RAPPORT SUR LES APPLICATIONS UNIVERSELLES

Rédaction n° 041

Nombre de pages : 13

Nombre de feuilles : 13

Rapport sur les applications universelles

41

A 41 2

Commentaire

Le rédacteur s'est efforcé de suivre au plus près l'esprit de l'appendice du Chapitre III. Après plusieurs essais assez canularesques de définir la notion de structure induite, il s'est résolu à la caractériser axiomatiquement. Il pense (ce qui n'est pas nouveau ! programme d'Erlangen !) qu'une structure T n'est jamais complètement définie sans les "T-applications" . Il a conservé les 3 axiomes de Weil (A_1, A_2, A_3), et s'est inspiré de la définition de la topologie induite pour axiomatiser la notion de structure induite en termes de T-applications (I_1 , I_2) .

Il a remarqué que la méthode de solution des "problèmes (U)" par considération d'un énorme ensemble produit, conduit aussi à des solutions (et des conditions de possibilité) de nombreux problèmes d'immersion.

Comme application le rédacteur a traité la théorie de Markoff des groupes topologiques libres, où le mécanisme de la construction se laisse bien voir. Le principe général est d'obtenir des informations sur le groupe topologique libre en se servant d'applications continues dans des groupes classiques. Il a l'impression que les résultats de Markoff sont assez triviaux et faciles à obtenir : le résumé de deux pages contenant l'essentiel du mémoire de Markoff (et deux ou trois compléments), sans qu'il ait été besoin de passer sous silence autre chose que des démonstrations très faciles.

A 41

RAPPORT sur les APPLICATIONS UNIVERSELLES

T-applications - Structure induite.

Etant donnée une espèce de structure T_1 il arrive en général que l'on ait défini, pour tout couple d'ensembles E_1 et E_2 à structure T , une famille d'applications de E_1 dans E_2 , appelées <u>T-applications</u>, qui satisfont les axiômes suivants :

A_1 : Tout T-isomorphisme est une T-application

A_2 : L'application composée de deux T-applications est une T-application.

A_3 : Pour qu'une application biunivoque f de E_1 sur E_2 soit un T-isomorphisme, il faut et il suffit que f et f^{-1} soient des T-applications.

Dans une telle situation soient σ et σ' deux structures T définies sur E et sur $E' \subset E$ respectivement. Nous dirons que σ' est <u>induite</u> par σ lorsque :

I_1 : L'injection de E' dans E est une T-application.

I_2 : Si $f : F \to E$ est une T-application, et si $f(F) \subset E'$, alors f , considérée comme application de F dans E' est une T-application.

Ces deux conditions, jointes à l'axiome A_3 , montrent immédiatement l'unicité de la structure induite.

Si $E' \subset E$ peut être muni d'une structure induite nous dirons que E' est <u>T-stable</u>. Nous supposerons vérifiés les axiomes suivants :

S_1 : Un sous-ensemble de E formé de tous les éléments pour lesquels une famille de T-applications prennent la même valeur est T-stable.

S_2 : Toute intersection d'ensembles T-stables est T-stable.

(S_2 est une conséquence de S_1 si on admet des T-applications non partout définies).

Il est clair que la notion de sous-ensemble T-stable est <u>transitive</u>.

L'axiome S_2 nous permet de définir la T-<u>fermeture</u> $\overline{E}'$ d'un sous-ensemble E' de E comme étant l'intersection de tous les sous ensembles T-stables contenant E'. Nous supposerons :

S_3 : Puissance $\overline{E}' \leqslant$ une certaine fonction de la puissance de E', fonction qui ne dépend que de la structure T.

Dans la plupart des applications la fonction : "puissance $(P(P(E')) \times Z)$" sera suffisante.

<u>Les axiomes du produit</u>.

Dans de nombreux et importants exemples de structures on peut, étant donnée une famille (E_α) d'ensemble munis de structures T, définir, sur l'ensemble produit $\pi_\alpha E_\alpha$ une structure T qui satisfait les axiomes suivants :

P_1 : Les projections (sur les composantes) sont des T-applications.

P_2 : Si les applications $f_\alpha : E \to E_\alpha$ sont des T-applications, l'application $f : E \to \pi_\alpha E_\alpha$ définie par $f(x) = (f_\alpha(x))$ est une T-application.

Il résulte de P_1 et P_2 que les projections sur les produits partiels sont des T-applications. D'après S_1 ces produits partiels sont T-stables.

