LIVRE II
ALGEBRE
CHAPITRE IV (ETAT 4)
APPENDICE
SERIES FORMELLES

Rédaction n° 044

Nombre de pages : 13

Nombre de feuilles : 13

Algèbre Chap IV. Etat 4
(Appendice Séries formelles)

44

LIVRE II

ALGÈBRE

CHAPITRE IV (Etat 4)

APPENDICE

SÉRIES FORMELLES.

1. Définition des séries formelles.

Soit I un ensemble d'indices <u>fini</u> ; le monoïde (additif) produit N^I satisfait à la condition (D) du chap. II, §7, n°10 : en effet, si $(n_i)_{i \in I}$ est un élément quelconque de N^I, la relation $(p_i)+(q_i)=(n_i)$ signifie $p_i+q_i=n_i$ pour tout $i \in I$; pour chaque valeur de i, il n'y a que n_i couples d'entiers naturels (p_i, q_i) satisfaisant à cette condition, donc, comme I est <u>fini</u>, il n'y a qu'un nombre fini de couples $((p_i),(q_i))$ tels que $(p_i)+(q_i)=(n_i)$.

Nous pouvons donc considèrer l'<u>algèbre large</u> (chap. II, §7, n°10) du monoïde N^I, relative à un anneau commutatif A ayant un élément unité. Cette algèbre, qui est commutative, contient comme sous-algèbre (ayant même élément unité) l'algèbre des <u>polynomes</u> (à coefficients dans A) par rapport aux indéterminées X_i ($i \in I$), qui est l'algèbre <u>stricte</u> du monoïde N^I relative à l'anneau A.

DÉFINITION 1.- <u>Les éléments de l'algèbre large du monoïde</u> N^I <u>relative à un anneau</u> A (commutatif et ayant un élément unité) <u>sont appelés séries formelles par rapport aux indéterminées</u> X_i ($i \in I$) <u>à coefficients dans</u> A.

L'algèbre large de N^I par rapport à A se note $A[[X_i]]_{i \in I}$, ou $A[[X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_p}]]$ lorsque I est une partie finie de p éléments de N, $(i_k)_{1 \leq k \leq p}$ la suite des éléments de I rangés dans l'ordre croissant. Conformément à l'abus de langage ordinaire (chap. II, §7, n°10), l'élément $(\alpha_{(n_i)})_{(n_i) \in N^I}$ de $A[[X_i]]_{i \in I}$ se notera encore $\sum_{(n_i)} \alpha_{(n_i)} \prod_i X_i^{n_i}$ (étant entendu qu'il ne s'agit pas d'une somme de polynomes) ; les éléments $\alpha_{(n_i)} \prod_i X_i^{n_i}$ sont appelés les <u>termes</u>

de la série formelle, les $\alpha_{(n_i)}$ ses coefficients ; un polynome par rapport aux X_i $(i \in I)$ peut donc être caractérisé comme une série formelle n'ayant qu'un nombre fini de coefficients $\neq 0$.

Si I et I' sont deux ensembles finis de p éléments, φ une application biunivoque de I sur I', l'application linéaire de $A[[X_i]]_{i \in I}$ dans $A[[X_j]]_{j \in I'}$ qui, à tout élément $\sum \alpha_{(n_i)} \prod_i X_i^{n_i}$ de la première de ces algèbres, fait correspondre l'élément $\sum \alpha_{(n_i)} \prod_i X_{\varphi(i)}^{n_i}$ de la seconde, est un isomorphisme de la première algèbre sur la seconde. En particulier, à un isomorphisme près, on peut toujours se borner à considérer le cas où $I = [1,p]$; l'algèbre $A[[X_1, X_2, \ldots, X_p]]$ correspondante est appelée l'algèbre des séries formelles à p indéterminées, à coefficients dans A .

