d'un nouvel ensemble, <u>l'ensemble des applications de E dans F</u> qu'on note $\mathfrak{A}^F_E$. Si f est un élément quelconque de cet ensemble, on désigne la plupart du temps par f(x), la valeur de f pour l'élément x de E ; dans certains cas, on préfère employer la notation f_x , dite notation <u>indicielle</u> (l'ensemble E est alors appelé ensemble d'<u>indices</u>). La relation "$y = f(x)$" est une relation fonctionnelle en y, qui détermine f ; cette relation s'exprime aussi parfois en disant que "y est de la forme $f(x)$" .

Il est souvent commode de pouvoir désigner une fonction par une notation où entre l'argument de la fonction ; on emploiera dans ce cas la notation $x \longrightarrow f(x)$
qui est donc synonyme de f .

Cette dernière notation est surtout utilisée lorsqu'on considère une application <u>explicitement désignée</u> : la plupart du temps, on n'utilise pas alors de symbole particulier pour la représenter, mais seulement un symbole où entre la lettre x (ou tout autre lettre représentant un argument), et qui désigne la <u>valeur</u> de l'application pour x ; on désignera alors l'application elle-même en remplaçant $f(x)$ par ce symbole dans la notation précédente. Par exemple, la relation $Y = \complement X$ est fonctionnelle en Y ; on désignera par $X \longrightarrow \complement X$ l'application de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(E)$ qu'elle détermine.

Par un abus de langage, on désigne même parfois l'application elle-même par le symbole de sa valeur pour x ; on dira par exemple "la fonction $x+1$" , au lieu de "la fonction $x \longrightarrow x+1$ " .

La relation d'égalité "$f=g$" entre éléments de $\mathfrak{A}_E^F$ est <u>équivalente</u> à la relation "quel que soit $x \in E$, $f(x) = g(x)$" .

3. Une fonction définie dans un ensemble E , et qui prend la même valeur pour tout élément x de E , est dite <u>constante</u> dans E .
L'application de E dans E qui fait correspondre à tout élément x de E cet élément lui-même est appelée application <u>identique</u>.

Si A est une partie quelconque de E , l'application de A dans E qui, à tout élément x de A , fait correspondre x considéré comme élément de E, s'appelle application <u>canonique</u> de A dans E .

Si f est une application d'un ensemble E dans l'ensemble E lui-même, on dit qu'un élément x est <u>invariant</u> par f , si $f(x)=x$.

4. Soit f une application de E dans F , et X une partie de E . La propriété suivante des éléments y de F :

"il existe un élément x de E tel que $x \in X$ et $y = f(x)$"

définit une partie Y de F , qu'on appelle <u>l'image de X par f</u> , ou encore <u>l'ensemble des valeurs prises par f sur X</u> .

Cette relation entre X et Y est fonctionnelle en Y , et détermine donc une application de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(F)$, qu'on appelle <u>extension de f aux ensembles des parties</u> ; par abus de langage, on la note encore f , et on écrit $Y = f(X)$.

Quels que soient f et x , on a

$$\emptyset = f(\emptyset) \qquad \text{et} \qquad \{f(x)\} = f(\{x\}).$$

Si on a $f(E) = F$, c'est-à-dire si, quel que soit $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, on dit que f est une application de E <u>sur</u> F . L'ensemble des applications de E sur F est une partie de l'ensemble $\mathcal{A}_E^F$, qu'on note $\mathcal{B}_E^F$.

L'extension aux ensembles des parties d'une application de E <u>sur</u> F est une application de $\mathfrak{P}(E)$ <u>sur</u> $\mathfrak{P}(F)$.

5. Soit f une application de E dans F ; on a les propositions suivantes, où X et Y désignent des parties génériques de E :

a) La relation $X \subset Y$ entraîne $f(X) \subset f(Y)$.

b) La propriété $X \neq \emptyset$ entraîne $f(X) \neq \emptyset$.

c) Quels que soient X, Y, on a

$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y) \tag{9}$$

$$f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y) . \tag{10}$$

6. Soit f une application de E dans F , et Y une partie de F . La propriété suivante des éléments x de E :

"il existe un élément y de F tel que $y \in Y$ et $y = f(x)$" définit une partie X de E, qu'on appelle <u>l'image réciproque de Y par f</u>. Cette relation entre X et Y est fonctionnelle en X, et détermine une application de $\mathfrak{P}(F)$ dans $\mathfrak{P}(E)$, qu'on appelle <u>extension réciproque de f aux ensembles des parties</u>, et qu'on note $\overset{-1}{f}$; on écrit donc $X = \overset{-1}{f}(Y)$.

En particulier, si y est un élément de F, $\overset{-1}{f}(\{y\})$ sera l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x)=y$; les relations "$f(x)=y$" et "$x \in \overset{-1}{f}(\{y\})$" sont donc <u>équivalentes</u>.

La <u>trace</u> X_A d'une partie X de E sur une partie déterminée A n'est autre que l'image réciproque de X par l'application canonique de A dans E.

7. Soit f une application de E dans F ; on a les propositions suivantes, où X et Y désignent des parties génériques de F :

a) La relation $X \subset Y$ entraîne $\overset{-1}{f}(X) \subset \overset{-1}{f}(Y)$.

b) Quels que soient X, Y, on a

(11) $\overset{-1}{f}(X \cup Y) = \overset{-1}{f}(X) \cup \overset{-1}{f}(Y)$

(12) $\overset{-1}{f}(X \cap Y) = \overset{-1}{f}(X) \cap \overset{-1}{f}(Y)$

(13) $\overset{-1}{f}(\complement X) = \complement \overset{-1}{f}(X)$

On notera la différence entre les formules (10) et (12) ; la relation $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ n'est pas vraie quels que soient X et Y si f est une application quelconque de E dans F. De même, il n'y a pas d'analogue à la relation (13) pour l'extension d'une application.

On a de plus $\overset{-1}{f}(\emptyset) = \emptyset$; mais ici, on peut avoir $\overset{-1}{f}(X) = \emptyset$ pour une partie <u>non vide</u> X de F ; pour que $X \neq \emptyset$ entraîne $\overset{-1}{f}(X) \neq \emptyset$, il faut et il suffit que f soit une application de E <u>sur</u> F.

8. Si l'application f de E dans F est telle que, quel que soit y, l'ensemble $\overset{-1}{f}(\{y\})$ soit <u>vide ou réduit à un seul élément</u>, on dit que f est une <u>application biunivoque</u> de E <u>dans</u> F ; on désigne par $\mathcal{C}_E^F$ la partie de $\mathcal{A}_E^F$ dont ces applications sont les éléments. Si f est une application biunivoque de E dans F , on a, quelles que soient les parties X, Y de E ,

$$(14) \qquad f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y).$$

L'extension d'une application biunivoque de E dans F est une application biunivoque de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(F)$.

9. Si l'application f de E dans F est telle que, quel que soit $y \in F$, l'ensemble $\overset{-1}{f}(\{y\})$ soit <u>réduit à un seul élément</u>, on dit que f est une <u>application biunivoque</u> de E <u>sur</u> F , et on désigne par $\mathcal{D}_E^F$ la partie de $\mathcal{A}_E^F$ dont ces applications sont les éléments ; on a $\mathcal{D}_E^F = \mathcal{B}_E^F \cap \mathcal{C}_E^F$. La relation $y = f(x)$, dans ce cas, est non seulement fonctionnelle en y , mais aussi <u>fonctionnelle en x</u> ; on dit que c'est une <u>relation biunivoque</u> entre x et y. En tant que relation fonctionnelle en x , elle détermine une application (biunivoque) de F sur E , qu'on appelle l'<u>application réciproque</u> de f , et qu'on note $\overset{-1}{f}$, par un abus de langage.

