LIVRE II
ALGEBRE
CHAPITRE III (ETAT 4)
ALGEBRE MULTILINEAIRE

Rédaction n° 040

Nombre de pages : 98

Nombre de feuilles : 98

Algèbre Chapitre III Etat 4

Algèbre multilinéaire

40

A 40

2

LIVRE II

ALGEBRE

CHAPITRE III (Etat 4)

ALGÈBRE MULTILINÉAIRE

Sommaire

§ 4. Déterminants et p-vecteurs décomposables : 1. Définition des déterminants. 2. Calcul d'un déterminant. 3. Mineurs d'une matrice. 4. Développements d'un déterminant. 5. Systèmes libres et p-vecteurs décomposables. 6. Application à la résolution des équations linéaires. 7. Sous-espaces vectoriels et p-vecteurs décomposables. 8. Caractérisation des p-vecteurs décomposables.

§ 5. Dualité dans l'algèbre extérieure. 1. Dual d'une puissance antisymètrique. 2. Les isomorphismes canoniques entre p-vecteurs et (n-p)-formes. 3. Produit intérieur d'un p-vecteur et d'une q-forme.

Commentaire

Le rédacteur a suivi de son mieux le plan établi au Congrès de Juin 1945. Au début du § 3, il a simplement cherché à rattacher la définition des opérateurs de symétrie aux notions générales du chap.I, § 7 sur l'extension des groupes d'opérateurs, ce qui enlève le caractère un peu arbitraire de cette définition.

En ce qui concerne le plan du chapitre, le rédacteur suggère la modification suivante : mettre le § 2 immédiatement après le n°8 du § 1, puis faire un nouveau § avec les nos 9-14 du § 1 actuel ; de cette façon, tout ce qui concerne les tenseurs serait rapp-roché du § 3, ce qui est normal puisque, dans les deux cas, il s'agit toujours de produit tensoriel de modules tous identiques, alors que dans le § 2 actuel on s'occupe de nouveau du produit tensoriel de modules différents.

D'autre part, le chapitre actuel étant sensiblement plus court que la dimension des autres fascicules Bourbaki, le rédacteur suggère, pour la publication, de lui adjoindre le chapitre IV (Polynomes) qui ne devrait pas dépasser 40 pages avec le nouveau plan adopté en Juin.

Enfin, des travaux récents de Jacobson conduisent à penser qu'il pourrait être utile de parler aussi du produit tensoriel de 2 modules E,F sur des anneaux <u>non commutatifs</u> A,B (en général distincts) ; un tel produit est un <u>bimodule</u> sur A (à gauche) et sur B (à droite par exemple). Pour le définir, il faut naturellement avoir défini les bimodules, qui ont été expulsés du chap.II. On peut alors procéder comme au n°2 du § 1, en considérant d'abord le produit tensoriel $C=A\otimes B$ des anneaux A et B (algèbres sur $\mathbb{Z}$), sur lequel on définit immédiatement une structure de A-module à gauche et de B-module à droite, puis on considère la somme directe $G=C^{(E\times F)}$ de ces bimodules, et on continue exactement comme au § 1,n° 2 (N est naturellement un bimodule). Comme cela est nettement plus compliqué que le texte actuel, s'en sert et n'a apparemment que des applications plus restreintes, le rédacteur propose de faire un Appendice au chap.III, où serait définie la notion de bimodule, puis le produit tensoriel généralisé précédent ; on pourrait aussi y remettre le fait (expulsé du chap.III) qu'un bimodule peut toujours être considéré comme module (ordinaire) sur le produit tensoriel des anneaux d'opérateurs (résultat qui est au moins aussi utile que le produit tensoriel de Jacobson) .

LIVRE II

ALGÈBRE

CHAPITRE III (Etat 4)

ALGÈBRE MULTILINÉAIRE

§ 1. Produits tensoriels et tenseurs.

1. Fonctions multilinéaires.

DEFINITION 1.- Soient A un anneau commutatif ayant un élément unité, $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ un ensemble produit de n A-modules unitaires E_i, F un A-module unitaire. On dit qu'une application f de E dans F est une application multilinéaire de degré n (ou une application n-linéaire) si, quels que soient l'indice i, et les n-1 éléments $a_k \in E_k$ $(k \neq i)$, l'application partielle

$$x_i \to f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

de E_i dans F, engendrée par f, est une application linéaire.

Si par exemple n=2, la déf.1 signifie que f doit satisfaire aux identités suivantes

$$(1) \quad \begin{cases} f(a_1, x_2+y_2) = f(a_1, x_2)+f(a_1, y_2) \\ f(x_1+y_1, a_2) = f(x_1, a_2)+f(y_1, a_2) \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} f(a_1, \alpha x_2) = \alpha f(a_1, x_2) \\ f(\alpha x_1, a_2) = \alpha f(x_1, a_2) \end{cases}$$

Une fonction multilinéaire de degré 2 (resp.3) est dite bilinéaire (resp. trilinéaire).

Exemples.- L'application $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to x_1 x_2 \ldots x_n$ de A^n dans A est une application n-linéaire ; il en est de même de l'application $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to x_1 x_2 \ldots x_n$ de E^n dans E lorsque E est une algèbre (chap.II, § 7) sur A .

La déf. 1 entraîne en particulier que

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) = 0$$

quels que soient $a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_n$.

Lorsque chacun des x_i est une combinaison linéaire

$$x_i = \sum_{\lambda_i\in L_i} \alpha_{i,\lambda_i} a_{i,\lambda_i} \qquad (1\leqslant i\leqslant n)$$

il résulte de la déf. 1 qu'on a

$$(3)\quad f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum_{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\prod_{i=1}^{n} L_i} \alpha_{1,\lambda_1}\alpha_{2,\lambda_2}\dots\alpha_{n,\lambda_n} f(a_{1,\lambda_1},a_{2,\lambda_2},\dots,a_{n,\lambda_n}) .$$

En particulier, si pour chaque indice i, les a_{i,λ_i} $(\lambda_i\in L_i)$ forment une <u>base</u> de E_i , et si on se donne arbitrairement une famille $(y_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n})$ $((\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\prod_{i=1}^{n} L_i)$ d'éléments de F , il existe une application multilinéaire f et une seule de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ dans F , telle que $f(a_{1,\lambda_1}, a_{2,\lambda_2},\dots,a_{n,\lambda_n}) = y_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}$ pour toute suite d'indices $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$.

Si f et g sont deux applications multilinéaires de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ dans F , il est clair que $f+g$ et αf $(\alpha\in A)$ sont encore des applications multilinéaires de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ dans F ; autrement dit, les applications multilinéaires de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ dans F forment un A-<u>module</u> , qu'on note $\mathcal{L}_n(\prod_{i=1}^{n} E_i,F)$. Si, pour chaque indice i $(1\leqslant i\leqslant n)$, $(a_{i,\lambda_i})_{\lambda_i\in L_i}$ est une base de E_i, il résulte de ce qui précède que le A-module $\mathcal{L}_n(\prod_{i=1}^{n} E_i,F)$ est <u>isomorphe au module produit</u> F^L , où $L = \prod_{i=1}^{n} L_i$.

DEFINITION 2.- <u>On appelle forme multilinéaire de degré</u> n (<u>forme bilinéaire</u> si $n=2$, <u>forme trilinéaire</u> si $n=3$) <u>une application multilinéaire de</u> $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ <u>dans l'anneau</u> A , <u>considéré comme</u> A-<u>module</u>.

D'après ce qui précède, les formes multilinéaires sur E forment un A-module ; si chacun des modules E_i possède une base $(a_{i,\lambda_i})_{\lambda_i\in L_i}$ ce module est isomorphe au module produit A^L , où $L = \prod_{i=1}^{n} L_i$.

Remarque.- On peut généraliser la notion d'application multilinéaire au cas où l'anneau d'opérateurs A des E_i est non commutatif ; mais cette généralisation n'a pas d'intérêt dans la plupart des cas. En effet, en considérant par exemple le cas où n=2 , on doit avoir, quels que soient $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, et les opérateurs α, β , $f(\alpha x_1, \beta x_2)=(\alpha\beta)f(x_1,x_2)=(\beta\alpha)f(x_1,x_2)$, donc $f(x_1,x_2)$ doit appartenir au sous-module de F annulé par tous les éléments $\alpha\beta-\beta\alpha$ de A ; et ce sous-module se réduira à 0 dans la plupart des cas importants (par exemple si on prend F=A et si A n'a pas de diviseur de 0).

On peut toutefois définir dans ce cas une notion de forme bilinéaire, en modifiant les conditions (2) (voir chap.VIII).

2. Produit tensoriel de deux modules.

Nous allons voir qu'on peut ramener la notion d'application multilinéaire à celle d'application linéaire, grâce à la notion de produit tensoriel.

Considérons en premier lieu deux A-modules unitaires quelconques E et F ; nous allons montrer qu'il existe un A-module M , et une application bilinéaire φ de $E\times F$ dans M , telle que, si f est une application bilinéaire de $E\times F$ dans un A-module quelconque N , il existe une application linéaire g de M dans N telle que $f=g\circ\varphi$.

Remarquons d'abord que, si M possède cette propriété, le sous-module M_1 de M , engendré par l'ensemble $\varphi(E\times F)$ la possède également (en restreignant l'application g au sous-module M_1) ; on peut donc se borner au cas où l'on impose en outre à M la condition d'être engendré par $\varphi(E\times F)$, c'est-à-dire identique à l'ensemble des combinaisons linéaires (chap.II, §1,n°6) des éléments de $\varphi(E\times F)$; dans ce cas, l'application linéaire g telle que $f=g\circ\varphi$ est alors déterminée de façon unique par l'application bilinéaire f. Nous allons voir en outre que si un tel module M existe, il est <u>unique</u> à une isomorphie près ; de façon précise :

PROPOSITION 1.- <u>Soient M_i ($i=1,2$) deux A-modules tels qu'il existe une application bilinéaire φ_i de $E\times F$ dans M_i ayant les propriétés suivantes : 1° M_i est engendré par $\varphi_i(E\times F)$; 2° si f est une application bilinéaire de $E\times F$ dans un A-module quelconque N, il existe une application linéaire g_i de M_i dans N, telle que $f=g_i\circ\varphi_i$. Dans ces conditions, il existe un isomorphisme u de M_1 sur M_2 tel que $\varphi_2=u\circ\varphi_1$.</u>

En effet, en prenant pour N le module M_2, on voit qu'il existe une application linéaire h_1 de M_1 dans M_2 telle que $\varphi_2=h_1\circ\varphi_1$; de même, il existe une application linéaire h_2 de M_2 dans M_1 telle que $\varphi_1=h_2\circ\varphi_2$; on en déduit que $\varphi_1=(h_2\circ h_1)\circ\varphi_1$, où $h_2\circ h_1$ est une application linéaire de M_1 dans lui-même ; comme $\varphi_1(E\times F)$ engendre M_1, on déduit de la relation précédente que, pour tout $z\in M_1$, $z=h_2(h_1(z))$; autrement dit $h_2\circ h_1$ est l'application <u>identique</u> de M_1 sur lui-même ; de la même manière, on voit que $h_1\circ h_2$ est l'application identique de M_2 sur lui-même, ce qui prouve (<u>Ens</u>. R, §2, n°12) que h_1 est une application biunivoque de M_1 sur M_2 et h_2 l'application réciproque, d'où la proposition.

Nous allons maintenant montrer qu'il existe effectivement un module M remplissant les conditions voulues. Considérons le A-module $G=A^{(E\times F)}$, somme directe d'une famille de modules identiques à A, l'ensemble d'indices de cette famille étant $E\times F$ (chap.II, §1,n°7). Pour chaque élément $(x,y)\in E\times F$, soit $u_{x,y}$ l'élément de G dont toutes les coordonnées sont nulles, à l'exception de celle d'indice (x,y), égale à l'élément unité de A ; ces éléments forment donc la <u>base canonique</u> (chap.II, §1,n°8) de G. Si ψ désigne l'application $(x,y)\to u_{x,y}$

de $E\times F$ dans G , G est <u>engendré</u> par $\psi(E\times F)$.

Considérons maintenant un A-module <u>quelconque</u> N , et une application <u>quelconque</u> f de $E\times F$ dans N ; il existe une application <u>linéaire</u> et une seule g de G dans N , telle que $g(u_{x,y})=f(x,y)$ pour tout couple $(x,y)\in E\times F$ (chap.II, § 2,n°4) ; autrement dit, l'application $g\rightarrow g\circ\psi$ est un isomorphisme du module $\mathcal{L}(G,N)$ des applications <u>linéaires</u> de G dans N sur le module $N^{E\times F}$ de <u>toutes</u> les applications de $E\times F$ dans N .

Cherchons à quelles applications linéaires g de G dans N correspondent dans cette isomorphie les applications <u>bilinéaires</u> f de $E\times F$ dans N . Pour que f soit bilinéaire, il faut et il suffit qu'on ait identiquement

$$g(u_{x_1+x_2,y})=g(u_{x_1,y})+g(u_{x_2,y}) \quad , \quad g(u_{x,y_1+y_2})=g(u_{x,y_1})+g(u_{x,y_2})$$

$$g(u_{x,\alpha y})=\alpha g(u_{x,y}) \quad , \quad g(u_{\alpha x,y})=\alpha g(u_{x,y}) .$$

Mais comme g est <u>linéaire</u>, ces conditions expriment que g est <u>nulle</u> dans le <u>sous-module</u> H de G , indépendant de N , engendré par les éléments $u_{x_1+x_2,y}-u_{x_1,y}-u_{x_2,y}$, $u_{x,y_1+y_2}-u_{x,y_1}-u_{x,y_2}$,

$u_{\alpha x,y}-\alpha u_{x,y}$, $u_{x,\alpha y}-\alpha u_{x,y}$, où x,x_1,x_2 parcourent E , y,y_1,y_2 parcourent F , et α parcourt A . Ainsi le module des applications bilinéaires de $E\times F$ dans N correspond, par l'isomorphisme $g\rightarrow g\circ\psi$, au module des applications linéaires de G dans N , <u>nulles dans</u> H .

Mais si θ désigne l'application canonique de G sur G/H , on sait (chap.II, § 2,prop.1) que l'application $h\rightarrow h\circ\theta$ est un <u>isomorphisme</u> du module des applications linéaires de G/H dans N , <u>sur</u> le module des applications linéaires de G dans N , nulles dans H .

Si on pose $\varphi=\theta\circ\psi$, φ est une application <u>bilinéaire</u> de $E\times F$ dans G/H , et $\varphi(E\times F)$ <u>engendre</u> G/H ; en outre, toute application bilinéaire de $E\times F$ dans N se met d'une seule manière sous la forme $h\circ\varphi$, où h est une application <u>linéaire</u> de G/H dans N ; et l'application $h\to h\circ\varphi$ est un <u>isomorphisme</u> du module $\mathcal{L}(G/H,N)$ des applications linéaires de G/H dans N , <u>sur</u> le module $\mathcal{L}_2(E\times F,N)$ des applications bilinéaires de $E\times F$ dans N . Cet isomorphisme et l'isomorphisme réciproque sont dits <u>canoniques</u>.

Pour tout couple $(x,y)\in E\times F$, nous poserons $\varphi(x,y)=x\otimes y$ (ou xy si aucune confusion n'est possible), et nous dirons que cet élément de G/H est le <u>produit tensoriel</u> de x par y .

DEFINITION 3.- <u>On appelle produit tensoriel de E par F et on note</u> $E\otimes F$ <u>le module</u> G/H <u>défini ci-dessus, muni de la structure définie par l'application</u> $(x,y)\longrightarrow x\otimes y$.

On a les identités exprimant que φ est bilinéaire :

(4) $\quad (x_1+x_2)\otimes y = x_1\otimes y + x_2\otimes y , \qquad x\otimes(y_1+y_2)=x\otimes y_1+x\otimes y_2$

(5) $\quad (\alpha x)\otimes y = x\otimes(\alpha y) = \alpha(x\otimes y)$,

et en particulier $x\otimes 0=0\otimes y=0$ quels que soient x et y .

Tout élément de $E\otimes F$ peut se mettre sous la forme $\sum_i (x_i\otimes y_i)$, et est donc somme d'un nombre fini de produits tensoriels d'éléments de E et de F ; mais en général un élément de $E\otimes F$ peut se mettre <u>de plusieurs manières</u> sous une telle forme, comme le montrent les identités (4) et (5) .

<u>Remarques</u>.- 1) Si E et F sont des groupes abéliens sans opérateur, on peut toujours les considérer comme des <u>modules</u> sur l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers rationnels (chap.II, § 1, n°1) ; lorsqu'on parle du produit tensoriel $E\otimes F$ de deux tels groupes, c'est toujours du produit de leurs structures de $\mathbb{Z}$-module qu'il s'agit.

2) Le produit tensoriel de deux modules non réduits à 0 peut se réduire à 0 ; par exemple, si on considère les deux $\mathbb{Z}$-modules $E=\mathbb{Z}/(2)$ et $F=\mathbb{Z}/(3)$, on a $2x=0$ et $3y=0$ quels que soient $x\in E$ et $y\in F$; par suite $x\otimes y=3(x\otimes y)-2(x\otimes y)=(x\otimes(3y))-((2x)\otimes y)=0$ quels que soient $x\in E$ et $y\in F$.

3) On notera que l'application $(x,y)\to x\otimes y$ de $E\times F$ dans $E\otimes F$ <u>n'est pas biunivoque</u> en général, puisque pour $x\neq 0$, on a $x\otimes 0=0\otimes 0=0$; on ne peut donc considérer $E\times F$ comme une partie de $E\otimes F$.

Lorsque $T=E\otimes F$ est produit tensoriel de deux A-modules E et F, toute application linéaire f de T dans un A-module N est <u>déterminée</u> quand on connaît la valeur de $f(x\otimes y)$ pour tout couple $(x,y)\in E\times F$; et l'application $(x,y)\to f(x\otimes y)$ est bilinéaire dans $E\times F$. Réciproquement, pour définir une application linéaire de T dans N, il <u>suffit</u> de se donner une application $(x,y)\to g(x,y)$ de $E\times F$ dans N, et de vérifier que cette application est <u>bilinéaire</u>, pour être assuré qu'il existe une application linéaire et une seule f de T dans N, telle que $f(x\otimes y)=g(x,y)$ identiquement.

En particulier, il est <u>inutile</u> de vérifier que, pour $\sum_i(x_i\otimes y_i)=\sum_k(x'_k\otimes y'_k)$, on a $\sum_i g(x_i,y_i)=\sum_k g(x'_k,y'_k)$; cette relation est une conséquence de la définition du produit tensoriel, et de l'hypothèse que g est bilinéaire.

<u>3. Propriétés des produits tensoriels</u>.

PROPOSITION 2.- <u>Les produits tensoriels</u> $E\otimes F$ <u>et</u> $F\otimes E$ <u>de deux A-modules sont isomorphes</u> ("commutativité" du produit tensoriel).

En effet, on définit une application linéaire u de $E\otimes F$ dans $F\otimes E$ en posant $u(x\otimes y)=y\otimes x$ (l'application $(x,y)\to y\otimes x$ étant bilinéaire), et de même une application linéaire v de $F\otimes E$ dans $E\otimes F$ en posant

12

$v(y\otimes x)=x\otimes y$; comme $u\circ v$ et $v\circ u$ sont respectivement les applications identiques de $F\otimes E$ et de $E\otimes F$, u et v sont deux isomorphismes réciproques (dits <u>canoniques</u>) (<u>Ens</u>.R, § 2,n°12).

PROPOSITION 3.- <u>Pour tout A-module unitaire</u> E , <u>le produit tensoriel</u> $A\otimes E$ <u>est isomorphe à</u> E .

En effet, on définit une application linéaire u de $A\otimes E$ dans E en posant $u(\alpha\otimes x)=\alpha x$, et une application linéaire v de E dans $A\otimes E$ en posant $v(x)=\varepsilon\otimes x$ (ε élément unité de A) ; il est clair que $u\circ v$ est l'application identique de E , et $v\circ u$ est l'application identique de $A\otimes E$, en raison de la relation $\varepsilon\otimes(\alpha x)=\alpha\otimes x$; donc u et v sont deux isomorphismes réciproques (dits <u>canoniques</u>).

COROLLAIRE.- <u>Le produit tensoriel</u> $A\otimes A$ <u>du</u> A-<u>module</u> A <u>par lui-même</u> <u>est isomorphe à A</u> .

L'isomorphisme canonique de $A\otimes A$ sur A fait donc correspondre à l'élément $\alpha\otimes\beta$ l'élément $\alpha\beta$ de A .

Soit M un sous-module de E , N un sous-module de F ; il faut noter qu'en général, le sous-module de $E\otimes F$ <u>engendré</u> par les éléments $x\otimes y$, où x parcourt M et y parcourt N (autrement dit, l'ensemble des sommes $\sum_i(x_i\otimes y_i)$ avec $x_i\in M$, $y_i\in N$) <u>n'est pas isomorphe</u> au produit tensoriel $M\otimes N$ (cf. exerc.1). Mais on a la proposition suivante :

PROPOSITION 4.- <u>Soit</u> E <u>un</u> A-<u>module somme directe d'une famille</u> (E_λ) <u>de sous-modules</u>, F <u>un</u> A-<u>module somme directe d'une famille</u> (F_μ) <u>de sous-modules</u>. <u>Pour tout couple</u> (λ,μ) <u>d'indices, soit</u> $G_{\lambda\mu}$ <u>le sous-module de</u> $E\otimes F$ <u>engendré par les produits tensoriels</u> $x_\lambda y_\mu$ <u>où</u> x_λ parcourt E_λ <u>et</u> y_μ <u>parcourt</u> F_μ . <u>Le module</u> $E\otimes F$ <u>est somme directe de la famille</u> $(G_{\lambda\mu})$, <u>et pour tout couple d'indices</u> (λ,μ), $G_{\lambda\mu}$ <u>est isomorphe au produit tensoriel</u> $E_\lambda\otimes F_\mu$.

Dans cette démonstration exclusivement, et pour éviter toute confusion, nous noterons $x_\lambda y_\mu$ le produit tensoriel <u>dans</u> $E \otimes F$ d'un élément $x_\lambda \in E_\lambda$ et d'un élément $y_\mu \in F_\mu$, par $x_\lambda \otimes y_\mu$ leur produit tensoriel <u>dans</u> $E_\lambda \otimes F_\mu$. On définit une application linéaire u de $E \otimes F$ dans le module G somme directe de la famille $(E_\lambda \otimes F_\mu)$, en posant, pour tout $x = \sum_\lambda x_\lambda \in E$, et tout $y = \sum_\mu y_\mu \in F_\mu$, $u(xy) = u(\sum_{\lambda,\mu} x_\lambda y_\mu) = \sum_{\lambda,\mu} (x_\lambda \otimes y_\mu)$. Inversement, on définit une application linéaire $v_{\lambda\mu}$ de $E_\lambda \otimes F_\mu$ dans $E \otimes F$ en posant $v_{\lambda\mu}(x_\lambda \otimes y_\mu) = x_\lambda y_\mu$ pour $x_\lambda \in E_\lambda$, $y_\mu \in F_\mu$; on définit ensuite une application linéaire v de G dans $E \otimes F$ par la condition que la restriction de v à $E_\lambda \otimes F_\mu$ soit l'application $v_{\lambda\mu}$ pour tout couple d'indices (λ, μ) (chap. II, § 2, prop. 3). L'application $v \circ u$ est alors l'application identique de $E \otimes F$, et l'application $u \circ v$ est ~~alors~~ l'application identique de ~~ExxxF~~ G ; donc u et v sont deux isomorphismes réciproques, ce qui démontre la première partie de la proposition. En outre, l'image de $E_\lambda \otimes F_\mu$ par v est identique à $G_{\lambda\mu}$, donc ce sous-module est isomorphe à $E_\lambda \otimes F_\mu$.

Lorsque les conditions de la prop. 4 sont remplies, on <u>identifie</u> le plus souvent les modules $G_{\lambda\mu}$ et $E_\lambda \otimes F_\mu$ au moyen de l'isomorphisme v.

COROLLAIRE 1.- <u>Si</u> F <u>admet une base</u> $(b_\mu)_{\mu \in M}$, $E \otimes F$ <u>est isomorphe au module</u> $E^{(M)}$, <u>et tout élément de</u> $E \otimes F$ <u>peut se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme</u> $\sum_\mu x_\mu \otimes b_\mu$, <u>où</u> $x_\mu \in E$.

En effet, avec l'identification précédente, $E \otimes F$ est somme directe des sous-modules $E \otimes (Ab_\mu)$; comme $\xi \rightarrow \xi b_\mu$ est un isomorphisme de A sur Ab_μ, il résulte de la prop. 3 que $x \rightarrow x \otimes b_\mu$ est un isomorphisme de E sur $E \otimes (Ab_\mu)$, ce qui démontre le corollaire.

COROLLAIRE 2.- <u>Si</u> (a_λ) <u>est une base de</u> E, (b_μ) <u>une base de</u> F, <u>les éléments</u> $a_\lambda \otimes b_\mu$ <u>forment une base de</u> $E \otimes F$.

En particulier, si E et F sont des <u>espaces vectoriels de dimension finie</u> sur un corps commutatif K , E $\otimes$ F est un espace vectoriel de dimension finie sur K , et on a

(5 bis) $$\left[E \otimes F:K\right]=\left[E:K\right]\left[F:K\right]$$

COROLLAIRE 3.- <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux A-modules</u>, M <u>un sous-module de</u> E , N <u>un sous-module de</u> F . <u>Si</u> M <u>admet un supplémentaire dans</u> E <u>et</u> N <u>un supplémentaire dans</u> F ; <u>le sous-module</u> P <u>de</u> E $\otimes$ F , <u>engendré par les produits tensoriels</u> $x\otimes y$, <u>où</u> $x\in M$ <u>et</u> $y\in N$, <u>est isomorphe à</u> M $\otimes$ N <u>et admet un supplémentaire dans</u> E $\otimes$ F .

De façon plus précise, l'application linéaire de M $\otimes$ N dans P qui, à tout produit tensoriel $x\otimes y$ <u>dans</u> M $\otimes$ N fait correspondre le produit tensoriel $x\otimes y$ <u>dans</u> E $\otimes$ F ($x\in M$, $y\in N$), est un <u>isomorphisme</u> (dit <u>canonique</u>) de M $\otimes$ N sur P , au moyen duquel on <u>identifie</u> d'ordinaire M $\otimes$ N et P .

Notons enfin la proposition suivante, qui généralise le corollaire de la prop.3 au produit tensoriel de deux A-modules <u>monogènes</u> (chap.II, § 1,n°6) quelconques :

PROPOSITION 5.- <u>Soient</u> $\mathfrak{a}$ <u>et</u> $\mathfrak{b}$ <u>deux idéaux quelconques de</u> A ; <u>le produit tensoriel des modules monogènes</u> $A/\mathfrak{a}$ <u>et</u> $A/\mathfrak{b}$ <u>est isomorphe au module monogène</u> $A/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$.

Soient φ_1, φ_2 et ψ les applications canoniques de A sur $A/\mathfrak{a}$, $A/\mathfrak{b}$ et $A/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$ respectivement. Les relations $\lambda'\equiv\lambda \pmod{\mathfrak{a}}$ et $\mu'\equiv\mu \pmod{\mathfrak{b}}$ entraînent $\lambda'\mu'-\lambda\mu=(\lambda'-\lambda)\mu+\lambda'(\mu'-\mu)\in\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, donc on définit une application linéaire u de $(A/\mathfrak{a})\otimes(A/\mathfrak{b})$ dans $A/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$ en posant $u(\varphi_1(\lambda)\otimes\varphi_2(\mu))=\psi(\lambda\mu)$. D'autre part, l'application $\lambda\longrightarrow\lambda(\varphi_1(\varepsilon)\otimes\varphi_2(\varepsilon))$ (ε élément unité de A) est une application linéaire v_1 de A dans $(A/\mathfrak{a})\otimes(A/\mathfrak{b})$; pour $\lambda\in\mathfrak{a}$, on a $v_1(\lambda)=\varphi_1(\lambda)\otimes\varphi_2(\varepsilon)=0$, et de même $v_1(\mu)=0$ pour $\mu\in b$, donc v_1 s'annule dans l'idéal $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ de A ; par passage au quaotient, on en déduit une application linéaire v de $A/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$ dans $(A/\mathfrak{a})\otimes(A/\mathfrak{b})$ telle que $v_1=v\circ\gamma$. Cela étant, on voit immédiatement que $u\circ v$ est l'application identique de $A/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$, $v\circ u$ l'application identique de $(A/\mathfrak{a})\otimes(A/\mathfrak{b})$, ce qui montre que u et v sont deux isomorphismes réciproques.