Le produit de deux séries formelles

$$u = \sum \alpha_{n_1 n_2 .. n_p} X_1^{n_1} X_2^{n_2} \ldots X_p^{n_p}$$

$$v = \sum \beta_{n_1 n_2 .. n_p} X_1^{n_1} X_2^{n_2} \ldots X_p^{n_p}$$

est la série formelle

$$w = \sum \gamma_{n_1 n_2 .. n_p} X_1^{n_1} X_2^{n_2} \ldots X_p^{n_p}$$

où

$$\gamma_{n_1 n_2 .. n_p} = \sum \alpha_{h_1 h_2 .. h_p} \beta_{k_1 k_2 .. k_p}$$

la somme étant étendue aux couples $((h_i), (k_i))$ tels que $h_i + k_i = n_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$.

Soit J une partie non vide de I ; l'algèbre $A[[X_i]]_{i \in J}$ peut être identifiée à la sous-algèbre de $A[[X_i]]_{i \in I}$, formée des séries formelles $\sum \alpha_{(n_i)} \prod_i X_i^{n_i}$ où $\alpha_{(n_i)} = 0$ pour tout élément $(n_i) \in N^I$ tel que $n_i \neq 0$ pour un indice $i \in \complement J$ au moins. En outre, si B est cette sous-algèbre, et K le complémentaire de J par rapport à I (supposé non vide), on définit un isomorphisme de $A[[X_i]]_{i \in I}$:

considéré comme algèbre par rapport à B , sur l'algèbre $B[[X_i]]_{i \in K}$ des séries formelles par rapport aux X_i d'indice $i \in K$, à coefficients dans B , de la façon suivante : à la série formelle $\sum \alpha_{(n_i)} \prod_{i \in I} X_i^{n_i}$, on fait correspondre la série formelle

$\sum \beta_{(m_k)} \prod_{k \in K} X_k^{m_k}$, où $\beta_{(m_k)} = \sum \gamma_{(p_j)} \prod_{j \in J} X_j^{p_j}$, avec $\gamma_{(p_j)} = \alpha_{(n_i)}$ pour la suite (n_i) telle que $n_i = p_i$ pour $i \in J$, $n_i = m_i$ pour $i \in K$.

Soit A' un sous-anneau de A , ayant même élément unité ; par restriction à A' de l'anneau A d'opérateurs, l'algèbre $A[[X_i]]_{i \in I}$ peut être considérée comme algèbre sur A' ; l'algèbre $A'[[X_i]]_{i \in I}$ des séries formelles par rapport aux X_i , à coefficients dans I , peut alors être considérée comme une sous-algèbre de $A[[X_i]]_{i \in I}$.

Enfin, soit φ une représentation de A sur un anneau B . En faisant correspondre à toute série formelle $\sum \alpha_{(n_i)} \prod_i X_i^{n_i}$ de $A[[X_i]]_{i \in I}$ la série formelle $\sum \varphi(\alpha_{(n_i)}) \prod_i X_i^{n_i}$ de l'anneau $B[[X_i]]_{i \in I}$, on définit une représentation $\overline{\varphi}$ de $A[[X_i]]_{i \in I}$ sur $B[[X_i]]_{i \in I}$; si φ est un isomorphisme, il en est de même de $\overline{\varphi}$.

2. Ordre d'une série formelle.

Etant donnée une série formelle $u = \sum \alpha_{(n_i)} \prod_i X_i^{n_i}$, on appelle encore termes de <u>degré total</u> p dans u les termes $\alpha_{(n_i)} \prod_i X_i^{n_i}$ tels que $\sum_{i \in I} n_i = p$. La somme des termes de degré total p dans u est un polynome homogène u_p de degré p , qu'on appelle encore la <u>partie homogène de degré</u> p de u (u_0 étant aussi appelé le <u>terme constant</u>). Si u et v sont deux séries formelles, et $w = uv$, on a

$$w_p = \sum_{r=0}^{p} u_r v_{p-r}$$

pour tout entier $p \geqslant 0$.