> On notera que l'<u>extension de l'application réciproque</u> de f est identique à l'<u>extension réciproque</u> de f, ce qui rend sans danger l'abus de langage précédent.

Les relations "$y = f(x)$" et "$x = \overset{-1}{f}(y)$" sont <u>équivalentes</u> ; l'application réciproque de $\overset{-1}{f}$ est f .

Lorsque f est une application biunivoque de E <u>sur</u> F , on a non seulement la relation (14), mais aussi, quelle que soit la partie X de E :

(15) $$f(\complement X) = \complement f(X) .$$

De plus, l'extension de f est une application biunivoque de $\mathfrak{P}(E)$ sur $\mathfrak{P}(F)$.

On dit que deux ensembles E, F, <u>peuvent être mis en correspondance biunivoque</u> lorsqu'il existe une application biunivoque de l'un sur l'autre (autrement dit, que $\mathcal{D}_E^F$ n'est pas vide) ; on dit aussi qu'une application biunivoque de E sur F et son application réciproque <u>réalisent une correspondance biunivoque</u> entre E et F.

Une application biunivoque d'un ensemble E sur lui-même se nomme <u>permutation</u> de E ; l'application identique est évidemment une permutation.

10. Dans les propositions suivantes, X désigne une partie arbitraire de E , Y une partie arbitraire de F .

a) Si f est une application de E <u>dans</u> F , on a

(16) $$X \subset \overset{-1}{f}(f(X)) \;;$$

(17) $$f(\overset{-1}{f}(Y)) \subset Y .$$

b) Les propriétés

"quel que soit Y , $f(\overset{-1}{f}(Y)) = Y$" et "$f \in \mathcal{B}_E^F$" sont <u>équivalentes</u>.

c) Les propriétés

"quel que soit X , $\overset{-1}{f}(f(X))=X$" et "$f \in \mathcal{C}_E^F$" sont <u>équivalentes</u>.

d) Les propriétés

"quels que soient X,Y, $\overset{-1}{f}(f(X))=X$ et $f(\overset{-1}{f}(Y)) = Y$" et "$f \in \mathcal{D}_E^F$" sont <u>équivalentes</u>.

11. Soient E,F,G, trois ensembles, distincts ou non ; soit f une application de E dans F , et g une application de F dans G . L'application de E dans G dont la valeur, en un élément quelconque x de E , est $g(f(x))$, s'appelle l'<u>application composée de f par g</u>

(ou fonction composée de f par g) ; on la désigne par la notation $g \circ f$, ou simplement gf , lorsqu'il n'y a pas ambiguité.

Quelle que soit la partie X de E, on a (en notant par $g \circ f$ l'extension de la fonction composée de g par f , suivant une convention antérieure)

$$(18) \qquad (g \circ f)(X) = g(f(X))$$

autrement dit, l'extension de $g \circ f$ est identique à l'application composée de l'extension de f par celle de g .

L'extension réciproque de $g \circ f$ est identique à $\overset{-1}{f} \circ \overset{-1}{g}$.

Si f est une application biunivoque de E sur F , et g une application biunivoque de F sur G , $g \circ f$ est une application biunivoque de E sur G .

Si h est une application de G dans un ensemble quelconque H , on a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$; cette application de E dans H se note encore $h \circ g \circ f$, et on dit qu'elle est composée des trois applications f,g,h, prises dans cet ordre. On définit de même la composition de plus de trois applications.

12. Les propositions du n° 10 montrent qu'en général, l'application composée $\overset{-1}{f} \circ f$ de l'extension d'une application f par son extension réciproque n'est pas l'application identique de $\mathfrak{P}(E)$ sur $\mathfrak{P}(E)$; de même $f \circ \overset{-1}{f}$ n'est pas en général l'application identique de $\mathfrak{P}(F)$ sur $\mathfrak{P}(F)$. Ces deux propriétés n'ont lieu simultanément que lorsque f est une application biunivoque de E sur F .

De plus, dans ce cas, les applications composées $\overset{-1}{f} \circ f$ et $f \circ \overset{-1}{f}$, où $\overset{-1}{f}$ désigne cette fois l'application réciproque de f , sont respectivement l'application identique de E sur E , et l'application identique de F sur F .

Réciproquement, si f est une application de E dans F, et g une application de F dans E, telles que $g \circ f$ soit l'application identique de E sur E, et $f \circ g$ l'application identique de F sur F, f et g sont des applications biunivoques de E sur F et de F sur E respectivement, et on a $g = \overset{-1}{f}$, $f = \overset{-1}{g}$.

13. Soit f une application de E dans F, et A une partie quelconque de E ; l'application f_A de A dans F, dont la valeur en un élément quelconque x de A est $f(x)$, s'appelle la <u>restriction de f à la partie</u> A ; ce n'est autre que la composée de l'application canonique de A dans E, par l'application f. Inversement, on dit que f est un <u>prolongement</u> à E de f_A.

De la même manière, il est parfois utile de considérer f comme composée de l'application $x \to f(x)$ de E <u>sur</u> $f(E)$ ($f(x)$ étant considéré comme élément de $f(E)$), par l'application canonique de $f(E)$ dans F. On remarquera que, si f est une application <u>biunivoque</u> de E <u>dans</u> F, l'application $x \to f(x)$ de E sur $f(E)$ est une <u>application biunivoque de E sur $f(E)$</u> ; par un abus de langage, on note $\overset{-1}{f}$ son <u>application réciproque</u>.

14. Une application d'un ensemble E <u>sur</u> un ensemble F est encore appelée <u>représentation paramètrique de F au moyen de E</u> ; on dit alors que E est <u>l'ensemble des paramètres</u> de cette représentation, et ses éléments prennent le nom de <u>paramètres</u>. Si de plus f est une application <u>biunivoque</u> de E sur F, on dit que c'est une représentation paramètrique <u>propre</u>.

Une <u>famille d'éléments</u> d'un ensemble F est, par définition, une partie de F munie d'une représentation paramètrique ; autrement dit, la donnée d'une famille d'éléments de F équivaut à celle d'une application d'un ensemble quelconque dans F. Il importe de distinguer soigneusement la notion de famille d'éléments de celle d'ensemble des éléments de cette famille, deux familles n'étant identiques que si les applications qui les définissent sont identiques ; deux familles distinctes d'éléments de F peuvent donc avoir la même partie de F comme ensemble d'éléments.

A toute partie A d'un ensemble F , on peut toujours faire correspondre une famille d'éléments dont l'ensemble des éléments soit A : il suffit de considérer la famille définie par l'application canonique de A dans F .

On définit souvent une famille d'éléments de F par une application $\iota \longrightarrow x_\iota$ d'un ensemble d'indices I dans F ; on la désigne alors par la notation $(x_\iota)_{\iota \in I}$, ou simplement (x_ι) s'il n'y a pas de confusion possible sur l'ensemble d'indices.

Si J est une partie de I , la famille $(x_\iota)_{\iota \in J}$ prend le nom de sous-famille de la famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$ correspondant à J ; elle est définie par la restriction à J de l'application $\iota \longrightarrow x_\iota$.

§ 3. Produit de plusieurs ensembles. Correspondances.