<u>4. Produit tensoriel d'applications linéaires.</u>

Soient E_1,E_2,F_1,F_2 quatre A-modules, u_i (i=1,2) une application linéaire de E_i dans F_i . On définit une application linéaire u du module $E_1\otimes E_2$ dans le module $F_1\otimes F_2$ en posant, pour tout produit tensoriel $x_1\otimes x_2\in E_1\otimes E_2$, $u(x_1\otimes x_2)=u_1(x_1)\otimes u_2(x_2)$. Désignons provisoirement par $\varphi(u_1,u_2)$ cette application ; il est immédiat que φ est une application <u>bilinéaire</u> du produit $\mathcal{L}(E_1,F_1)\times\mathcal{L}(E_2,F_2)$ dans le module $\mathcal{L}(E_1\otimes E_2,F_1\otimes F_2)$; par suite (n°2), il existe une application <u>linéaire</u> ψ du <u>produit tensoriel</u> $\mathcal{L}(E_1,F_1)\otimes\mathcal{L}(E_2,F_2)$ dans $\mathcal{L}(E_1\otimes E_2,F_1\otimes F_2)$, telle que $\varphi(u_1,u_2)=\psi(u_1\otimes u_2)$. En général, l'application ψ <u>n'est pas un isomorphisme</u> de $\mathcal{L}(E_1,F_1)\otimes\mathcal{L}(E_2,F_2)$ <u>sur</u> $\mathcal{L}(E_1\otimes E_2,F_1\otimes F_2)$ (cf. exerc.4) ; il en est toutefois ainsi dans le cas le plus important :

PROPOSITION 6.- <u>Si E_1,E_2,F_1,F_2 sont des A-modules unitaires ayant chacun une base finie, l'application ψ est un isomorphisme</u> (dit <u>canonique</u>) <u>de $\mathcal{L}(E_1,F_1)\otimes\mathcal{L}(E_2,F_2)$ sur $\mathcal{L}(E_1\otimes E_2,F_1\otimes F_2)$.</u>

En effet, soit (a_{i,λ_i}) une base de E_i , (b_{i,μ_i}) une base de F_i (i=1,2) ; pour tout couple $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$ nous poserons $a_\lambda=a_{1,\lambda_1}a_{2,\lambda_2}$ et pour tout couple $\mu=(\mu_1,\mu_2)$, $b_\mu=b_{1,\mu_1}b_{2,\mu_2}$; les a_λ forment une base de $E_1\otimes E_2$, les b_μ une base de $F_1\otimes F_2$ (cor.2 de la prop.4) . Cela étant, on a une base de $\mathcal{L}(E_i,F_i)$ en prenant les applications linéaires $u_{\lambda_i\mu_i}$ définies par les conditions $u_{\lambda_i\mu_i}(a_{i,\lambda_i})=b_{i,\mu_i}$ et $u_{\lambda_i\mu_i}(a_{i,\lambda'_i})=0$ pour $\lambda'_i\neq\lambda_i$ (chap.II, § 2, n°4) ; de même, on a une base de $\mathcal{L}(E_1 \otimes E_2, F_1 \otimes F_2)$ en prenant les applications linéaires $u_{\lambda\mu}$ définies par les conditions $u_{\lambda\mu}(a_\lambda)=b_\mu$, et $u_{\lambda\mu}(a_{\lambda'})=0$ si $\lambda' \neq \lambda$. Or, il est immédiat qu'on a $u_{\lambda\mu} = \varphi(u_{\lambda_1\mu_1}, u_{\lambda_2\mu_2}) = \psi(u_{\lambda_1\mu_1} \otimes u_{\lambda_2\mu_2})$, et comme les produits tensoriels $u_{\lambda_1\mu_1} \otimes u_{\lambda_2\mu_2}$ forment une base de $\mathcal{L}(E_1,F_1) \otimes \mathcal{L}(E_2,F_2)$, la proposition est démontrée.

Lorsque E_1, E_2, F_1, F_2 ont des bases finies, on peut donc <u>identifier</u> le module $\mathcal{L}(E_1 \otimes E_2, F_1 \otimes F_2)$ au produit tensoriel $\mathcal{L}(E_1,F_1) \otimes \mathcal{L}(E_2,F_2)$ au moyen de l'isomorphisme ψ, et écrire $u_1 \otimes u_2$ (ou u_1u_2) au lieu de $\varphi(u_1,u_2)$. <u>Par abus de langage</u>, nous utiliserons encore ces notations même lorsque les conditions de la prop.6 ne sont pas remplies, et appellerons l'application linéaire $u_1 \otimes u_2$ le <u>produit tensoriel</u> de l'application linéaire u_1 et de l'application linéaire u_2.

PROPOSITION 7.- <u>Soient</u> $E_1, E_2, F_1, F_2, G_1, G_2$ <u>trois couples de A-modules</u>, u_i <u>une application linéaire de</u> E_i <u>dans</u> F_i, v_i <u>une application linéaire de</u> F_i <u>dans</u> G_i $(i=1,2)$; <u>on a</u>

$$(v_1 \circ u_1) \otimes (v_2 \circ u_2) = (v_1 \otimes v_2) \circ (u_1 \otimes u_2) \tag{6}$$

La proposition est une conséquence immédiate de la définition des produits tensoriels d'applications linéaires.

COROLLAIRE.- <u>Si</u> u_i <u>est un isomorphisme de</u> E_i <u>sur</u> F_i, <u>et</u> v_i <u>l'isomorphisme réciproque</u> $(i=1,2)$, $u_1 \otimes u_2$ <u>est un isomorphisme de</u> $E_1 \otimes E_2$ <u>sur</u> $F_1 \otimes F_2$, <u>et</u> $v_1 \otimes v_2$ <u>l'isomorphisme réciproque</u>.

<u>5. Produit tensoriel de matrices</u>.

Supposons que E_i ait une base finie (a_{i,λ_i}), F_i une base finie (b_{i,μ_i}) $(i=1,2)$, et soit $X_i=(\alpha_{\mu_i\lambda_i})$ la matrice de l'application linéaire u_i de E_i dans F_i, rapportée à ces deux bases ; on dit que la matrice $X=(\alpha_{\mu\lambda})$ de l'application linéaire $u=u_1 \otimes u_2$, rapportée aux deux bases (a_λ) et (b_μ) (avec les notations de la prop.6), est le le <u>produit tensoriel</u> de $\mathbf{X}_1$ par $\mathbf{X}_2$, et on la note $\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_2$. On a par définition $u(a_\lambda)=u_1(a_{1,\lambda_1})\otimes u_2(a_{2,\lambda_2})=\sum_{\mu_1,\mu_2} \alpha_{\mu_1\lambda_1}\alpha_{\mu_2\lambda_2}b_{1,\mu_1}b_{2,\mu_2}$. Comme $u(a_\lambda)$ est la colonne d'indice λ de $\mathbf{X}$, on voit que les éléments de $\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_2$ sont donnés par les relations

(7) $$\alpha_{\mu\lambda} = \alpha_{\mu_1\lambda_1}\alpha_{\mu_2\lambda_2} .$$

Le fait que $u_1 \otimes u_2$ est fonction bilinéaire de (u_1,u_2) et l'identité (6) se traduisent par les identités

(8) $$\begin{cases} \mathbf{X}_1 \otimes(\mathbf{X}_2+\mathbf{Y}_2)=\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_2+\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{Y}_2 \\ (\mathbf{X}_1+\mathbf{Y}_1)\otimes \mathbf{X}_2=\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_2+\mathbf{Y}_1 \otimes \mathbf{X}_2 \end{cases}$$

(9) $$(\alpha\mathbf{X}_1)\otimes \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 \otimes (\alpha\mathbf{X}_2)=\alpha(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_2)$$

(10) $$(\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_2)(\mathbf{Y}_1 \otimes \mathbf{Y}_2)=(\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1) \otimes (\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_2)$$

Si $\mathbf{X}_1$ et $\mathbf{X}_2$ sont des matrices carrées inversibles, $\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_2$ est une matrice carrée inversible, dont l'inverse est $\mathbf{X}_1^{-1}\otimes \mathbf{X}_2^{-1}$ ~~est une matrice carrée~~ Si $\mathbf{Y}_i$ est <u>équivalente</u> (chap.II, § 6,n°10) à $\mathbf{X}_i$ pour $i=1,2$ (resp. une matrice carrée <u>semblable</u> (chap.II, § 6,n°11) à la matrice carrée $\mathbf{X}_i$) , $\mathbf{Y}_1 \otimes \mathbf{Y}_2$ est une matrice équivalente (resp. semblable) à $\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_2$.

Enfin, soit $(\bar{a}_{i,\lambda_i})$ une seconde base de E_i $(i=1,2)$; si $\mathbf{P}_i$ est la matrice de passage de la base (a_{i,λ_i}) à la base $(\bar{a}_{i,\lambda_i})$ (chap.II, § 6, n°9) , la matrice de passage de la base de $E_1 \otimes E_2$ formée des $a_\lambda = a_{1,\lambda_1}a_{2,\lambda_2}$ à la base formée des $\bar{a}_\lambda=\bar{a}_{1,\lambda_1}\bar{a}_{2,\lambda_2}$ est égale au produit tensoriel $\mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_2$.

<u>5. Dual d'un produit tensoriel</u>.

Soient E_1,E_2 deux A-modules unitaires ; d'après la définition du produit tensoriel, le module $\mathcal{L}_2(E_1\times E_2,A)$ des <u>formes bilinéaires</u> sur $E_1\times E_2$ est isomorphe au module des <u>formes linéaires</u> sur le produit tensoriel $E_1 \otimes E_2$, c'est-à-dire au <u>dual</u> de ce produit tensoriel;

l'isomorphisme canonique du premier de ces modules sur le second fait correspondre à toute forme bilinéaire f sur $E_1 \times E_2$ la forme linéaire u sur $E_1 \otimes E_2$ définie par les conditions $u(x_1 \otimes x_2)=f(x_1,x_2)$ pour tout produit tensoriel $x_1 \otimes x_2$.

La prop.6 définit un isomorphisme canonique de $E_1^* \otimes E_2^*$ sur le module des applications linéaires de $E_1 \otimes E_2$ dans $A \otimes A$; mais le cor. de la prop.3 définit un isomorphisme canonique de $A \otimes A$ sur A , et on en déduit aussitôt un isomorphisme du module $\mathcal{L}(E_1 \otimes E_2, A \otimes A)$ sur le dual E^* de $E_1 \otimes E_2$; d'où :

PROPOSITION 8.- Si E_1, E_2 sont deux A-modules unitaires ayant chacun une base finie, l'application linéaire qui, à tout produit tensoriel $x_1' \otimes x_2'$ dans le module $E_1^* \otimes E_2^*$ (produit tensoriel des duals de E_1 et E_2 respectivement) fait correspondre la forme linéaire u sur le module $E=E_1 \otimes E_2$, telle que $u(x_1 \otimes x_2)=x_1'(x_1)x_2'(x_2)$ pour tout produit tensoriel $x_1 \otimes x_2$, est un isomorphisme de $E_1^* \otimes E_2^*$ sur le dual E^* de E .

L'isomorphisme défini dans la prop.8 et son isomorphisme réciproque sont dits canoniques ; désormais, nous identifierons $E_1^* \otimes E_2^*$ au dual de $E_1 \otimes E_2$ au moyen de ces isomorphismes ; on a donc identiquement

(11) $$\langle x_1 \otimes x_2, x_1' \otimes x_2' \rangle = \langle x_1, x_1' \rangle \langle x_2, x_2' \rangle$$

PROPOSITION 9.- Soient E_1, E_2, F_1, F_2 quatre A-modules unitaires ayant chacun une base finie u_i une application linéaire de E_i dans F_i (i=1,2) ; la transposée de l'application linéaire $u_1 \otimes u_2$ de $E_1 \otimes E_2$ dans $F_1 \otimes F_2$ est égale au produit tensoriel ${}^t u_1 \otimes {}^t u_2$ des transposées de u_1 et u_2 .

En effet, on a identiquement, pour $x_i \in E_i$, $y_i' \in F_i$ (i=1,2)

$$\langle u_1(x_1) \otimes u_2(x_2), y_1' \otimes y'_2 \rangle = \langle u_1(x_1), y_1' \rangle \langle u_2(x_2), y_2' \rangle =$$
$$= \langle x_1, {}^t u_1(y_1') \rangle \langle x_2, {}^t u_2(y_2') \rangle = \langle x_1 \otimes x_2, {}^t u_1(y_1') \otimes {}^t u_2(y_2') \rangle$$

d'où la proposition, d'après la définition du produit tensoriel de deux applications linéaires.

On en conclut que la transposée du produit tensoriel $\underline{X}_1 \otimes \underline{X}_2$ de deux matrices, est égale au produit tensoriel ${}^t\underline{X}_1 \otimes {}^t\underline{X}_2$ de leurs transposées, ce qui d'ailleurs résulte aussi directement de (7).

7. Produit tensoriel d'un nombre fini de modules.

On peut reprendre pour une famille finie quelconque $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de A-modules les considérations du n°2 ; on établit ainsi l'existence et l'unicité à une isomorphie près, d'un A-module M ayant les propriétés suivantes :

1° il existe une application n-linéaire φ de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ dans M telleque M soit engendré par $\varphi(\prod_{i=1}^{n} E_i)$;

2° si f est une application n-linéaire de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ dans un A-module quelconque N , il existe une application linéaire g de M dans N telle que $f = g \circ \varphi$.

Nous laissons au lecteur le détail des raisonnements.

Le module ainsi défini s'appelle le produit tensoriel de la famille (E_i) et se note $\bigotimes_{i=1}^{n} E_i$ (ou $E_1 \otimes E_2 \otimes \ldots \otimes E_n$) ; si tous les E_i sont identiques à un même module E , leur produit tensoriel se note encore $\bigotimes^{n} E$ et est dit puissance tensorielle n-ème de E . Pour tout élément $(x_i) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$, la valeur $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de l'application n-linéaire φ se note $x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n$ et s'appelle le produit tensoriel de la suite (x_i) .

Si $(I_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est une partition quelconque de l'intervalle $[1,n]$ de $\mathcal{N}$, le produit tensoriel $\bigotimes_{i=1}^{n} E_i$ est isomorphe au produit tensoriel $\bigotimes_{i=1}^{p} (\bigotimes_{i \in I_k} E_i)$ ("associativité" du produit tensoriel) . On le voit par la même méthode que dans les prop.2 à 5 , en définissant de manière évidente une application linéaire de $\bigotimes_{i=1}^{n} E_i$ dans $\bigotimes_{i=1}^{p}(\bigotimes_{i \in I_k} E_i)$ et une application linéaire de $\bigotimes_{i=1}^{p}(\bigotimes_{i \in I_k} E_i)$ dans $\bigotimes_{i=1}^{n} E_i$, puis en montrant que ces deux applications sont des isomorphismes réciproques.

Le lecteur généralisera sans peine au produit tensoriel d'un nombre quelconque de modules les prop.4 et 5, la définition du produit tensoriel d'applications linéaires (ou de matrices) en nombre quelconque, et les prop. 6 à 9 .

8. Application : Extension de l'anneau d'opérateurs d'un module.

Soit A un anneau commutatif ayant un élément unité, M un module sur A , E une algèbre sur A . Considérons le A-module $E \otimes M$ (E étant considéré comme A-module) ; on peut y définir une structure de module à gauche par rapport à E , en posant, pour $t \in E$ et $z = \sum_i (x_i \otimes y_i)$ $(x_i \in E\ ,\ y_i \in M)$

$$tz = \sum_i ((tx_i) \otimes y_i)$$

Il est immédiat en effet que les axiomes (M_I),(M_{II}) et (M_{III}) sont vérifiés pour cette loi externe.

Le cas le plus intéressant est celui où E admet un élément unité e , tel que A puisse être identifié à la sous-algèbre de E formée des αe $(\alpha \in A)$, et où M admet une base (a_λ) par rapport à A ; alors l'application $x \to e \otimes x$ est un isomorphisme du A-module M sur un sous-module M_1 du A-module $E \otimes M$; en effet, si $x = \sum_\lambda \xi_\lambda a_\lambda$ la relation $e \otimes x = 0$ s'écrit $\sum_\lambda (\xi_\lambda e \otimes a_\lambda) = 0$, et par suite (cor.1 de la prop.4) $\xi_\lambda e = 0$ pour tout λ , ce qui entraîne par hypothèse $\xi_\lambda = 0$ pour tout λ , donc $x = 0$. On identifie d'ordinaire M_1 à M au moyen de l'isomorphisme précédent ; la base (a_λ) de M est alors également une base de $E \otimes M$ pour la structure de E-module définie ci-dessus ; on dit que le E-module $E \otimes M$ est le module obtenu à partir du A-module M par extension à E de l'anneau d'opérateurs de M ; on le note de préférence M_E , pour éviter toute confusion avec le A-module $E \otimes M$.

9. Tenseurs et espaces tensoriels.

DEFINITION 4.- Soit E un module unitaire sur un anneau commutatif A, ayant une base finie. On appelle tenseur p fois contravariant et q fois covariant sur E tout élément du produit tensoriel de p modules identiques à E et de q modules identiques au dual E^* de E ; on note E^p_q ce produit tensoriel ; le nombre $p+q$ est appelé l'ordre des tenseurs appartenant à E^p_q.

Si $q=0$, les éléments de E^p_0 s'appellent simplement tenseurs contravariants d'ordre p ; les tenseurs contravariants d'ordre 1, c'est-à-dire les éléments de E, sont encore dits vecteurs contravariants. De même, les éléments de E^0_q sont dits tenseurs covariants d'ordre q ; les tenseurs covariants d'ordre 1, c'est-à-dire les éléments de E^*, sont dits vecteurs covariants. Lorsque p et q sont tous deux $\neq 0$, les tenseurs de E^p_q sont dits mixtes. Par convention, les scalaires, éléments de l'anneau A, sont encore considérés comme des tenseurs qu'on appelle tenseurs d'ordre 0, et on pose $E^0_0=A$.

Les éléments de E^p_q sont donc des combinaisons linéaires de produits tensoriels de la forme $x_1x_2\dots x_px'_1x'_2\dots x'_q$ (dits aussi tenseurs décomposables), où les x_i sont des éléments quelconques de E, les x'_j des éléments quelconques de E^*.

Si $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E, (a'_i) la base duale dans E^*, E^p_q admet une base de n^{p+q} éléments, formée des tenseurs décomposables $a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_p}a'_{j_1}a'_{j_2}\dots a'_{j_q}$, où (i_k) parcourt l'ensemble I^p de toutes les suites de p éléments de $I=[1,n]$, et (j_h) l'ensemble I^q de toutes les suites de q éléments de I. Lorsqu'on parle des composantes d'un tenseur $x\in E^p_q$, il s'agit toujours, sauf indication du contraire, des composantes de x par rapport à une base obtenue de cette manière à partir d'une base (a_i) de E ; par abus de langage, on dit que ce sont les

les composantes de x *par rapport à la base* (a_i) ; on les note $\xi^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}$ les indices supérieurs étant dits *contravariants*, les indices inférieurs *covariants* ; on a donc

$$x = \sum \xi^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_p} a'_{j_1} a'_{j_2} \dots a'_{j_q}$$

Dans les calculs sur les tenseurs, de nombreux auteurs adoptent la convention suivante : lorsqu'ils écrivent une expression renfermant un certain nombre d'indices, il doit être entendu que cette expression remplace celle qu'on obtient en donnant à *chaque* indice figurant *deux fois* dans l'expression écrite, toutes les valeurs de 1 à n , puis en faisant la somme de toutes les expressions ainsi obtenues. Avec cette convention, la formule précédente s'écrirait

$$x = \xi^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_p} a'_{j_1} a'_{j_2} \dots a'_{j_q} .$$

← Soit $(\bar{a}_i)$ une autre base de E , $(\bar{a}'_i)$ la base duale dans E ; si $\underline{P}$ est la matrice de passage de (a_i) à $(\bar{a}_i)$, la matrice de passage de (a'_i) à $(\bar{a}'_i)$ est la *contragrédiente* ${}^t\underline{P}^{-1}$ de $\underline{P}$ (chap.II, §6,n°9) ; il en résulte que, dans E^p_q , la matrice de passage de la base $(a_{i_1} \dots a_{i_p}\; a'_{j_1} \dots a'_{j_q})$ à la base $(\bar{a}_{i_1} \dots \bar{a}_{i_p}\; \bar{a}'_{j_1} \dots \bar{a}'_{j_q})$ est le *produit tensoriel* de p matrices identiques à $\underline{P}$ et de q matrices identiques à ${}^t\underline{P}^{-1}$.

On note d'ordinaire, dans les calculs sur les tenseurs, α^j_i les éléments de la matrice de passage $\underline{P}$, i étant l'indice de la *colonne*, j l'indice de la *ligne* de l'élément considéré ; au contraire, on note β^i_j les éléments de la contragrédiente ${}^t\underline{P}^{-1}$, i étant l'indice de la colonne, j l'indice de la ligne de l'élément (cf. n° 11) ; avec ces notations, les composantes $\xi^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}$ d'un tenseur par rapport à la base (a_i) sont données en fonction de ses composantes $\bar{\xi}^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}$ par rapport à la base $(\bar{a}_i)$ par les formules

$$\xi^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} = \sum_{h_1,\dots h_p, k_1,\dots k_q} \alpha^{i_1}_{h_1} \alpha^{i_2}_{h_2} \dots \alpha^{i_p}_{h_p} \beta^{k_1}_{j_1} \beta^{k_2}_{j_2} \dots \beta^{k_q}_{j_q} \xi^{h_1 h_2 \dots h_p}_{k_1 k_2 \dots k_q}$$

Soit u un automorphisme du module E , $\check{u}$ l'automorphisme contragrédient de E ; le produit tensoriel de p applications linéaires identiques à u et de q applications identiques à $\check{u}$ est un automorphisme du module E^p_q (cor. de la prop.7), que nous désignerons par u^p_q . D'après la formule (6), l'application $u \rightarrow u^p_q$ est une représentation du groupe $\mathbf{GL}(E)$ des automorphismes de E dans le groupe $\mathbf{GL}(E^p_q)$ des automorphismes de E^p_q . Les automorphismes de E apparaissent donc comme des opérateurs pour la loi externe $(u,x) \rightarrow u^p_q(x)$ définie sur E^p_q ; lorsqu'aucune confusion n'est possible, nous noterons simplement u.x le composé $u^p_q(x)$ de l'opérateur u et du tenseur x pour cette loi ; avec cette notation, on a donc $(u \circ v).x = u.(v.x)$. Muni de la structure algèbrique définie, d'une part par cette loi externe, d'autre part par les deux lois définissant sa structure de A-module, l'ensemble E^p_q est appelé espace tensoriel. On appelle sous-espace tensoriel de E^p_q un sous-module H de E^p_q , stable pour la loi externe $(u,x) \rightarrow u.x$ entre automorphismes de E et tenseurs de E^p_q ; autrement dit, pour tout tenseur $x \in H$ et tout automorphisme u de E , on doit avoir $u.x = u^p_q(x) \in H$.

Remarques.- 1) Par convention, pour tout automorphisme u de E , on désigne par u^0_0 l'application identique de l'anneau A sur lui-même ; cela permet donc de considérer aussi A comme un espace tensoriel.

2) On notera que E^p_q , muni de la structure définie par la loi externe $(u,x) \rightarrow u.x$ entre automorphismes de E et tenseurs de E^p_q , est un ensemble muni d'un groupe d'opérateurs, au sens du chap.I, §7,n°2 ; en outre, cette loi est distributive par rapport à l'addition dans E^p_q , et permutable avec la loi externe

$(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ de la structure de A-module de E^p_q.

3) Lorsque $q=0$, (autrement dit, lorsqu'il s'agit d'un espace de tenseurs <u>contravariants</u> sur E), on peut définir u^p_o non seulement pour les automorphismes du module E, mais aussi pour un <u>endomorphisme</u> quelconque u de ce module, u^p_o étant le produit tensoriel de p endomorphismes identiques à u ; l'application $u \to u^p_o$ est alors une représentation de l'anneau des endomorphismes $\mathcal{L}(E)$ dans l'anneau des endomorphismes $\mathcal{L}(E^p_o)$ du A-module E^p_o, et $(u,x) \to u^p_o(x)$ est une loi externe définie sur E^p_o, dont l'ensemble d'opérateurs est l'anneau $\mathcal{L}(E)$; il est immédiat que cette loi, et la loi de groupe additif sur E^p_o, définissent sur cet ensemble une structure de <u>module à gauche</u> par rapport à l'anneau $\mathcal{L}(E)$.

4) Les définitions et résultats qui précèdent s'étendent immédiatement à un A-module <u>quelconque</u> E. Par abus de langage, nous appellerons encore <u>tenseurs</u> (contravariants) les éléments d'une puissance tensorielle $\overset{n}{\otimes} E$ d'un module quelconque.

10. Applications tensorielles.

Soient E^p_q, E^r_s deux espaces tensoriels sur un même module E ; on dit qu'une application f de E^p_q dans E^r_s est une <u>application tensorielle</u> si f est une <u>représentation</u> (chap.I, § 4, n°4) de E^p_q dans E^r_s pour les structures d'espace tensoriel de ces deux ensembles. Autrement dit, f doit être une application <u>linéaire</u> de E^p_q dans E^r_s telle que, pour tout automorphisme u de E, on ait identiquement $f(u.x)=u.f(x)$, ou encore $f(u^p_q(x))=u^r_s(f(x))$.

Il revient au même de dire que f(x) est un <u>covariant</u> de x, relatif aux représentations $u \to u^p_q$ et $u \to u^r_s$ de $GL(E)$ (chap.I § 7, n°4).

Il est immédiat, d'après cette définition, que si H est un sous-espace tensoriel de E^p_q, $f(H)$ est un sous-espace tensoriel de E^r_s ; si K est un sous-espace tensoriel de E^r_s, $\overset{-1}{f}(K)$ est un sous-espace tensoriel de E^p_q.

De même, si on considère par exemple trois espaces tensoriels E^p_q, $E^{p'}_{q'}$, E^r_s, on dit qu'une application f de l'ensemble produit $E^p_q \times E^{p'}_{q'}$ dans E^r_s est une <u>application tensorielle</u> si f est une application <u>bilinéaire</u>, telle que, pour tout automorphisme u de E, on ait $f(u.x,u.y)=u.f(x,y)$, c'est-à-dire $f(u^p_q(x),u^{p'}_{q'}(y))=u^r_s(f(x,y))$. On définit de même des applications tensorielles d'un produit d'un nombre quelconque d'espaces tensoriels sur E, dans un espace tensoriel sur E.

Pour définir une application tensorielle f de E^p_q dans E^r_s, il suffit (n°2) de la définir pour les tenseurs <u>décomposables</u> $x_1x_2..x_px'_1x'_2..x'_q$, et de vérifier, d'une part que l'application

$$(x_1,\ldots,x_p,x'_1,..,x'_q) \to f(x_1x_2..x_px'_1x'_2..x'_q)$$

est multilinéaire, et d'autre part que pour tout automorphisme u de E, on a identiquement

$$f(u(x_1)u(x_2)..u(x_p)\check{u}(x'_1)..\check{u}(x'_q))=u^r_s(f(x_1x_2..x_px'_1..x'_q)) .$$

<u>11. Multiplication et contraction</u>.

D'après la "commutativité" (prop.2) et l'"associativité" (n°7) du produit tensoriel, il existe un isomorphisme canonique φ du produit tensoriel $E^p_q \otimes E^r_s$ sur E^{p+r}_{q+s}, défini en faisant correspondre à tout produit tensoriel $x\otimes y$ de deux tenseurs décomposables $x = x_1..x_px'_1..x'_q \in E^p_q$, $y = y_1..y_ry'_1..y'_s \in E^r_s$, le tenseur $x_1..x_py_1..y_rx'_1..x'_qy'_1..y'_s$; cette application est une application tensorielle, dont la valeur pour tout couple (x,y) est appelée (par abus de langage) le <u>produit</u> du tenseur x et du tenseur y, et notée xy.

On étend cette définition lorsque $p=q=0$, le produit d'un scalaire α et d'un tenseur $y \in E^r_s$ étant le tenseur αy.