Pour toute série formelle $u \neq 0$, on appelle <u>ordre total</u> (ou simplement <u>ordre</u>) de u le <u>plus petit</u> des entiers $p \geqslant 0$ tels que la partie homogène de degré p de u soit $\neq 0$. Si on désigne cet ordre par $\omega(u)$, et si u et v sont deux séries formelles $\neq 0$, on a

(1) $\omega(u+v) \geqslant \operatorname{Min}(\omega(u),\omega(v))$ si $u+v\neq 0$

(2) $\omega(uv) \geqslant \omega(u)+\omega(v)$ si $uv \neq 0$.

En outre, si $\omega(u)\neq\omega(v)$, on a $u+v\neq 0$ et les deux membres de (1) sont égaux.

Si J est une partie non vide quelconque de I , nous avons vu qu'on peut considérer toute série formelle u de $A[[X_i]]_{i\in I}$ comme une série formelle par rapport aux X_i d'indice $i\in J$, à coefficients dans l'anneau $B=A[[X_i]]_{i\in \complement J}$; aux définitions ci-dessus correspondent donc de nouvelles définitions pour les séries formelles $u\in A[[X_i]]_{i\in I}$: un terme $a_{(n_i)}\prod_i X_i^{n_i}$ est <u>de degré</u> p <u>par rapport aux</u> X_i <u>d'indice</u> $i\in J$ si on a $\sum_{i\in J} n_i=p$; la somme des termes de u de degré p par rapport aux X_i d'indice $i\in J$ est un polynome homogène de degré p par rapport à ces indéterminées, appelé <u>partie homogène de degré p, par rapport aux</u> X_i <u>d'indice</u> $i\in J$, de la série u ; si $u\neq 0$ l'<u>ordre</u> $\omega_J(u)$ de u par rapport aux X_i d'indice $i\in J$ est le plus petit des entiers $p\geqslant 0$ tels que la partie homogène de degré p de u par rapport à ces indéterminées soit $\neq 0$; on a encore les inégalités (1) et (2) quand on y remplace ω par ω_J .

<u>3. Séries formelles sur un anneau d'intégrité.</u>

THÉOREME 1.- <u>Si</u> A <u>est un anneau d'intégrité</u> (ayant un élément unité), <u>tout anneau de séries formelles</u> $A[[X_i]]_{i\in I}$ <u>sur</u> A <u>est un anneau d'intégrité</u>.

En effet, si u et v sont deux séries formelles $\neq 0$, la partie homogène f (resp. g) de degré $\omega(u)$ (resp. $\omega(v)$) de u (resp. v) est un polynome $\neq 0$; la partie homogène de degré $\omega(u)+\omega(v)$ de uv est le polynome fg , qui n'est pas nul (§1,th.1), donc $uv\neq 0$.

COROLLAIRE.- Si A est un anneau d'intégrité, u et v deux séries formelles $\neq 0$ de l'anneau $A[[X_i]]_{i\in I}$, on a

(3) $$\omega(uv)=\omega(u)+\omega(v)$$

On en déduit aussitôt, pour toute partie non vide J de I, que

(4) $$\omega_J(uv) = \omega_J(u)+\omega_J(v) .$$

4. Substitution de séries formelles dans une série formelle.

Les définitions du §2, n°1 permettent en particulier de définir $f(u_1,u_2,\ldots u_p)$ lorsque f est un polynome de $A[X_1,X_2,\ldots,X_p]$, et les u_i $(1\leqslant i\leqslant p)$ des séries formelles appartenant à un anneau $A[[Y_1,Y_2,\ldots Y_q]]$; $f(u_1,u_2,\ldots,u_p)$ est encore une série formelle appartenant au même anneau. Nous allons montrer qu'on peut étendre cette définition, moyennant certaines restrictions sur les séries formelles u_i, au cas où f est une série formelle appartenant à l'anneau $A[[X_1,X_2,\ldots,X_p]]$.