1. Soient E et F deux ensembles distincts ou non. Les couples (x,y) dont le premier élément x est un élément quelconque de E , et le second y un élément quelconque de F , sont les éléments d'un nouvel ensemble, qu'on appelle l'ensemble produit de E par F , et qu'on note $E \times F$; E et F sont dits les ensembles facteurs de $E \times F$. Deux couples ne sont considérés comme identiques que s'ils ont respectivement même premier et même second élément ; autrement dit, la relation "(x,y)=(x',y')" est équivalente à la relation "x=x' et y=y' ". Si z est un élément quelconque de $E \times F$,

la relation "x est premier élément du couple z" est une relation fonctionnelle en x ; elle détermine une application de $E \times F$ sur E, qu'on nomme première coordonnée, ou encore première projection, et qu'on désigne par l'une ou l'autre des notations c_1 ou pr_1 ; au lieu de dire "x est premier élément du couple z ", on énoncera le plus souvent l'une des relations "x est la première coordonnée de z ", "x est la première projection de z ", "$x = c_1(z)$" "$x = pr_1(z)$" qui lui sont équivalentes.

On définit de même la seconde coordonnée, ou seconde projection, qui est une application de $E \times F$ sur F, et qu'on désigne par c_2 ou pr_2 ; la relation "$x = c_1(z)$ et $y = c_2(z)$" est équivalente à "$z = (x,y)$".

L'extension de la fonction pr_1 aux ensembles des parties se note encore de la même manière, conformément aux conventions générales, et se nomme encore première projection (on n'emploie plus ici le terme "coordonnée"). De même pour l'extension de la seconde projection

2. Une relation R entre un élément générique x de E et un élément générique y de F est une propriété du couple (x,y), et définit par suite une partie A_R du produit $E \times F$; inversement, toute partie A de $E \times F$ est définie par la relation $(x,y) \in A$ entre x et y.

En particulier, si A est une partie de E et B une partie de F, la relation "$x \in A$ et $y \in B$" entre x et y, définit la partie $A \times B$ de $E \times F$.

3. Dans les propositions suivantes, X,X' désignent des parties quelconques de E, Y,Y' des parties quelconques de F, Z une partie quelconque de $E \times F$.

a) La relation "$X \times Y = \emptyset$" est équivalente à "$X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$".

b) Si $X \times Y \neq \emptyset$, la relation "$X \times Y \subset X' \times Y'$" est équivalente à "$X \subset X'$ et $Y \subset Y'$".

c) Quels que soient X, X', Y, on a

(19) $$(X \times Y) \cup (X' \times Y) = (X \cup X') \times Y .$$

d) Quels que soient X, X', Y, Y' , on a

(20) $$(X \times Y) \cap (X' \times Y') = (X \cap X') \times (Y \cap Y').$$

e) Quels que soient X, Y , on a

(21) $$\overset{-1}{pr_1}(X) = X \times F \quad , \quad \overset{-1}{pr_2}(Y) = E \times Y .$$

f) Si $Y \neq \emptyset$, on a, quel que soit X ,

(22) $$pr_1(X \times Y) = X .$$

g) Quel que soit Z , on a

(23) $$Z \subset pr_1(Z) \times pr_2(Z) \quad .$$

h) Si a est un élément de E , la restriction de l'application pr_2 à l'ensemble $\{a\} \times F$ (c'est-à-dire l'application $(a,y) \longrightarrow y$) est une <u>application biunivoque</u> de cet ensemble <u>sur</u> F .

4. Si E et F sont des ensembles distincts, les ensembles produits $E \times F$ et $F \times E$ sont distincts ; mais l'application

(24) $$(x,y) \longrightarrow (y,x)$$

est une <u>application biunivoque</u> de $E \times F$ <u>sur</u> $F \times E$, qu'on nomme <u>application canonique</u>.

Si on considère maintenant le produit $E \times E$ d'un ensemble par lui-même, l'application (24) est une application biunivoque de ce produit sur lui-même, qu'on appelle <u>symétrie canonique</u>, et qui est identique à son application réciproque.

La partie Δ de $E \times E$ définie par la relation $x = y$ (entre éléments de E) est appelée <u>diagonale</u> de ce produit ; chacun de ses éléments est <u>invariant</u> par la symétrie canonique, et ce sont les seuls éléments de $E \times E$ ayant cette propriété. L'application

$$x \longrightarrow (x,x)$$

est une <u>application biunivoque de E sur</u> Δ .

Si Z désigne une partie quelconque de $E \times F$, on notera $\overset{-1}{Z}$ la valeur pour Z de l'extension de l'application canonique de $E \times F$ sur $F \times E$; on utilise la même notation pour l'extension de la symétrie canonique.

Si X est une partie quelconque de E , Y une partie quelconque de F , on a $\overset{-1}{\overbrace{X \times Y}} = Y \times X$; et, si Δ est la diagonale du produit $E \times E$, $\overset{-1}{\Delta} = \Delta$.

Si une relation R entre x et y définit une partie A de $E \times F$, la même relation définit la partie $\overset{-1}{A}$ de $F \times E$.

5. Soit A une partie d'un ensemble E , et f une application de A dans un ensemble F ; la relation entre un élément générique x de E et un élément générique y de F , qui s'énonce

"$x \in A$ et $y = f(x)$"

définit une partie de $E \times F$, qu'on appelle ensemble représentatif de la fonction f. Si B est une partie de E contenant A , et g un prolongement de f à B , l'ensemble représentatif de f est contenu dans l'ensemble représentatif de g .

Réciproquement, si C est une partie de $E \times F$ telle que, quel que soit $x \in E$, il existe au plus un $y \in F$ tel que $(x,y) \in C$, la relation "$(x,y) \in C$" entre un élément générique x de l'ensemble $pr_1 C$, et un élément générique y de F , est une relation fonctionnelle en y , qui détermine une application de $pr_1 C$ dans F , dont l'ensemble représentatif est C.

On désigne par $\mathcal{F}_E^F$, et on appelle ensemble des applications d'une partie de E dans F , l'ensemble dont les éléments sont toutes les applications de toutes les parties de E dans F ; cet ensemble peut donc être mis en correspondance biunivoque avec une partie de l'ensemble $\mathfrak{P}(E \times F)$.

Si f est une application biunivoque de E dans F , et C son ensemble représentatif, l'ensemble représentatif de l'application réciproque $\overset{-1}{f}$ (de $f(E)$ sur E) n'est autre que $\overset{-1}{C}$.

6. Lorsque f est une application de E dans F , et C son ensemble représentatif dans $E \times F$, la relation "$y=f(x)$" est équivalente à "$(x,y) \in C$" ; on peut donc définir l'extension de f aux ensembles des parties à l'aide de C , l'image de la partie X de E par f étant définie par la propriété "il existe x tel que $x \in X$ et $(x,y) \in C$ " .

Si maintenant C est une partie quelconque de $E \times F$, et si on désigne par $C(X)$ la partie de F définie par la propriété précédente, $X \longrightarrow C(X)$ est encore une application de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(F)$. Les applications de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(F)$ qu'on peut obtenir de cette manière sont dites correspondances de E à F ; une correspondance de E à F est donc définie par la donnée d'une partie de $E \times F$.

7. Les correspondances de E à F forment un ensemble qui n'est pas identique à celui de toutes les applications de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(F)$; en effet, une telle correspondance $X \longrightarrow C(X)$ possède les propriétés suivantes, généralisant celles de l'extension d'une application de E dans F (§ 2 , n^{os} 4 et 5) :

a) $C(\emptyset) = \emptyset$;

b) "$X \subset Y$" entraîne "$C(X) \subset C(Y)$" .

c) Quels que soient X, Y,

$$C(X \cup Y) = C(X) \cup C(Y) \tag{25}$$

$$C(X \cap Y) \subset C(X) \cap C(Y). \tag{26}$$

8. Soit C une partie de $E \times F$, $\overset{-1}{C}$ son image par l'application canonique de $E \times F$ sur $F \times E$ (ou par la symétrie canonique de $E \times E$

lorsque E et F sont identiques) ; la correspondance $X \to C(X)$ de E à F , et la correspondance $Y \to \overset{-1}{C}(Y)$ de F à E sont dites <u>réciproques</u> l'une de l'autre. Toute relation entre un élément générique de E et un élément générique de F définit ainsi deux correspondances réciproques l'une de l'autre.