<u>Les problèmes "U"</u>.

Supposons que nous nous soyons donné deux espèces de structures S et T, et que nous ayons défini, outre les T-applications, des applications des ensembles S dans les ensembles T que nous appellerons <u>(S-T)-applications</u>. Nous supposerons que :

(S-T) : Toute application composée $f \circ \varphi$ d'une (S-T)-application φ et d'une T-application f est une (S-T)-application .

Nous nous proposons d'associer à tout ensemble E muni d'une structure S , un ensemble F_o muni d'une structure T , et une (S-T)-application φ_o de E dans F_o tels que

(U_1) Toute (S-T)-application φ de E dans un ensemble F à structure T est de la forme : $\varphi = f \circ \varphi_o$, où f est une T-application de F_o dans F .

Il est clair que, si F_o existe, la T-fermeture de $\varphi_o(E)$ dans F_o satisfera aussi à (U_1). Donc, d'après S_1 , il existera un couple (φ_o, F_o) tel que :

(U_2) Deux T-applications de F_o dans F qui coïncident sur $\varphi_o(E)$ sont identiques.

On en déduit immédiatement, en appliquant A_3, qu'un couple (F_o;φ_o) satisfaisant (U_1) et (U_2) est <u>déterminé de manière unique</u>, à un isomorphisme près, par la donnée de E .

Nous sommes donc ramenés à montrer l'<u>existence</u> d'un couple (F_o,φ_o) satisfaisant (U_1). C'est en cela que consiste ce qu'on peut appeler une "<u>recherche d'applications universelles</u>" ou "problème (U)" . La solution du problème (U) semble inabordable dans le cas de structures S et T les plus générales. Nous pouvons cependant en donner une solution lorsque les structures S et T et les T et (S-T)-applications satisfont des conditions assez générales. Outre les conditions A_1, A_2, A_3, S_1, S_2, S_3 nous supposerons vérifiés les axiomes du produit pour la structure T , et le dernier axiome suivant :

P_3 : Si les applications $\varphi_o : E \to E_\alpha$ sont des (S-T)-applications, l'application φ de E dans $\pi_\alpha F_\alpha$ définie par $\varphi(x) = (\varphi_\alpha(x))$ est une (S-T)-application.

6

Dans ce cas le problème (U) admet la solution suivante.

Considérons l'<u>ensemble</u> de toutes les (S-T)-applications de E dans tous les ensembles F à structure T dont la puissance n'excède pas celle indiquée en S_3 (puissance $(P(P(E)))\times Z)$ en général). Soit $\{\varphi_\alpha\}$ cet ensemble, φ_α appliquant E dans F_α. Nous considèrerons, dans le produit $\pi_\alpha F_\alpha$ l'ensemble F'_o composé des éléments de la forme $(\varphi_\alpha(x))$, et noterons F_o la T-fermeture de F'_o dans $\pi_\alpha F_\alpha$. Soit φ_o l'application $x \longrightarrow (\varphi_\alpha(x))$ de E dans F_o.

F_o est un ensemble à structure T par construction, et φ_o est une (S-T)-application d'après P_3, I_2 et (S-T). Si φ est une (S-T)-application d'après P_3, I_2 et (S-T). Si φ est une (S-T)-application de E dans F, soit F' la T-fermeture de $\varphi(E)$ dans F, i l'injection de F' dans F. D'après S_3 et I_2 et (S-T) la restriction φ' de φ, application de E dans F', est parmi les φ_α ; soit φ_{α_o}. Soit π_o la projection de $\pi_\alpha F_o$ sur F_{α_o}. Nous pouvons écrire :

$\varphi = i\circ\varphi' = i\circ\varphi_{\alpha_o} = i\circ\pi_o\circ\varphi_o$. Puisque $i\circ\pi_o$ est une T-application de $\pi_\alpha F_\alpha$ dans F, sa restriction f à F_o est aussi une T-application (I_1, A_2). Puisque $\varphi = f\circ\varphi_o$ le problème est résolu.

Remarquons que (F_o, φ_o) satisfait aussi la condition (U_2).

<u>Exemples</u>.

La méthode ci-dessus s'applique à tous les exemples donnés dans la rédaction précédente à l'exception de celui du corps des fractions d'un anneau d'intégrité (un produit de corps n'étant pas un corps).

Nous traiterons ici le cas de la <u>complétion d'un espace uniforme</u>.