Soit donc $f=\sum \alpha_{(n_i)}\prod_{i=1}^{p} X_i^{n_i}$ une série formelle par rapport aux p indéterminées X_i, et supposons que les p séries u_i $(1\leqslant i\leqslant p)$ aient toutes un ordre strictement positif (ou, comme on dit encore, n'aient pas de terme constant). D'après la formule (2) l'ordre de la série $u_1^{n_1}u_2^{n_2}\ldots u_p^{n_p}$ est au moins égal à $n_1+n_2+\ldots+n_p$; donc, pour tout élément $(m_j)_{1\leqslant j\leqslant q}$ de N^q, il existe un nombre fini d'éléments $(n_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de N^p tels que le coefficient de $Y_1^{m_1}Y_2^{m_2}\ldots Y_q^{m_q}$ dans le produit $u_1^{n_1}u_2^{n_2}\ldots u_p^{n_p}$ soit $\neq 0$, savoir une partie de ceux pour lesquels $\sum_{i=1}^{p} n_i \leqslant \sum_{j=1}^{q} m_j$. Nous pouvons donc poser la définition suivante :

DEFINITION 2.- Etant données une série formelle $f = \sum \alpha_{(n_i)}\prod_{i=1}^{p} X_i^{n_i}$ appartenant à $A[[X_1,X_2,\ldots,X_p]]$ et p séries formelles u_i $(1\leqslant i\leqslant p)$ appartenant à $A[[Y_1,Y_2,\ldots,Y_q]]$ et n'ayant pas de terme constant, on note $f(u_1,u_2,\dots u_p)$ la série formelle $\sum \beta_{(m_j)} \prod_{j=1}^{q} Y_j^{m_j}$ par rapport aux Y_j, où le coefficient de $Y_1^{m_1} Y_2^{m_2} \dots Y_q^{m_q}$ (pour tout $(m_j) \in N^q$) est la somme des coefficients de $Y_1^{m_1} \dots Y_q^{m_q}$ dans toutes les séries $\alpha_{(n_i)} u_1^{n_1} u_2^{n_2} \dots u_p^{n_p}$; on dit que cette série est obtenue en substituant, dans la série f, la série u_i à l'indéterminée X_i pour $1 \leqslant i \leqslant p$.

Cette définition permet en particulier d'écrire $f=f(X_1,X_2,\dots,X_p)$. En général, on écrira encore, par abus de langage, $f(u_1,\dots,u_p) = \sum \alpha_{(n_i)} u_1^{n_1} u_2^{n_2} \dots u_p^{n_p}$.

PROPOSITION 1.- Soient u_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ p séries formelles sans terme constant, appartenant à $A[[Y_1,Y_2,\dots,Y_q]]$; l'application $f \rightarrow f(u_1,u_2,\dots,u_p)$ de l'algèbre $A[[X_1,X_2,\dots,X_p]]$ dans l'algèbre $A[[Y_1,Y_2,\dots,Y_q]]$ est une représentation.

Tout revient à prouver que, si f et g sont deux séries formelles par rapport aux X_i, et si $h=fg$, on a

(5) $\qquad h(u_1,u_2,\dots,u_p)=f(u_1,u_2,\dots,u_p)g(u_1,u_2,\dots,u_p)$.

En effet, considérons un élément $(m_j) \in N^q$ et posons $r = \sum_{j=1}^{q} m_j$; soit f_r (resp. g_r) le polynome somme des termes de la série formelle f (resp. g) de degré total $\leqslant r$; la somme des termes de degré total $\leqslant r$ est la même dans le polynome $\varphi=f_r g_r$ et dans la série formelle $h=fg$; par suite, le coefficient de $Y_1^{m_1} Y_2^{m_2} \dots Y_q^{m_q}$ est le même dans la série $h(u_1,u_2,\dots,u_p)$ et dans le polynome $\varphi(u_1,u_2,\dots,u_p)$. Or (§ 2, prop. 1), on a $\varphi(u_1,u_2,\dots,u_p)=f_r(u_1,\dots,u_p)g_r(u_1,\dots,u_p)$. D'autre part, les termes de degré total r sont les mêmes dans la série formelle $f(u_1,\dots,u_p)$ (resp. $g(u_1,\dots,u_p)$) et dans la série formelle $f_r(u_1,\dots,u_p)$ (resp. $g_r(u_1,\dots,u_p)$) ; donc il résulte de la définition de la multiplication des séries formelles que le coefficient de $Y_1^{m_1} Y_2^{m_2} \dots Y_q^{m_q}$ est le même dans $\varphi(u_1,u_2,\dots u_p)$ et dans $f(u_1,\dots,u_p)g(u_1,\dots,u_p)$, d'où la proposition.