Lorsque C est l'ensemble représentatif d'une application f de E dans F , la correspondance $Y \longrightarrow \overset{-1}{C}(Y)$ n'est autre que l'extension réciproque de f.

9. Soit C une partie quelconque de $E \times F$; l'application

$$X \longrightarrow C(\{x\})$$

de E dans $\mathfrak{P}(F)$, est composée de l'application $x \longrightarrow \{x\}$ de E dans $\mathfrak{P}(E)$, par la correspondance $X \longrightarrow C(X)$; sa valeur $C(\{x\})$ (qu'on note aussi $C(x)$ par abus de langage) est appelée la <u>coupe de C suivant x</u> . Mais inversement, <u>toute</u> application f de E dans $\mathfrak{P}(F)$ <u>peut s'obtenir de cette manière</u> ; car $f(x)$ n'est autre que la coupe suivant x de la partie C de $E \times F$ définie par la relation "$y \in f(x)$". L'ensemble $\mathfrak{P}(E \times F)$, l'ensemble des correspondances de E à F et l'ensemble des applications de E dans $\mathfrak{P}(F)$, peuvent donc être mis deux à deux en correspondance biunivoque.

10. Soient E,F,G trois ensembles distincts ou non, A une partie de $E \times F$, B une partie de $F \times G$. L'application

$$X \longrightarrow B(A(X))$$

de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(G)$, <u>composée</u> de la correspondance $X \longrightarrow A(X)$ par la correspondance $Y \longrightarrow B(Y)$, <u>est elle-même une correspondance de E à G</u> ; la partie de $E \times G$ qui la définit, est l'ensemble des couples (x,z) de $E \times G$ défini par la propriété

"il existe $y \in F$ tel que $(x,y) \in A$ et $(y,z) \in B$ "

Cet ensemble s'appelle le <u>composé de A par B</u> et se note $B \circ A$, ou simplement BA quand aucune confusion n'est à craindre ; on a donc, quel que soit $X \subset E$, $BA(X) = B(A(X))$.

11. On a

$$\widehat{(B \circ A)}^{-1} = \overset{-1}{A} \circ \overset{-1}{B} \tag{27}$$

A et A' étant deux parties de $E \times F$, la relation $A \subset A'$ entraîne $B \circ A \subset B \circ A'$; de même, B et B' étant deux parties de $F \times G$, la relation $B \subset B'$ entraîne $B \circ A \subset B' \circ A$.

Dans le cas où F et G sont identiques à E , on a, quelle que soit la partie A de $E \times E$.

$$\Delta \circ A = A \quad , \quad A \circ \Delta = A \tag{28}$$

où Δ désigne la diagonale de $E \times E$.

12. Soient maintenant E,F,G trois ensembles distincts ou non ; leur <u>ensemble produit</u> $E \times F \times G$ est l'ensemble des <u>triplets</u> (x,y,z), où $x \in E$, $y \in F$, $z \in G$; la relation $(x,y,z) = (x',y',z')$ étant équivalente à "$x=x'$ et $y=y'$ et $z=z'$ ". Les trois applications

$$(x,y,z) \longrightarrow x \quad , \quad (x,y,z) \longrightarrow y \quad , \quad (x,y,z) \longrightarrow z$$

de $E \times F \times G$ sur E , F, G respectivement, sont appelées respectivement <u>première</u>, <u>seconde</u> et <u>troisième coordonnée</u> (ou <u>projection</u>) ; on appelle de même par exemple, <u>projection d'indices</u> (1,2), et on note $pr_{1,2}$, l'application $(x,y,z) \longrightarrow (x,y)$ de $E \times F \times G$ sur $E \times F$.

Les définitions et propositions des n^{os} 2,3,4 se généralisent aisément au produit de trois ensembles ; par exemple, on appellera <u>diagonale</u> du produit $E \times E \times E$ l'ensemble des triplets (x,y,z) tels que $x = y = z$.

En outre, on peut substituer à la considération du produit $E \times F \times G$ de trois ensembles, celle du produit $(E \times F) \times G$, obtenu par double application de l'opération "produit de deux ensembles".

En effet,

$$(x,y,z) \longrightarrow ((x,y),z)$$

est une application <u>biunivoque</u> de $E \times F \times G$ <u>sur</u> $(E \times F) \times G$, qu'on nomme encore application <u>canonique</u> ; on définit de même des applications biunivoques (dites aussi <u>canoniques</u>) de $E \times F \times G$ sur l'ensemble $E \times (F \times G)$, et tous les ensembles qu'on déduit de $E \times F \times G$, $(E \times F) \times G$, $E \times (F \times G)$ par permutation des trois lettres E,F,G .

On a des définitions et propriétés analogues pour le produit de plus de trois ensembles.

13. Lorsqu'une fonction f , prenant ses valeurs dans un ensemble quelconque E', est définie dans un produit de trois ensembles E,F,G, on dit aussi que c'est une fonction de <u>trois arguments</u>, dont chacun parcourt l'un des ensembles E,F,G ; la valeur de f pour l'élément (x,y,z) de $E \times F \times G$ se note $f(x,y,z)$.

Si a désigne un élément de E ,

$$(y,z) \longrightarrow f(a,y,z)$$

est une application de $F \times G$ dans E' ; on dit que c'est une <u>application (ou fonction) partielle engendrée par f</u> , et correspondant à la valeur a de x ; ce n'est autre d'ailleurs que l'application <u>composée</u> par f de l'application

$$(y,z) \longrightarrow (a,y,z)$$

de $F \times G$ dans $E \times F \times G$.

De même, si b est un élément de F ,

$$z \longrightarrow f(a,b,z)$$

qui est une application de G dans E' , prend encore le nom d'appli- partielle engendrée par f , et correspondant aux valeurs a,b, de x,y.

Inversement, soit g une application de E dans E' , par exemple ;

$$(x,y,z) \longrightarrow g(x)$$

est une application de $E \times F \times G$ dans E', telle que toute application partielle de E dans E' qu'elle engendre pour des valeurs quelconques de y et z soit identique à g ; on exprime souvent ce fait en disant qu'on peut toujours considérer une fonction d'un argument x comme fonction d'un nombre quelconque d'arguments (parmi lesquels figure naturellement x).

14. Soient, f, g, h, trois applications, respectivement de E dans E', de F dans F', de G dans G' ; l'application de $E \times F \times G$ dans $E' \times F' \times G'$

$$(x,y,z) \longrightarrow (f(x), g(y), h(z))$$

se note (f,g,h) et s'appelle <u>extension de</u> f,g,h <u>aux ensembles produits</u>. Si f,g,h sont <u>toutes trois</u> des applications "sur", ou "biunivoques dans", ou "biunivoques sur", leur extension (f,g,h) possède la même propriété.

Si f,g,h sont des applications du <u>même</u> ensemble E dans E', F', G' respectivement, l'application de E dans $E' \times F' \times G'$

$$x \longrightarrow (f(x), g(x), h(x))$$

est composée de l'application $x \longrightarrow (x,x,x)$ de E sur la diagonale Δ de $E \times E \times E$, par l'application (f,g,h) ; aussi l'appelle-t-on <u>extension diagonale</u> de f,g,h, et la note-t-on $(f,g,h)_\Delta$.