S est l'espèce des structures uniformes séparées, T l'espèce des structures uniformes d'espace séparé et complet, les T- et (S-T)-applications sont les uniformément continues. Tous nos axiomes sont satisfaits. Nous allons montrer que φ_o est un isomorphisme de de l'espace uniforme E sur l'espace uniforme $\varphi_0(E)$. Considérons en effet la famille $\mathcal{E}$ de tous les écarts uniformément continus sur E . Puisque la droite numérique est un espace complet la fonction f définie en fixant un des arguments dans l'écart g est parmi les f_α. Etant donné que la structure uniforme de E peut être définie par une famille d'écarts (th.1, par.1, ch.IX) nous voyons immédiatement que

Si $\{f_\beta\}$ est le sous-ensemble de $\{f_\alpha\}$ composé de toutes les applications déduites d'écarts et π la projection de $\pi_\alpha F_\alpha$ sur $\pi_\beta F_\beta$, l'application $\pi \circ \varphi_0$ est un isomorphisme -

Donc φ_0 est biunivoque et $\varphi_0^{-1} = (\pi \circ \varphi_0)^{-1} \circ \pi$ est uniformément continue. Donc φ_0 est un isomorphisme.

Par définition de la "T-fermeture" (plus petit sous-espace complet, c'est-à-dire fermé) nous voyons aussi que $\varphi_0(E)$ est partout dense dans l'espace complet F_0 . Nous avons donc démontré à nouveau l'existence et l'unicité de la complétion d'un espace uniforme séparé (à condition d'avoir défini la droite numérique sans complétion, par exemple par coupures !).

Lorsque E est un espace uniforme non séparé on vérifie facilement que $\varphi_0(E)$ est l'espace séparé associé.

Les problèmes d'immersion.

Il arrive souvent que la structure T soit "plus riche" que la structure S , c'est-à-dire qu'il existe un procédé canonique pour munir d'une structure S un ensemble déjà muni d'une structure T . Dans un exemple où il est possible de munir $\varphi_0(E)$ d'une structure S induite par la structure S de F_0 , le problème suivant se pose : "est-ce que φ_0 est un isomorphisme pour la structure S " . Dans ce cas le problème

(U) se complète d'un "problème d'immersion" : est-il possible de considérer E comme un sous-ensemble de F dont la structure S est induite par la structure S de F canoniquement déduite d'une structure T. Nous supposerons qu'une T-application est aussi une S-application pour les structures S déduites. Appliquant A_3 (pour S) nous en déduisons que les opérations "structure induite" et "structure déduite" commuttent.

Si $\varphi_o(E)$ peut être muni d'une structure S induite par celle de F_o et si φ_o est un S-isomorphisme, le problème d'immersion est résolu par (F_o,φ_o). Si réciproquement on a une solution (F,φ) du problème d'immersion, φ étant une (S-T)-application, nous pouvons écrire : $\varphi = f\circ\varphi_o$, f étant une T-application de F_o dans F. Alors φ est un S-isomorphisme, $f|\varphi_o(E)$ et φ_o des S-applications. Les axiomes A_2 et A_3 (pour S) montrent donc que $f|\varphi_o(E)$ et φ_o sont des S-isomorphismes. Par conséquent le couple (F_o, φ_o) donne aussi une solution du problème d'immersion.

Nous pouvons donc considérer F comme un ensemble quotient de F_o , les ensembles $\{a\}$ $(a \in \varphi_o(E))$ étant des classes d'équivalence. Le fait que cette identification n'est pas toujours triviale (et donc que le problème d'immersion n'admet pas toujours une solution unique) est montré par l'exemple de la compactification de Cech.

En résumé nous pouvons dire que :

Une condition nécessaire et suffisante pour que le problème d'immersion de E soit possible est que φ_o soit un S-isomorphisme.

Exemples.

1) Caractérisation des espaces uniformisables.

Les structures S et T sont les structures d'espace topologique et d'espace compact respectivement. Les S,T et (S-T)-applications sont les applications continues. Si $\mathcal{C}$ est la topologie donnée sur E et $\mathcal{C}'$ celle induite sur $\varphi_o(E)$ par celle de l'espace produit, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}_o = \overset{-1}{\varphi_o}(\mathcal{C}')$ sont uniformisables. En général $\mathcal{C}$ est plus fine que $\mathcal{C}_o$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{C}$ soit uniformisable est que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_o$ (alors F_o est la compactification de Cech de E).