La notion de produit de deux tenseurs mixtes quelconques permet de présenter d'une autre manière la définition d'une application tensorielle de $E^p_q \times E^{p'}_{q'}$ dans E^r_s, en désignant ainsi toute application f telle qu'il existe une application tensorielle g de $E^{p+p'}_{q+q'}$ dans E^r_s satisfaisant à l'identité $f(x,y)=g(xy)$.

Etant donné un espace tensoriel E^p_q sur E, tel que $p>0$ et $q>0$, on appelle <u>contraction</u> de l'indice contravariant i et de l'indice covariant j $(1 \leqslant i \leqslant p \,,\ 1 \leqslant j \leqslant q)$ l'application linéaire c^i_j de E^p_q dans E^{p-1}_{q-1} qui, à tout tenseur décomposable $z = x_1 \ldots x_p x'_1 \ldots x'_q$ fait correspondre le tenseur

$$c^i_j(z) = \langle x_i, x'_j \rangle x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_p x'_1 \ldots x'_{j-1} x'_{j+1} \ldots x'_q$$

Il est immédiat que l'on définit bien ainsi une application linéaire ($n^o 2$) ; en outre, pour tout automorphisme u de E, on a $\langle u(x_i), \check{u}(x'_j) \rangle = \langle x_i, x'_j \rangle$, donc

$$\begin{aligned} c^i_j\,(u^p_q(z)) &= \langle x_i, x'_j \rangle u(x_1) \ldots u(x_{i-1}) u(x_{i+1}) \ldots u(x_p) \check{u}(x'_1) \ldots \check{u}(x'_{j-1}) \\ &\qquad \check{u}(x'_{j+1}) \ldots \check{u}(x'_q) \\ &= u^{p-1}_{q-1}(c^i_j(z)) \end{aligned}$$

Donc c^i_j est une application <u>tensorielle</u> de E^p_q dans E^{p-1}_{q-1}.

Si $\xi^{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_p}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_q}$ sont les composantes de z relatives à une base (a_λ) de E, on a

$$z = \sum \xi^{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_p}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_q} a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} \ldots a_{\lambda_p} a'_{\mu_1} a'_{\mu_2} \ldots a'_{\mu_q}$$

Comme $\langle a_\lambda, a'_\mu \rangle = 0$ si $\lambda \neq \mu$, $\langle a_\lambda, a'_\lambda \rangle = 1$, on a

$$c^i_j(z) = \sum \Big(\sum_{\lambda_i = 1}^{n} \xi^{\lambda_1 \ldots \lambda_i \ldots \lambda_p}_{\mu_1 \ldots \mu_{j-1} \lambda_i \mu_{j+1} \ldots \mu_q} \Big) a_{\lambda_1} \ldots a_{\lambda_{i-1}} a_{\lambda_{i+1}} \ldots a_{\lambda_p} a'_{\mu_1} \ldots a'_{\mu_{j-1}} \ldots a'_{\mu_{j+1}} \ldots a'_{\mu_q}$$

la première somme étant étendue à tous les indices distincts de λ_i et μ_j. Autrement dit, les composantes du tenseur contracté $c^i_j(z)$ relatives à la base (a_i) sont données par

$$\zeta^{\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}\lambda_{i+1}\cdots\lambda_p}_{\mu_1\cdots\mu_{j-1}\mu_{j+1}\cdots\mu_q} = \sum_{\lambda_i=1}^{n} \zeta^{\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}\lambda_i\lambda_{i+1}\cdots\lambda_p}_{\mu_1\cdots\mu_{j-1}\lambda_i\mu_{j+1}\cdots\mu_q}$$

On peut naturellement contracter aussi <u>plusieurs</u> couples d'indices dans un tenseur mixte ; il est immédiat que cela revient à contracter <u>successivement</u> chacun de ces couples d'indices (dans un ordre quelconque)

On a souvent à effectuer l'opération qui consiste à faire le <u>produit</u> de deux tenseurs (non tous deux contravariants ni tous deux covariants), puis, sur le tenseur mixte obtenu, à <u>contracter</u> un ou plusieurs couples d'indices ; l'application ainsi définie est dite <u>produit contracté</u> (pour les couples d'indices considérés) des deux tenseurs donnés ; c'est encore une application tensorielle.

Par exemple, soit x_1x_2 un tenseur contravariant, produit de deux éléments de E, et $x'_1x'_2$ un tenseur covariant produit de deux éléments de E^* ; le produit de ces deux tenseurs, contracté pour les couples d'indices $(1,1)$ et $(2,2)$ est le scalaire (tenseur d'ordre 0) $\langle x_1,x'_1\rangle\langle x_2,x'_2\rangle$, c'est-à-dire (formule (11)) la <u>valeur</u>, pour le couple (x_1,x_2) de la forme bilinéaire sur $E\times E$ correspondant par l'isomorphie canonique (n°6) au tenseur covariant $x'_1x'_2$.

<u>12. Endomorphismes et tenseurs mixtes d'ordre 2.</u>

Soient E et F deux A-modules ayant chacun une base finie ; pour toute application linéaire u de E dans F, l'application

$$(x,y')\to\langle u(x),y'\rangle \tag{12}$$

est une <u>forme bilinéaire</u> sur l'ensemble produit $E\times F^*$. Réciproquement, soit f une forme bilinéaire quelconque sur $E\times F^*$; pour tout $y'\in F^*$, l'application $y' \to f(x,y')$ est une *forme linéaire* sur F^* ; si $u(x)$ désigne cette forme linéaire, $u(x)$ est un élément du dual F^{**} de F^*, et u une application *linéaire* de E dans F^{**}; si on identifie F^{**} et F au au moyen de l'isomorphie canonique de ces deux modules (chap. II, § 4, n°4), on a identiquement $f(x,y') = \langle u(x), y' \rangle$. Donc :

PROPOSITION 10.- *Étant donnés deux A-modules E et F ayant chacun une base finie, l'application qui, à toute application linéaire u de E dans F, fait correspondre la forme bilinéaire* (12), *est un isomorphisme du module $\mathcal{L}(E,F)$ sur le module des formes bilinéaires sur $E \times F^*$.*

Cet isomorphisme et son isomorphisme réciproque seront dits *canoniques*.

Remarquons maintenant (n°6) qu'il existe un isomorphisme canonique du module des formes bilinéaires sur $E \times F^*$ sur le produit tensoriel $E^* \otimes F$ (F étant toujours identifié à F^{**}) ; d'autre part (prop. 2) il existe un isomorphisme canonique de $E^* \otimes F$ sur $F \otimes E^*$; en composant ces isomorphismes canoniques, on voit qu'on définit un *isomorphisme* (dit encore *canonique*, ainsi que son réciproque) *du module $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F, sur le produit tensoriel $F \otimes E^*$.* Pour toute application linéaire u de E dans F, nous désignerons par $\tilde{u}$ l'élément de $F \otimes E^*$ qui lui correspond par cet isomorphisme.

Nous nous bornerons désormais au cas où $F=E$; l'application $u \to \tilde{u}$ est alors un isomorphisme du module $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E sur le module E^1_1 des *tenseurs une fois contravariant et une fois covariant.* Il est facile de préciser cet isomorphisme : un tenseur mixte décomposable xx' ($x \in E$, $x' \in E^*$) correspond, d'après la formule (11), à la forme bilinéaire $(y,y') \to \langle y,x' \rangle \langle x,y' \rangle = \langle \langle y,x' \rangle x, y' \rangle$ sur $E \times E^*$, et par suite, d'après (12), à l'application linéaire $y \to \langle y,x' \rangle x$ de E dans E. Si (a_i) est une base de E, l'élément $a_i a'_j$ de la base correspondante de E_1^1 est donc l'image, par l'application $u \to \tilde{u}$, de l'application linéaire $x \to \langle x, a'_j \rangle a_i = \xi^j a_i$ si $x = \sum_i \xi^i a_i$; donc, si $\tilde{u} = \sum_{i,j} \alpha^i_j a_i a'_j$, on a $u(x) = \sum_{i,j} \alpha^i_j \xi^j a_i$ pour tout $x \in E$, et en particulier $u(a_i) = \sum_j \alpha^j_i a_j$; autrement dit, la composante α^i_j du tenseur $\tilde{u}$ n'est autre que <u>l'élément de la matrice de l'endomorphisme u rapporté à la base</u> (a_i), <u>qui se trouve dans la ligne d'indice i et dans la colonne d'indice</u> j . On voit aussi qu'on peut écrire

$$\tilde{u} = \sum_i u(a_i) a'_i \tag{13}$$

pour toute base (a_i) de E .

<u>Remarques</u>. 1) On peut écrire, pour tout $x \in E$, $u(x) = \sum_j \langle x, a'_j \rangle u(a_j)$; par suite, on voit que $u(x)$ n'est autre que le tenseur $c_1^1(x\tilde{u})$ obtenu par <u>contraction</u> dans le produit $x\tilde{u}$ (qui est un tenseur 2 fois contravariant et une fois covariant) du premier indice contravariant et de l'indice covariant.

2) Soient u et v deux endomorphismes de E et $w = u \circ v$; on a d'après (13) , $\tilde{w} = \sum_i w(a_i) a'_i = \sum_i u(v(a_i)) a'_i = \sum_{i,j} \langle v(a_i), a'_j \rangle u(a_j) a'_i$, formule qui montre que $\tilde{w}$ est le tenseur $c_1^2(\tilde{u}.\tilde{v})$ obtenu par <u>contraction</u>, dans le produit $\tilde{u}.\tilde{v} = \sum_{i,j} u(a_j) v(a_i) a'_j a'_i$, du second indice contravariant et du premier indice covariant.

3) Si φ est un automorphisme quelconque de E , le produit $\varphi.\tilde{u}$ (pour la structure d'espace tensoriel de E_1^1) est par définition le tenseur $\sum_i \varphi(u(a_i)) \check{\varphi}(a'_i)$; si on pose $b_i = \varphi(a_i)$, les b_i forment une base de E , et la base duale de (b_i) est formée des $b'_i = \check{\varphi}(a'_i)$; donc, on peut écrire $\varphi.\tilde{u} = \sum_i \varphi(u(\varphi^{-1}(b_i))) b'_i$, ce qui prouve que $\varphi.\tilde{u}$ est le tenseur correspondant à l'endomorphisme $\varphi u \varphi^{-1}$.

4) A un endomorphisme u' du dual E^* on devrait, d'après ce qui précède, faire correspondre le tenseur $\sum_i u'(a'_i) a_i$ dans le produit $E^* \otimes E$ (espace tensoriel <u>sur</u> E^*) ; on convient de

de désigner par $\tilde{u}'$ le tenseur $\sum_i a_i u'(a'_i)$ sur E , qui correspond au précédent par l'isomorphisme canonique de $E^* \otimes E$ sur $E \otimes E^* = E^1_1$. Si $\tilde{u}' = \sum_{i,j} \beta^i_j a_i a'_j$, on a donc $u'(a'_i) = \sum_j \beta^i_j a'_j$; on voit qu'ici β^i_j est l'élément de la matrice de l'endomorphisme u' rapporté à la base (a'_i) , qui se trouve dans la ligne d'indice j et la colonne d'indice i. Avec cette convention, les tenseurs correspondant à un endomorphisme u de E et à son transposé ${}^t u$ sont identiques.

13. Trace d'un endomorphisme. Trace d'une matrice.

DEFINITION 5.- Etant donné un A-module E ayant une base finie, on appelle trace d'un endomorphisme u de E , et on note $\mathrm{Tr}(u)$, le scalaire $c^1_1(\tilde{u})$ obtenu par contraction de l'indice contravariant et de l'indice contravariant et de l'indice covariant du tenseur $\tilde{u}$ correspondant à u .

Si on rapporte l'endomorphisme u à une base (a_i) de E , la trace $\mathrm{Tr}(u)$ est aussi par définition, la trace de la matrice $\underline{U} = (\alpha^i_j)$ correspondant à u et on la note aussi $\mathrm{Tr}(\underline{U})$; d'après la formule (13), on a $\mathrm{Tr}(u) = \sum_i \langle u(a_i), a'_i \rangle = \sum_i \alpha^i_i$; en d'autres termes, la trace d'une matrice carrée est la somme des éléments diagonaux de la matrice.

Pour toute base de E , la trace de la matrice d'un même endomorphisme rapporté à cette base est la même ; autrement dit pour toute matrice carrée $\underline{X}$ et toute matrice inversible $\underline{P}$, on a $\mathrm{Tr}(\underline{PXP}^{-1}) = \mathrm{Tr}(\underline{X})$; cette relation, appliquée à la matrice $\underline{XP}$ au lieu de $\underline{X}$, donne $\mathrm{Tr}(\underline{PX}) = \mathrm{Tr}(\underline{XP})$ si $\underline{P}$ est inversible ; mais plus généralement :

PROPOSITION 11.- Pour tout couple de matrices carrées $\underline{X}, \underline{Y}$ d'ordre n sur un anneau commutatif A , on a

(14) $$\mathrm{Tr}(\underline{XY}) = \mathrm{Tr}(\underline{YX})$$

En effet, si $\underline{X} = (\xi_{ij})$, $\underline{Y} = (\eta_{ij})$, on a $\mathrm{Tr}(\underline{XY}) = \sum_{i,j} \xi_{ij}\eta_{ji}$, expression qui ne change pas quand on permute $\underline{X}$ et $\underline{Y}$.

COROLLAIRE.- <u>Pour toute suite</u> ($\underline{X}_i$) <u>de</u> p <u>matrices carrées d'ordre n sur un anneau commutatif</u> A , <u>on a, pour</u> $1 \leqslant i \leqslant p$

(15) $$\mathrm{Tr}(\underline{X}_1\underline{X}_2..\underline{X}_p)=\mathrm{Tr}(\underline{X}_i\underline{X}_{i+1}..\underline{X}_p\underline{X}_1..\underline{X}_{i-1})$$

Il suffit d'appliquer (14) au produit $\underline{X}_i(\underline{X}_{i+1}..\underline{X}_p\underline{X}_1..\underline{X}_{i-1})$ pour démontrer (15) par récurrence sur i .

On notera par contre qu'on a en général $\mathrm{Tr}(\underline{XYZ})\neq\mathrm{Tr}(\underline{XZY})$ pour trois matrices quelconques $\underline{X},\underline{Y},\underline{Z}$.

D'après la forme de la trace du produit de deux matrices, on voit que toute <u>forme linéaire</u> sur le A-module $M_n(A)$ des matrices carrées d'ordre n sur A , peut s'écrire d'une manière et d'une seule $\underline{X}\to\mathrm{Tr}(\underline{PX})$, où $\underline{P}$ est une matrice carrée fixe ; cette application ne peut être identiquement nulle que si $\underline{P}=0$.

La prop.11 <u>caractérise</u> la trace d'une matrice (à un facteur constant près) parmi les formes linéaires sur $M_n(A)$; de façon précise :

PROPOSITION 12.- <u>Si</u> f <u>est une forme linéaire sur le module</u> $M_n(A)$ <u>des matrices carrées d'ordre n sur A</u> , <u>telle qu'on ait identiquement</u> $f(\underline{XY})= f(\underline{YX})$, <u>il existe un scalaire</u> $\rho\in A$ <u>tel que</u> $f(\underline{X})=\rho\mathrm{Tr}(\underline{X})$ <u>pour tout</u> $\underline{X}$.

En effet, il existe une matrice fixe $\underline{P}$ telle qu'on ait identiquement $f(\underline{X})=\mathrm{Tr}(\underline{PX})$; la condition $f(\underline{XY})=f(\underline{YX})$ s'écrit donc $\mathrm{Tr}(\underline{PXY})=\mathrm{Tr}(\underline{PYX})$, ou, en utilisant (15), $\mathrm{Tr}(\underline{PXY})=\mathrm{Tr}(\underline{XPY})$, ou encore $\mathrm{Tr}((\underline{PX}-\underline{XP})\underline{Y})=0$; comme cette relation doit avoir lieu pour toute matrice $\underline{Y}$, on en tire $\underline{PX}=\underline{XP}$ pour toute matrice $\underline{X}$, ce qui entraîne que $\underline{P}=\rho\underline{I}$ ($\underline{I}$ matrice unité) ; d'où la proposition.

Lorsqu'il s'agit de matrices carrées sur un <u>corps</u> commutatif K , on peut interprèter la prop.12 en disant que, dans l'espace vectoriel $M_n(K)$ des matrices carrées d'ordre n sur K, le sous-espace vectoriel engendré par les matrices $\underline{XY}-\underline{YX}$ est un <u>hyperplan</u>.

14. Algèbre tensorielle.

Soit E un A-module unitaire ayant une base finie, et T(E) le module somme directe de tous les espaces tensoriels $E_0^p = \overset{p}{\otimes} E$ de tenseurs contravariants sur E pour $p \in N$. La notion de produit de deux tenseurs permet de définir sur T(E) une structure d'algèbre par rapport à A. En effet, tout élément $z \in T(E)$ se met d'une seule manière sous la forme $z = \sum_{p=0}^{\infty} z_p$, où z_p est un tenseur contravariant d'ordre p (nul sauf pour un nombre fini de valeurs de p). Si $z' = \sum_{p=0}^{\infty} z'_p$ est un second élément de T(E), on pose $zz' = \sum_{p,q} z_p z'_q$. Il est immédiat que la multiplication ainsi définie dans T(E) est doublement distributive par rapport à l'addition ; elle est aussi associative, en vertu de la relation $(z_p z_q)z_r = z_p(z_q z_r)$ entre trois tenseurs quelconques d'ordres respectifs p,q,r, relation qui est immédiate pour des tenseurs décomposables, et s'étend à des tenseurs quelconques par distributivité. Enfin, il est clair que $\alpha(zz') = (\alpha z)z' = z(\alpha z')$ pour tout scalaire α, donc T(E) est bien une algèbre sur A, qu'on appelle l'algèbre tensorielle sur le module E. Elle admet comme élément unité l'élément unité ε de A, et est non commutative en général ; pour les éléments de E (vecteurs contravariants), la multiplication dans T(E) n'est autre que le produit tensoriel défini au n°2 ; l'ensemble $E \cup A$ constitue donc un système de générateurs de l'algèbre T(E). Si (a_λ) est une base de E, T(E) admet une base (infinie) formée de l'élément unité et de tous les tenseurs $a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} \ldots a_{\lambda_p}$, où (λ_i) parcourt l'ensemble de toutes les suites finies (à un nombre quelconque de termes) d'éléments de l'ensemble d'indices ; la table de multiplication de cette base est donnée par les relations

$$(a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} \ldots a_{\lambda_p})(a_{\mu_1} a_{\mu_2} \ldots a_{\mu_q}) = a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} \ldots a_{\lambda_p} a_{\mu_1} \ldots a_{\mu_q}.$$

Toute <u>application linéaire</u> u de E dans un A-module F ayant une base finie se prolonge d'une seule manière en une <u>représentation</u> de l'algèbre T(E) dans l'algèbre T(F) . En effet, si $\overline{u}$ est un tel prolongement, on doit avoir $\overline{u}(\varepsilon)=\varepsilon$, d'où pour tout scalaire α , $\overline{u}(\alpha)=\overline{u}(\alpha\varepsilon)=\alpha\overline{u}(\varepsilon)=\alpha$; d'autre part, si $z_p=x_1x_2..x_p$ est un tenseur décomposable d'ordre $p\geqslant 0$, on doit avoir $\overline{u}(z_p)=u(x_1)u(x_2)..u(x_p)=u_0^p(z_p)$; cette relation est encore valable pour un tenseur contravariant quelconque d'ordre p , puisqu'un tel tenseur est somme de tenseurs décomposables. Par suite, pour tout élément $z=\sum_{p=0}^{\infty} z_p$ de T(E) décomposé en somme de tenseurs des divers ordres, on doit avoir $\overline{u}(z)=\sum_{p=0}^{\infty}\overline{u}(z_p)=\sum_{p=0}^{\infty}u_0^p(z_p)$. Réciproquement, il est immédiat que l'application $\overline{u}$ ainsi définie est bien une représentation de T(E) dans T(F) .

Si v est de même une application linéaire de F dans un A-module G ayant une base finie, $\overline{v}$ son prolongement en une représentation de T(F) dans T(G) , le prolongement de $v\circ u$ en une représentation de T(E) dans T(G) est identique à $\overline{v}\circ\overline{u}$. En particulier, si u est un automorphisme de E , $\overline{u}$ est un automorphisme de T(E) .

<u>Exercices</u>.- 1) On considère le produit tensoriel du $\mathbb{Z}$-module $E=\mathbb{Z}$ et du $\mathbb{Z}$-module $F=\mathbb{Z}/(2)$. Si M est le sous-module $2\mathbb{Z}$ (ensemble des entiers pairs) de E , montrer que le sous-module de $E\otimes F$ engendré par les éléments $x\otimes y$, où x parcourt M et y parcourt F , n'est pas isomorphe au produit tensoriel $M\otimes F$.

2) Si G est un groupe abélien additif, considéré comme $\mathbb{Z}$-module, le produit tensoriel $(\mathbb{Z}/(n))\otimes G$ des $\mathbb{Z}$-modules $\mathbb{Z}/(n)$ et G est isomorphe au groupe quotient G/nG , où nG désigne le sous-groupe de G formé des nx , où x parcourt G .

3) Soient E et F deux A-modules, M un sous-module de E, N un sous-module de F ; soit M_1 (resp. N_1) le sous-module de $E \otimes F$ engendré par les produits $x \otimes y$, où x parcourt M (resp. E) et y parcourt F (resp. N). Montrer que le produit tensoriel $(E/M) \otimes (F/N)$ est isomorphe au module quotient $(E \otimes F)/(M_1+N_1)$.

4) Soit p un nombre premier, A l'anneau commutatif $\mathbb{Z}/(p^2)$, E le groupe additif $\mathbb{Z}/(p)$, considéré comme A-module (le produit d'une classe mod.p^2 et d'un élément $x \in E$ étant l'élément nx, où n est un élément quelconque de la classe mod.p^2 considérée). Si u et v sont deux applications linéaires quelconques de E dans A (A étant considéré comme A-module), montrer que l'application linéaire f de $E \otimes E$ dans $A \otimes A$ telle que $f(x \otimes y)=u(x) \otimes v(y)$ est identiquement nulle, bien que le produit tensoriel $E^* \otimes E^*$ du dual de E par lui-même ne soit pas réduit à 0.

5) Soient E_1, E_2, F_1, F_2 quatre espaces vectoriels sur un corps commutatif K ; soit u_i une application linéaire de E_i dans F_i $(i=1,2)$, et soit $u=u_1 \otimes u_2$ le produit tensoriel de ces deux applications. Soit H_i un sous-espace vectoriel de E_i $(i=1,2)$, H le sous-espace vectoriel $H_1 \otimes H_2$ de $E_1 \otimes E_2$ (cor.3 de la prop.4), H' le sous-espace $(u_1(H_1)) \otimes (u_2(H_2))$ de $F_1 \otimes F_2$; montrer que $u(H)=H'$. En particulier, si les rangs $\rho(u_1)$ et $\rho(u_2)$ sont finis, on a $\rho(u_1 \otimes u_2)=\rho(u_1)\rho(u_2)$.

6) Soit z un élément du produit tensoriel $E \otimes F$ de deux espaces vectoriels de dimension finie sur un corps commutatif ; pour toute base (b_j) de F, z peut s'écrire d'une seule manière sous la forme $\sum_j x_j \otimes b_j$, où $x_j \in E$ (cor.1 de la prop.4). Montrer que le sous-espace vectoriel V de E engendré par les x_j ne dépend pas de la base (b_j) considérée dans F. Si V est de dimension r, montrer qu'il existe une base $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ de V et r éléments c_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ de F,

tels que $z = \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes c_i$; montrer que r est le plus petit des nombres m tels que z soit une somme de m produits tensoriels d'un élément de E et d'un élément de F .

7) Soit z un tenseur contravariant d'ordre p sur un espace vectoriel E de dimension n ; soit (a_λ) une base quelconque de E , et pour chaque indice h ($1 \leqslant h \leqslant p$), soit V_h le sous-espace de E engendré par les n^{p-1} vecteurs $x_{\lambda_1 \ldots \lambda_{h-1} \lambda_{h+1} \ldots \lambda_p}$ tels que

$$z = \sum a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} \ldots a_{\lambda_{h-1}} x_{\lambda_1 \ldots \lambda_{h-1} \lambda_{h+1} \ldots \lambda_p} a_{\lambda_{h+1}} \ldots a_{\lambda_p}$$

(sous-espace qui est indépendant de la base (a_λ) considérée ; cf. exerc.6). Si H est un sous-espace de E tel que z soit somme de tenseurs décomposables $y_1 y_2 \ldots y_p$, où tous les y_i appartiennent à H , montrer que $V_h \subset H$ pour $1 \leqslant h \leqslant p$; inversement, si on pose $V = \sum_{h=1}^{p} V_h$, montrer que z est somme de tenseurs décomposables produits de vecteurs appartenant tous à V .

8) Si $\underline{A}$ et $\underline{B}$ sont deux matrices carrées sur un anneau commutatif A , on a $\mathrm{Tr}(\underline{A} \otimes \underline{B}) = \mathrm{Tr}(\underline{A})\mathrm{Tr}(\underline{B})$.

9) Si A est un anneau non commutatif ayant un élément unité, montrer que, sur le module $M_n(A)$ des matrices carrées d'ordre n sur A (par rapport au centre C de A), il n'existe aucune forme linéaire f non identiquement nulle, telle que $f(\underline{XY}) = f(\underline{YX})$ pour tout couple de matrices carrées $\underline{X}, \underline{Y}$ d'ordre n sur A .

Si A est un corps non commutatif, déduire du résultat précédent que les matrices $\underline{XY} - \underline{YX}$ engendrent l'espace vectoriel (par rapport à C) $M_n(A)$ lorsque $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ parcourent $M_n(A)$.

10) Soit A un anneau d'intégrité ayant un élément unité, et soit K son corps des fractions. Soient E, F deux A-modules unitaires <u>réguliers</u> (chap.II, § 5, n°2), $\tilde{E}$ et $\tilde{F}$ les espaces vectoriels sur K associés à E et F , tels que $\tilde{E} = KE$, $\tilde{F} = KF$.

a) Soit (a_λ) une base de $\widetilde{E}$ formée d'éléments de E, (b_μ) une base de $\widetilde{F}$ formée d'éléments de F. Montrer que, dans le produit tensoriel $E \otimes F$, les éléments $a_\lambda \otimes b_\mu$ forment un système libre, et que pour tout $z \in E \otimes F$, il existe un $\rho \in A$ tel que ρz soit une combinaison linéaire des $a_\lambda \otimes b_\mu$. (remarquer que, pour tout couple (λ, μ), il existe une application bilinéaire f de $E \times F$ dans le A-module K, telle que $f(a_\lambda, b_\mu)=1$, $f(a_{\lambda'}, b_{\mu'})=0$ pour tout couple $(\lambda', \mu') \neq (\lambda, \mu)$).

b) En déduire que $E \otimes F$ est un A-module régulier, et qu'il est isomorphe au A-module engendré par les éléments $x \otimes y$ de l'espace vectoriel $\widetilde{E} \otimes \widetilde{F}$ sur K, lorsque x parcourt E et y parcourt F. En outre, l'espace vectoriel sur K associé au A-module régulier $E \otimes F$ est isomorphe à $\widetilde{E} \otimes \widetilde{F}$.

11) Soient A un anneau d'intégrité ayant un élément unité, K son corps des fractions, E un A-module unitaire. L'ensemble S des éléments <u>liés</u> de E (c'est-à-dire ayant un annulateur non nul) est un sous-module de E, et E/S est un module régulier. Montrer que l'espace vectoriel sur K obtenu par <u>extension à</u> K (n°8) de l'anneau d'opérateurs du module E est isomorphe à l'espace vectoriel sur K <u>associé</u> (chap. II, § 5, n°2) au A-module régulier E/S (définir une application linéaire de $K \otimes E$ (considéré comme espace vectoriel sur K) dans l'espace vectoriel F associé à E/S, une application linéaire de F dans $K \otimes E$, de sorte que ces deux applications soient des isomorphismes réciproques).

§ 2. Produits tensoriels d'algèbres.