On n'a envisagé, dans ce numéro et le précédent, que le cas de <u>trois</u> ensembles, uniquement pour fixer les idées ; des considérations analogues valent pour plusieurs ensembles, en nombre quelconque.

§ 4. Réunion, intersection, produit d'une famille d'ensembles.

1. Dans ce paragraphe, nous considérons une famille $(X_\iota)_{\iota \in I}$ de <u>parties</u> de E, dont l'ensemble d'indices I est quelconque ; on désignera par $\mathfrak{F}$ <u>l'ensemble des parties de la famille</u> (partie de $\mathfrak{P}(E)$).

Lorsque les éléments de I sont explicitement désignés la considération de la famille (X_ι) revient à celle de plusieurs parties de E , distinctes ou non, en nombre égal à celui des éléments de I par exemple, trois parties quelconques X_1, X_2, X_3 de E forment une famille de parties de E , l'ensemble I étant ici formé des nombres 1,2,3 .

2. Soit J une partie quelconque de I , et considérons la propriété de l'élément générique x de E :

"il existe $\iota \in J$ tel que $x \in X_\iota$"

La partie de E définie par cette propriété s'appelle réunion de la famille d'ensembles $(X_\iota)_{\iota \in J}$, et se note $\bigcup_{\iota \in J} X$. On peut encore formuler cette définition de la manière suivante : à l'application $\iota \longrightarrow X_\iota$ de I dans $\mathfrak{P}(E)$ correspond une partie C bien déterminée de $I \times \mathfrak{P}(E)$ telle que $X_\iota = C(\iota)$ (§3, n° 9) ; on a $\bigcup_{\iota \in J} X_\iota = C(J)$. En particulier $\bigcup_{\iota \in \emptyset} X = C(\emptyset) = \emptyset$.

Lorsque $J = I$, on écrit souvent $\bigcup_\iota X_\iota$ au lieu de $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota$.

La réunion $\bigcup_\iota X_\iota$ ne dépend que de l'ensemble $\mathfrak{F}$ autrement dit, est la même pour deux familles correspondant à la même partie $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{P}(E)$; en particulier, elle est égale à la réunion de la famille définie par l'application canonique de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{P}(E)$, et on peut donc l'écrire $\bigcup_{X \in \mathfrak{F}} X$; on dit aussi que c'est la réunion de l'ensemble (de parties) $\mathfrak{F}$.

Lorsque I est un ensemble dont les éléments sont explicitement désignés, par exemple les nombres 1,2,3, on a $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, ce qui justifie le nom de réunion, donné en général à l'ensemble $\bigcup_\iota X_\iota$.

3. Quel que soit $J \subset I$, on a $\bigcup_{\iota \in J} X_\iota \subset \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$; en particulier, quel que soit $\iota \in I$, $X_\iota \in \bigcup_\iota X_\iota$.

Si Y est une partie de E telle que $X_\iota \subset Y$, quel que soit $\iota \in I$, on a $\bigcup_\iota X_\iota \subset Y$. Plus généralement, si (Y_ι) est une seconde famille de parties de E correspondant au même ensemble d'indices I, et si $X_\iota \subset Y_\iota$ quel que soit ι, on a $\bigcup_\iota X_\iota \subset \bigcup_\iota Y_\iota$.

Soit F un second ensemble, et $X \rightarrow C(X)$ une correspondance de E à F ; on a

$$C\Big(\bigcup_{\iota \in J} X_\iota\Big) = \bigcup_{\iota \in J} C(X_\iota) \tag{29}$$

Soit maintenant L un autre ensemble d'indices, et $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille de parties de I ; on a

$$\bigcup_{\iota \in \bigcup_{\lambda \in L} J_\lambda} X_\iota = \bigcup_{\lambda \in L}\Big(\bigcup_{\iota \in J_\lambda} X_\iota\Big) \tag{30}$$

C'est la formule générale d'associativité de la réunion ; quand I et L sont des ensembles à éléments explicitement désignés, on retrouve des relations connues (voir § 1, n° 11) ; si L seul est dans ce cas, et est formé, par exemple, des nombres 1 et 2, on a

$$\bigcup_{\iota \in J_1 \cup J_2} X_\iota = \Big(\bigcup_{\iota \in J_1} X_\iota\Big) \cup \Big(\bigcup_{\iota \in J_2} X_\iota\Big). \tag{31}$$

Soient $(X_\iota)_{\iota \in I}$ et $(Y_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ deux familles quelconques de parties de E ; on a

$$\Big(\bigcup_{\iota \in I} X_\iota\Big) \cap \Big(\bigcup_{\varkappa \in K} Y_\varkappa\Big) = \bigcup_{(\iota,\varkappa) \in I \times K} (X_\iota \cap Y_\varkappa) \tag{32}$$

formule dite de distributivité, car elle comprend la seconde formule (10) comme cas particulier.

De même, si $(X_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille de parties de E, $(Y_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ une famille de parties de F, on a

$$\Big(\bigcup_{\iota \in I} X_\iota\Big) \times \Big(\bigcup_{\varkappa \in K} Y_\varkappa\Big) = \bigcup_{(\iota,\varkappa) \in I \times K} (X_\iota \times Y_\varkappa). \tag{33}$$

5. Si X est une partie d'un ensemble ordonné E , il existe au plus un élément a de X tel que $a \leqslant x$, quel que soit $x \in X$; lorsqu'il existe un élément a ayant cette propriété, on dit que c'est <u>le plus petit élément de X</u>. De même, il existe au plus un élément $b \in X$ tel que $x \leqslant b$ quel que soit $x \in X$; si un tel élément existe, on dit que c'est <u>le plus grand élément de X</u> .

Toute partie non vide de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs a un plus petit élément ; pour qu'une partie de $\mathbb{N}$ ait un plus grand élément, il faut et il suffit qu'elle soit finie.

Dans l'ensemble des parties $\mathfrak{P}$ (E) d'un ensemble quelconque, ordonné par la relation d'inclusion, pour qu'une partie $\mathfrak{F}$ (ensemble de parties de E) possède un plus petit élément, il faut et il suffit que l'intersection des ensembles de $\mathfrak{F}$ appartienne à $\mathfrak{F}$, et cette intersection est alors le plus petit élément ; de même, pour que $\mathfrak{F}$ ait un plus grand élément, il faut et il suffit que la réunion des ensembles de $\mathfrak{F}$ appartienne à $\mathfrak{F}$, et cette réunion est alors le plus grand élément.

6. Si X est une partie d'un ensemble ordonné E , tout élément x de X tel qu'il n'existe aucun élément $z \in X$ tel que $z < x$, est appelé élément <u>minimal</u> de X ; tout $y \in X$ tel qu'il n'existe aucun élément $z \in X$ tel que $z > y$ est appelé élément <u>maximal</u> de X . L'ensemble des éléments maximaux, ou l'ensemble des éléments minimaux, peuvent être vides ; ils peuvent aussi être infinis ; si X a un plus petit élément a , c'est le <u>seul</u> élément minimal de X ; de même, si X a un plus grand élément b , c'est le <u>seul</u> élément maximal de X .

7. Si X est une partie d'un ensemble ordonné E , tout élément x de E tel que, quel que soit $z \in X$, $z \leqslant x$, est appelé un élément <u>majorant</u> X , ou plus simplement <u>un majorant</u> de X ; tout élément y de E tel que,

quel que soit $z \in X$, on ait $z \geqslant y$, est appelé un minorant de X . L'ensemble des majorants, ou l'ensemble des minorants, d'une partie X , peuvent être vides. Tout élément supérieur à un majorant de X est encore un majorant de X ; tout élément inférieur à un minorant de X est un minorant de X .