Utilisant le fait que tout compact peut être immergé dans un cube on montre sans difficulté que cette condition est équivalente à la omplète régularité de E (cf. P. Samuel "Ultrafilters and compactification of uniform spaces").

2) Espace séparé d'Alexandroff ("Bikompakte Erweiterungen von Raümen" Sbornik - 1939). S : espace topologique. T : espace séparé - Applications : continues.- Alors $\varphi_o(E)$ est un espace quotient séparé de E ("Le plus grand possible").

Remarque.

Il peut arriver que, dans certains cas où tous nos axiomes ne sont pas satisfaits (notamment celui (S_ε) relatif aux intersections d'ensembles T-stables), on puisse cependant construire φ_o, tout en obtenant un trop grand F_o.

1) S : anneau - T : anneau semi simple. Applications : ~~hrx~~ homomorphismes dans . Dans ce cas $\overset{-1}{\varphi_o}(\{0\})$ est le radical d'extension $\mathcal{R}$ de l'anneau E (cf : O.Goldman : "Semi-simple extensions of rings" - Bull. AMS - january 1947). Si $\mathcal{R} = \{0\}$, E peut être immergé dans

un anneau semi-simple et réciproquement. La structure de R s'obtient en étudiant un nombre suffisant d'homomorphismes de E dans des anneaux semi-simples. Soit $\mathfrak{a}$ l'idéal bilatère $T \cap \bigcap_p pE$ (T : idéal des éléments d'ordre fini du groupe additif de E - p : entier premier). Tout anneau semi-simple étant contenu dans un produit d'anneaux complets de matrices sur des corps, il est clair que $\varphi(\mathfrak{a}) = \{0\}$ pourtant homomorphisme φ de E dans un semi-simple. Donc $\mathfrak{a} \subset R$

D'autre part les anneaux E/pE et $E/T \otimes Q$ sont des algèbres sur les corps premiers, donc des sous-anneaux de semi-simples (adjoindre éventuellement un élément unité - représentation régulière alors) - Donc $R \subset pE$, $R \subset T$. Donc $R = \mathfrak{a}$.

2) Si l'on restreint en outre les (S-T)-applications à être des homomorphismes <u>sur</u> les anneaux semi-simples, alors $\overset{-1}{\varphi_0}(\{0\})$ est le <u>radical</u> de E .

<u>Remarque</u>.

Dans la situation duale, où l'on s'intéresse aux applications des ensembles à structure "riche" T dans les ensembles à structure "pauvre" S , le même genre de construction (considérer F_0 comme un sous-ensemble d'un certain produit) est appliqué : par rexemple la construction donnée par CHEVALLEY de la variété universelle de recouvrement ("Theory of Lie Groups" - page 54). Mais ici la situation est plus délicate et demande un changement de topologie pour F_0 .

Sur les groupes topologiques libres

A titre d'illustration de la méthode de construction universelle, nous allons esquisser un traitement de la théorie des groupes topologiques libres (Markoff. Bull. Ac. Aci. U.R.S.S. - t.IX, 1945, p.3-64).

S : structure d'espace topologique

T : structure de groupe topologique séparé (abélien, précompact si l'on veut).

(S-T)-applications : continues

Tous nos axiomes sont satisfaits.

Nous appliquons la construction précédente et obtenons pour F_0 un groupe topologique séparé (abélien, précompact, noté $G(E)$ ($GA(E)$, $GC(E)$).

$G(E)$ est par construction tel que :

1) Pour toute application continue f de E dans un groupe topologique séparé G, il existe une représentation continue g de $G(E)$ dans G telle que : $f = g \circ \varphi_0$.

2) Deux représentations continues de $G(E)$ dans un groupe H qui coïncident sur $\varphi_0(E)$ sont identiques. D'où l'unicité de $G(E)$

$\varphi_0(E)$ engendre $G(E)$ - Mêmes propriétés pour $GA(E)$ et ~~ex~~ $GC(E)$

L'unicité montre que $GA(E) \cong G(E)/C$ (C étant l'adhérence du SG des commutateurs de $G(E)$).

Si E est discret $G(E)$ et $GA(E)$ sont les classiques groupe libre et groupe abélien libre engendrés par l'ensemble E.