5. Séries formelles inversibles.

PROPOSITION 2.- Pour qu'une série formelle u de l'anneau $A[[X_1,X_2,\dots,X_p]]$ soit inversible dans cet anneau, il faut et il suffit que son terme constant soit inversible.

La condition est nécessaire, car si v est une série formelle de $A[[X_1,X_2,\dots,X_p]]$ telle que $uv=1$, α_0 et β_0 les termes constants de u et de v, on a $\alpha_0\beta_0=1$. Pour démontrer que la condition ests suffisante, remarquons d'abord que dans l'anneau $A[[T]]$ des séries formelles à une indéterminée, le polynome $1-T$ est inversible et a pour inverse la série formelle $f=\sum_{n=0}^{\infty} T^n$, comme on le vérifie aussitôt. Soit alors u une série formelle, ayant un terme constant α_0 inversible ; on peut écrire $u=\alpha_0-v=\alpha_0(1-\alpha_0^{-1}v)$, où v est une série sans terme constant ; par suite (prop.1) la série formelle $\alpha_0^{-1}f(\alpha_0^{-1}v)$ est l'inverse de u.

En particulier, si un polynome u de $A[X_1,X_2,\dots,X_p]$ a un terme constant inversible, il admet un inverse dans l'anneau $A[[X_1,X_2,\dots,X_p]]$ des séries formelles.

Soit K un corps commutatif, et considérons dans le corps $K(X_1,X_2,\dots,X_p)$ des fractions rationnelles à p indéterminées sur K, l'ensemble des fractions rationnelles u/v, où u est un polynome quelconque, v un polynome de terme constant $\neq 0$; il est immédiat que cet ensemble est un sous-anneau (mais non un sous-corps) de $K(X_1,\dots,X_p)$, et que l'application $\frac{u}{v} \to uv^{-1}$ est un isomorphisme de cet anneau dans l'anneau $K[[X_1,X_2,\dots,X_p]]$ des séries formelles ; on dit que la série formelle uv^{-1} est le développement de la fraction rationnelle u/v, et on l'identifie le plus souvent à cette dernière.

6. Corps des fractions de l'anneau des séries formelles à une indéterminée sur un corps.

Soit K un corps commutatif, et désignons par $K((X))$ le corps des fractions de l'anneau $K[[X]]$ des séries formelles à une indéterminée sur K . Toute série formelle u d'ordre h dans $K[[X]]$ peut s'écrire d'une seule manière $u=X^h v$, où v est une série formelle d'ordre 0 , donc (prop.2) <u>inversible</u> dans $K[[X]]$. Désignons par X^{-1} l'inverse, dans $K((X))$, de l'élément $X\neq 0$, et posons comme d'ordinaire $X^{-h}=(X^{-1})^h=(X^h)^{-1}$ pour tout entier $h\geqslant 0$; il résulte de ce qui précède que tout élément $\neq 0$ du corps des fractions $K((X))$ peut s'écrire <u>d'une seule manière</u> sous la forme $X^k w$, où w est une série formelle d'ordre 0 , et k un entier rationnel (positif ou négatif). En effet, le quotient $(X^m u)/(X^n v)$ de deux séries formelles de $K[[X]]$ (m et n positifs, u et v séries d'ordre 0) s'écrit $X^{m-n}uv^{-1}$; d'autre part, si $X^r w_1=X^s w_2$, où w_1 et w_2 sont d'ordre 0, on a nécessairement $r=s$, car si on avait par exemple $r>s$, on en déduirait $X^{r-s}=w_2 w_1^{-1}$, et le second membre est d'ordre 0 , ce qui est absurde. Pour tout élément u de $K((X))$, mis sous la forme $u=X^k w=X^k(\alpha_0+\alpha_1 X+\dots)$, avec $\alpha_0\neq 0$, on écrit encore $u=\alpha_0 X^k+\alpha_1 X^{k+1}+\dots+\alpha_n X^{k+n}+\dots$; on dit que les éléments u de $K((X))$ sont des <u>séries formelles généralisées</u> par rapport à X , à coefficients dans K , ou simplement des <u>séries formelles</u> si aucune confusion n'en résulte les éléments $K[[X]]$ sont alors appelés <u>séries formelles à exposants positifs</u>) ; l'entier rationnel k (qui n'est autre que l'ordre de u lorsqu'il est $\geqslant 0$) est encore appelé l'<u>ordre</u> de u et noté $\omega(u)$; on vérifie immédiatement qu'on a encore les relations (1) et (3).