Si l'ensemble des majorants d'une partie X a un plus petit élément a , on dit que a est la borne supérieure de X ; de même, si l'ensemble des minorants de X a un plus grand élément b , on l'appelle la borne inférieure de X ; si ces bornes existent, elles sont uniques d'après leur définition. Si X a un plus grand élément, c'est sa borne supérieure ; s'il a un plus petit élément, c'est sa borne inférieure.

8. Une application f d'une partie A d'un ensemble ordonné E , dans un ensemble ordonné F , est dite croissante (resp. décroissante) si la relation $x \leqslant y$ entre éléments génériques de A , entraîne $f(x) \leqslant f(y)$ (resp. $f(x) \geqslant f(y)$) ; toute fonction constante dans A est donc à la fois croissante et décroissante, et réciproquement.

L'application f est dite strictement croissante (resp. strictement décroissante) si la relation $x < y$ entraîne $f(x) < f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$).

Si E est totalement ordonné, toute application strictement croissante (ou strictement décroissante) d'une partie A de E dans un ensemble ordonné F , est biunivoque.

9. Un ensemble ordonné E est dit inductif s'il vérifie la condition suivante : toute partie totalement ordonnée de E possède une borne supérieure.

L'ensemble $\mathfrak{P}(E)$, ordonné par inclusion, est un ensemble inductif ; il en est de même de l'ensemble $\mathcal{G}_E^F$ des applications d'une partie d'un ensemble E dans un ensemble F , quand on l'ordonne par la relation "g est un prolongement de f" .

Une partie quelconque d'un ensemble inductif n'est pas en général un ensemble inductif ; mais, si a est un élément quelconque d'un ensemble inductif E , la partie de E définie par $x \geqslant a$ est encore un ensemble inductif.

10. On démontre, sans utiliser l'axiome de choix, le lemme fondamental suivant :

<u>Soit E un ensemble ordonné inductif</u>, <u>et f une application de E dans E</u> , <u>telle que, quel que soit</u> $x \in E$, <u>on ait</u> $f(x) \geqslant x$; <u>il existe au moins un élément</u> $x \in E$ <u>tel que</u> $f(x) = x$.

De ce lemme, et de l'axiome de choix, on déduit la proposition suivante, connue sous le nom de <u>théorème de Zorn</u> :

<u>Tout ensemble ordonné inductif possède au moins un élément maximal</u>.

11. Dans l'ensemble des parties $\mathfrak{P}(E)$ d'un ensemble quelconque E , ordonné par inclusion, la borne supérieure d'un ensemble $\mathfrak{F}$ de parties de E est la <u>réunion</u> des ensembles de $\mathfrak{F}$. L'application du théorème de Zorn donne le résultat suivant :

<u>Si</u> $\mathfrak{F}$ <u>est un ensemble de parties d'un ensemble E</u> , <u>tel que pour tout sous-ensemble</u> $\mathcal{G}$ <u>de</u> $\mathfrak{F}$, <u>totalement ordonné par la relation d'inclusion, la réunion des ensembles de</u> $\mathcal{G}$ <u>appartienne à</u> $\mathfrak{F}$, <u>alors</u> $\mathfrak{F}$ <u>possède au moins un élément maximal</u> (c'est-à-dire ici une partie de E appartenant à $\mathfrak{F}$, et qui n'est contenue dans aucune autre partie de E appartenant à $\mathfrak{F}$).

On dit qu'un ensemble $\mathfrak{F}$ de parties d'un ensemble E est <u>de caractère fini</u> si la propriété "$X \in \mathfrak{F}$" est <u>équivalente</u> à la propriété "toute partie <u>finie</u> de X appartient à $\mathfrak{F}$". Cette définition permet d'énoncer le théorème suivant :

<u>Tout ensemble de parties de E de caractère fini possède au moins un élément maximal</u>.

§ 7. Puissances. Ensembles dénombrables.

1. Deux ensembles E,F sont dits <u>équipotents</u> s'ils peuvent être mis en correspondance biunivoque (c'est-à-dire si l'ensemble $\mathcal{D}_E^F$ n'est pas vide).

Deux ensembles équipotents à un même troisième sont équipotents.

Si E et F sont équipotents, $\mathfrak{P}(E)$ et $\mathfrak{P}(F)$ sont équipotents. Si (par exemple), E et F , E' et F', E" et F", sont respectivement équipotents, $E \times E' \times E''$ et $F \times F' \times F''$ sont équipotents.

2. Soient X et Y deux parties génériques d'un ensemble E ; la relation "X et Y sont équipotents" est une <u>relation d'équivalence</u> dans $\mathfrak{P}(E)$; la classe d'équivalence (suivant cette relation) à laquelle appartient X s'appelle la <u>puissance</u> de X , et l'ensemble de ces classes (ensemble quotient de $\mathfrak{P}(E)$ par la relation précédente) l'<u>ensemble des puissances</u> des parties de E .

Si E et F sont deux ensembles distincts, la relation "X et Y sont équipotents" entre une partie X de E et une partie Y de F , s'exprime encore en disant que la puissance de X est <u>isotope</u> de celle de Y ; cette relation est une relation <u>biunivoque</u> entre une partie de l'ensemble des puissances des parties de E et une partie de l'ensemble des puissances des parties de F .

3. Soient E,F deux ensembles quelconques, distincts ou non ; soit $\mathfrak{a}$ un élément de l'ensemble des puissances des parties de E , $\mathfrak{b}$ un élément de l'ensemble des puissances des parties de F ; on dit que $\mathfrak{a}$

est inférieure à $\mathfrak{b}$, ou que $\mathfrak{b}$ est supérieure à $\mathfrak{a}$, s'il existe une application biunivoque d'une partie $X \subset E$ de puissance $\mathfrak{a}$ dans une partie $Y \subset F$ de puissance $\mathfrak{b}$; on dit que $\mathfrak{a}$ est strictement inférieure à $\mathfrak{b}$, ou que $\mathfrak{b}$ est strictement supérieure à $\mathfrak{a}$, si en outre $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ ne sont pas des puissances isotopes.

Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont isotopes, $\mathfrak{a}$ est à la fois inférieure et supérieure à $\mathfrak{b}$; réciproquement, on démontre (sans utiliser l'axiome de choix) que si $\mathfrak{a}$ est à la fois supérieure et inférieure à $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont isotopes. Il en résulte en particulier que l'ensemble des puissances des parties d'un ensemble E est ordonné par la relation " $\mathfrak{a}$ est inférieure à $\mathfrak{b}$ " ; quand on parle de cet ensemble comme d'un ensemble ordonné, c'est toujours de la structure définie par cette relation qu'il est question.

En outre, en utilisant le théorème de Zorn (c'est-à-dire l'axiome de choix), on démontre que l'ensemble des puissances des parties d'un ensemble E est totalement ordonné, et que toute partie non vide de cet ensemble possède un plus petit élément.

4. La puissance d'un ensemble E est strictement inférieure à celle de l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$.

Si f est une application d'un ensemble E dans un ensemble F , la puissance de l'image f(X) d'une partie quelconque X de E , est inférieure à la puissance de X .

5. Soit $(X_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E , telle que $\iota \neq \varkappa$ entraîne $X_\iota \cap X_\varkappa = \emptyset$; soit $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de parties d'un ensemble F , correspondant au même ensemble d'indices I , et telle que la puissance de Y_ι soit inférieure à celle de X_ι , quel que soit $\iota \in I$; alors, la puissance de la réunion $\bigcup_{\iota \in J} Y_\iota$ est inférieure à celle de $\bigcup_{\iota \in J} X_\iota$, quelle que soit la partie J de I.