<u>1. Produits tensoriels d'algèbres sur un corps.</u>

Soient E et F deux algèbres sur un même <u>corps</u> commutatif K ; elles sont munies d'une structure d'espace vectoriel par rapport à K, sous-jacente à leur structure d'algèbre. Soit $G=E \otimes F$ l'espace vectoriel sur K, produit tensoriel des espaces vectoriels E et F ; nous allons définir sur G une <u>multiplication</u>, qui, avec la structure d'espace vectoriel de G, détermine sur G une structure d'<u>algèbre</u> par rapport à K. Remarquons pour cela qu'une multiplication étant une application bilinéaire de $G \times G$ dans G, il suffit (§ 1,n°2) de la définir pour les couples (z,z') de produits tensoriels $z=x\otimes y$, $z'=x'\otimes y'$, en vérifiant que chacune des applications partielles $(x,y) \to (x \otimes y)(x' \otimes y')$, $(x',y') \to (x \otimes y)(x' \otimes y')$ est bilinéaire dans $E \times F$. Or, on satisfait à ces conditions de façon évidente en prenant $(x \otimes y)(x'\otimes y')=(xx') \otimes (yy')$. Reste à vérifier que la multiplication ainsi définie sur G est <u>associative</u> ; comme elle est doublement distributive par rapport à l'addition, cela revient à voir que

$$((x \otimes y)(x' \otimes y'))(x'' \otimes y'')=(x \otimes y)((x' \otimes y')(x'' \otimes y''))$$

propriété qui résulte de l'associativité de la multiplication dans E et dans F.

On dit que l'ensemble $E \otimes F$, muni de la structure d'algèbre ainsi définie, est le <u>produit tensoriel des algèbres</u> E <u>et</u> F.

Si E^0, F^0 sont les algèbres <u>opposées</u> à E et F respectivement, le produit tensoriel $E^0 \otimes F^0$ est isomorphe à l'algèbre <u>opposée</u> à $E \otimes F$, avec laquelle on l'<u>identifie</u> ; en particulier, si E et F sont des algèbres <u>commutatives</u>, il en est de même de $E \otimes F$.

Les prop.2 et 3 du § 1 s'étendent au cas où E et F sont des <u>algèbres</u> sur K, les isomorphismes canoniques définis dans ces propositions étant également des isomorphismes pour les structures d'algèbre qui interviennent.

Si M est une sous-algèbre de E, N une sous-algèbre de F, le sous-espace vectoriel P de $E \otimes F$ engendré par les produits tensoriels $x \otimes y$, où $x \in M$ et $y \in N$, est une <u>sous-algèbre</u> de $E \otimes F$; en outre, l'isomorphisme canonique de l'espace vectoriel $M \otimes N$ sur l'espace vectoriel P (§1, cor.5 de la prop.4) est aussi un isomorphisme de l'algèbre $M \otimes N$ sur l'algèbre P ; le plus souvent, on <u>identifie</u> l'algèbre P à l'algèbre $M \otimes N$ à l'aide de cet isomorphisme.

Si E est somme directe de sous-algèbre E_λ, F somme directe de sous-algèbres F_μ, $E \otimes F$ est somme directe des sous-algèbres $E_\lambda \otimes F_\mu$ (avec la convention précédente). Plus particulièrement :

PROPOSITION 1.- <u>Si l'algèbre E est composée directe</u> (chap. I, §8, n°11) <u>des sous-algèbres E_i</u> $(1 \leqslant i \leqslant m)$, <u>l'algèbre F composée directe des sous-algèbres F_j</u> $(1 \leqslant j \leqslant n)$, <u>l'algèbre $E \otimes F$ est composée directe des sous-algèbres $E_i \otimes F_j$</u>.

Il suffit de prouver que les $E_i \otimes F_j$ s'annulent mutuellement (chap.I, §8, prop.7) ; or, si $x \in E_i$, $x' \in E_h$, $y \in F_j$, $y' \in F_k$ on a $(x \otimes y)(x' \otimes y') = (xx') \otimes (yy') = 0$ si $(i,j) \neq (h,k)$ puisqu'alors un des produits xx', yy' est nul.

<u>Exemples</u>.- 1. Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie sur un corps commutatif K, on a vu (§1, prop.6) qu'on peut <u>identifier</u> les structures d'<u>espace vectoriel</u> de $\mathcal{L}(E \otimes F)$ et de $\mathcal{L}(E) \otimes \mathcal{L}(F)$ au moyen d'un isomorphisme canonique ; d'après la formule (6) du §1, on voit en outre que, lorsqu'on fait cette identification, la structure d'<u>algèbre</u> de $\mathcal{L}(E \otimes F)$ se trouve identifiée avec le produit tensoriel des structures d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{L}(F)$. On peut encore exprimer ce résultat de la manière suivante (chap.II, §6, no5) :

PROPOSITION 2.- <u>Le produit tensoriel des algèbres de matrices carrées d'ordres respectifs p et q sur un corps commutatif K, est isomorphe à l'algèbre des matrices carrées d'ordre pq sur K</u>.

II. Soit E une algèbre sur K, ayant un élément unité ; l'anneau $M_n(E)$ des matrices carrées d'ordre n sur E est aussi une algèbre sur K ; montrons qu'elle est isomorphe au produit tensoriel $E\otimes M_n(K)$ de E par l'algèbre des matrices d'ordre n sur K. En effet, on définit une représentation de l'algèbre $E\otimes M_n(K)$ dans $M_n(E)$ en faisant correspondre à tout produit tensoriel $t\otimes \underline{X}$ la matrice $t\underline{X}=\underline{X}t$, puisque $(t\underline{X})(t'\underline{X}')=(tt')(\underline{X}\underline{X}')$. Pour voir que cette représentation est un isomorphisme de $E\otimes M_n(K)$ sur $M_n(E)$, remarquons que les matrices $\underline{E}_{ij}$ de la base canonique de $M_n(K)$ forment aussi la base canonique de $M_n(E)$ (considéré comme E-module à droite ou à gauche) ; d'autre part, tout élément de $E\otimes M_n(K)$ se met d'une seule manière sous la forme $\sum_{i,j} t_{ij}\otimes \underline{E}_{ij}$ (§1, cor.1 de la prop.4), et il lui correspond par la représentation précédente la matrice $\sum_{i,j} t_{ij}\underline{E}_{ij}$ de $M_n(E)$, d'où la proposition.

III. Soient S et T deux monoïdes quelconques, $E=K^{(S)}$ et $F=K^{(T)}$ les algèbres des monoïdes S et T relatives au corps commutatif K (chap.II, §7, n°9) ; le produit tensoriel $E\otimes F$ de ces deux algèbres est isomorphe à l'algèbre $K^{(S\times T)}$ du monoïde produit (chap.I, §4, n°5) des monoïdes S et T. En effet, on définit un isomorphisme de la structure d'espace vectoriel de $E\otimes F$ sur celle de $K^{(S\times T)}$ en faisant correspondre à chacun des éléments $e_u\otimes e_v$ de $E\otimes F$ (qui forment une base de cet espace vectoriel lorsque u parcourt S et v parcourt T) l'élément $e_{(u,v)}$ de la base canonique de $K^{(S\times T)}$; d'après la définition du produit tensoriel de deux algèbres, il est immédiat que cette application est aussi un isomorphisme de la structure d'algèbre de $E\otimes F$ sur celle de $K^{(S\times T)}$.

On définit de la même manière le produit tensoriel d'un nombre fini quelconque d'algèbres E_i sur un corps commutatif K ; nous laissons au lecteur le soin d'énoncer pour un tel produit les propriétés qui généralisent celles qui précèdent. Signalons seulement que les isomorphismes canoniques définis au §1,n°7 ("associativité" du produit tensoriel) sont encore des isomorphismes de structures d'<u>algèbre</u> lorsque les E_i sont des algèbres.

<u>Remarques</u>.- 1) La notion de produit tensoriel de deux algèbres dépend essentiellement du <u>corps d'opérateurs</u> commun à ces deux algèbres, et non seulement de leurs structures d'<u>anneau</u> (sans opérateur) ; si on considère sur E (resp.F) plusieurs structures d'algèbre ayant même structure d'anneau (sans opérateur) sous-jacente, les produits tensoriels $E \otimes F$ correspondants auront des structures d'<u>anneau</u> (sans opérateur) fort différentes.

Par exemple, soit $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes ; si on le considère comme algèbre par rapport à lui-même, le produit tensoriel $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ (§1,cor. de la prop.3) ; au contraire, si on considère $\mathbb{C}$ comme algèbre de rang 2 sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, $\mathbb{C}$ a pour base les deux nombres 1 et i , donc le produit tensoriel $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ est une algèbre de rang 4 sur $\mathbb{R}$, et ne peut par suite être isomorphe à $\mathbb{C}$ (d'ailleurs, si on prend pour base de $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ les éléments $\frac{1}{2}(1 \otimes 1 + i \otimes i)$, $\frac{1}{2}(1 \otimes 1 - i \otimes i)$, $\frac{1}{2}(1 \otimes i + i \otimes 1)$, $\frac{1}{2}(1 \otimes i - i \otimes 1)$, on vérifie sans peine que $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ est composée directe de deux corps isomorphes à $\mathbb{C}$).

2) La plupart des définitions et propriétés précédentes se généralisent aisément au cas où il s'agit d'algèbres sur un <u>anneau</u> commutatif ayant un élément unité ; nous laissons cette généralisation au lecteur, le cas le plus important dans les applications étant celui des algèbres sur un corps.

<u>2. Caractérisation du produit tensoriel de deux algèbres sur un corps.</u>

Soient E et F deux algèbres sur un corps K ayant chacune un <u>élément unité</u> ; on peut alors (chap.II, §7,n°   ) identifier K à une sous-algèbre de chacune des algèbres E et F, l'élément unité e de K étant élément unité commun de E et F. L'élément $e \otimes e$ est alors élément unité de $E \otimes F$, et on peut aussi identifier K avec la sous-algèbre $K(e \otimes e)$ de $E \otimes F$. Avec ces conventions :

PROPOSITION 3.- Si, pour tout $x \in E$ (resp. $y \in F$) on pose $u(x) = x \otimes e$ (resp. $v(y) = e \otimes y$), l'application u (resp. v) est un isomorphisme de l'algèbre E (resp. F) sur une sous-algèbre de $E \otimes F$; les sous-algèbres $u(E)$ et $v(F)$ de $E \otimes F$ possèdent les propriétés suivantes :

1° tout élément de $u(E)$ est permutable avec tout élément de $v(F)$ et on a $u(x)v(y) = v(y)u(x) = x \otimes y$;

2° pour toute base (a_λ) de E par rapport à K, la famille $(u(a_\lambda))$ est une base de la structure de module à gauche (ou de la structure de module à droite) de l'anneau $E \otimes F$ par rapport au sous-anneau $v(F)$;

3° $u(E) \cap v(F) = K$.

Il est immédiat que u est une représentation de E dans l'algèbre $E \otimes F$, car $(x \otimes e)(x' \otimes e) = (xx') \otimes e$; de même v est une représentation de F dans $E \otimes F$, et comme $x \otimes y = (x \otimes e)(e \otimes y) = (e \otimes y)(x \otimes e)$, tout élément de $u(E)$ est permutable avec tout élément de $v(F)$. Si (a_λ) est une base de E par rapport à K, on sait (§ 1, cor. de la prop. 4) que tout élément de $E \otimes F$ s'écrit d'une seule manière sous la forme $\sum a_\lambda \otimes y_\lambda = \sum_\lambda u(a_\lambda)v(y_\lambda) = \sum_\lambda v(y_\lambda)u(a_\lambda)$, donc les $u(a_\lambda)$ forment bien une base de $E \otimes F$ par rapport à $v(F)$; ils forment a fortiori une base de $u(E)$ par rapport à $v(K) = K$, ce qui montre en même temps que u et v sont des isomorphismes. Enfin, prenons dans E une base dont e est un élément, et soit (b_ι) la famille des autres éléments de cette base ; si $x \otimes e = e \otimes y$ pour $x \in E$, $y \in F$, comme on peut écrire $x = \xi_0 e + \sum_\iota \xi_\iota b_\iota$, on a $\xi_0 e \otimes e + \sum_\iota \xi_\iota b_\iota \otimes e = e \otimes y$, ce qui, d'après le cor. 1 de la prop. 4 du §1, entraîne $\xi_\iota = 0$ pour tout indice ι, et achève la démonstration.

Cette proposition permet d'identifier l'algèbre E (resp. F) avec la sous-algèbre u(E) (resp. v(F)) de $E \otimes F$ à l'aide de l'isomorphisme u (resp. v) ; le produit tensoriel $x \otimes y$ est alors identifié au produit xy (=yx) dans l'algèbre $E \otimes F$, ce qui permet d'éliminer la notation $x \otimes y$; en particulier, si F=K , le produit tensoriel $E \otimes K$ est identifié à E . Si M (resp. N) est une sous-algèbre de E (resp. F), l'algèbre $M \otimes N$ est identifiée avec la sous-algèbre de $E \otimes F$ engendrée par les produits xy(=yx) quand x parcourt M et y parcourt N .

Réciproquement, la prop.3 donne une caractérisation des algèbres sur K (ayant un élément unité) qui sont produits tensoriels de deux algèbres sur K ; de façon précise :

PROPOSITION 4.- Soit G une algèbre sur un corps commutatif K , ayant un élément unité, et possédant deux sous-algèbres E,F ayant même élément unité que G , et telles que :

1° tout élément de E soit permutable avec tout élément de F ;

2° toute base de E par rapport à K soit une base de G pour la structure de module à droite de G par rapport à F .

Dans ces conditions, il existe un isomorphisme f de l'algèbre $E \otimes F$ sur l'algèbre G , tel que $f(x \otimes y)=xy$ pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$.

En effet, $(x,y) \rightarrow xy$ est une application bilinéaire de $E \times F$ dans G , donc il existe bien une application linéaire f de $E \otimes F$ dans G telle que $f(x \otimes y)=xy$ (§ 1,n°2) ; f est une représentation de $E \otimes F$ dans G , car $(xy)(x'y')=(xx')(yy')$, tout élément de E étant permutable avec tout élément de F . Enfin, si (a_λ) est une base de E tout élément $z \in E \otimes F$ s'écrit d'une seule manière $z = \sum_\lambda a_\lambda \otimes y_\lambda$, et on a $f(z)= \sum_\lambda a_\lambda y_\lambda$; comme par hypothèse (a_λ) est une base de G par rapport à F , f est un isomorphisme de $E \otimes F$ sur G .

On notera que, d'après les prop.3 et 4 , les hypothèses de la prop.4 entraînent $E \cap F = K$.

COROLLAIRE.- <u>Soit</u> G <u>une algèbre sur</u> K , <u>ayant un élément unité</u>. <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux sous-algèbres de</u> G <u>ayant même élément unité que</u> G , <u>et telles que</u> :

1° <u>tout élément de</u> E <u>soit permutable avec tout élément de</u> F ;

2° <u>toute partie de</u> E <u>libre pour la structure d'espace vectoriel de</u> E <u>par rapport à</u> K <u>est une partie libre de</u> G <u>pour la structure de module à droite de</u> G <u>par rapport à</u> F .

<u>Dans ces conditions, si</u> H <u>est la sous-algèbre de</u> G <u>engendrée par les produits</u> xy , <u>où</u> x <u>parcourt</u> E <u>et</u> y <u>parcourt</u> F , H <u>est isomorphe au produit tensoriel</u> $E \otimes F$.

Il suffit d'appliquer à H la prop.4, puisque toute base de E par rapport à K est un système libre dans H pour la structure de F-module à droite de H , et d'autre part engendre le F-module H d'après la définition de ce dernier.

Lorsque les sous-algèbres E et F d'une algèbre G satisfont aux conditions du corollaire précédent, on dit qu'elles sont <u>linéairement disjointes</u> dans G .

<u>3. Extension du corps d'opérateurs d'une algèbre</u>.

Supposons que les algèbres E et F satisfassent aux mêmes hypothèses que dans la prop.2, mais qu'en outre E soit une algèbre <u>commutative</u> sur K ; lorsqu'on identifie E et F à des sous-algèbres de $E \otimes F$ (n°2), E appartient alors au <u>centre</u> de $E \otimes F$; en effet, comme $E \otimes F$ est engendrée par les produits xy , où $x \in E$ et $y \in F$, il suffit de montrer que tout $z \in E$ est permutable avec un tel produit ; mais on a
$z(xy)=zxy=xzy=xyz=(xy)z$ puisque E est commutative et que tout élément de E est permutable avec tout élément de F .

Il en résulte que $E \otimes F$ peut être considérée comme une <u>algèbre</u> par rapport au sous-anneau E de son centre ; on notera F_E l'algèbre par rapport à E ainsi définie, et on aura soin de ne pas la confondre avec l'algèbre $E \otimes F$ <u>par rapport à</u> K . Si (a_λ) est une base de F par rapport à K , il résulte de la prop.2 que (a_λ) est une base de F_E par rapport à E ; on dit encore que l'algèbre F_E résulte de l'<u>extension à</u> E du corps d'opérateurs de l'algèbre F .

<u>Exercices</u>.- 1) Soient E et F deux algèbres sur un anneau commutatif A ayant un élément unité. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal à gauche de E , $\mathfrak{b}$ un idéal à gauche de F , le sous-groupe additif de l'algèbre $E \otimes F$, engendré par les produits tensoriels $x \otimes y$, où x parcourt $\mathfrak{a}$ et y parcourt $\mathfrak{b}$, est un idéal à gauche de $E \otimes F$. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal bilatère de E , $\mathfrak{b}$ un idéal bilatère de F , le produit tensoriel $(E/\mathfrak{a}) \otimes (F/\mathfrak{b})$ des algèbres quotients $E/\mathfrak{a}$ et $F/\mathfrak{b}$ est isomorphe à l'algèbre quotient $(E \otimes F)/(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1)$, où $\mathfrak{a}_1$ (resp. $\mathfrak{b}_1$) est l'idéal bilatère engendré par les produits $x \otimes y$, où x parcourt $\mathfrak{a}$ (resp. E), et y parcourt F (resp. $\mathfrak{b}$) .

2) Soit G une algèbre sur un corps K , ayant un élément unité. S'il existe dans G deux sous-algèbres E et F ayant même élément unité que G , telles que tout élément de E soit permutable avec tout élément de F , et que G soit engendré par l'ensemble des produits xy, où x parcourt E et y parcourt F , montrer que G est isomorphe à une algèbre quotient du produit tensoriel $E \otimes F$.

3) Soient E et F deux algèbres sur un corps K , ayant chacune un élément unité ; si C est le centre de l'algèbre E , montrer que la sous-algèbre de $E \otimes F$ formée des éléments permutables avec tous les éléments de E est identique à $C \otimes F$; si D est le centre de F , le centre de $E \otimes F$ est la sous-algèbre $C \otimes D$.

4) Soient E_1, E_2, F_1, F_2 quatre algèbres sur un anneau A. Si u est une représentation de E_1 dans E_2, v une représentation de F_1 dans F_2, le produit tensoriel $u \otimes v$ est une représentation de l'algèbre $E_1 \otimes F_1$ dans l'algèbre $E_2 \otimes F_2$.

§ 3. Algèbre extérieure.

1. Fonctions symétriques et fonctions antisymétriques.

Soit E un ensemble quelconque non vide, n un entier >0 ; l'ensemble E^n est identique à l'ensemble des applications de l'intervalle $I=[1,n]$ de $\mathbb{N}$ dans E ; conformément aux définitions générales (chap.I, § 7,n°3), à toute permutation σ à E^n, et fait correspondre à tout élément $x=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E^n, l'élément $(x_{\sigma^{-1}(i)})$; si on désigne cet élément par σx, l'ensemble E^n est un ensemble muni du groupe d'opérateurs $\mathfrak{S}_n$, pour la loi externe $(\sigma, x) \to \sigma x$ (chap.I, § 7,n°2) ; et si f_σ désigne la permutation $x \to \sigma x$ de E^n, l'application $\sigma \to f_\sigma$ est une représentation du groupe $\mathfrak{S}_n$ dans le groupe des permutations de E^n, représentation qui est d'ailleurs un isomorphisme lorsque E possède plus d'un élément.

Soit maintenant F un second ensemble quelconque, et $G=F^{E^n}$ l'ensemble des applications de E^n dans F ; pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, l'extension de σ à G est cette fois la permutation qui fait correspondre à toute application f de E^n dans F l'application $x \to f(\sigma^{-1} x)$ (chap.I § 7,n°3) ; si on la désigne par σf, on a donc identiquement

$$\sigma f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)})$$

L'ensemble G est encore un ensemble muni du groupe d'opérateurs $\mathfrak{S}_n$, pour la loi externe $(\sigma,f)\to \sigma f$; si φ_σ est la permutation $f \to \sigma f$ de G, l'application $\sigma \to \varphi_\sigma$ est une représentation de $\mathfrak{S}_n$ dans le groupe des permutations de G, et un isomorphisme lorsque E et F possèdent chacun plus d'un élément.

Une application f de E^n dans F sera dite <u>symétrique</u> si $\sigma f=f$ pour toute permutation σ , autrement dit, si on a identiquement

$$f(x_1,x_2,..,x_n)=f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},...,x_{\sigma(n)})$$

Si F est muni d'une structure de <u>groupe abélien additif</u>, une application f de E^n dans F sera dite <u>antisymétrique</u> si $\sigma f=\varepsilon_\sigma f$ pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ (ε_σ désignant la <u>signature</u> de la permutation σ (chap.1, §7,n°1)), autrement dit, si on a identiquement

$$f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},..,x_{\sigma(n)})=\varepsilon_\sigma f(x_1,x_2,..,x_n) .$$

PROPOSITION 1.- <u>Pour qu'une application</u> f <u>de</u> E^n <u>dans</u> F <u>soit symétrique</u> (resp. <u>antisymétrique</u> si F est un groupe abélien additif), <u>il faut et il suffit que pour toute transposition</u> $\tau \in \mathfrak{S}_n$ (chap.I, §7,n°1), <u>on ait</u> $\tau f=f$ (resp. $\tau f=-f$) .

La condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante, en raison du fait que toute permutation σ de $\mathfrak{S}_n$ est un <u>produit de transpositions</u>(*), et que l'application $\sigma \to \varepsilon_\sigma$ est une représentation de $\mathfrak{S}_n$ sur le groupe multiplicatif $\{-1,+1\}$.

Bornons-nous maintenant au cas où E et F sont deux <u>modules unitaires</u> sur un anneau commutatif A ayant un élément unité. Alors, pour toute application <u>n-linéaire</u> f de E^n dans F , et toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, il est immédiat que σf est encore une application <u>n-linéaire</u> de E^n dans F ; autrement dit, le sous-ensemble $\mathcal{L}_n(E^n,F)$ de G , formé des applications n-linéaires de E^n dans F , est <u>invariant</u> pour tous les

---

(*) voir chap.I, §7,exerc.7a). Si p est le nombre d'éléments de I qui ne sont pas invariants par σ , la proposition est évidente si p=2 , car σ est alors une transposition. Supposons la démontrée pour $p<m$, et démontrons-la pour p=m ; soit H la partie de I formée des éléments de I non invariants par σ ; si $i\in H$, $j=\sigma(i)$ appartient à H ; soit la transposition telle que $\tau(i)=j$, $\tau(j)=i$; la permutation $\sigma\tau$ laisse invariants les indices n'appartenant pas à H , et en outre l'indice j , donc elle est un produit de transpositions, et il en est par suite de même de σ .

les opérateurs du groupe $\mathfrak{S}_n$; de plus, l'application $f \rightarrow \sigma f$ est un __automorphisme__ de la structure de A-module de $\mathcal{L}_n(E^n,F)$. Par suite, l'ensemble des applications n-linéaire __symétriques__ (resp. __antisymétriques__) de E^n dans F est un __sous-module__ de $\mathcal{L}_n(E^n,F)$.

Si E admet une base $(a_\lambda)_{\lambda\in L}$, on sait (§ 1,n°1) qu'une application n-linéaire f de E^n dans F est déterminée par les valeurs des éléments $b_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}=f(a_{\lambda_1},a_{\lambda_2},\ldots,a_{\lambda_n})$ pour toutes les suites distinctes $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de n éléments de L . Pour toute permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, on a $\sigma f(a_{\lambda_1},a_{\lambda_2},\ldots,a_{\lambda_n})=f(a_{\lambda_{\sigma(1)}},a_{\lambda_{\sigma(2)}},\ldots,a_{\lambda_{\sigma(n)}})$; en particulier, pour que f soit symétrique (resp. antisymétrique), il faut et il suffit qu'on ait

$$b_{\lambda_{\sigma(1)}\lambda_{\sigma(2)}\ldots\lambda_{\sigma(n)}} = b_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$$

(resp. $\qquad b_{\lambda_{\sigma(1)}\lambda_{\sigma(2)}\ldots\lambda_{\sigma(n)}} = \varepsilon_\sigma b_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$)

pour toute suite (λ_i) de n éléments de L et toute permutation σ .

__2. Fonctions multilinéaires alternées.__

Soit f une application n-linéaire antisymétrique de E^n dans F ; supposons que, dans F , la relation $2y=0$ entraîne $y=0$ (ce qui sera le cas lorsque E et F sont des __espaces vectoriels__ sur un corps K __de caractéristique__ $\neq 2$). Dans ces conditions, on a identiquement $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$ pour tout $x=(x_i)$ ayant __deux coordonnées égales__. En effet, pour un tel x , il existe une transposition τ telle que $\tau x = x$; on a donc $f(x)=f(\tau x)=\tau f(x)=-f(x)$, ou $2f(x)=0$, ce qui entraîne $f(x)=0$ d'après l'hypothèse sur F .

Inversement, supposons que f soit une application n-linéaire de E^n dans F , telle que $f(x)=0$ pour tout $x=(x_i)$ ayant deux coordonnées égales ; alors (sans aucune hypothèse sur F) , f est __antisymétrique__ ; en effet, on a identiquement

(1) $f(x_1,..,x_{i-1},x_i+x_j,x_{i+1},..,x_{j-1},x_i+x_j,x_{j+1},...,x_n)=0$

pour tout couple d'indices (i,j) tel que $i<j$; si τ est la transposition qui échange i et j, on voit aussitôt que la relation (1) équivaut à $\tau f=-f$; donc (prop.1) f est antisymétrique.

DEFINITION 1.- <u>On dit qu'une application</u> n-<u>linéaire</u> f <u>de</u> E^n <u>dans</u> F <u>est alternée si</u> $f(x_1,..,x_n)=0$ <u>pour tout</u> $x=(x_i)\in E^n$ <u>ayant deux coordonnées égales</u>.

Il est clair que les applications n-linéaires alternées de E^n dans F forment un <u>sous-module</u> de $\mathcal{L}_n(E^n,F)$.

Nous venons de démontrer que :

PROPOSITION 2.- <u>Toute fonction n-linéaire alternée est antisymétrique. Inversement, si, dans le module</u> F , <u>la relation</u> $2y=0$ <u>entraîne</u> $y=0$, <u>toute application n-linéaire antisymétrique de</u> E^n <u>dans</u> F <u>est alternée</u>.

Si E admet une base (a_λ), pour que f soit alternée, il faut et il suffit que les éléments $b_{\lambda_1\lambda_2..\lambda_n}=f(a_{\lambda_1},a_{\lambda_2},...,a_{\lambda_n})$ pour lesquels deux indices λ_i sont égaux, soient <u>nuls</u>, et que l'on ait $b_{\lambda_{\sigma(1)}\lambda_{\sigma(2)}..\lambda_{\sigma(n)}}=\varepsilon_\sigma b_{\lambda_1\lambda_2..\lambda_n}$ pour toute suite (λ_i) ayant tous ses termes distincts, et toute permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_n$.

<u>Remarque</u>.- Lorsqu'on ne suppose plus que $2y=0$ entraîne $y=0$ dans F , une application antisymétrique de E^n dans F n'est plus nécessairement alternée. Par exemple, si K est un corps de caractéristique 2 , il y a identité entre <u>formes</u> n-linéaires <u>symétriques</u> et formes n-linéaires <u>antisymétriques</u> ; or, il existe des formes symétriques non alternées, par exemple la forme bilinéaire $u(x)u(y)$, où u est une forme linéaire non nulle sur E .

<u>3. Antisymétrisation d'une fonction multilinéaire</u>.

Soit f une application n-linéaire quelconque de E^n dans F ; on appelle <u>antisymétrisée</u> de f, et on note $\mathfrak{a}f$ l'application n-linéaire

$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma . \sigma f$ de E^n dans F. Si E admet une base (a_λ) et si on pose $b_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n} = f(a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \ldots, a_{\lambda_n})$ l'antisymétrisée $\underline{a}f$ de f est déterminée par les éléments

$$\underline{a}f(a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \ldots, a_{\lambda_n}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma b_{\lambda_{\sigma(1)} \lambda_{\sigma(2)} \ldots \lambda_{\sigma(n)}}$$

PROPOSITION 3.- <u>L'antisymétrisée d'une application n-linéaire quelconque de E^n dans F est alternée</u> (donc <u>antisymétrique</u>). <u>Inversement, si E admet une base, toute application n-linéaire alternée de E^n dans F est égale à l'antisymétrisée d'une application n-linéaire</u>.