L'anneau $K[X]$ des polynomes par rapport à X étant identifié à un sous-anneau de $K[[X]]$, <u>toute</u> fraction rationnelle u/v (u et v polynomes, $v\neq 0$) peut être identifiée à la série formelle (généralisée) uv^{-1} de $K((X))$, qu'on appelle son <u>développement</u> ; le corps $K(X)$ des fractions rationnelles est ainsi identifié à un <u>sous-corps</u> de $K((X))$.

7. Dérivations dans l'algèbre des séries formelles.

PROPOSITION 3.- Soient A un anneau commutatif ayant un élément unité, B un sous-anneau de A ayant même élément unité que A . Toute dérivation de l'anneau de séries formelles $E=A[[X_1,X_2,\ldots,X_p]]$ (considéré comme algèbre sur B) qui est nulle pour tout polynome, est identiquement nulle.

En effet, si D est une dérivation quelconque dans E , la série formelle $D(\prod_{i=1}^{p} X_i^{n_i})$ est nulle ou a un ordre $\geqslant (\sum_{i=1}^{p} n_i)-1$. Soit alors u une série formelle quelconque, u_r le polynome somme des termes de u de degré total $\leqslant r$; la série formelle $u-u_r$ peut s'écrire $\sum v_{n_1n_2\ldots n_p}X_1^{n_1}\ldots X_p^{n_p}$, où (n_j) parcourt la partie finie de N^p formée des éléments tels que $\sum_{j=1}^{p} n_j=r$, et où les $v_{n_1n_2\ldots n_p}$ sont des séries formelles ; d'après ce qui précède, $D(u-u_r)$ est nulle ou a un ordre $\geqslant r-1$. Par hypothèse, on a $D(u)=D(u-u_r)$; si on avait $D(u)\neq 0$, l'ordre de D(u) serait $\geqslant r-1$ pour tout entier r , ce qui est absurde.

PROPOSITION 4.- Soient A un anneau commutatif ayant un élément unité, B un sous-anneau de A ayant même élément unité que A . Toute dérivation D de l'anneau des polynomes $A[X_1,X_2,\ldots,X_p]$ (considéré comme algèbre sur B) se prolonge d'une manière et d'une seule en une dérivation $\overline{D}$ de l'anneau des séries formelles $A[[X_1,\ldots,X_p]]$ (considéré comme algèbre sur B) .

L'unicité du prolongement résultant de la prop.3, reste à démontrer son existence. Soit $u=\sum \alpha_{(n_i)}\prod_{i=1}^{p} X_i^{n_i}$ une série formelle quelconque ; pour tout entier $r\geqslant 0$, il n'y a qu'un nombre fini de termes $\alpha_{(n_i)}\prod_i X_i^{n_i}$ de u tels que $D(\alpha_{(n_i)}\prod_i X_i^{n_i})$ soit $\neq 0$ et ait un ordre $\leqslant r$. On peut donc définir $\overline{D}u$ comme étant la série formelle $\sum \beta_{(n_i)}\prod_{i=1}^{p} X_i^{n_i}$ telle que $\beta_{(n_i)}$ soit la somme des coefficients de $\prod_{i=1}^{p} X_i^{n_i}$ dans tous les polynomes $D(\alpha_{(m_i)}\prod_{i=1}^{p} X_i^{m_i})$. Reste à montrer qu'on a