Si en outre $\iota \neq \varkappa$ entraîne $Y_\iota \cap Y_\varkappa = \emptyset$, et si X_ι et Y_ι sont équipotents quel que soit ι , alors $\bigcup_{\iota \in J} X_\iota$ est équipotent à $\bigcup_{\iota \in J} Y_\iota$.

En particulier, si F est identique à E , on voit que la puissance de la réunion d'un ensemble de parties de E sans élément commun deux à deux , ne dépend que des puissances de ces parties ; on dit que c'est la somme de ces puissances (fonction qui n'est donc définie pour une famille ($\mathfrak{a}_\iota$) d'éléments de l'ensemble des puissances que lorsqu'on peut trouver une famille (X_ι) de parties de E deux à deux sans élément commun et telle que X_ι ait pour puissance $\mathfrak{a}_\iota$).

Si $(X_\iota)_{\iota \in I}$ et $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ sont des familles de parties de E et F respectivement, correspondant au même ensemble d'indices, et telles que X_ι et Y_ι soient équipotents quel que soit ι , les produits $\prod_\iota X_\iota$ et $\prod_\iota Y_\iota$ sont équipotents.

6. L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs peut être considéré comme l'ensemble des puissances des parties finies d'un ensemble infini ; la relation d'ordre "$x \leqslant y$" dans $\mathbb{N}$ n'est autre que la relation ordonnant cet ensemble de puissances ; et la somme de deux entiers de $\mathbb{N}$ est une fonction identique à la somme de deux puissances telle qu'elle vient d'être définie.

7. On dit qu'un ensemble est dénombrable s'il est équipotent à une partie de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs. Tout ensemble fini est donc dénombrable ; si n est le nombre de ses éléments, il est équipotent à l'intervalle $[0, n-1]$ de l'ensemble $\mathbb{N}$. Tout ensemble infini dénombrable est équipotent à $\mathbb{N}$; en particulier, toute partie infinie de $\mathbb{N}$ a même puissance que $\mathbb{N}$.

Si E est un ensemble infini, il existe une partition de E formée d'ensembles infinis dénombrables ; en particulier, tout ensemble infini a une puissance supérieure à celle de $\mathbb{N}$.

Si E est un ensemble infini, l'ensemble $E \times \mathbb{N}$ est équipotent à E. En particulier, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est un ensemble infini dénombrable.

8. On appelle suite d'éléments d'un ensemble E une famille d'éléments de E dont l'ensemble d'indices est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs ou une partie infinie de $\mathbb{N}$; une suite dont l'ensemble des indices est $\mathbb{N}$ se note donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou plus simplement (x_n) quand aucune confusion n'est à craindre ; lorsque n désigne un entier générique, on dit que x_n est le terme général de la suite, ou encore terme de rang n (cette dernière dénomination s'employant aussi quand on remplace n par un entier explicité). L'ensemble des éléments d'une suite est dénombrable.

On appelle suite finie d'éléments de E une famille dont l'ensemble d'indices est une partie finie de $\mathbb{N}$; l'ensemble des éléments d'une suite finie est fini.

Toute sous-famille d'une suite est une suite ou une suite finie, qu'on dit extraite de la suite donnée ; toute sous-famille d'une suite finie est une suite finie, qu'on dit encore extraite de la première.

On appelle suite double (ou suite à deux indices) une famille d'éléments dont l'ensemble d'indices est $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ou une partie infinie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$; une suite double dont l'ensemble d'indices est $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se note $(x_{m,n})$, ou plus simplement (x_{mn}) si cela ne prête pas à confusion. On définit de même des suites à plus de deux indices.

On dit que deux suites (x_n), (y_n) ne diffèrent que par l'ordre des termes s'il existe une application biunivoque f de $\mathbb{N}$ sur lui-même telle que $y_n = x_{f(n)}$ quel que soit n ; on a une définition analogue pour les suites dont l'ensemble d'indices est une partie infinie de $\mathbb{N}$, et pour les suites finies.

A une famille d'éléments $(x_\iota)_{\iota \in I}$ dont l'ensemble d'indices I est infini dénombrable, on peut associer une suite de la manière suivante : il existe une application biunivoque $n \to f(n)$ de $\mathcal{N}$ sur I ; en appelant y_n la valeur pour n de l'application composée $n \to x_{f(n)}$ de $\mathcal{N}$ dans E , on dit que la suite (y_n) s'obtient en <u>rangeant dans un certain ordre</u> la famille (x_ι). Les suites correspondant ainsi à deux applications biunivoques distinctes de $\mathcal{N}$ sur I ne diffèrent que par l'ordre des termes.

En opérant de même lorsque I est un ensemble <u>fini</u>, on obtient une <u>suite finie</u> associée à la famille (x_ι).

9. La réunion, l'intersection ou le produit d'une famille $(X_\iota)_{\iota \in I}$ de parties d'un ensemble E , sont dits <u>dénombrables</u> si I est un ensemble dénombrable, <u>finis</u> si I est fini.

Si I est <u>dénombrable</u>, et si la puissance de X_ι est <u>inférieure</u> à une puissance donnée $\mathfrak{a}$, quel que soit ι , la puissance de la réunion $\bigcup_\iota X_\iota$ est <u>inférieure</u> à $\mathfrak{a}$; si en outre un des X_ι au moins est de puissance $\mathfrak{a}$, $\bigcup_\iota X_\iota$ est aussi de puissance $\mathfrak{a}$. En particulier, toute réunion dénombrable d'ensembles de puissance $\mathfrak{a}$ est de puissance $\mathfrak{a}$; toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

§ 8. Echelles typiques et structures.

1. Etant donnés, par exemple, trois ensembles <u>distincts</u> E,F,G, on peut en former d'autres en prenant leurs ensembles des parties, ou en faisant le produit d'un de ces ensembles par lui-même, ou enfin en faisant le produit de deux de ces ensembles, pris dans un certain ordre. On obtient ainsi <u>douze</u> nouveaux ensembles ; si on les joint aux trois ensembles E,F,G, on peut recommencer sur

ces quinze ensembles les mêmes opérations, en écartant celles qui donnent des ensembles déjà obtenus ; et ainsi de suite, autant de fois qu'on le désire. D'une façon générale, on dit d'un quelconque des ensembles obtenu par ce procédé (suivant un schéma explicite) que c'est un ensemble de l'<u>échelle typique</u> formée à partir des <u>ensembles primitifs</u> E,F,G .

Si M,N,P sont par exemple trois quelconques des ensembles de cette échelle typique, et si $R\{x,y,z\}$ est une relation entre des éléments génériques appartenant respectivement à chacun de ces ensembles, R définit une partie de $M \times N \times P$, c'est-à-dire (par une correspondance canonique) une partie de $(M \times N) \times P$, et enfin un élément de $\mathfrak{P}((M \times N) \times P)$; ainsi la donnée d'une <u>relation</u> entre éléments de plusieurs ensembles de l'échelle typique revient à celle d'un <u>élément</u> d'un autre ensemble de cette échelle. De même, la donnée d'une application de M dans N , par exemple, revient (en considérant l'ensemble représentatif de cette application) à celle d'une partie de $M \times N$, c'est-à-dire à celle d'un élément de l'ensemble $\mathfrak{P}(M \times N)$, qui est encore dans l'échelle typique.