En effet, considérons le sous-groupe d'ordre 2 de $\mathfrak{S}_n$ formé de la permutation identique et d'une transposition τ ; il existe $\frac{n!}{2}$ permutations distinctes σ_k de $\mathfrak{S}_n$ telles que $\mathfrak{S}_n$ soit formée des $n!$ permutations σ_k et $\tau\sigma_k$; pour une application n-linéaire quelconque f de E^n dans F, posons $f_k = \varepsilon_{\sigma_k} . \sigma_k f$ pour tout indice k ; on peut écrire $\underline{a}f(x) = \sum_k (f_k(x) - f_k(\tau x))$ d'où $\underline{a}f(x) = 0$ si $x = \tau x$, ce qui montre que $\underline{a}f$ est alternée.

Inversement, supposons que E admette une base (a_λ). Pour toute suite (λ_i) de n indices <u>distincts</u> et tout élément $b \in F$, désignons par $g_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n ; b}$ l'application n-linéaire alternée de E^n dans F définie par les conditions $g_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n ; b}(a_{\lambda_{\sigma(1)}}, a_{\lambda_{\sigma(2)}}, \ldots a_{\lambda_{\sigma(n)}}) = \varepsilon_\sigma b$ pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $g_{\lambda_1 \ldots \lambda_n ; b}(a_{\mu_1}, a_{\mu_2}, \ldots, a_{\mu_n}) = 0$ pour toute suite (μ_i) de n indices ne se déduisant pas de la suite (λ_i) par une permutation de $\mathfrak{S}_n$. Il est clair que toute application n-linéaire alternée g de E^n dans F est une <u>combinaison linéaire</u> des $g_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n ; b}$.

Or, $g_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n ; b}$ est l'antisymétrisée de l'application n-linéaire f définie par $f(a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \ldots a_{\lambda_n}) = b$, et $f(a_{\mu_1}, \ldots, a_{\mu_n}) = 0$ pour toute suite (μ_i) de n indices distincte de (λ_i) ; ce qui démontre la seconde partie de la proposition.

<u>Remarque</u>.- La seconde partie de la prop.3 est encore exacte lorsqu'on ne suppose plus que E admette une base, mais par contre que, dans F, l'équation $n!y=b$ admette une solution et une seule pour tout $b \in F$. En effet, si g est une application n-linéaire alternée (donc antisymétrique), on a $\underline{\underline{a}}g = \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} . \sigma g = n!g$; si f est l'application n-linéaire telle que $n!f=g$, on aura $n!(\underline{\underline{a}}f) = \underline{\underline{a}}g = n!g$, donc $\underline{\underline{a}}f=g$. On remarquera que, dans ce cas, l'équation $2y=b$ a toujours une solution et une seule, donc que $2y=0$; la prop.2 montre donc qu'il y a alors <u>identité</u> entre les trois notions de fonction n-linéaire antisymétrique, alternée et antisymétrisée. Ce cas (le plus important en pratique) se présentera par exemple pour tout n lorsque E et F sont des <u>espaces vectoriels</u> sur un <u>corps de caractéristique</u> 0. (cf. exerc.4) .

4. Antisymétrisation d'un tenseur.

On sait (§ 1,n°2) qu'il y a correspondance biunivoque entre les applications <u>n-linéaires</u> de E^n dans F, et les applications <u>linéaires</u> du produit tensoriel $\overset{n}{\otimes} E$ dans F, à toute application n-linéaire f de E^n dans F correspondant l'application linéaire $\overline{f}$ de $\overset{n}{\otimes} E$ dans F, telle que $\overline{f}(x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour tout tenseur décomposable. Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, nous désignerons par $\sigma\overline{f}$ l'application linéaire de $\overset{n}{\otimes} E$ dans F qui correspond à σf ; elle est donc définie par la condition $\sigma\overline{f}(x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n) = \overline{f}(x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)})$.

On peut définir autrement l'application σg pour toute application linéaire g de $\overset{n}{\otimes} E$ dans F. Nous définirons pour cela un <u>automorphisme</u> $z \to \sigma z$ du module $\overset{n}{\otimes} E$, par la condition

$\sigma(x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n) = x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes x_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma^{-1}(n)}$ (qui suffit, comme on sait, à définir une application linéaire de $\overset{n}{\otimes} E$ dans lui-même (§ 1,n°2) ; on vérifie immédiatement qu'avec cette définition,

$\overset{n}{\otimes} E$ est <u>muni du groupe d'opérateurs</u> $\mathfrak{S}_n$ (chap.I, § 7, n°2) pour la loi externe $(\sigma, z) \to \sigma z$; pour toute application linéaire g de $\overset{n}{\otimes} E$ dans F, on a alors

(2) $$\sigma g(z) = g(\sigma^{-1} z) .$$

Cette relation est bien conforme à la méthode générale d'extension d'un groupe de transformations à un ensemble d'applications (chap.I, § 7, n°3) ; on peut d'ailleurs retrouver la définition de l'application $z \to \sigma z$ par cette méthode générale, en partant de la définition de $\overset{n}{\otimes} E$ comme ensemble quotient de $A^{(E^n)}$ (§ 1, n°2) ; nous laissons au lecteur le soin de faire cette vérification.

On dit encore qu'un tenseur $z \in \overset{n}{\otimes} E$ est <u>symétrique</u> (resp. <u>antisymétrique</u>) si, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $\sigma z = z$ (resp. $\sigma z = \varepsilon_\sigma z$). On appelle <u>antisymétrisé</u> d'un tenseur z, et on note $\underline{a} z$ le tenseur $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma . \sigma z$; il est immédiat d'après (2) que, pour toute application linéaire g de $\overset{n}{\otimes} E$ dans un module F, on a

(3) $$\underline{a}\, g(z) = g(\underline{a}\, z) .$$

<u>Remarques</u>.- 1) On vérifie immédiatement que l'application $z \to \sigma z$ est un <u>automorphisme</u> de la structure d'<u>espace tensoriel</u> (§ 1, n°9) de $\overset{n}{\otimes} E$.

2) L'antisymétrisé d'un tenseur z est antisymétrique, mais un tenseur antisymétrique n'est pas nécessairement antisymétrisé d'un autre tenseur ; il en est ainsi toutefois lorsque, dans E, l'équation $n!x = a$ admet une solution et une seule pour tout $a \in E$. En effet, si z est un tenseur antisymétrique, on a $\underline{a} z = n! z$; si z' est le tenseur défini par $n! z' = z$, on aura $n!(\underline{a} z') = \underline{a} z = n! z$, donc $z = \underline{a} z'$.

5. Puissances antisymétriques d'un module.

Pour qu'une application n-linéaire f de E^n dans F soit alternée il faut et il suffit que l'application linéaire correspondante $\bar{f}$ de $\overset{n}{\otimes} E$ dans F s'annule pour tous les tenseurs décomposables $x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n$, où deux des x_i sont égaux. Comme $\bar{f}$ est linéaire, elle s'annule aussi dans le sous-module $G_n(E)$ (ou simplement G_n) de $\overset{n}{\otimes} E$ engendré par ces tenseurs ; donc (chap.II, § 2, prop.1), elle est de la forme $g \circ \psi$, où ψ est l'application canonique de $\overset{n}{\otimes} E$ sur le module quotient $\overset{n}{\otimes} E/G_n$, et g une application linéaire de $\overset{n}{\otimes} E/G_n$ dans F. On voit donc que toute application multilinéaire alternée de E^n dans F peut s'écrire d'une seule manière sous la forme

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to g(\psi(x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n)).$$

DEFINITION 2.- On appelle puissance antisymétrique n-ème du module E et on note $\overset{n}{\wedge} E$ le module quotient $\overset{n}{\otimes} E/G_n$, muni de la structure définie par l'application $(x_1, \ldots, x_n) \to \psi(x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n)$; les éléments de $\overset{n}{\wedge} E$ sont appelés n-vecteurs sur E. Tout n-vecteur de la forme $\psi(x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n)$ est appelé n-vecteur décomposable et noté $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$.

La définition précédente n'a de sens que pour $n \geqslant 2$; par convention, le module E se note $\overset{1}{\wedge} E$ et l'anneau d'opérateurs A se note $\overset{0}{\wedge} E$; un 1-vecteur est donc un élément de E, un 0-vecteur un élément de A.

Tout n-vecteur sur E est somme de n-vecteurs décomposables, puisque tout élément de $\overset{n}{\otimes} E$ est somme de tenseurs décomposables.

D'après la définition de G_n, tout n-vecteur décomposable $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$, dans lequel deux des éléments x_i sont égaux, est nul. En outre, pour toute application linéaire g de $\overset{n}{\otimes} E$ dans F, correspondant à une application n-linéaire alternée de E^n dans F, on a identiquement $g(\varepsilon_\sigma.\sigma z)=\varepsilon_\sigma.\sigma g(z)=g(z)$, donc $g(z-\varepsilon_\sigma.\sigma z)=0$; comme l'application canonique γ de $\overset{n}{\otimes} E$ sur $\overset{n}{\wedge} E$ correspond à une application n-linéaire alternée, on a $z-\varepsilon_\sigma.\sigma z \in G_n$, c'est-à-dire, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

(4) $$x_{\sigma(1)} \wedge x_{\sigma(2)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma(n)} = \varepsilon_\sigma x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n .$$

Pour définir une application linéaire de $\overset{n}{\wedge} E$ dans un module F , il <u>suffit</u> de se donner une application $(x_1,..,x_n) \to g(x_1,x_2,..,x_n)$ de E^n dans F , et de vérifier que cette application est <u>multilinéaire alternée</u> pour être assuré qu'il existe une application linéaire et une seule f de $\overset{n}{\wedge} E$ dans F telle que $f(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n)=g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ identiquement. En particulier, il est <u>inutile</u> de vérifier que la relation $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n = y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_n$ entraîne $g(x_1,..,x_n)=g(y_1,..,y_n)$.

<u>6. Tenseurs antisymétrisés et n-vecteurs.</u>

Nous venons de voir qu'aux application n-linéaires <u>alternées</u> f de E^n dans F correspondent les applications linéaires $\bar{f}$ de $\overset{n}{\otimes} E$ dans F qui s'annulent dans le sous-module G_n ; cherchons de même à quelles applications linéaires $\bar{f}$ correspondent les applications n-linéaires <u>antisymétrisées</u> f . Si $f= \underline{a}g$, on a $\bar{f}= \underline{a}\bar{g}$, d'où pour tout tenseur $z \in \overset{n}{\otimes} E$, $\bar{f}(z)=\bar{g}(\underline{a}\, z)$ d'après (3) ; autrement dit, $\bar{f}$ est la composée d'une application linéaire quelconque $\bar{g}$ et de l'application $z \to \underline{a}\, z$ de $\overset{n}{\otimes} E$ sur le sous-module S_n de $\overset{n}{\otimes} E$ formé des tenseurs <u>antisymétrisés</u>. Soit H_n le sous-module de $\overset{n}{\otimes} E$ formé des tenseurs z dont l'antisymétrisé $\underline{\underline{a}}_n z$ est <u>nul</u> ; le sous-module S_n est isomorphe au module quotient $\overset{n}{\otimes} E/H_n$; de façon précise, l'application linéaire biunivoque associée à l'application $z \to \underline{a}\, z$ est un <u>isomorphisme</u> de $\overset{n}{\otimes} E/H_n$ sur S_n . On peut donc dire que les fonctions linéaires $\bar{f}$

qui correspondent aux applications antisymétrisées f sont celles qui <u>s'annulent dans</u> H_n (chap.II, § 2, prop.) .

Comme toute application n-linéaire antisymétrisée est alternée (prop.3), on a $G_n \subset H_n$; si en outre E admet une <u>base</u>, la prop.3 montre que $G_n = H_n$; donc :

PROPOSITION 4.- <u>Si E est un module admettant une base, l'application linéaire biunivoque associée à l'application</u> $z \rightarrow \underline{a}\, z$ <u>de</u> $\overset{n}{\otimes} E$ <u>sur le sous-module</u> S_n <u>des tenseurs antisymétrisés, est un isomorphisme du module</u> $\overset{n}{\wedge} E$ <u>sur</u> S_n .

Cet isomorphisme et son isomorphisme réciproque sont dits <u>canoniques</u> ; on <u>identifie</u> souvent, au moyen de ces isomorphismes, un n-vecteur et le tenseur antisymétrisé qui lui correspond.

<u>Remarque</u>.- La prop.4 est encore exacte lorsque E n'admet pas de base, mais est tel que l'équation $n!x=a$ ait une solution et une seule pour toute $a \in E$, car l'application $(x_1,..,x_n) \rightarrow x_1 \wedge x_2 \wedge .. \wedge x_n$ est alors antisymétrisée ($n^o 3$) (cf. exerc.4) .

<u>7. Base d'une puissance antisymétrique</u>.

Dans le reste de ce chapitre, nous adopterons la convention suivante : étant donnée une suite finie $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'éléments d'un A-module unitaire E , pour toute partie H de p éléments de l'intervalle $[1,n]$ de $\mathbb{N}$, nous désignerons par x_H le p-<u>vecteur</u> $x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge .. \wedge x_{i_p}$ où $(i_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est la suite <u>strictement croissante</u> des p éléments de H .

Cette définition n'est valable que pour $p \geqslant 2$; par convention, pour une partie $H=\{i\}$ réduite à un élément, nous poserons $x_H = x_i$, et pour la partie vide $\emptyset$ de $[1,n]$, $x_\emptyset = e$ (élément unité de A) .

PROPOSITION 5.- Soit E un module admettant une base finie $(e_i)_{1\leq i\leq n}$; si $p\leq n$ le module $\overset{p}{\bigwedge} E$ admet pour base la famille (e_H) où H parcourt l'ensemble des $\binom{n}{p}$ parties de p éléments de $[1,n]$; si $p>n$, le module $\overset{p}{\bigwedge} E$ est réduit à 0 .

Raisonnons dans le sous-module S_p des tenseurs antisymétrisés, qui est alors isomorphe à $\overset{p}{\bigwedge} E$ (prop.4). Lorsque $(i_k)_{1\leq k\leq p}$ parcourt l'ensemble de toutes les suites de p éléments de $[1,n]$, on sait (§ 1, cor.2 de la prop.4), que les tenseurs $e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\ldots\otimes e_{i_p}$ forment une base de $\overset{p}{\bigotimes} E$; on en conclut aussitôt que, lorsque (i_k) parcourt l'ensemble des suites strictement croissantes de p éléments de $[1,n]$, les antisymétrisés des tenseurs $e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_p}$ forment un système libre dans S_p ; en outre, ces tenseurs antisymétrisés engendrent S_p, car pour toute permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_p$, l'antisymétrisé de $\varepsilon_\sigma e_{i_{\sigma(1)}}\otimes\ldots\otimes e_{i_{\sigma(p)}}$ est le même que celui de $e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_p}$, et d'autre part, pour toute suite (i_k) ayant deux éléments égaux, l'antisymétrisé de $e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_p}$ est nul (n°6). Comme les e_H correspondent, par l'isomorphisme canonique, aux antisymétrisés des tenseurs $e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_p}$ pour toutes les suites strictement croissantes (i_k), la première partie de la proposition est démontrée. La seconde résulte de ce que, si $p>n$, il n'y a aucune suite strictement croissante de p éléments de $[1,n]$.

COROLLAIRE 1.- Si E admet une base de n éléments, les modules $\overset{p}{\bigwedge} E$ et $\overset{n-p}{\bigwedge} E$ sont isomorphes pour $0\leq p\leq n$.

En particulier, E admet une base formée du seul élément $e_1\wedge e_2\wedge\ldots\wedge e_n$.

COROLLAIRE 2.- Si E admet une base de n éléments, toute autre base de E est finie et admet n éléments.

En effet, n est le plus grand des entiers p tels que $\overset{p}{\bigwedge} E$ ne soit pas réduit à 0 , donc E ne peut admettre de base finie ayant un nombre d'éléments $\neq n$. D'autre part, le raisonnement de la prop.5 prouve que, si E admet une base infinie, aucun des modules $\overset{p}{\bigwedge} E$ n'est réduit à 0 .

8. Puissances antisymétriques d'une application linéaire.

Soit u une application linéaire d'un A-module E dans un A-module F ; soit u_p l'application linéaire de $\overset{p}{\otimes} E$ dans $\overset{p}{\otimes} F$, produit tensoriel de p applications linéaires identiques à u. Si $G_p(E)$ (resp. $G_p(F)$) est le sous-module de $\overset{p}{\otimes} E$ (resp. $\overset{p}{\otimes} F$) engendré par les produits tensoriels de p vecteurs dont deux au moins sont égaux, il est clair que $u_p(G_p(E)) \subset G_p(F)$; par *passage aux quotients* (Ens.R, § 5, n°8), on déduit donc de u_p une application linéaire de $\overset{p}{\wedge} E = \overset{p}{\otimes} E/G_p(E)$ dans $\overset{p}{\wedge} F = \overset{p}{\otimes} F/G_p(F)$, qu'on appelle *puissance antisymétrique n-ème* de l'application u, et qu'on note $\overset{p}{\wedge} u$. D'après cette définition, on a donc identiquement

$$(5) \qquad \overset{p}{\wedge} u(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p) = u(x_1) \wedge u(x_2) \wedge \ldots \wedge u(x_p)$$

Soit G un troisième A-module, v une application linéaire de F dans G. Il résulte aussitôt de (5) qu'on a

$$(6) \qquad \overset{p}{\wedge}(v \circ u) = (\overset{p}{\wedge} v) \circ (\overset{p}{\wedge} u) .$$

Si u est une application de E *sur* F, $\overset{p}{\wedge} u$ est une application de $\overset{p}{\wedge} E$ *sur* $\overset{p}{\wedge} F$; si u est un *isomorphisme* de E *sur* F, $\overset{p}{\wedge} u$ est un *isomorphisme* de $\overset{p}{\wedge} E$ *sur* $\overset{p}{\wedge} F$.

Par contre, si u est un *isomorphisme* de E *dans* F, $\overset{p}{\wedge} u$ n'est pas nécessairement un isomorphisme de $\overset{p}{\wedge} E$ dans $\overset{p}{\wedge} F$ (exerc.5). Toutefois, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 6.- *Soit F un sous-module d'un module E, tel qu'il existe une base finie $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E, dont les m premiers éléments forment une base de F. Dans ces conditions, si f est l'application canonique de F dans E, $\overset{p}{\wedge} f$ est un isomorphisme de $\overset{p}{\wedge} F$ dans $\overset{p}{\wedge} E$.*

Cela résulte aussitôt de la formation des bases de $\overset{p}{\wedge} E$ et $\overset{p}{\wedge} F$ à partir des bases $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ (prop.5). On peut donc identifier par l'application $\overset{p}{\bigwedge} f$ la puissance antisymétrique $\overset{p}{\bigwedge} F$ avec le sous-module $\overset{p}{\bigwedge} f(\overset{p}{\bigwedge} F)$ de $\overset{p}{\bigwedge} E$; en d'autres termes, si x_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ sont p éléments quelconques de F , on peut identifier le p-vecteur $x_1 \wedge x_2 \wedge .. \wedge x_p$, où les x_i sont considérés comme appartenant à F , avec le p-vecteur $x_1 \wedge x_2 \wedge .. \wedge x_p$ où les x_i sont considérés comme appartenant à E .

On pourra en particulier toujours faire cette identification quand E est un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel quelconque de E .

9. Produit extérieur d'un p-vecteur et d'un q-vecteur.

Etant donné deux puissances tensorielles $\overset{p}{\otimes} E$, $\overset{q}{\otimes} E$ de E , considérons l'application $(z,z') \to zz'$ de $(\overset{p}{\otimes} E)\times(\overset{q}{\otimes} E)$ dans $\overset{p+q}{\otimes} E$ (§ 1, n°11). Avec les notations précédentes (n°5), il est clair que les relations $z_1 \equiv z_2$ (mod. G_p), $z'_1 \equiv z'_2$ (mod. G_q) entraînent $z_1 z'_1 \equiv z_2 z'_2$ (mod. G_{p+q}). On peut donc déduire de l'application $(z,z') \to zz'$ une application de $(\overset{p}{\bigwedge} E)\times(\overset{q}{\bigwedge} E)$ dans $\overset{p+q}{\bigwedge} E$ par passage aux quotients (Ens.R, § 5, n°8) pour z et z' . Si u est un p-vecteur quelconque, v un q-vecteur quelconque, la valeur de cette application pour le couple (u,v) est un (p+q)-vecteur noté $u \wedge v$, qui est appelé le produit extérieur de u et de v .

On étend cette définition au cas où p=0 (resp. q=0) en convenant que le produit extérieur $\alpha \wedge v$ d'un scalaire α et d'un q-vecteur v (resp. le produit extérieur $u \wedge \alpha$ d'un p-vecteur u et d'un scalaire α) est égal à αv (resp. αu).

Par passage aux quotients, on voit que l'application $(u,v) \to u \wedge v$ est bilinéaire ; autrement dit, si u_1, u_2 sont deux p-vecteurs quelconques, v_1, v_2 deux q-vecteurs quelconques, on a

(7) $$(u_1+u_2)\wedge(v_1+v_2)=(u_1 \wedge v_1)+(u_1 \wedge v_2)+(u_2 \wedge v_1)+(u_2 \wedge v_2)$$

et, pour tout scalaire α

(8) $$(\alpha u)\wedge v = u\wedge(\alpha v)=\alpha(u\wedge v)$$

Si $u=x_1\wedge x_2\wedge\ldots\wedge x_p$ et $v=y_1\wedge y_2\wedge\ldots\wedge y_q$ sont décomposables, il en est de même de $u\wedge v$ qui, d'après la définition, est égal à

$$x_1\wedge x_2\wedge\ldots\wedge x_p\wedge y_1\wedge y_2\wedge\ldots\wedge y_q$$

On déduit de là, et de la relation (4), la valeur du (p+q)-vecteur $v\wedge u$ en fonction de $u\wedge v$:

(9) $$v\wedge u=(-1)^{pq}u\wedge v$$

En effet, si σ est la permutation de $[1,p+q]$ telle que $\sigma(i)=q+i$ pour $1\leqslant i\leqslant p$ et $\sigma(i)=i-p$ pour $p+1\leqslant i\leqslant p+q$, on a $\varepsilon_\sigma=(-1)^{pq}$, car pour tout couple (i,j) tel que $i<j$, la différence $\sigma(j)-\sigma(i)$ ne peut être <0 que si $1\leqslant i\leqslant p$ et $p+1\leqslant j\leqslant p+q$; d'où la formule (9) lorsque u et v sont décomposables, et la relation (7) permet d'étendre cette relation au cas où u et v sont quelconques.

Enfin, si u est un p-vecteur quelconque, v un q-vecteur quelconque, w un r-vecteur quelconque, on a

(10) $$(u\wedge v)\wedge w = u\wedge(v\wedge w)$$

comme on le voit aussitôt par passage aux quotients à partir de la relation analogue pour le produit des tenseurs. La valeur commune des deux membres de (10) se note aussi $u\wedge v\wedge w$.

<u>10. Algèbre extérieure.</u>

Désignons par $\bigwedge E$ le module <u>somme directe</u> de tous les modules $\overset{n}{\bigwedge} E$ non nuls pour $n\geqslant 0$. La définition du produit extérieur permet de définir sur $\bigwedge E$ une structure d'<u>algèbre</u> par rapport à A. En effet tout élément $z\in\bigwedge E$ se met d'une seule manière sous la forme $z=\sum_p z_p$, où z_p est un p-vecteur (nul sauf pour un nombre fini d'indices).

Si $z'=\sum_p z'_p$ est un second élément de $\bigwedge E$, on pose $z\wedge z'=\sum_{p,q} z_p\wedge z'_q$.

D'après (7), la multiplication ainsi définie dans $\bigwedge E$ est doublement distributive par rapport à l'addition ; elle est associative, en vertu de la relation (10), qui s'étend à des éléments quelconques de $\bigwedge E$ par la distributivité ; enfin, d'après (8), on a $\alpha(z \wedge z') = (\alpha z) \wedge z' = z \wedge (\alpha z')$ pour tout scalaire α, donc $\bigwedge E$ est bien une algèbre sur A, qu'on nomme <u>algèbre extérieure</u> sur le module E. Elle admet comme élément unité l'élément unité ε de A, et est non commutative en général, d'après (9) ; en vertu de l'associativité de la multiplication, un p-vecteur décomposable $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p$ n'est autre que le <u>composé</u> (pour la multiplication dans $\bigwedge E$) de la séquence $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ d'éléments de E, ce qui justifie la notation commune adoptée pour le produit extérieur et les p-vecteurs décomposables, et montre en même temps que l'ensemble $A \cup E$ est un <u>système de générateurs</u> de $\bigwedge E$.

Si E admet une base finie $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $\bigwedge E$ admet une base formée des 2^n éléments e_H (n°7), où H parcourt l'ensemble de toutes les parties de l'intervalle $[1,n]$ de $\mathbb{N}$. La table de multiplication de cette base est donnée par les relations suivantes :

$$(11) \quad \begin{cases} e_H \wedge e_K = 0 & \text{si } H \cap K \neq \emptyset \;; \\ e_H \wedge e_K = \delta_{H,K}\, e_{H \cup K} & \text{si } H \cap K = \emptyset \end{cases}$$

avec $\delta_{H,K} = (-1)^\rho$, ρ étant le nombre des couples (i,j) tels que $i \in H$, $j \in K$ et $j < i$.

<u>Exercices</u>.- 1) Soit E un A-module somme directe de deux sous-modules E_1, E_2. Montrer que $\overset{n}{\bigwedge} E$ est isomorphe à la somme directe G des $n+1$ modules $(\overset{p}{\bigwedge} E_1) \otimes (\overset{n-p}{\bigwedge} E_2)$ pour $0 \leqslant p \leqslant n$ (définir une application linéaire de $\overset{n}{\bigwedge} E$ dans G et une application linéaire de G dans $\overset{n}{\bigwedge} E$, de sorte que ces deux applications soient réciproques).

Généraliser au cas où E est somme directe d'un nombre fini quelconque de sous-modules.

2) Soit E un A-module, M un sous-module de E. Montrer que le module $\overset{n}{\Lambda}(E/M)$ est isomorphe au module quotient $(\overset{n}{\Lambda} E)/N$, où N est le sous-module de $\overset{n}{\Lambda} E$ engendré par les n-vecteurs $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$ dans lesquels un des x_i au moins appartient à M (méthode de l'ex.1).

3) Si un module E est engendré par p éléments, $\overset{p+1}{\Lambda} E$ est réduit à 0.

4) a) Soit A un anneau d'intégrité ayant un élément unité, K le corps des fractions de A. Si E est un sous-module de K (considéré comme A-module), l'espace vectoriel $\tilde{E}$ par rapport à K <u>associé</u> à E (chap.II, §5,n°2) est identique à K. En déduire que tout tenseur (contravariant) d'ordre n sur E est symétrique (utiliser l'exerc.10 du § 1), et par suite que l'antisymétrisé de tout tenseur sur E est nul.

b) Déduire de a) que si, dans E, l'équation $2x=a$ admet une solution quel que soit a, $\overset{n}{\Lambda} E$ est réduit à 0 pour tout $n>1$.

c) On prend pour A l'anneau $K_0[X,Y]$ des polynomes à deux indéterminées sur un corps K_0 de caractéristique 2, pour E l'idéal $(X)+(Y)$ de A. montrer que $\overset{2}{\Lambda} E$ n'est pas réduit à 0.

5) Donner un exemple d'anneau A ayant la propriété suivante : dans le A-module $E=A^2$, il existe un sous-module F tel que, si u est l'application canonique de F dans E, $\overset{2}{\Lambda} u$ soit identiquement nulle, sans que $\overset{2}{\Lambda} E$ ni $\overset{2}{\Lambda} F$ soient réduits à 0 (cf. § 1,exerc.4).

6) Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif, u une application linéaire de rang fini r de E dans F. montrer que le rang de $\overset{n}{\Lambda} u$ est égal à $\binom{r}{n}$ si $r \geqslant n$ et que $\overset{n}{\Lambda} u$ est identiquement nulle si $r<n$ (prendre dans E une base dont r vecteurs forment une base d'un sous-espace supplémentaire de $\overset{-1}{u}(0)$, les autres une base de $\overset{-1}{u}(0)$).