TH. 1 : La condition nécessaire et suffisante pour que les φ_0 soient des homéomorphismes est que E soit complètement régulier. Les structures induites sur $\varphi_0(E)$ sont alors la structure universelle ($G(E)$, $GA(E)$) et la structure de Čech ($GC(E)$)

Nécessité : clair. Suffisante : se servir du fait qu'on a suffisamment d'applications continues de E dans R et dans T .

<u>Th. 2</u> - <u>Si</u> E' <u>est un sous-espace de E complètement régulier</u>, G(E'), GA(E'), GC(E') <u>sont algèbriquement isomorphes à des</u> SG <u>de</u> G(E) , GA(E), GC(E) <u>et munis de topologies plus fines</u>.

Etendre l'injection i : $E' \to E$. D'où $g : G(E') \to G(E)$. On montre que g est biunivoque en prouvant que, étant donné un mot $\prod_i a_i^{n_i}$ ($a_i \in E$), il existe un groupe topologique G et une application continue f de E' dans G telle que $\prod_i f(a_i)^{n_i} \neq 1$. On peut prendre, par exemple, pour G le groupe orthogonal $O_3[R]$ qui contient des groupes libres à autant de générateurs que l'on veut, et qui est connexe par arcs. Pour GA(E') on peut prendre un R^n comme corollaires.

a) <u>G(E) et GC(E)</u> (resp. GA(E)) <u>ont la structure algèbrique du groupe libre</u> (resp : abélien libre) <u>engendré par l'ensemble</u> E .

b) <u>Le SG des commutateurs C de G(E) est fermé</u>. <u>GA(E) $\approx$ G(E)/C</u>

c) $\varphi_0(E)$ <u>est un sous-espace fermé de G(E)</u> (et les deux analogues) (Plonger E dans un compact).

d) <u>Tout groupe libre est algèbriquement isomorphe à un SG d'un groupe compact</u>.

e) <u>La topologie de</u> G(E) <u>est plus fine que celle de</u> GC(E).

Lorsque E est connexe, le sous-groupe A de G(E) (resp. GA(E) , GC(E)) formé des mots de degré total 0 est la composante connexe de l'identité dans G(E). Si E est compact, A est réunion dénombrable de compacts.

Si $E \subset E'$, G(E') est topologiquement isomorphe à un SG de G(E) dans les cas suivants

a) E' est un rétracte de E .

b) E est la complétion universelle de E' .

c) E' est fermé dans E normal.

(Tient à ce que l'on peut étendre à E les applications continues de E' dans un nombre suffisant de groupes).

contre exemple : E' discret non dénombrable - E : sa compactification de Lech (considérer le SG des mots de degré total o).

Les "schèmes de markoff"

Par schème nous entendrons un ensemble S de mots formés à partir d'éléments de E . Nous considèrerons les applications continues $\{f_\gamma\}$ de E dans des groupes séparés telles que $\prod_i f_\gamma(a_i)^{n_i} = 1$ pour tout mot $\prod_i a_i^{n_i} \in S$. f_γ est appelée une réalisation du schème S .

Nous appliquons la construction universelle à ces applications f_γ (avec l'usuelle restriction sur les puissances) : nous formons le produit partiel $\prod_\gamma G_\gamma$ de $\prod_\alpha G_\alpha$ et construisons le sous-groupe GS(E) engendré par les éléments $(f_\gamma(x))$ $(x \in E)$. Soit φ_S l'application $x \to (f_\gamma(x))$. Il est clair que toute réalisation f du schème S peut s'écrire $f = g \circ \varphi_S$, où g est une représentation continue de GS(E) . D'autre part un tel couple $(GS(E), \varphi_S)$ est unique. Si H représente l'adhérence du sous-groupe invariant de G(E) engendré par les mots de S , $GS(E) \approx G(E)/H$ (d'après l'unicité).

Si S est l'ensemble des commutateurs on obtient GA(E) - G(E) est défini par le schème vide.

Lorsque E est muni d'une structure de groupe topologique, nous prendrons pour Schème S la "table de multiplication" de E . Un couple ayant les propriétés de $(GS(E), \varphi_S)$ étant (E, identité), on déduit de l'unicité :

Tout groupe topologique E est isomorphe à un groupe quotient du groupe topologique libre engendré par l'espace sous-jacent de E .

En prenant pour E l'ensemble somme topologique de deux groupes topologiques (avec éléments neutres identifiés) et pour S la réunion des tables de multiplication, on obtient le produit topologique libre des deux groupes.