Enfin, la donnée de deux éléments (par exemple) d'un ensemble M de l'échelle typique, revient à celle d'un seul élément de l'ensemble produit $M \times M$.

Ainsi, la donnée d'un certain nombre d'éléments d'ensembles de l'échelle typique, de relations entre des éléments génériques de ces ensembles, d'applications de parties de certains de ces ensembles dans d'autres, revient en dernière analyse à la donnée d'<u>un seul élément</u> d'un des ensembles de l'échelle.

2. On a dit ci-dessus (§ 6) que la donnée d'un élément C de l'ensemble $\mathfrak{P}(E \times E)$ définit une <u>structure d'ensemble ordonné</u> sur E si on a les propriétés : a) $C \circ C \subset C$; b) $C \cap \overset{-1}{C} = \Delta$.

D'une façon générale, considérons un ensemble M de l'échelle typique formée à partir de trois ensembles (par exemple), E,F,G ; donnons-nous un certain nombre de propriétés explicitement énoncées d'un élément générique de M , et soit T l'intersection des parties de M définies par ces propriétés ; on dit qu'un élément σ de T définit sur E,F,G une <u>structure</u>, et deux éléments distincts de T (s'il en existe) des structures <u>de même espèce</u> ; les structures de même espèce sont donc caractérisées par le schéma de formation de M à partir de E,F,G, et par les propriétés définissant T , qu'on appelle les <u>axiomes</u> de ces structures ; on donne un nom spécifique à toutes les structures d'une même espèce. Toute proposition qui est une conséquence de la proposition "$\sigma \in T$" (c'est-à-dire des axiomes définissant T) est dite appartenir à la <u>théorie</u> des structures de l'espèce considérée ; par exemple, les propositions énoncées au § 6 appartiennent à la théorie des structures d'ensemble ordonné.

On remarquera que, dans ce dernier exemple, les axiomes peuvent s'énoncer pour un ensemble primitif E absolument quelconque ; aussi donne-t-on le même nom aux structures satisfaisant à ces axiomes, indépendamment de l'ensemble sur lequel elles sont définies ; et les propositions déduites de ces axiomes sont valables dans un ensemble quelconque, puisque pour les formuler, il n'est pas besoin de faire intervenir les particularités (par exemple la puissance) de l'ensemble E. Ces remarques s'appliquent chaque fois qu'on énonce des axiomes de cette nature.

Le plus souvent, quand on utilise une échelle typique construite à partir de plusieurs ensembles E,F,G, l'un de ces ensembles, E par exemple, joue dans les structures qu'on considère, un rôle prépondérant ; aussi dit-on, par abus de langage, que ces structures sont définies sur l'ensemble E , les ensembles F et G étant considérés comme ensembles auxiliaires.

Enfin, pour faciliter le langage, on donne souvent un nom particulier à un ensemble qu'on a muni d'une structure d'une espèce déterminée, c'est ainsi qu'on parle d'<u>ensemble ordonné</u>, et qu'on définit dans la suite de ce Traité, les notions de <u>groupe</u>, <u>anneau</u>, <u>corps</u> <u>espace topologique</u>, <u>espace uniforme</u>, etc..., mots qui désignent tous des ensembles munis de certaines structures.

3. Considérons des structures d'une même espèce, éléments d'une partie T d'un ensemble M de l'échelle typique ; si on ajoute de nouveaux "axiomes" à ceux qui définissent T , le système d'axiomes obtenu définit une partie U de M , contenue dans T ; on dit que les structures $\sigma \in U$ sont d'une espèce <u>subordonnée</u> à celle des structures $\sigma \in T$. Par exemple, les structures d'ensemble <u>totalement ordonné</u> sont subordonnées aux structures d'ensemble ordonné, l'élément C de $\mathfrak{P}(E \times E)$ qui définit une telle structure satisfaisant à l'axiome supplémentaire $C \cup \overset{-1}{C} = E \times E$.

4. Soient M,M' deux ensembles d'une même échelle typique, construite sur des ensembles E,F,G (par exemple) ; soient T une partie de M , T' une partie de M' , définies respectivement par certains axiomes explicitement énoncés. Si on peut définir explicitement une <u>application biunivoque de T sur T'</u>, on considèrera que deux éléments $\sigma \in T$, $\sigma' \in T'$, qui se correspondent par cette application, définissent la

même structure sur E,F,G ; et on dit que les systèmes d'axiomes qui définissent T et T' sont *équivalentes*.

Un exemple important de cette circonstance est fourni par les structures *topologiques*, qui peuvent être définies ainsi par plusieurs systèmes d'axiomes équivalents, dont deux sont particulièrement utiles (voir Topologie générale, ch.I, § 1).

5. Soient par exemple E,F,G trois ensembles primitifs, et supposons données des applications *biunivoques* de E,F,G, respectivement *sur* des ensembles E',F',G'. Comme on sait définir les *extensions* d'applications biunivoques aux ensembles des parties (§2, n° 9) et aux ensembles produits (§3, n° 14), on définira de proche en proche *l'extension* des applications biunivoques données à deux ensembles M, M' construits respectivement suivant le *même* schéma, dans l'échelle des types formée à partir de E,F,G, et dans celle formée à partir de E', F',G'. Soit f l'application biunivoque de M sur M' ainsi obtenue. Si σ est une structure sur E,F,G, élément d'une partie T de M , on dira que $f(\sigma)$ est la structure *obtenue* en *transportant* la structure σ sur E',F',G', au moyen des applications biunivoques de E sur E', de F sur F' et de G sur G'. Toute proposition de la théorie des structures $\sigma \in T$ se transportera de la même manière, en utilisant les extensions convenables, et donnera une proposition de la théorie des structures appartenant à f(T).

On dira qu'une structure σ sur E,F,G et une structure σ' sur E',F',G', sont *isomorphes* (ou qu'il y a *isomorphie* entre ces structures) si σ' peut être obtenue en *transportant* σ par des applications biunivoques de E sur E', de F sur F' et de G sur G' respectivement ; ces applications sont alors dites constituer un *isomorphisme* de σ sur σ' .

Lorsqu'il s'agit de structures sur un seul ensemble E , l'application biunivoque de E sur E' qui transporte σ sur σ' est encore appelée un isomorphisme de l'ensemble E , muni de la structure σ , sur l'ensemble E' , muni de la structure σ' . C'est aussi à cette application qu'on donne le nom d'isomorphisme lorsque F et G sont deux ensembles auxiliaires, et que les applications biunivoques concernant ces deux ensembles sont les applications identiques de F et G sur eux-mêmes ; on dit alors que cet isomorphisme conserve les ensembles auxiliaires.

6. Lorsqu'on énonce un système d'axiomes définissant une partie T d'un ensemble M d'une échelle typique construite à partir d'ensembles primitifs E,F,G, il convient, avant de parler des structures qui satisfont à ces axiomes, de s'assurer que l'ensemble T n'est pas vide, autrement dit qu'il existe de telles structures.

7. Il peut arriver qu'un système d'axiomes puisse s'énoncer pour un ensemble primitif quelconque, mais que si on considère deux structures satisfaisant à ces axiomes, et définies sur deux ensembles primitifs distincts E , F , il résulte des axiomes que ces structures (si elles existent) sont nécessairement isomorphes (ce qui entraîne en particulier que E et F sont équipotents ; autrement dit, si on avait pris E et F non équipotents, il n'existerait aucune structure satisfaisant aux axiomes considérés, sur un au moins de ces deux ensembles). On dit dans ce cas que la théorie des structures satisfaisant à ces axiomes est univalente ; lorsqu'on n'est pas dans ce cas, on dit qu'elle est multivalente.