7) Montrer que l'algèbre extérieure ΛE sur un module E est isomorphe à l'algèbre quotient de l'algèbre tensorielle $T(E)$ sur E par

l'idéal bilatère $\mathfrak{a}$ de $T(E)$ engendré par les éléments $x \otimes x$, où x parcourt E .

8) Soit H une partie quelconque de l'ensemble $[1,n]$. Pour toute application n-linéaire f de E^n dans F (resp. tout tenseur $z \in \bigotimes^n E$), on appelle <u>antisymétrisée de</u> f (resp. <u>antisymétrisé de z</u>) <u>pour les indices</u> $i \in H$ l'application n-linéaire

$$\underline{a}_H f = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \sigma f$$

(resp. le tenseur $\underline{a}_H z = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma . \sigma z$), où σ parcourt le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ (isomorphe à $\mathfrak{S}_H$) formé des permutations laissant invariants tous les indices n'appartenant pas à H . Si p est le nombre d'éléments de H , on a $\underline{a}(\underline{a}_H f)=p!\,\underline{a}f$ (resp. $\underline{a}(\underline{a}_H z)=p!\,\underline{a}z$) .

Montrer que si z est un tenseur d'ordre p , z' un tenseur d'ordre q, tel que $\underline{a}z'=0$, et si E possède une base on a $\underline{a}(z.z')=0$ (remarquer que si H désigne la partie $[p+1,p+q]$ de $[1,p+q]$, on a $\underline{a}_H(zz')=z.\underline{a}z'$). En déduire que, si $z=\underline{a}z_1$, $z'=\underline{a}z'_1$ sont les antisymétrisés de deux tenseurs z_1,z'_1 d'ordres respectifs p et q , le tenseur $\underline{a}(z_1.z'_1)$ d'ordre $p+q$ ne dépend que de z et z', et non des tenseurs z_1,z'_1 dont z et z' sont les antisymétrisés. Si on identifie z (resp. z') au p-vecteur (resp. q-vecteur) qui lui correspond par l'isomorphisme canonique (prop.4), le tenseur antisymétrisé $\underline{a}(z.z')$ est identifié au produit extérieur $z \wedge z'$.

§ 4. Déterminants et p-vecteurs décomposables.

Dans ce paragraphe et le suivant, il ne sera plus question que de modules ayant une <u>base finie</u> par rapport à un anneau commutatif A ayant un élément unité.

<u>1. Définition des déterminants</u>.

Soit u un endomorphisme d'un A-module E ayant une base de n éléments ; la puissance antisymétrique n-ème $\bigwedge^n u$ (§ 3, n°8) est un endomorphisme du module $\overset{n}{\Lambda} E$; or, ce dernier a une base d'un seul élément ($\S$ 3, n°7), autrement dit, est isomorphe à A (considéré comme A-module) ; tout endomorphisme de $\overset{n}{\Lambda} E$ est par suite une homothétie $z \to \lambda z$ (chap. II, $\S$ 4, prop. 1).

DÉFINITION 1.- On appelle déterminant d'un endomorphisme u de E et on note det u le scalaire tel que la puissance antisymétrique $\overset{n}{\Lambda} u$ soit identique à l'homothétie $z \to (\det u) z$ de $\overset{n}{\Lambda} E$.

D'après la définition de $\overset{n}{\Lambda} u$, le déterminant de u satisfait à l'identité

(1) $$u(x_1) \wedge u(x_2) \wedge \ldots \wedge u(x_n) = (\det u) x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$$

quels que soient les n éléments x_i de E.

Si v est un second endomorphisme de E, on a $\overset{n}{\Lambda}(v \circ u) = (\overset{n}{\Lambda} v) \circ (\overset{n}{\Lambda} u)$ ($\S$ 3, n°8, formule (6)) ; d'après la définition des déterminants, cette formule équivaut à

(2) $$\det(v \circ u) = \det v . \det u$$

autrement dit, le déterminant du composé de deux endomorphismes est égal au produit des déterminants de ces deux endomorphismes.

DEFINITION 2.- Etant donnée une matrice carrée $\underline{X}$ d'ordre n sur un anneau commutatif A, dont I est l'ensemble d'indices des lignes et des colonnes, on appelle déterminant de X et on note det $\underline{X}$ ou $\boxed{\underline{X}}$ le déterminant de l'endomorphisme du A-module A^I dont $\underline{X}$ est la matrice quand on le rapporte à la base canonique de A^I (cf. chap. II, $\S$ 6, n°).

Dans le cas (le plus fréquent) où I est l'intervalle $[1, n]$ de $\mathbb{N}$ et où on a donc $\underline{X} = (\xi_{ij})_{1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq j \leqq n}$, le déterminant de $\underline{X}$ se note encore $\det(\xi_{ij})_{1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq j \leqq n}$ (ou simplement $\det(\xi_{ij})$ si aucune confusion n'est possible) ou $\boxed{\xi_{ij}}$, ou encore

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \dots & \xi_{nn} \end{vmatrix}$$

Si $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est la base canonique de A^n , l'endomorphisme u dont $\underline{X}$ est la matrice est tel que $u(e_i)$ soit la colonne $x_i = \sum_{j=1}^{n} e_j \xi_{ji}$ de $\underline{X}$; d'après (1) le déterminant det $\underline{X}$ est donc défini par la relation

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = (\det \underline{X}) e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \tag{3}$$

ce qui conduit à écrire (cf. chap.II, §1,n°8)

$$\det \underline{X} = \frac{x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n}{e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n}$$

Exemples.- Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre un est égal à l'unique élément de cette matrice. Pour une matrice d'ordre 2

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

on a, avec les notations précédentes

$$\begin{aligned} x_1 \wedge x_2 &= (e_1 \alpha_{11} + e_2 \alpha_{21}) \wedge (e_1 \alpha_{12} + e_2 \alpha_{22}) = \\ &= \alpha_{11}\alpha_{22} e_1 \wedge e_2 + \alpha_{21}\alpha_{12} e_2 \wedge e_1 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$$

Remarque.- Lorsqu'on raisonne sur le déterminant d'une matrice $\underline{X} = (\xi_{ij})$, on se permettra souvent, par abus de langage, de parler des "éléments du déterminant" , des "lignes du déterminant", des "colonnes du déterminant", en entendant par là les éléments, lignes et colonnes de la matrice $\underline{X}$.

Si $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ sont deux matrices carrées d'ordre n sur A , la matrice *produit* $\underline{XY}$ correspond à l'endomorphisme composé des endomorphismes correspondant à $\underline{X}$ et à $\underline{Y}$; donc, d'après (2) :

PROPOSITION 1.- *Le déterminant de la matrice produit XY de deux matrices carrées de même ordre, est égal au produit des déterminants de X et de Y* .

En d'autres termes, si on considère sur A et sur l'ensemble $\mathcal{M}_n(A)$ des matrices carrées d'ordre n sur A les structures algèbriques déterminées par les seules lois *multiplicatives* de ces deux anneaux, on peut dire que $\underline{X} \rightarrow \det \underline{X}$ est une *représentation* de $\mathcal{M}_n(A)$ dans A .

En particulier, si on restreint cette représentation au *groupe* (multiplicatif) des matrices *inversibles* d'ordre n sur A (isomorphe au groupe linéaire $GL_n(A)$), on obtient une représentation de ce groupe dans le groupe des éléments inversibles de A . Par suite :

COROLLAIRE.- *Si $\underline{X}$ est une matrice carrée inversible sur $\underline{A}$, son déterminant est inversible dans* A , *et on a*

$$\det(\underline{X}^{-1})=(\det \underline{X})^{-1} \tag{4}$$

On notera que l'image de $\mathcal{M}_n(A)$ par l'application $\underline{X} \longrightarrow \det \underline{X}$ est l'anneau A tout entier, car le déterminant de la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

est égal à a . Le même raisonnement montre que l'image par $\underline{X} \rightarrow \det \underline{X}$ du groupe des matrices inversibles est identique au groupe des éléments inversibles de A .

PROPOSITION 2.- *Deux matrices carrées semblables ont même déterminant.*

Si $\underline{X}$ et $\underline{X}'$ sont semblables, il existe une matrice inversible $\underline{P}$ telle que $X'=\underline{PXP}^{-1}$; la proposition résulte donc de la prop.1 et de son corollaire. On peut aussi la démontrer en remarquant que deux matrices semblables peuvent être considérées comme les matrices du <u>même</u> endomorphisme de A^n, rapporté à deux bases différentes.

COROLLAIRE.- <u>Le déterminant d'une matrice ne change pas si on effectue la même permutation sur les lignes et les colonnes de la matrice.</u>

<u>2. Calcul d'un déterminant.</u>

PROPOSITION 3.- <u>Le déterminant d'une matrice $\underline{X}$ d'ordre n est une forme multilinéaire alternée par rapport aux n colonnes x_i de X</u> .

La proposition est une conséquence immédiate de la formule (3) et du fait que $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \longrightarrow x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$ est une application multilinéaire alternée.

En particulier, un déterminant dont deux colonnes sont identiques est nul. Si on effectue la permutation σ sur les colonnes d'un déterminant, il est multiplié par ε_σ . Si on ajoute à une colonne d'un déterminant un ~~multiple~~ scalaire d'une autre colonne, le déterminant ne change pas.

Si on remplace dans la formule (3) chacune des colonnes x_i par son expression $\sum_{j=1}^{n} e_j \xi_{ji}$, il vient, en développant le produit extérieur

$$(\det \underline{X})e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n = \sum_\sigma \xi_{\sigma(1),1}\, \xi_{\sigma(2),2} \cdots \xi_{\sigma(n),n} \cdot e_{\sigma(1)} \wedge e_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(n)}$$

et comme $e_{\sigma(1)} \wedge e_{\sigma(2)} \wedge \ldots \wedge e_{\sigma(n)} = \varepsilon_\sigma \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n$

on a

$$(5) \qquad \det \underline{X} = \det(\xi_{ij}) = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \cdot \xi_{\sigma(1),1}\, \xi_{\sigma(2),2} \cdots \xi_{\sigma(n),n}$$

la somme étant étendue aux n! permutations σ du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

Le second membre de (5) est appelé le <u>développement total</u> du déterminant de $\underline{X}$.

Comme A est commutatif, on a, pour tout couple de permutations σ, τ du groupe $\mathfrak{S}_n$

$$\xi_{\sigma(1),1}\xi_{\sigma(2),2}\cdots\xi_{\sigma(n),n} = \xi_{\sigma(\tau(1)),\tau(1)}\xi_{\sigma(\tau(2)),\tau(2)}\cdots\xi_{\sigma(\tau(n)),\tau(n)}$$

En prenant en particulier $\tau = \sigma^{-1}$ et remarquant que $\varepsilon_{\sigma^{-1}} = \varepsilon_\sigma$, on voit donc qu'on a aussi

$$\det \underline{X} = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma . \xi_{1,\sigma(1)}\xi_{2,\sigma(2)}\cdots\xi_{n,\sigma(n)} \tag{6}$$

Si, pour tout couple d'indices (i,j) on pose $\eta_{ij} = \xi_{ji}$, les formules (5) et (6) prouvent que $\det(\eta_{ij}) = \det(\xi_{ij})$; en d'autres termes :

PROPOSITION 4.- <u>Le déterminant de la transposée d'une matrice carrée $\underline{X}$ est égal au déterminant de</u> X.

On exprime encore cette propriété en disant qu'<u>un déterminant garde la même valeur quand on échange les lignes et les colonnes</u>.

COROLLAIRE.- <u>Le déterminant d'une matrice carrée $\underline{X}$ est une forme multilinéaire alternée par rapport aux lignes de $\underline{X}$</u>.

Il suffit pour le voir d'appliquer la prop.3 à la matrice transposée ${}^t\underline{X}$.

On en tire les mêmes conséquences que de la prop.3, en remplaçant dans les énoncés le mot "colonne" par le mot "ligne".

3. Mineurs d'une matrice.

A toute matrice rectangulaire $\underline{X} = (\xi_{\lambda\mu})$ dont les ensembles d'indices L, M des lignes et des colonnes sont distincts, mais ont <u>même nombre</u> d'éléments n, on a vu (chap.II, §7, n°5) qu'on peut, de plusieurs manières, faire correspondre une matrice <u>carrée</u> d'ordre n dont l'ensemble d'indices des lignes et des colonnes est l'intervalle $[1,n]$, en rangeant les éléments de L en une suite (λ_i) et les éléments de M en une suite (μ_i) ; la matrice carrée correspondante est la matrice $(\eta_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$ où $\eta_{ij} = \xi_{\lambda_i \mu_j}$. Toutes les matrices carrées obtenues de cette manière à partir de $\underline{X}$ ne diffèrent que par l'ordre des lignes ou des colonnes ; leurs déterminants sont donc les mêmes, au signe près.

DEFINITION 3.- Dans une matrice rectangulaire (ξ_{ij}) à m lignes et n colonnes, on appelle mineurs d'ordre p $(p \leqslant \mathrm{Min}(m,n))$ les déterminants des matrices carrées d'ordre p obtenues à partir des sous-matrices à p lignes et p colonnes de la matrice (ξ_{ij}), en rangeant les indices des lignes et des colonnes de ces sous-matrices par ordre croissant.

Soit H (resp. K) une partie de p éléments de l'ensemble d'indices $[1,m]$ (resp. $[1,n]$) ; nous désignerons par $X_{H,K}$ le mineur provenant de la sous-matrice de la matrice $\underline{X}=(\xi_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}$ formée en supprimant dans $\underline{X}$ les lignes d'indice $i \in \complement H$ et les colonnes d'indice $j \in \complement K$. Si (i_k) (resp. (j_k)) est la suite des indices appartenant à H (resp. K) rangés par ordre croissant, le mineur $X_{H,K}$ est donc défini par la relation

$$(7)\quad (e_{i_1}\xi_{i_1j_1}+e_{i_2}\xi_{i_2j_1}+..+e_{i_p}\xi_{i_pj_1})\wedge\ldots\wedge(e_{i_1}\xi_{i_1j_p}+\ldots+e_{i_p}\xi_{i_pj_p})$$

$$= X_{H,K}e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\ldots\wedge e_{i_p}$$

La notion de mineur d'une matrice permet d'exprimer les composantes d'un p-vecteur décomposable $x_1\wedge x_2\wedge\ldots\wedge x_p$ par rapport à la base (e_H) de $\bigwedge^p E$ qui correspond à la base (e_i), en fonction des composantes des x_k par rapport à (e_i) ; en effet, si $\underline{X}$ est la matrice (ξ_{ij}) à n lignes et p colonnes dont la colonne d'indice j est x_j $(1 \leqslant j \leqslant p)$; la formule (7) montre que la composante d'indice H de $x_1\wedge x_2\wedge\ldots\wedge x_p$ est le mineur d'ordre p de $\underline{X}$ dont l'ensemble d'indices des lignes est H .

4. Développements d'un déterminant.

Reprenons la formule (3) donnant la valeur du déterminant d'une matrice carrée $\underline{X}=(\xi_{ij})$ d'ordre n ; pour tout indice j , on peut l'écrire

(8) $(-1)^{j-1}x_j \wedge (x_1 \wedge \ldots \wedge x_{j-1} \wedge x_{j+1} \wedge \ldots \wedge x_n) = (\det \underline{X}) e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n$

Or, si on pose $H = \complement\{j\}$, on vient de voir que le $(n-1)$-vecteur $x_1 \wedge \ldots \wedge x_{j-1} \wedge x_{j+1} \wedge \ldots \wedge x_n$ est égal à $\sum_K e_K X_{K,H}$, où K parcourt l'ensemble des parties de $n-1$ éléments de $[1,n]$. Portons cette valeur dans (8), ainsi que l'expression de $x_j = \sum_{i=1}^{n} e_i \xi_{ij}$; si on tient compte de la table de multiplication de l'algèbre extérieure (§3, formule (11)), on voit qu'on a $e_i \wedge e_K = 0$ sauf si $K = \complement\{i\}$, auquel cas $e_i \wedge e_K = (-1)^{i-1} e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n$. Désignons par X^{ij} le mineur $X_{K,H}$ d'ordre $n-1$ où $K = \complement\{i\}$, $H = \complement\{j\}$; la formule (11) donne pour le déterminant de $\underline{X}$ l'expression suivante

(9) $$\det \underline{X} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \xi_{ij} X^{ij}$$

qu'on appelle <u>développement de</u> $\det \underline{X}$ <u>suivant la colonne d'indice</u> j.

On notera que les mineurs X^{ij} $(1 \leq i \leq n)$ ne dépendent que des éléments de $\underline{X}$ appartenant aux colonnes d'indice $\neq j$; de cette remarque, on déduit que, pour tout indice $k \neq j$, on a

(10) $$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} \xi_{ij} X^{ik} = 0$$

En effet, le premier membre de (10) est, au signe près, la valeur du déterminant de la matrice obtenue en remplaçant, dans $\underline{X}$, la colonne d'indice k par la colonne d'indice j ; comme la matrice ainsi formée a deux colonnes identiques, son déterminant est nul.

En considérant le déterminant de la <u>transposée</u> de $\underline{X}$, on a, d'après la prop.4, de nouveaux "développements" de $\det \underline{X}$, procédant cette fois suivant les <u>lignes</u> du déterminant.

Le calcul d'un déterminant se fait le plus souvent à l'aide de développements suivant des lignes ou des colonnes, ramenant son évaluation à celle de déterminants d'ordre strictement inférieur ; en outre, on profite souvent des relations entre les éléments d'un déterminant pour ramener son calcul à celui de déterminants plus simples, par application de la prop.3 et du corollaire de la prop.4 .

Exemples.- 1) Déterminant de Vandermonde. Etant donnée une suite $(z_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de n éléments de A, on appelle déterminant de Vandermonde de cette suite le déterminant d'ordre n

$$V(z_1,z_2,..,z_n)= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Nous allons montrer qu'on a

$$(11) \qquad V(z_1,z_2,...,z_n)= \prod_{i=1}^{n-1}\Big(\prod_{j=i+1}^{n}(z_j-z_i)\Big)$$

La ~~propriét~~ proposition étant immédiate pour $n=2$, raisonnons par récurrence sur n. Pour chaque indice $k \geqslant 2$, retranchons de la ligne d'indice k la ligne d'indice $k-1$, multipliée par z_1 ; la valeur du déterminant n'est pas modifiée, et on a donc

$$V(z_1,z_2,..,z_n)= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots\dots & 1 \\ 0 & z_2-z_1 & \dots\dots & z_n-z_1 \\ 0 & z_2(z_2-z_1) & \dots\dots & z_n(z_n-z_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & z_2^{n-2}(z_2-z_1) & \dots\dots & z_n^{n-2}(z_n-z_1) \end{vmatrix}$$

d'où, en développant suivant la première colonne, puis mettant en facteur z_k-z_1 dans la colonne d'indice $k-1$ du mineur ainsi obtenu $(2 \leqslant k \leqslant n)$, on a

$$V(z_1,z_2,..,z_n)=(z_2-z_1)...(z_n-z_1)V(z_2,z_3,...,z_n)$$

ce qui établit (11).

2) Considérons une matrice carrée qui se présente sous forme d'un "tableau carré de matrices" (chap.II, §6,n°5)

$$\underline{\underline{X}}=\begin{pmatrix} \underline{\underline{X}}_{11} & \underline{\underline{X}}_{12} & \dots & \underline{\underline{X}}_{1p} \\ 0 & \underline{\underline{X}}_{22} & \dots & \underline{\underline{X}}_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \underline{\underline{X}}_{pp} \end{pmatrix}$$

où toutes les matrices situées au-dessous de la diagonale sont <u>nulles</u>. Montrons qu'on a

(12) $\det \underline{\underline{X}}=(\det \underline{\underline{X}}_{11})(\det \underline{\underline{X}}_{22})\dots(\det \underline{\underline{X}}_{pp})$

Nous raisonnerons par récurrence sur p, la proposition étant évidente si $p=1$. Soit h l'ordre de $\underline{\underline{X}}_{11}$; dans la formule (3) les colonnes $x_1,x_2,\dots,x_h$ de $\underline{\underline{X}}$ appartiennent au sous-module ayant pour base $e_1,e_2,\dots,e_h$, et on a

(13) $x_1\wedge x_2\wedge\dots\wedge x_h=(\det \underline{\underline{X}}_{11})e_1\wedge e_2\wedge\dots\wedge e_h$

D'autre part, pour tout indice $i>h$, on peut écrire $x_i=x_i'+x_i''$, où x_i' est une combinaison linéaire de $e_1,e_2,\dots,e_h$ et x_i'' une combinaison linéaire de $e_{h+1},\dots,e_n$. D'après (13) on a $x_1\wedge x_2\wedge\dots\wedge x_h\wedge x_i'=0$ pour tout $i>h$, donc

$$x_1\wedge x_2\wedge\dots\wedge x_n=(\det \underline{\underline{X}}_{11})e_1\wedge e_2\wedge\dots\wedge e_h\wedge(x_{h+1}''\wedge x_{h+2}''\wedge\dots\wedge x_n'')$$

Mais on a

$$x_{h+1}''\wedge x_{h+2}''\wedge\dots\wedge x_n''=(\det \underline{\underline{Y}})e_{h+1}\wedge e_{h+2}\wedge\dots\wedge e_n$$

où

$$\underline{\underline{Y}}=\begin{pmatrix} \underline{\underline{X}}_{22} & \underline{\underline{X}}_{23} & \dots & \underline{\underline{X}}_{2p} \\ 0 & \underline{\underline{X}}_{33} & \dots & \underline{\underline{X}}_{3p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \underline{\underline{X}}_{pp} \end{pmatrix}$$

donc on a finalement, d'après (3)

$$\det \underline{\underline{X}}=(\det \underline{\underline{X}}_{11})(\det \underline{\underline{Y}})$$

ce qui démontre (12) puisque cette formule a été supposée établie pour un tableau carré d'ordre $p-1$.

5. Systèmes libres et p-vecteurs décomposables.

Jusqu'à la fin de ce paragraphe, nous ne considèrerons plus que des puissances antisymétriques d'un espace vectoriel E de dimension finie n sur un corps commutatif K.

PROPOSITION 5.- *Pour que p vecteurs x_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ forment un système libre dans E, il faut et il suffit que le p-vecteur décomposable $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p$ ne soit pas nul.*

En effet, si les x_i forment un système lié, l'un d'eux est égal à une combinaison linéaire des autres (chap.II, § 3, prop.1) ; en le remplaçant par cette combinaison dans le produit $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p$, ce dernier devient une somme de produits extérieurs dont deux facteurs sont identiques, et par suite est nul.

Si au contraire les x_i forment un système libre, il existe $n-p$ autres vecteurs de E forment avec les x_i une base de E ; le p-vecteur $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p$ est alors un élément de la base correspondante de $\bigwedge^p E$ (§ 3, n° 7), donc n'est pas nul.

PROPOSITION 6.- *Le rang $\rho(X)$ d'une matrice X sur un corps commutatif K est égal au plus grand des entiers p tels qu'il existe un mineur d'ordre p de X qui ne soit pas nul.*

En effet, $\rho(X)$ est le nombre maximum des colonnes de X qui sont linéairement indépendantes, autrement dit, dont le produit extérieur n'est pas nul, d'après la prop.5 ; comme les composantes du produit extérieur de p colonnes de X ne sont autres que les mineurs d'ordre p de X (n°3), la proposition en résulte.

COROLLAIRE.- *Pour qu'une matrice carrée d'ordre n sur un corps commutatif soit inversible, il faut et il suffit que son déterminant ne soit pas nul.*

En effet, il faut et il suffit que la matrice soit de rang n (chap.II, § 6, prop.4) .

6. Application à la résolution des équations linéaires.

La notion de déterminant permet de mettre sous une forme simple les conditions d'existence des solutions d'un système d'équations linéaires (scalaires) sur un corps commutatif K , et l'expression des solutions d'un tel système lorsqu'elles existent.

Considérons un système de m équations linéaires à n inconnues sur K :

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j = \beta_i \qquad (1 \leq i \leq m) \tag{14}$$

La matrice $\underline{\underline{A}}=(\alpha_{ij})$ de ce système a donc m lignes et n colonnes. Si $\underline{\underline{B}}$ est la matrice à m lignes et n+1 colonnes obtenue en bordant $\underline{\underline{A}}$ par la (n+1)-ème colonne (β_i), on sait (chap.II, § 6, prop.5) que pour que le système (14) admette une solution, il faut et il suffit que $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ aient même rang. Supposons que $\underline{\underline{A}}$ soit de rang p (rang que l'on peut calculer à l'aide de la prop.6), et que les p premières colonnes x_i $(1 \leq i \leq p)$ de $\underline{\underline{A}}$ forment un système libre (ce qu'on peut toujours supposer en faisant une permutation convenable sur les indices j) ; pour que $\underline{\underline{B}}$ soit de rang p , il faut et il suffit que la colonne $y=(\beta_i)$ soit une combinaison linéaire des x_i , autrement dit (prop.5) que l'on ait

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p \wedge y = 0$$

ou encore que tous les mineurs d'ordre p+1 de B , dont les colonnes ont pour indices 1,2,..,p et n+1 , soient nuls.

Supposons cette condition vérifiée, et supposons en outre que les p premières lignes de $\underline{\underline{A}}$ soient linéairement indépendantes (ce qu'on peut toujours supposer, en faisant une permutation convenable sur les indices i) ; alors l'ensemble des solutions du système (14) est identique à l'ensemble des solutions du système formé par les p premières équations (14) (chap.II, § 4, prop.7). Autrement dit, on peut supposer que p=m , et par suite $n \geqslant m$; avec les notations précédentes, le système (14) est alors équivalent à l'équation

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j = y \tag{15}$$

dans l'espace vectoriel K^m.

Multiplions (extérieurement) les deux membres de (15), à gauche par $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_{j-1}$, à droite par $x_{j+1} \wedge x_{j+2} \wedge \ldots \wedge x_m$; il vient

$$\xi_j (x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_m) = x_1 \wedge \ldots \wedge x_{j-1} \wedge y \wedge x_{j+1} \wedge \ldots \wedge x_m$$
$$- \sum_{h=1}^{n-m} \xi_{m+h} (x_1 \wedge \ldots \wedge x_{j-1} \wedge x_{m+h} \wedge x_{j+1} \wedge \ldots \wedge x_m)$$

ce qui peut encore s'écrire, d'après la formule (3)

$$\Delta . \xi_j = \Delta_j - \sum_{h=1}^{n-m} \Delta_{jh} \xi_{m+h} \qquad (j=1,2,\ldots,m) \tag{16}$$

où Δ est le mineur de $\underline{A}$ formé des m premières colonnes, Δ_j le déterminant obtenu en remplaçant dans Δ la colonne d'indice j par $y=(\beta_i)$, Δ_{jh} le déterminant obtenu en remplaçant dans Δ la colonne d'indice j par la colonne d'indice $m+h$ de $\underline{A}$. Comme par hypothèse $\Delta \neq 0$, les formules (16) donnent une valeur bien déterminée pour chacun des ξ_j d'indice $\leqslant m$, lorsque l'on a donné aux ξ_{m+h} $(1 \leqslant h \leqslant n-m)$ des valeurs quelconques ; comme on sait par ailleurs que dans ces conditions, l'équation $\sum_{j=1}^{m} x_j \xi_j = y - \sum_{h=1}^{n-m} x_{m+h} \xi_{m+h}$ admet une seule solution pour $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ les valeurs tirées de (16) donnent nécessairement cette solution.

Notons deux cas particuliers, fréquemment utilisés, des résultats précédents :

PROPOSITION 7.- <u>Pour qu'un système de n équations linéaires à n inconnues sur un corps commutatif, admette une solution quels que soient les seconds membres, il faut et il suffit que le déterminant de la matrice du système ne soit pas nul ; dans ce cas le système admet une seule solution</u>.

Cette solution est donnée par les formules (16), qui se réduisent ici à

(17) $$\xi_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

et sont dites <u>formules de Cramer</u>.

PROPOSITION 8.- <u>Pour qu'un système homogène de n équations linéaires à n inconnues sur un corps commutatif, admette une solution non nulle, il faut et il suffit que le déterminant de sa matrice soit nul</u>.

<u>7. Sous-espaces vectoriels et p-vecteurs décomposables</u>.