$\overline{D}(uv)=(\overline{D}u)v+u(\overline{D}v)$; soit $\gamma_{(n_i)}\prod_{i=1}^{p} X_i^{n_i}$ un terme de $\overline{D}(uv)$, et soit $r=\sum_{i=1}^{p} n_i$; si u_{r+1} (resp. v_{r+1}) est la somme des termes de degré total $\leqslant r+1$ dans u (resp. v), $\gamma_{(n_i)}$ est aussi le coefficient de $\prod_{i=1}^{p} X_i^{n_i}$ dans $D(u_{r+1}v_{r+1})$; de même, les coefficients de $\prod_{i=1}^{p} X_i^{n_i}$ dans $(\overline{D}u)v$ et dans $u(\overline{D}v)$ sont respectivement les mêmes que dans $(Du_{r+1})v_{r+1}$ et dans $u_{r+1}(Dv_{r+1})$ d'où la proposition.

En particulier, chacune des <u>dérivations partielles</u> D_i (ou $\frac{\partial}{\partial X_i}$) $(1\leqslant i\leqslant p)$ de $A[X_1,\dots,X_p]$ se prolonge en une dérivation de l'anneau $E=A[[X_1,\dots,X_p]]$, que nous noterons encore D_i ou $\frac{\partial}{\partial X_i}$. On a donc $D_i(\sum \alpha_{n_1n_2\dots n_p}X_1^{n_1}X_2^{n_2}\dots X_p^{n_p}) = \sum n_i\alpha_{n_1n_2\dots n_p}X_1^{n_1}\dots X_i^{n_i-1}\dots X_p^{n_p}$.

PROPOSITION 5.- <u>Les</u> p <u>dérivations partielles</u> D_i $(1\leqslant i\leqslant p)$ <u>forment une base du</u> E-<u>module</u> $\mathcal{D}(E)$ <u>des dérivations de l'anneau</u> E (considéré comme algèbre <u>sur</u> A) .

En effet, si D est une dérivation quelconque de E , et $D(X_i)=u_i$ (u_i élément de E), $D-\sum_{i=1}^{p}u_iD_i$ est une dérivation de E , qui est nulle pour les éléments de A (par hypothèse) et pour tous les X_i , donc aussi (§4,prop.7) pour tout polynome, et enfin (prop.3) pour tout élément de E .

On déduit de là que les p différentielles dX_i $(1\leqslant i\leqslant p)$ forment une <u>base</u> (duale de la base (D_i)) du module $\mathcal{D}^*(E)$ des <u>formes différentielles</u> sur E (§4,n°5) ; la différentielle totale d'une série formelle quelconque u est donc donnée par la formule

(6) $$du = \sum_{i=1}^{p} D_iu.dX_i = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial u}{\partial X_i}\,dX_i \ .$$

La série formelle $u(X_1+Y_1,X_2+Y_2,\dots,X_p+Y_p)$, qui est un élément bien défini de l'anneau $A[[X_1,X_2,\dots,X_p,Y_1,Y_2,\dots,Y_p]]$ (n°4) , peut aussi être considérée comme élément de l'anneau de séries formelles $E[[Y_1,Y_1,\dots,Y_p]]$ (n°1) : on vérifie aisément que le polynome $\sum_{i=1}^{p} D_iu.Y_i$ n'est autre que la <u>partie homogène du premier degré</u> de

$u(X_1+Y_1,\dots,X_p+Y_p)$ (ou, ce qui revient au même, de la série

$$\Delta u = u(X_1+Y_1,\dots,X_p+Y_p)-u(X_1,\dots,X_p)).$$

En raison de ce résultat et de la formule (6), on note souvent le polynome $\sum_{i=1}^{p} D_i u.Y_i$ par rapport aux Y_i , $du(X_1,\dots,X_p;Y_1,\dots,Y_p)$.