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps commutatif K, et soit V un sous-espace de dimension p de E. Pour toute <u>base</u> $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de V, le p-vecteur décomposable $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p$ n'est pas nul, d'après la prop.5 ; en outre, si $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une autre base de V, chacun des y_i est une combinaison linéaire des x_i, donc le p-vecteur $y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_p$ est un <u>multiple scalaire</u> (non nul) de $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p$. En considérant toutes les bases de V, on fait ainsi correspondre au sous-espace V une famille de p-vecteurs décomposables ne différant deux à deux que part un facteur scalaire (autrement dit, formant avec l'origine une <u>droite</u> dans l'espace vectoriel $\overset{p}{\wedge} E$). Nous allons montrer que, réciproquement :

PROPOSITION 9.- <u>Si deux p-vecteurs décomposables non nuls</u> $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p$ <u>et</u> $y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_p$ <u>ne diffèrent que par un facteur scalaire, les sous-espaces de dimension p engendrés respectivement par les vecteurs</u> $x_1, x_2, \ldots, x_p$ <u>et par les vecteurs</u> $y_1, y_2, \ldots, y_p$, <u>sont identiques</u>.

En effet, on a alors $y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_p \wedge x_i = 0$ pour tout indice i ; il en résulte que pour tout i, x_i appartient au sous-espace engendré par $y_1, y_2, \ldots, y_p$, sans quoi les p+1 vecteurs $y_1, y_2, \ldots, y_p$ et x_i formeraient un système libre et d'après la prop.5 on aurait $y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_p \wedge x_i \neq 0$, contrairement à l'hypothèse.

COROLLAIRE.- <u>Soit</u> V (resp. W) <u>un sous-espace vectoriel de dimension</u> p (resp. q) <u>de</u> E , <u>tels que</u> $p \leqslant q$; <u>soit</u> $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ (resp. $(y_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$) <u>une base de</u> V (resp. W). <u>Pour que</u> $V \subset W$, <u>il faut et il suffit qu'il existe un</u> $(q-p)$-<u>vecteur z tel que</u> $y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_q = z \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p$.

En effet, si $V \subset W$, W est somme directe de V et d'un sous-espace U de dimension $q-p$; si $(z_k)_{1 \leqslant k \leqslant q-p}$ est une base de U , les x_i et les z_k forment une base de W , donc il existe un scalaire λ tel que $y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_q = \lambda z_1 \wedge z_2 \wedge \ldots \wedge z_{q-p} \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p$. Réciproquement, s'il existe un $(q-p)$-vecteur z tel que $y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_q = z \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p$ on a $y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_q \wedge x_i = 0$ pour tout indice i tel que $1 \leqslant i \leqslant p$, donc le raisonnement de la prop.9 prouve que $x_i \in W$ pour tout indice i , et par suite $V \subset W$.

PROPOSITION 10.- <u>Soit</u> V (resp. W) <u>un sous-espace vectoriel de dimension</u> p (resp. q) <u>de</u> E ; <u>soit</u> x (resp. y) <u>un</u> p-<u>vecteur décomposable</u> (resp. q-<u>vecteur décomposable</u>) <u>correspondant à</u> V (resp. W) ; <u>pour que</u> $V \cap W = \{0\}$, <u>il faut et il suffit que</u> $x \wedge y \neq 0$; <u>le</u> $(p+q)$-<u>vecteur décomposable</u> $x \wedge y$ <u>correspond alors à la somme</u> (directe) $V+W$.

En effet, si $x = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p$, et $y = y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_q$, dire que $V \cap W = \{0\}$ équivaut à dire que la somme $V+W$ est directe, ou encore que le système des $p+q$ vecteurs x_i et y_j $(1 \leqslant i \leqslant p \, , \, 1 \leqslant j \leqslant q)$ est <u>libre</u> ; la proposition est donc une conséquence de la prop.5 .

<u>8. Caractérisation des p-vecteurs décomposables.</u>

Soit z un p-vecteur non nul quelconque sur un espace vectoriel E de dimension n ; l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $z \wedge x = 0$ forme évidemment un sous-espace vectoriel V de E . Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ une base de V ; il existe $n-q$ vecteurs $x_{q+1}, \ldots, x_n$ formant avec $x_1, x_2, \ldots, x_q$ une base de E . Avec les notations antérieures (§ 3, n°7) on peut écrire $z = \sum_H \alpha_H x_H$, H parcourant l'ensemble des parties de p éléments de $[1,n]$;

de la relation $z \wedge x_i=0$, on déduit donc que $\alpha_H=0$ pour toutes les parties H ne contenant pas l'indice i ; comme par hypothèse on a $z \wedge x_i=0$ pour $1 \leqslant i \leqslant q$, on a $\alpha_H=0$ sauf pour les parties H qui contiennent l'intervalle $[1,q]$. On a donc $p \geqslant q$, et il existe un (p-q)-vecteur y tel que $z=y \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_q$. Réciproquement, s'il existe un r-vecteur décomposable $u=u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_r$ tel que $z=v \wedge u$, où v est un (p-r)-vecteur, on a $z \wedge u_k=0$ pour $1 \leqslant k \leqslant r$, donc les u_k appartiennent à V , ce qui entraîne que $r \leqslant q$ et que le q-vecteur $x=x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_q$ est produit de u et d'un (q-r)-vecteur (cor. de la prop.9). On peut donc dire de façon imagée que le q-vecteur x , correspondant au sous-espace V , est "le plus grand" (à un facteur scalaire près) des r-vecteurs décomposables qu'on peut "mettre en facteur" dans z .

En particulier :

PROPOSITION 11.- <u>Pour qu'un p-vecteur z non nul sur un espace vectoriel E soit décomposable, il faut et il suffit que le sous-espace V de E formé des vecteurs x tels que $z \wedge x=0$ soit de dimension p .</u>

En rapportant z et x à une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E , la relation $z \wedge x=0$ équivaut à un système de $\binom{n}{p+1}$ équations linéaires et homogènes par rapport aux composantes de x ; on obtient les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir les composantes de z pour que ce p-vecteur soit décomposable, en écrivant que les $\binom{n}{p+1}$ formes linéaires qui constituent les premiers membres des équations précédentes sont des combinaisons linéaires de n-p d'entre elles (cf. exerc. 22 et 23 et § 5, exerc.6) .

<u>Exercices</u>.- 1) Dans un déterminant Δ d'ordre n , si on remplace, pour chaque indice i , la colonne d'indice i par la somme des colonnes d'indices $\neq i$, le déterminant obtenu est égal à $(-1)^{n-1}(n-1)\Delta$. Si, dans Δ , on retranche, pour chaque i ,

la somme des colonnes d'indices $\neq i$ de la colonne d'indice i , le déterminant obtenu est égal à $-(n-2)2^{n-1}\Delta$.

2) Soit $\Delta = \det(a_{ij})$ un déterminant d'ordre n ; pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et $1 \leqslant j \leqslant n-1$, on pose

$$\beta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1j} & a_{1,j+1} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} \end{vmatrix}$$

Démontrer que le déterminant $\det(\beta_{ij})$ d'ordre n-1 est égal à $a_{12}a_{13}\dots a_{1n}\Delta$.

3) Démontrer l'identité

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ \lambda_1 x_2 & x_2 & y_2 & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ \lambda_1\lambda_2 x_3 & \lambda_2 x_3 & x_3 & y_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1\dots\lambda_{n-1}x_n & \lambda_2\dots\lambda_{n-1}x_n & \lambda_3\dots\lambda_{n-1}x_n & \lambda_4\dots\lambda_{n-1}x_n & \dots & x_n \end{vmatrix} = (x_1-\lambda_1 y_1)\dots(x_{n-1}-\lambda_{n-1}y_{n-1})x_n$$

En déduire les identités suivantes (les éléments des déterminants étant supposés appartenir à un corps)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & a_n \end{vmatrix} = (a_1-b_1)(a_2-b_2)\dots(a_n-b_n)$$

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & a_nb_n \end{vmatrix} = a_1b_n(a_2b_1-a_1b_2)\dots(a_nb_{n-1}-a_{n-1}b_n)$$

$$\begin{vmatrix} a_2a_3..a_n & a_3a_4..a_nb_1 & a_4..a_nb_1b_2 & ...... & a_1b_2b_3..b_{n-1} \\ b_2b_3..b_n & a_3a_4..a_na_1 & a_4..a_na_1b_2 & ...... & a_1a_2b_3..b_{n-1} \\ a_2b_3..b_n & b_3b_4..b_nb_1 & a_4..a_na_1a_2 & ...... & a_1a_2a_3..b_{n-1} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_2a_3..b_n & a_3a_4..b_nb_1 & a_4..b_nb_1b_2 & ...... & a_1a_2a_3..a_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1a_2..a_n - b_1b_2..b_n)^{n-1}$$

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix} = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$$

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_n \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix} = (x+a_1+a_2+..+a_n)(x-a_1)\dots(x-a_n)$$

(ramener ce dernier déterminant au précédent).

4) Calculer le déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & b_1 & \dots. & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \dots. & b_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ b_n & b_n & b_n & \dots. & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

(exprimer Δ_n à l'aide de Δ_{n-1}).

5) Démontrer l'identité (entre éléments d'un corps)

$$\det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right) = \frac{\prod_{i<j}(a_i-a_j)(b_i-b_j)}{\prod_{i,j}(a_i+b_j)}$$

6) Soient E,F deux A-modules, $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ une base de E , $(b_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ une base de F . Soit u une application linéaire de E dans F , $\underline{X}$ la matrice à n lignes et m colonnes de u rapportée aux bases $(a_i),(b_j)$. Montrer que la matrice de l'application linéaire $\bigwedge^p u$, rapportée aux bases (a_H) et (b_K) est la matrice $(X_{K,H})$ à $\binom{n}{p}$ lignes et $\binom{m}{p}$ colonnes, formée de tous les mineurs d'ordre p de $\underline{X}$ (H parcourant les parties de p éléments de $[1,n]$, K l'ensemble des parties de p éléments de $[1,m]$). On dit que cette matrice est la <u>puissance antisymétrique</u> $p^{\text{ème}}$ de $\underline{X}$, et on la note $\bigwedge^p \underline{X}$.

En déduire que, si $\underline{X}$ est une matrice à n lignes et m colonnes, $\underline{Y}$ une matrice à p lignes et n colonnes, $\underline{Z}=\underline{YX}$ la matrice produit à p lignes et m colonnes, les mineurs d'ordre q de $\underline{Z}$ sont nuls si $n<q\leqslant \mathrm{Min}(m,p)$; si $q\leqslant n$, ils sont donnés par

$$Z_{L,H} = \sum_K Y_{L,K}X_{K,H}$$

où K parcourt l'ensemble des parties de q éléments de $[1,n]$ (utiliser la formule (6) du §3) .

7) Soit $\Delta = \det(\alpha_{ij})$ un déterminant d'ordre n ; pour chaque indice i $(1\leqslant i\leqslant x)$ on désigne par Δ_i le déterminant obtenu en multipliant dans Δ l'élément α_{ij} par β_j pour $1\leqslant j\leqslant n$. Montrer que la somme des n déterminants Δ_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ est égale à $(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n)\Delta$ (développer Δ_i suivant la ligne d'indice i).

8) Soit $\Delta = \det(\alpha_{ij})$ un déterminant d'ordre n , et σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$; soit Δ_i le déterminant obtenu en remplaçant dans Δ l'élément α_{ij} par $\alpha_{i,\sigma(j)}$ pour $1\leqslant j\leqslant n$; si p est le nombre d'indices invariants par la permutation σ , montrer que la somme des n déterminants Δ_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ est égale à $p\,\Delta$ (même méthode que dans l'exerc. 7) .

9) a) Soit $\underline{X}$ une matrice carrée d'ordre n ; pour toute partie H de p éléments de $[1,n]$, montrer qu'on a la formule suivante ("développement de Laplace")

$$\det \underline{X} = \sum_{K} \delta_{H,H'} \delta_{K,K'} X_{K,H} X_{K',H'}$$

où K parcourt l'ensemble des parties de p éléments de $[1,n]$ H' désigne le complémentaire de H et K' le complémentaire de K par rapport à $[1,n]$ (cf. §3, formule (11)) ; les mineurs $X_{K,H}$ et $X_{K',H'}$ sont dits <u>complémentaires</u>.

b) Montrer que si L est une partie de $n-p$ éléments de $[1,n]$, distincte de H', on a

$$\sum_{K} \delta_{K,K'} X_{K,H} X_{K',L} = 0$$

(K parcourant l'ensemble des parties de p éléments de $[1,n]$).

10) Soit $\underline{A}$ une matrice carrée d'ordre n, $\underline{B}$ une sous-matrice de $\underline{A}$ à p lignes et q colonnes, $\underline{C}$ la matrice obtenue en multipliant, dans $\underline{A}$, chacun des éléments appartenant à $\underline{B}$ par un même scalaire α. Montrer que chaque terme du développement total de $\det \underline{C}$ est égal au terme correspondant du développement total de $\det \underline{A}$, multiplié par un scalaire α^r, où $r \geqslant p+q-n$ (faire un développement de Laplace de $\det \underline{C}$, en prenant pour H l'ensemble des indices des colonnes appartenant à $\underline{B}$).

11) Soient Γ, Δ, deux déterminants d'ordre n ; soient H et K deux parties quelconques à p éléments de $[1,n]$, (i_k) (resp. (j_k)) les suites obtenues en rangeant les éléments de H (resp. K) dans l'ordre croissant ; soit $\Gamma_{H,K}$ le déterminant obtenu en remplaçant dans Γ la colonne d'indice i_k par la colonne d'indice j_k de Δ pour $1 \leqslant k \leqslant p$, $\Delta_{K,H}$ le déterminant obtenu en remplaçant dans Δ la colonne d'indice j_k de Δ par la colonne d'indice i_k de Γ pour $1 \leqslant k \leqslant p$. Montrer que, pour toute partie H de p éléments de $[1,n]$ on a

$$\Gamma\Delta = \sum_K \Gamma_{H,K}\Delta_{K,H}$$

où K parcourt l'ensemble des parties de p éléments de $[1,n]$ (utiliser l'exerc.9) .

12) soit Δ le déterminant d'une matrice carrée $\underline{X}$ d'ordre n , Δ_p le déterminant de la matrice carrée $\overset{p}{\wedge}\underline{X}$ d'ordre $\binom{n}{p}$. Montrer qu'on a

$$\Delta_p \Delta_{n-p} = \Delta^{\binom{n}{p}}$$

(utiliser l'exerc. 9) .

13) Un déterminant $\det(\alpha_{ij})$ d'ordre n est dit <u>centrosymétrique</u> (resp. <u>centrosymétrique gauche</u>) si on a $\alpha_{n-i+1,n-j+1}=\alpha_{ij}$ (resp. $\alpha_{n-i+1,n-j+1}=-\alpha_{ij}$) pour $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant n$.

a) Montrer qu'on peut mettre un déterminant centrosymétrique d'ordre pair 2p sous forme du produit de deux déterminants d'ordre p , et un déterminant centrosymétrique d'ordre impair 2p+1 sous forme du produit d'un déterminant d'ordre p et d'un déterminant d'ordre p+1 .

b) Montrer qu'on peut mettre un déterminant centrosymétrique gauche d'ordre pair 2p sous forme du produit de deux déterminants d'ordre p . Un déterminant centrosymétrique gauche d'ordre impair 2p+1 est nul si, dans A , la relation $2\alpha=0$ entraîne $\alpha=0$; dans le cas contraire, il peut se mettre sous la forme du produit de α_{pp} par deux déterminants d'ordre p .

14) Si une matrice $\underline{X}$ sur un corps commutatif est de rang $p>0$, la puissance antisymétrique $\overset{p}{\wedge}\underline{X}$ est une matrice de rang 1 .

15) Soit $\Delta = \det(\alpha_{ij})$ un déterminant d'ordre n , Δ_{ij} le mineur d'ordre n-1 , complémentaire de α_{ij} . Montrer qu'on a

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & x_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & z \end{vmatrix} = \Delta z - \sum_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}x_i y_j$$

Si $\Delta=0$ et si les α_{ij} appartiennent à un <u>corps</u>, montrer que le déterminant précédent est produit d'une forme linéaire en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et d'une forme linéaire en $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (utiliser l'exerc. 14). Donner un exemple où ce résultat est en défaut lorsque l'anneau des scalaires A n'est pas un corps (prendre pour A l'anneau $\mathbb{Z}/(6)$, et $n=2$).

16) Démontrer l'identité

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & a_1+a_2 & a_1+a_3 & \cdots & a_1+a_n \\ 1 & a_2+a_1 & 0 & a_2+a_3 & \cdots & a_2+a_n \\ 1 & a_3+a_1 & a_3+a_2 & 0 & \cdots & a_3+a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & a_n+a_3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n 2^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_1 a_2 \ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots a_n$$

(utiliser l'exerc. 15).

17) Soit $\underline{X}$ une matrice sur un corps commutatif. Pour que $\underline{X}$ soit de rang p, il suffit qu'il existe un mineur d'ordre p de $\underline{X}$ qui soit $\neq 0$, et tel que tous les mineurs d'ordre p+1 contenant ce mineur d'ordre p, soient nuls (montrer que toute colonne de $\underline{X}$ est combinaison linéaire des p colonnes auxquelles appartiennent les éléments du mineur d'ordre p considéré).

18) Soit E un module sur un anneau commutatif A, ayant une base finie pour que p éléments x_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ de E forment un système lié, il faut et il suffit qu'il existe un scalaire $\mu \neq 0$ tel que $\mu x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p = 0$.

(Pour montrer que la condition est suffisante, se ramener au cas où le produit par μ d'un mineur d'ordre p-1 de la matrice dont les x_i forment les colonnes, n'est pas nul ; puis écrire que le produit par μ d'un mineur d'ordre p-1 de la matrice dont les x_i forment les colonnes, n'est pas nul ; puis écrire que le produit par μ de chacun des mineurs d'ordre p contenant ce mineur d'ordre p-1 est nul, en le développant suivant sa dernière ligne ; enfin, utiliser (10)). En particulier, si $p > n$, les x_i forment toujours un système lié.

En déduire que, si (x_i) est un système libre de p éléments de E, les q-vecteurs x_H, où H parcourt l'ensemble des parties de q éléments de ~~qxékémam~~ $[1,p]$, forment un système libre $(q \leqslant p)$.

19) Soient E,F deux A-modules, admettant des bases finies ayant respectivement m et n éléments. Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit un <u>isomorphisme</u> de E <u>dans</u> F, il faut et il suffit que $m \leqslant n$, et que, si $\underline{X}$ désigne la matrice de u, rapportée à deux bases quelconques de E et F, il n'existe pas de scalaire $\mu \neq 0$ tel que le produit par μ de tous les mineurs d'ordre m de $\underline{X}$ soient nuls. Dans ces conditions, $\bigwedge^p u$ est un isomorphisme de $\bigwedge^p E$ dans $\bigwedge^p F$ pour $p \leqslant m$ (utiliser l'exerc. 18).

20) Soit

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j = \beta_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant m)$$

un système de m équations à n inconnues sur un anneau commutatif A. Avec les notations du n° 6, on suppose que, dans la matrice $\underline{A}=(\alpha_{ij})$, tous les mineurs d'ordre $>p$ soient nuls, mais que $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p \neq 0$. Pour que le système ait une solution, il est nécessaire que l'on ait $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p \wedge y = 0$.

Réciproquement, si cette condition est vérifiée, il existe n+1 éléments ξ_j $(1 \leqslant j \leqslant n+1)$ de A tels que $\xi_{n+1} \neq 0$ et

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j = \beta_i \xi_{n+1} \qquad (1 \leqslant i \leqslant m) .$$

21) a) Pour qu'un système de n équations à n inconnues

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j = \beta_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

ait une solution quel que soit $y=(\beta_i)$, il faut et il suffit que le déterminant $\det(\alpha_{ij})$ soit inversible. En déduire que, pour qu'un endomorphisme de A^n soit un automorphisme, il faut et il suffit que son déterminant soit inversible.

b) Soient E, F deux A-modules, admettant des bases finies ayant respectivement m et n éléments. Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit une application de E <u>sur</u> F il faut et il suffit que $m \geqslant n$, et que, si $\underline{X}$ désigne la matrice de u, rapportée à deux bases quelconques de E et F, il existe un mineur d'ordre n de $\underline{X}$ qui soit inversible (utiliser a) et l'exerc. 20).

22) a) Soit z un p-vecteur sur un espace vectoriel E de dimension finie sur un corps commutatif K, z' le tenseur antisymétrisé d'ordre p qui correspond à z dans l'isomorphie canonique (§ 3, prop.4), z'_1 un tenseur d'ordre p tel que $z' = \underline{\underline{a}}\, z'_1$. Montrer que, si z est un p-vecteur <u>décomposable</u> l'antisymétrisé du tenseur produit $z'_1 . z'$ d'ordre 2p pour ses p+1 premiers indices (§ 3, exerc.8) est nul (considérer dans E une base dont p éléments forment une base du sous-espace vectoriel correspondant à z). Si $z' = \sum \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_p} e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_p}$ est l'expressin de z' à l'aide de ses composantes relatives à une base quelconque (e_i) de E, en déduire qu'on a les relations

$$(1) \qquad \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_p} \alpha_{j_{p+1} i_1 i_2 \ldots i_{p-1}} - \sum_{k=1}^{p} \alpha_{j_1 \ldots j_{k-1} j_{p+1} j_{k+1} \ldots j_p} \alpha_{j_k i_1 i_2 \ldots i_{p-1}} = 0$$

pour tout couple formé d'une suite strictement croissante (i_h) de p-1 indices, et d'une suite strictement croissante (j_k) de p+1 indices, appartenant à $[1, n]$.

b) Inversement, si les composantes de z' vérifient les équations (1) pour tout couple $((i_h),(j_k))$, z est un p-vecteur décomposable (utiliser la prop.10, en montrant que les conditions (1) entraînent que le critère de la prop.10 est satisfait).

23) Soit $z=\sum \alpha_H e_H$ un p-vecteur décomposable non nul sur un espace vectoriel E, exprimé à l'aide de ses composantes relatives à une base quelconque (e_i) de E. Soit G une partie de p éléments de $[1,n]$ telle que $\alpha_G \neq 0$, $(i_h)_{1\leqslant h\leqslant p}$ les indices de G rangés en une suite croissante, $(j_k)_{1\leqslant k\leqslant n-p}$ les indices du complèmentaire G' de G par rapport à $[1,n]$, rangés en une suite croissante. Pour tout couple (h,k) d'indices tels que $1\leqslant h\leqslant p$, $1\leqslant k\leqslant n-p$, soit β_{hk} la composante α_H de z correspondant à la partie H de $[1,n]$ formée des p-1 indices de G distincts de i_h, et de l'indice j_k; soit $\underline{X}$ la matrice (β_{hk}) à p lignes et n-p colonnes. Etant donnée une partie quelconque M de p éléments de $[1,n]$, telle que $M\cap \complement G$ et $G\cap\complement M$ aient $q>1$ éléments, montrer que $(\alpha_G)^{q-1}\alpha_M$ est égal au mineur d'ordre q de $\underline{X}$, formé des lignes d'indice h tel que $i_h\in G\cap\complement M$ et des colonnes d'indice k tel que $j_k\in M\cap\complement G$ (écrire que z est de la forme $\alpha_G y_1\wedge y_2\wedge\ldots\wedge y_p$ où les vecteurs y_i sont tels que, dans la matrice $\underline{Y}$ à n lignes et p colonnes dont les y_i sont les colonnes, la sous-matrice formée des lignes d'indice appartenant à G soit la matrice unité d'ordre p).

§ 5. Dualité dans l'algèbre extérieure.

1. Dual d'une puissance antisymétrique.

Soit E un module sur un anneau commutatif A, admettant une base finie. Par définition de la puissance antisymétrique $\bigwedge^p E$ (§ 3, n° 5), il y a correspondance biunivoque entre les formes linéaires sur $\bigwedge^p E$ et les formes p-linéaires alternées sur E^p, toute forme p-linéaire alternée pouvant s'écrire

$$(x_1,x_2,\dots,x_p) \to f(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p)$$

où f est une forme linéaire sur $\overset{p}{\wedge} E$, déterminée de façon unique.

D'autre part, comme E admet une base, il y a identité entre formes p-linéaires <u>alternées</u> et <u>formes</u> p-linéaires <u>antisymétrisées</u> (§ 3,prop.3). Mais on sait qu'on identifie (par une correspondance canonique) les formes p-linéaires sur E^p et les <u>tenseurs covariants d'ordre</u> p sur E (§ 1,n°6) ; par cette correspondance, les antisymétrisées des formes p-linéaires sont identifiés aux antisymétrisées des tenseurs covariants d'ordre p . En effet, au tenseur covariant décomposable $z'=x'_1 \otimes x'_2 \otimes \dots$ $\dots \otimes x'_p$ correspond la forme p-linéaire f telle que $f(x_1,x_2,\dots,x_p)=\langle x_1,x'_1\rangle\langle x_2,x'_2\rangle\dots\langle x_p,x'_p\rangle$. On a donc $\underline{a}f(x_1,\dots,x_p)=\sum_\sigma \varepsilon_\sigma f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\dots,x_{\sigma(p)}) = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \langle x_{\sigma(1)},x'_1\rangle \dots$ $\dots\langle x_{\sigma(p)},x'_p\rangle = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \langle x_1,x'_{\sigma(1)}\rangle \dots \langle x_p,x'_{\sigma(p)}\rangle$ (en vertu de la relation $\varepsilon_{\sigma^{-1}} = \varepsilon_\sigma$) ; donc $\underline{a}f$ correspond bien au tenseur antisymétrisé $\underline{a}z'$. Enfin, comme le dual E^* de E a une base finie, il y a isomorphie canonique entre le module des antisymétrisés des tenseurs covariants d'ordre p sur E , et la <u>puissance antisymétrique</u> p-<u>ème</u> $\overset{p}{\wedge} E^*$ (§ 3,prop.4) .

On peut donc, en vertu de ces remarques, définir une <u>isomorphie canonique</u> entre le dual de $\overset{p}{\wedge} E$ et le module $\overset{p}{\wedge} E^*$. Pour préciser cette isomorphie, il suffit de déterminer la forme linéaire f sur $\overset{p}{\wedge} E$ qui correspond à un p-vecteur <u>décomposable</u> $x'_1 \wedge x'_2 \wedge \dots \wedge x'_p$ sur E^* (§ 3,n°5) ; d'autre part, les valeurs de f seront connues pour tout p-vecteur sur E si on connaît $f(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p)$ pour tout p-vecteur <u>décomposable</u> sur E .

Or, d'après ce qui précède, f correspond canoniquement au tenseur covariant antisymétrisé du tenseur $x'_1 \otimes x'_2 \otimes \dots \otimes x'_p$, c'est-à-dire au tenseur $\sum_\sigma \varepsilon_\sigma x'_{\sigma(1)} \otimes x'_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes x'_{\sigma(p)}$. Ce dernier est identifié à la forme p-linéaire dont la valeur, pour $(x_i) \in E^p$ est

(1) $$\sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma}\langle x_1, x'_{\sigma(1)}\rangle\langle x_2, x'_{\sigma(2)}\rangle\cdots\langle x_p, x'_{\sigma(p)}\rangle$$

L'expression (1) est donc la valeur cherchée de $f(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p)$ d'après la formule (6) du §4, cette expression s'écrit aussi $\det(\langle x_i, x'_j\rangle)$. Autrement dit, si on <u>identifie</u> (comme nous le ferons désormais) le dual de $\overset{p}{\wedge} E$ à $\overset{p}{\wedge} E^*$ par l'isomorphie canonique que nous venons de préciser, on a la formule

(2) $$\langle x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p, x'_1 \wedge x'_2 \wedge \ldots \wedge x'_p\rangle = \det(\langle x_i, x'_j\rangle)$$

Les éléments de $\overset{p}{\wedge} E^*$ (p-vecteurs sur E^*) identifiés ainsi aux formes linéaires sur $\overset{p}{\wedge} E$, seront encore appelés p-<u>formes sur</u> E.

Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E, $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base duale de E^*; la formule (2) montre qu'on a

$$\langle e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}, e'_{j_1} \wedge e'_{j_2} \wedge \ldots \wedge e'_{j_p}\rangle = \det(\langle e_{i_h}, e'_{j_k}\rangle)$$

Or, le déterminant du second membre a une colonne nulle s'il existe un indice j_k qui est distinct de tous les i_h; en d'autres termes, on a, avec les notations du §3, n°7 :

(3) $$\begin{cases} \langle e_H, e'_K\rangle = 0 & \text{si } H \neq K \\ \langle e_H, e'_H\rangle = 1 \end{cases}$$

pour toute partie H de p éléments de $[1,n]$; on voit donc que (e'_H) est <u>base duale</u> de la base (e_H) de $\overset{p}{\wedge} E$. Si $x = \sum_H \alpha_H e_H$ est un p-vecteur quelconque, $x' = \sum_H \alpha'_H e'_H$ une p-forme quelconque sur E, on a

(4) $$\langle x, x'\rangle = \sum_H \alpha_H \alpha'_H$$

H parcourant l'ensemble des parties de p éléments de $[1,n]$.

<u>Remarques</u>.- 1) Pour $p=n$, la formule (4) montre en particulier que toute <u>forme n-linéaire alternée</u> sur E est un multiple scalaire de la forme n-linéaire

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow \frac{x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n}{e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n}$$

dont la valeur (qu'on note parfois $[x_1,x_2,\dots,x_n]$) est le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les x_i (rapportés à la base (e_i)).

2) Lorsque x est un p-vecteur décomposable, x' une p-forme décomposable, la formule (2) donne l'expression de $\langle x,x'\rangle$ en fonction des composantes des x_i et x'_j (par rapport aux bases (e_i) et (e'_j) respectivement). En effet, si $x_i = \sum_k e_k \xi_{ki}$, $x'_j = \sum_k e'_k \xi'_{kj}$, on a $\langle x_i,x'_j\rangle = \sum_k \xi_{ki}\xi'_{kj}$. Si $\underline{X}$ est la matrice à n lignes et p colonnes dont x_i est la colonne d'indice i pour $1 \leqslant i \leqslant p$, $\underline{X}'$ la matrice à n lignes et p colonnes dont x'_j est la colonne d'indice j pour $1 \leqslant j \leqslant p$, on voit que le second membre de (2) n'est autre que le déterminant de la matrice carrée d'ordre p, ${}^t\underline{X}\underline{X}'$.

PROPOSITION 1.- <u>Soient E et F deux A-modules ayant une base finie, u une application linéaire de E dans F ; la transposée de l'application $\overset{p}{\wedge} u$, puissance antisymétrique p-ème de u, est identique à la puissance antisymétrique p-ème $\overset{p}{\wedge}({}^t u)$ de la transposée de u</u>.

En effet, désignons par v la transposée de $\overset{p}{\wedge} u$; pour tout p-vecteur décomposable $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p$ sur E, et toute p-forme décomposable $y'_1 \wedge y'_2 \wedge \dots \wedge y'_p$ sur F, on a par définition (chap.II, §4,n°7) :

$$\langle x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p, v(y'_1 \wedge y'_2 \wedge \dots \wedge y'_p)\rangle = \langle u(x_1) \wedge u(x_2) \wedge \dots \wedge \dots \wedge u(x_p), y'_1 \wedge y'_2 \wedge \dots \wedge y'_p\rangle$$

donc, d'après (2)

$$\langle x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p, v(y'_1 \wedge y'_2 \wedge \dots \wedge y'_p)\rangle = \det(\langle u(x_i), y'_j\rangle) = \det(\langle x_i, {}^t u(y'_j)\rangle) = \langle x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p, {}^t u(y'_1) \wedge {}^t u(y'_2) \wedge \dots \wedge {}^t u(y'_p)\rangle$$

ce qui démontre bien qu'on a

$$(5) \qquad {}^t(\overset{p}{\wedge} u) = \overset{p}{\wedge}({}^t u)$$

COROLLAIRE.- *Si* u *est un automorphisme de* E , *la contragrédiente de l'automorphisme* $\overset{p}{\wedge} u$ *de* $\overset{p}{\wedge} E$ *est la puissance antisymétrique* $\overset{p}{\wedge} \check{u}$ *de la contragrédiente* $\check{u}$ *de* u .

Cela résulte aussitôt de la formule (5) précédente, et de la formule (6) du § 3, n°8 .

2. *Les isomorphismes canoniques entre* p-*vecteurs et* (n-p)-*formes*.

Soit E un module sur un anneau commutatif A , admettant une base finie, et soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E . Considérons un p-vecteur x sur E ; pour tout (n-p)-vecteur y sur E , le produit extérieur $y \wedge x$ est un n-vecteur , qu'on peut donc écrire d'une seule manière $u(x,y).e$, où e est le n-vecteur $e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n$, et $u(x,y)$ un scalaire. Cela étant, l'application $y \rightarrow u(x,y)$ est une application linéaire de $\overset{n-p}{\wedge} E$ dans A , autrement dit une *forme linéaire* sur le module $\overset{n-p}{\wedge} E$; d'après le n°1 , cette forme est identifiée à une (n-p)-*forme* (élément de $\overset{n-p}{\wedge} E^*$) que nous désignerons par $\varphi(x)$; cette forme est donc définie par l'identité en x et y

$$y \wedge x = \langle y, \varphi(x) \rangle . e \tag{6}$$

A tout p-vecteur x nous faisons ainsi correspondre une (n-p)-forme $\varphi(x)$; montrons que φ est un *isomorphisme* du A-module $\overset{p}{\wedge} E$ *sur* le A-module $\overset{n-p}{\wedge} E^*$. En effet, il est immédiat, d'après (6), que φ est *linéaire* ; calculons d'autre part $\varphi(e_H)$ pour tout élément e_H de la base de $\overset{p}{\wedge} E$ correspondant à (e_i) ; il suffit pour cela de donner dans (6) à x la valeur e_H , à y successivement les valeurs e_K , où K parcourt l'ensemble des parties de n-p éléments de $[1,n]$. Or, on a $e_K \wedge e_H = 0$ sauf si $K = H'$ (complémentaire de H par rapport à $[1,n]$), auquel cas on a $e_{H'} \wedge e_H = \delta_{H',H} e$ (§ 3, formules (11)). On a donc $\langle e_K, \varphi(e_H) \rangle = 0$ si $K \neq H'$, et $\langle e_{H'}, \varphi(e_H) \rangle = \delta_{H',H}$; d'après les formules (3) , cela signifie qu'on a

(7) $$\varphi(e_H) = \delta_{H',H} e'_{H'} \quad ,$$

ce qui démontre la proposition.

L'isomorphisme φ ainsi défini <u>dépend de la base</u> (e_i) de E . Soit $(\bar{e}_i)$ une autre base de E (qui a nécessairement n éléments), et soit $\bar{\varphi}$ l'isomorphisme de $\overset{p}{\Lambda} E$ sur $\overset{n-p}{\Lambda} E^*$ correspondant à cette base. D'après (6), on a identiquement

$$\langle y,\varphi(x)\rangle e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n = \langle y,\bar{\varphi}(x)\rangle \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2 \wedge \ldots \wedge \bar{e}_n$$

Or, si Δ est le déterminant de la matrice de passage de la base (e_i) à la base $(\bar{e}_i)$, Δ est inversible, et on a $\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2 \wedge \ldots \wedge \bar{e}_n =$ $= \Delta . e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n$; par suite, on a identiquement

$\langle y,\varphi(x)\rangle = \Delta \langle y,\bar{\varphi}(x)\rangle$, c'est-à-dire

(8) $$\bar{\varphi} = \Delta^{-1}\varphi \quad .$$

Les isomorphismes φ correspondant aux diverses bases de E sont donc identiques <u>à un facteur inversible près</u>. On dit que ce sont les <u>isomorphismes canoniques</u> de $\overset{p}{\Lambda} E$ sur $\overset{n-p}{\Lambda} E^*$.

De la formule (7), on déduit que, si E est un <u>espace vectoriel</u> et x un p-vecteur <u>décomposable</u>, $\varphi(x)$ est une $(n-p)$-forme <u>décomposable</u>, car on peut toujours trouver une base (e_i) de E de sorte que le p-vecteur x soit égal à un e_H ; en outre, si V est le sous-espace vectoriel de dimension p correspondant au p-vecteur décomposable x (§ 4, n° 7), la formule (7) montre que le sous-espace vectoriel de E^* correspondant au $(n-p)$-vecteur $\varphi(x)$ sur E^* n'est autre que le sous-espace V' <u>orthogonal</u> à V (chap. II, § 4, n° 2) .

En particulier, tout $(n-1)$-vecteur sur E^* est de la forme $\varphi(x)$, où x est un vecteur de E , et par suite est <u>décomposable</u> ; comme tout espace vectoriel de dimension n peut être considéré comme le dual d'un espace vectoriel de même dimension, on voit que tout $(n-1)$-vecteur sur un espace vectoriel de dimension n est décomposable.

Revenons au cas général où E est un A-module quelconque ayant une base de n éléments. Considérons le A-module $\bigwedge E$, somme directe des n+1 modules $\bigwedge^{p} E$ $(0 \leqslant p \leqslant n)$, et le A-module $\bigwedge E^*$, somme directe des n+1 modules $\bigwedge^{p} E^*$ $(0 \leqslant p \leqslant n)$ (nous ne munissons pas $\bigwedge E$ et $\bigwedge E^*$ de leurs structures d'algèbre définies au §3,n°10) ; on vient de définir, pour une base donnée dans E , et pour chaque valeur de p $(0 \leqslant p \leqslant n)$, un isomorphisme de $\bigwedge^{p} E$ sur $\bigwedge^{n-p} E^*$; ces isomorphismes sont donc les restrictions d'un isomorphisme bien déterminé de $\bigwedge E$ sur $\bigwedge E^*$, que nous désignerons encore par φ ; nous écrirons φ^{-1} l'isomorphisme réciproque de φ . Quand on prend une autre base de E , l'isomorphisme $\overline{\varphi}$ de $\bigwedge E$ sur $\bigwedge E^*$ correspondant à cette base est encore donné par la formule (8).

Avec ces notations, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 2.- <u>Pour tout automorphisme</u> u <u>de</u> E , <u>la puissance antisymétrique</u> $\bigwedge^{n-p} \check{u}$ <u>de la contragrédiente de</u> u <u>est donnée par</u>

(9) $$\bigwedge^{n-p} \check{u} = (\det u)^{-1} \varphi \circ \left(\bigwedge^{p} u\right) \circ \varphi^{-1}$$

Posons pour simplifier $u_p = \bigwedge^{p} u$; si u^{-1} est l'automorphisme réciproque de u , l'automorphisme réciproque de u_p , que nous noterons u_p^{-1} , n'est autre que $\bigwedge^{p}(u^{-1})$; de même, la prop.1 montre que la transposée ${}^t u_p$ n'est autre que $\bigwedge^{p}({}^t u)$.

On sait (§3,n°10) que les u_p $(0 \leqslant p \leqslant n)$ sont les restrictions aux $\bigwedge^{p} E$ d'un automorphisme u de la structure d'algèbre de $\bigwedge E$; par suite, on déduit de (6) qu'on a

(10) $$u_{n-p}(y) \wedge u_p(x) = \langle y, \varphi(x) \rangle u_n(e) = \det(u) . \langle y, \varphi(x) \rangle e$$

Appliquons (10) en remplaçant x par $u_p^{-1}(\varphi^{-1}(x'))$, où x' est un élément quelconque de $\bigwedge^{n-p} E$, et désignons par v l'automorphisme $\varphi \circ u_p^{-1} \circ \varphi^{-1}$ de $\bigwedge^{n-p} E'$; il vient

(11) $$u_{n-p}(y) \wedge \varphi^{-1}(x') = \det(u) . \langle y, v(x') \rangle e$$

Mais d'après (6), on a aussi

(12) $$u_{n-p}(y)\wedge\varphi^{-1}(x')=\langle u_{n-p}(y),x'\rangle e=\langle y,{}^tu_{n-p}(x')\rangle e$$

d'où, en comparant les seconds membres de (11) et (12), la relation

(13) $${}^tu_{n-p}=(\det u)\varphi\circ u_p^{-1}\circ\varphi^{-1}$$

et en prenant les automorphismes réciproques de chacun des deux membres, on a la relation (9).

<u>3. Produit intérieur d'un p-vecteur et d'une</u> q-<u>forme</u>.

Dans la formule (6), remplaçons x par $\varphi^{-1}(y')$, où y' est une (n-p)-forme quelconque ; on a

$$y\wedge\varphi^{-1}(y')=\langle y,y'\rangle e$$

Or, l'isomorphisme φ fait correspondre au n-vecteur e l'élément unité de A (identifié à la forme linéaire $\xi\to\xi$ sur A) ; on a donc

(14) $$\langle y,y'\rangle=\varphi(y\wedge\varphi^{-1}(y'))$$

Le second membre de cette formule garde un sens lorsque y est un p-vecteur, y' une q-forme, p et q étant <u>quelconques</u> ; mais comme $\varphi^{-1}(y')$ est alors un (n-q)-vecteur, le second membre de (14) est toujours nul si $p+(n-q)>n$, c'est-à-dire $p>q$. On est donc conduit à poser la définition suivante :

DEFINITION 1.- <u>Si</u> $0\leqslant p\leqslant q\leqslant n$, <u>on appelle produit intérieur d'un p-vecteur</u> x <u>et d'une</u> q-<u>forme</u> x' <u>la</u> (q-p)-<u>forme</u> $\varphi(x\wedge\varphi^{-1}(x'))$ <u>qu'on note</u> $\langle x,x'\rangle$.

D'après (8), le produit intérieur $\langle x,x'\rangle$ est indépendant de la <u>base</u> choisie pour définir l'isomorphisme φ. Il est clair que c'est une application <u>bilinéaire</u> de $(\bigwedge^p E)\times(\bigwedge^q E^*)$ dans $\bigwedge^{q-p} E^*$. Si (e_i) est une base de E, (e_H) (resp. (e'_K)) les bases correspondantes de $\bigwedge^p E$ et $\bigwedge^q E^*$, on a $\langle e_H,e'_K\rangle=\varphi(e_H\wedge\varphi^{-1}(e'_K))=\delta_{K',K}\varphi(e_H\wedge e_{K'})$ d'après (7), K' étant le complémentaire de la partie K de q éléments par rapport à $[1,n]$. D'après les formules (11) du §3, on a on a $e_H \wedge e_{K'}=0$ si $H \cap K'$ n'est pas vide, c'est-à-dire si $H \not\subset K$. Au contraire, si $H \subset K$, on a $e_H \wedge e_{K'}=\delta_{H,K'} e_{H \cup K'}$ donc $\langle e_H, e'_K \rangle = \delta_{K',K}\,\delta_{H,K'}\,\delta_{H' \cap K, H \cup K'}\, e'_{H' \cap K}$ (H' complémentaire de H dans $[1,n]$). On peut simplifier cette expression en remarquant que d'une manière générale, si L,M,N sont trois parties de $[1,n]$ sans élément commun deux à deux, on a $\delta_{L,M \cup N}=\delta_{L,M}\,\delta_{L,N}$ d'après la définition du §3, n°10 . On a donc

$$\delta_{H,K'}\,\delta_{H' \cap K, H \cup K'} = \delta_{H,K'}\,\delta_{H' \cap K,H}\,\delta_{H' \cap K,K'} = \delta_{K,K'}\,\delta_{H' \cap K,H}$$

puisque $H \subset K$, ce qui entraîne $H \cup (H' \cap K)=K$. D'autre part, d'après les formules (9) et (11) du §3, on a $\delta_{K,K'}=(-1)^{q(n-q)}\,\delta_{K',K}$, d'où finalement

$$(15) \qquad \begin{cases} \langle e_H, e'_K \rangle = 0 & \text{si } H \not\subset K \\ \langle e_H, e'_K \rangle = (-1)^{q(n-q)}\,\delta_{H' \cap K,H}\, e'_{H' \cap K} & \text{si } H \subset K \end{cases}$$

Si $x = \sum_H \alpha_H e_H$ est un p-vecteur quelconque, $x' = \sum_K \alpha'_K e'_K$ une q-forme quelconque, on déduit des formules (15) qu'on a

$$(16) \qquad \langle x, x' \rangle = (-1)^{q(n-q)} \sum_L \Big(\sum_H \delta_{L,H}\,\alpha_H\,\alpha'_{H \cup L} \Big) e'_L$$

L parcourant l'ensemble des parties de $q-p$ éléments de $[1,n]$, H parcourant, pour chaque ensemble L, l'ensemble des parties de p éléments de $[1,n]$ qui ne rencontrent pas L. En particulier si $q=n$ et $x'=\mu e'$ (avec $e'=e'_1 \wedge e'_2 \wedge \dots \wedge e'_n$), on a simplement $\langle x,x' \rangle = \mu\,\varphi(x)$.

Lorsque E est un <u>espace vectoriel</u>, x un p-vecteur <u>décomposable</u> correspondant à un sous-espace V de E, de dimension p (§4, n°7) x' une q-forme <u>décomposable</u> correspondant à un sous-espace W' de E^*, de dimension q, $\varphi^{-1}(x')$ est un $(n-q)$-vecteur décomposable correspondant au sous-espace W de E orthogonal à W' (§4, prop.10) ; donc $x \wedge \varphi^{-1}(x')$ est un $(n+p-q)$-vecteur décomposable, nul si $V \cap W$ n'est pas réduit à 0, et correspond à la somme directe $V+W$ dans le cas contraire.

Si V' est le sous-espace de E^* orthogonal à V , on en conclut que $\langle x,x'\rangle$ est une $(q-p)$-forme décomposable, nulle si la dimension de $V'\cap W'$ est $>q-p$, et correspondant à $V'\cap W'$ dans le cas contraire.

Revenons au cas où E est un module quelconque ayant une base de n éléments. On sait que E peut être considéré comme le dual de son dual E^* ; en intervertissant les rôles de E et E^*, on peut donc définir le produit intérieur d'un p-vecteur x et d'une q-forme x' lorsque $p \geqslant q$, de sorte que ce produit coïncide encore avec la forme bilinéaire fondamentale $\langle x,x'\rangle$ lorsque $p=q$; ce produit qu'on notera encore $\langle x,x'\rangle$, sera cette fois un $(p-q)$-vecteur. Nous laissons au lecteur le soin de formuler pour ce produit les propositions analogues à celles qui précèdent

<u>Exercices</u>. 1) Soit E un module ayant une base finie de n éléments. Soit x un p-vecteur, y un q-vecteur sur E . On appelle <u>produit régressif</u> de x et de y et on note $x\vee y$ le $(p+q-n)$-vecteur $\varphi^{-1}(\varphi(x)\wedge\varphi(y))$ si $p+q-n\geqslant 0$, et 0 dans le cas contraire. Ce produit n'est défini qu'à un facteur inversible près qui dépend de la base choisie dans E pour définir l'isomorphisme φ . Montrer que $y\vee x = (-1)^{(n-p)(n-q)}x\vee y$, et que le produit régressif est associatif et distributif par rapport à l'addition, et définit sur $\wedge E$ une structure d'algèbre isomorphe à celle de l'algèbre extérieure. Exprimer les composantes de $x\vee y$ en fonction de celles de x et de y.

2) Soit E un espace vectoriel de dimension n , x un p-vecteur décomposable, y un q-vecteur décomposable, V (resp. W) le sous-espace de E correspondant à x (resp. y). Pour que $x\vee y\neq 0$, il faut et il suffit que $V+W=E$; le $(p+q-n)$-vecteur $x\vee y$ est alors décomposable, et correspond au sous-espace vectoriel $V\cap W$.

3) Sur un espace vectoriel E , soit $x'=x'_1\wedge x'_2\wedge\dots\wedge x'_r$ une r-forme décomposable, produit extérieur de r formes x'_i linéairement indépendantes ; soit y un p-vecteur, z un q-vecteur sur E . Montrer que, si $p+q\leqslant r$, on a

$$\langle y\wedge z,x'\rangle = \sum_H \delta_{H,H'}\langle y,x'_H\rangle\langle z,x'_{H'}\rangle$$

H parcourant l'ensemble des parties de p éléments de $[1,r]$ H' désignant le complémentaire de H par rapport à $[1,r]$ (prendre dans E^* une base dont les x'_i soient r éléments, dans E la base duale).

4) Dans un espace vectoriel E de dimension n , soit V un sous-espace de E de dimension p , V' le sous-espace de E^* de dimension n-p , orthogonal à V ; soit x un p-vecteur décomposable correspondant à V , x' une (n-p)-forme décomposable correspondant à V'. Soit z' une q-forme sur E $(q\leqslant p)$; pour qu'on ait $\langle y,z'\rangle=0$ pour tout q-vecteur décomposable $y=y_1\wedge y_2\wedge\dots\wedge y_q$, où les y_j appartiennent à V , il faut et il suffit que l'une des deux conditions équivalentes suivantes soit remplie : a) $\langle x,z'\rangle=0$; b) $x'\wedge z'=0$.

5) Soit x un p-vecteur sur un espace vectoriel E ; l'ensemble des formes linéaires y' sur E telles que la (p-1)-forme $\langle x,y'\rangle$ soit nulle, est un sous-espace V' de E^* . Montrer que le sous-espace V de E , orthogonal à V' , est le plus petit des sous-espaces W de E tels que x soit somme de produits extérieurs de p vecteurs appartenant à W .

6) Soit z un p-vecteur sur un espace vectoriel E de dimension n ; pour que z soit décomposable, il faut et il suffit que, pour tout (n-p-1)-vecteur décomposable x , on ait $z\vee(z\wedge x)=0$ (pour voir que la condition est suffisante, l'appliquer en prenant pour x les produits extérieurs de n-p-1 des vecteurs de base, et en déduire qu'il existe n-p formes u'_i $(1\leqslant i\leqslant n-p)$ sur E , linéairement indépendantes et pour lesquelles $\varphi(z)\wedge u'_i=0$).

7) Soit E un module ayant une base finie de n éléments. Soit x un p-vecteur sur E , x' une q-forme sur E ($p\leqslant q$) ; x peut être identifié à l'antisymétrisé $\underline{a}x_1$ d'un tenseur contravariant x_1 d'ordre p , x' à un tenseur covariant d'ordre q (antisymétrisé). Si, dans le tenseur mixte $x_1.x'$ on contracte le k^e indice contravariant et le k^e indice covariant pour $1\leqslant k\leqslant p$, montrer que le tenseur covariant d'ordre q-p obtenu est antisymétrisé, et peut être identifié à la (q-p)-forme égale à $(-1)^{q(n-q)+p(q-p)}\langle x,x'\rangle$.

8) Soit E un module ayant une base finie de n éléments. Si x est un p-vecteur sur E , x' une q-forme sur E , tels que $q\leqslant p$, montrer que le (p-q)-vecteur $\langle x,x'\rangle$ est égal à $\varphi^{-1}(x'\wedge\varphi(x))$.

9) On appelle adjointe d'une matrice carrée $\underline{X}$ sur un corps, et on désigne par $\tilde{\underline{X}}$, la puissance antisymétrique $\bigwedge^{n-1}\underline{X}$ (c'est-à-dire la matrice (X^{ij}) formée des mineurs d'ordre n-1 de $\underline{X}$) . Montrer qu'on a $\det\tilde{\underline{X}}=(\det\underline{X})^{n-1}$, et que tout mineur $\tilde{X}_{H,K}$ d'ordre p de $\tilde{\underline{X}}$ est donné par la formule

(1) $$\tilde{X}_{H,K}=(\det\underline{X})^{p-1}\,X_{H',K'}$$

où H' et K' sont les complémentaires de H et K respectivement par rapport à $[1,n]$ (utiliser l'identité (9)).

10) De toute identité $\Phi=0$ entre mineurs d'une matrice carrée générique $\underline{X}$ d'ordre n sur un corps, on peut déduire une autre identité $\tilde{\Phi}=0$ dite complémentaire de $\Phi=0$, en appliquant l'identité $\Phi=0$ aux mineurs de l'adjointe $\tilde{\underline{X}}$ de $\underline{X}$ (exerc.9), puis en remplaçant les mineurs de $\tilde{\underline{X}}$ en fonction de ceux de $\underline{X}$ à l'aide de la formule (1) de l'exerc.9 . Démontrer de cette manière l'identité suivante :

$$X^{ih}X^{jk}-X^{ik}X^{jh}=(\det\underline{X}).X^{ij,hk}$$

où $X^{ij,hk}$ désigne le mineur d'ordre n-2 de $\underline{X}$ obtenu en supprimant dans $\underline{X}$ les lignes d'indices i,j et les colonnes d'indices h,k .

11) Soit $\Phi=0$ une identité entre mineurs d'une matrice carrée générique d'ordre n sur un corps , $\tilde{\Phi}=0$ l'identité complémentaire (exerc.10), k un entier >0 . Soit $\underline{Y}$ une matrice carrée générique d'ordre n+k , $\tilde{\underline{Y}}_0$ la sous-matrice de la matrice adjointe $\tilde{\underline{Y}}$, formée en supprimant dans $\tilde{\underline{Y}}$ les lignes d'indice $\leqslant k$ et les colonnes d'indice $\leqslant k$. Si on applique l'identité $\tilde{\Phi}=0$ aux mineurs de $\tilde{\underline{Y}}_0$, puis si on remplace chaque mineur qui figure dans cette identité (considéré comme <u>mineur de</u> $\tilde{\underline{Y}}$) par son expression en fonction des mineurs de $\underline{Y}$, à l'aide de la formule (1) de l'exerc.9, on obtient une identité $\Phi_k=0$ entre mineurs de la matrice générique $\underline{Y}$, qui est dite <u>extension d'ordre k</u> de l'identité $\Phi=0$.

En particulier, soit $\underline{A}=(\alpha_{ij})$ une matrice carrée inversible d'ordre n+k , $\underline{B}$ la sous-matrice d'ordre k de $\underline{A}$ obtenue en supprimant dans $\underline{A}$ les lignes et les colonnes d'indice $>k$, Δ_{ij} le déterminant de la matrice d'ordre k+1 obtenue en <u>bordant</u> $\underline{B}$ par la ligne d'indice k+i et la colonne d'indice k+j de $\underline{A}$; si C désigne la matrice (Δ_{ij}) d'ordre n , démontrer l'identité

$$\det \underline{C}=(\det \underline{A})(\det \underline{B})^{n-1}$$

(montrer que c'est l'extension d'ordre k du développement total d'un déterminant) .

Enoncer les identités obtenues par extension du développement de Laplace (§ 4,exerc.9), et de l'identité de l'exerc.2 §4 .

12) Soit $\underline{X}=(\xi_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n sur un corps commutatif K , H une partie de p éléments de $[1,n]$, H' le complémentaire de H par rapport à $[1,n]$; on suppose que pour tout couple d'indices $h\in H$, $k\in H'$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{ih}\xi_{ik} = 0 .$$

Montrer que, quelles que soient les parties L,M de p éléments de $[1,n]$, on a

$$\delta_{M,M'} X_{L,H} X_{M',H'} - \delta_{L,L'} X_{M,H} X_{L',H'} = 0 .$$

(Considérer les colonnes x_h d'indice $h \in H$ comme des vecteurs de $E=K^n$, les colonnes x'_k d'indice $k \in H'$ comme des vecteurs de E^* ; en se bornant au cas où $\underline{X}$ est inversible, montrer que la (n-p)-forme $x'_{H'}$ est proportionnelle à $\varphi(x_H)$).

13) Soient Γ et Δ deux déterminants d'ordre n sur un corps commutatif , Γ_{ij} le déterminant obtenu en remplaçant dans Γ la colonne d'indice i par la colonne d'indice j de Δ . Montrer que l'on a

$$\det(\Gamma_{ij}) = \Gamma^{n-1}\Delta$$

(développer Γ_{ij} suivant la colonne d'indice i , et utiliser l'ex.9).

14) Soit E un module <u>quelconque</u> sur un anneau commutatif A, f et g deux formes multilinéaires sur E , de degrés respectifs p et q . On désigne par fg la forme multilinéaire de degré p+q

$$(x_1,..,x_{p+q}) \longrightarrow f(x_1,..,x_p)g(x_{p+1},..,x_{p+q})$$

Montrer que si $\underline{a}g=0$, on a $\underline{a}(fg)=0$ (remarquer que, si H désigne la partie $[p+1,p+q]$ de l'ensemble $[1,p+q]$, on a $\underline{a}_H(fg)=f.\,\underline{a}g$ (cf. § 3, exerc.)).

En déduire que, si $f=\underline{a}f_1$, $g=\underline{a}g_1$ sont les antisymétrisées de deux formes f_1,g_1 de degrés respectifs p et q , la forme $\underline{a}(f_1g_1)$ de degré p+q ne dépend que de f et g , et non des formes f_1,g_1 dont f et g sont les antisymétrisées ; si on désigne cette forme par la notation $f\wedge g$, montrer qu'on a $g\wedge f=(-1)^{pq}f\wedge g$, et $(f\wedge g)\wedge h = f\wedge(g\wedge h)$, quelle que soit la forme antisymétrisée h .