PROPOSITION 6.- Soient f une série formelle de l'anneau $A[[X_1,X_2,\dots,X_p]]$, u_i $(1\leqslant i\leqslant p)$ p séries formelles sans terme constant de l'anneau $A[[Z_1,Z_2,\dots,Z_q]]$; si on pose $h=f(u_1,u_2,\dots,u_p)$, on a

(7) $$dh = \sum_{i=1}^{p} D_i f(u_1,u_2,\dots,u_p).du_i \quad .$$

En effet, la partie homogène du premier degré de la série formelle $\Delta h=f(u_1+\Delta u_1,\dots,u_p+\Delta u_p)-f(u_1,\dots,u_p)$ par rapport aux T_j $(1\leqslant j\leqslant q)$ (avec $\Delta u_i=u_i(Z_1+T_1,\dots,Z_q+T_q)-u_i(Z_1,\dots,Z_q)$) est identique à celle de la série $df(u_1,\dots,u_p\ ;\ \Delta u_1,\dots,\Delta u_p)$, puisque les Δu_i n'ont pas de terme constant ; d'où aussitôt la proposition.

Exercices.- 1) Soit I un ensemble d'indices quelconque ; montrer que le monoïde additif $\mathbb{N}^{(I)}$ (§1,n°1) satisfait à la condition (D) du chap.II, §7,n°10 ; l'algèbre large de ce monoïde par rapport à un anneau commutatif A ayant un élément unité, se note $A[[X_\iota]]_{\iota\in I}$, et s'appelle encore l'algèbre des séries formelles à coefficients dans A , par rapport aux indéterminées X_ι . L'ordre d'une série formelle $\neq 0$ étant encore défini comme le plus petit des degrés totaux de ses termes $\neq 0$, montrer que si A est un anneau d'intégrité, $A[[X_\iota]]_{\iota\in I}$ est un anneau d'intégrité, et que la relation (3) est vérifiée.

2) Pour qu'une série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n X^n$ sur un corps K soit le développement d'une fraction rationnelle de $K(X)$, il faut et il suffit qu'il existe une suite finie $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ d'éléments de K et un entier n_0 tels que, pour tout $n\geqslant n_0$ on ait

$$\lambda_1 a_{n+1}+\lambda_2 a_{n+2}+\ldots+\lambda_p a_{n+p}=0 .$$

3) Soient $a_1,a_2,\ldots,a_p$ des entiers >0 ; on désigne par α_n le nombre de suites finies $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ d'entiers $\geqslant 0$ satisfaisant à l'équation

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_px_p=n .$$

Montrer que la série formelle $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n X^n$ (sur le corps $\mathbb{Q}$) est le développement de la fraction rationnelle de $\mathbb{Q}(X)$

$$\frac{1}{(1-X^{a_1})(1-X^{a_2})\ldots(1-X^{a_p})}$$

4) Soit F une ensemble fini d'entiers >0 , et soit β_n le nombre des suites finies (x_i) (de n termes au plus) dont tous les termes appartiennent à F , et qui sont telles que $\sum\limits_i x_i=n$. Montrer que la série formelle $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\beta_n X^n$ sur $\mathbb{Q}$ est le développement de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{1-X^{a_1}-X^{a_2}-\ldots-X^{a_p}}$$

$(a_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ désignant la suite des éléments de F , rangés dans l'ordre croissant.

5) Trouver le développement en série formelle de la fraction rationnelle $1/(1-X)^p$ dans le corps $\mathbb{Q}((X))$ (procèder par récurrence sur p). Quel est son développement dans un corps dont la caractéristique divise p ?

6) Soit E un espace vectoriel ayant une base infinie sur un corps K de caractéristique 2 ; soit A l'algèbre extérieure $\bigwedge(E)$ de cet espace, qui est un anneau commutatif ayant un élément unité. Donner un exemple de série formelle $u\in A[[X]]$ telle que $u^2=0$, mais qu'il n'existe aucun élément $\gamma\neq 0$ de A tel que $\gamma u=0$ (cf. § 1,exer.12).
