

COTE : BKI 02-2.6

1

LIVRE II  
ALGEBRE  
CHAPITRE II  
ESPACES VECTORIELS

Rédaction n° 037

Nombre de pages : 75

Nombre de feuilles : 75

Université Henri Poincaré - Nancy I  
INSTITUT ÉLIE CARTAN - UMR 7502  
Bibliothèque de mathématiques  
B.P. 239  
54506 Vandoeuvre-Lès-Nancy

Algèbre Chapitre II.

Espaces Vectoriels

Etat 4 bis

37

LIVRE II

ALGÈBRE

CHAPITRE II

ESPACES VECTORIELS (Contre-rédaction CHEVALLEY)

Table des matières

A 37 W end 2  
Etat 4 bis

I. GROUPES ABÉLIENS A OPÉRATEURS.

- n° 1. Sommes de sous-groupes.
- n° 2. Anneaux associés à un groupe à opérateurs.

II. ESPACES VECTORIELS.

- n° 1. Définition. Exemples.
- n° 2. Indépendance linéaire. Bases.
- n° 3. Prolongements d'applications linéaires.
- n° 4. Formes linéaires. Equations d'un sous-espace.
- n° 5. Problèmes linéaires.
- n° 6. Espaces vectoriels de dimensions finies.
- n° 7. L'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel.
- n° 8. Résolution effective des systèmes d'équations linéaires.

III. DUALITÉ ENTRE ESPACES VECTORIELS.

- n° 1. Espaces d'applications linéaires.
- n° 2. Dualité entre espaces vectoriels.
- n° 3. Application aux équations linéaires.
- n° 4. Applications linéaires duales.

IV. MATRICES.

- n° 1. Définitions.
- n° 2. Emploi des matrices pour représenter les applications linéaires.
- n° 3. Multiplication des matrices.
- n° 4. Emploi des matrices pour représenter les formes bilinéaires.
- n° 5. Changements de base.

V. CHANGEMENT DU CORPS DE BASE.

- n° 1. Restriction du corps de base.
  - n° 2. Extension du corps de base.
-

§ 1. GROUPES ABELIENS A OPERATEURS.

On a déjà défini d'une manière générale la notion de groupe à opérateurs (Alg. I, § 6, n° 9). Nous nous proposons ici de considérer plus spécialement le cas des groupes à opérateurs qui sont abéliens. La loi de composition interne d'un pareil groupe sera systématiquement notée additivement.

Il est clair que les sous-groupes (stables), les groupes quotients (par des sous-groupes stables) et les produits de groupes abéliens à opérateurs sont des groupes abéliens à opérateurs.

Sommes de sous-groupes.

Soit  $G$  un groupe abélien additif. Correspondant à l'addition dans  $G$  nous avons une loi de composition (aussi notée additivement) dans l'ensemble des parties de  $G$  (cf. Alg., I, n° 1) : si  $X$  et  $Y$  sont des parties de  $G$ ,  $X+Y$  est l'ensemble des éléments de la forme  $x+y$ , où  $x \in X$ ,  $y \in Y$ . L'addition ainsi définie dans  $\mathcal{P}(G)$  est commutative et associative. Il en résulte que l'on peut définir la somme d'une famille finie de parties de  $G$  (Alg., I, § 1, n° 5). On vérifie immédiatement que, si  $(X_\nu)_{\nu \in I}$  est une famille finie de parties de  $G$ ,  $\sum_{\nu \in I} X_\nu$  est l'ensemble des éléments de la forme  $\sum_{\nu \in I} x_\nu$ , où  $x_\nu \in X_\nu$  pour tout  $\nu \in I$ .

Proposition 1. Soit  $G$  un groupe abélien à opérateurs, et soit  $(H_\nu)_{\nu \in I}$  une famille finie de sous-groupes stables de  $G$ . La somme  $\sum_{\nu \in I} H_\nu$  est alors un sous-groupe stable de  $G$ .

Soit  $H$  la somme en question. Il résulte immédiatement de la formule  $-(\sum_{\nu \in I} x_\nu) = \sum_{\nu \in I} (-x_\nu)$  que  $-H = \sum_{\nu \in I} (-H_\nu)$ . Chaque  $H_\nu$  étant un sous-groupe, on a  $-H_\nu = H_\nu$ , d'où  $-H = H$ . D'autre part, on a  $H + H = \sum_{\nu \in I} H_\nu + \sum_{\nu \in I} H_\nu = \sum_{\nu \in I} (H_\nu + H_\nu) = \sum_{\nu \in I} H_\nu = H$ , car,

$H_\nu$  étant un sous-groupe, on a  $H_\nu + H_\nu = H_\nu$ . Les formules  $-H = H$ ,  $H + H = H$  montrent que  $H$  est un sous-groupe. Soit  $\alpha$  un opérateur quelconque de  $G$ ; la formule  $\alpha(\sum_{\nu \in I} x_\nu) = \sum_{\nu \in I} (\alpha x_\nu)$  montre que  $\alpha H \subset H$ , donc que  $H$  est stable.

Si  $(H_\nu)_{\nu \in I}$  est une famille finie de sous-groupes stables de  $G$ , l'application  $(x_\nu)_{\nu \in I} \rightarrow \sum_{\nu \in I} x_\nu$  est évidemment un homomorphisme du groupe à opérateurs  $\prod_{\nu \in I} H_\nu$  sur le groupe à opérateurs  $\sum_{\nu \in I} H_\nu$ . Cet homomorphisme est un isomorphisme si et seulement si la somme des groupes  $H_\nu$  est directe.

Proposition 2. Soit  $G$  un groupe abélien à opérateurs. Supposons que  $G$  soit la somme d'une famille finie  $(H_\nu)_{\nu \in I}$  de sous-groupes stables qui soient tous simples. Dans ces conditions,  $G$  est semi-simple et il existe une partie finie  $J$  de  $I$  telle que  $G$  soit la somme directe de la famille  $(H_\nu)_{\nu \in J}$ .

Choisissons un ensemble minimal  $J$  dans la famille  $\mathcal{K}$  des parties  $K$  de  $I$  telles que  $\sum_{\nu \in K} H_\nu = G$  (i.e.  $J$  est l'un des ensembles de ayant le moins d'éléments). Nous allons démontrer que la somme

$\sum_{\nu \in J} H_\nu$  est directe (d'où il résultera immédiatement que  $G$  est semi-simple). Supposons que  $\sum_{\nu \in J} x_\nu = 0$ , où  $x_\nu \in H_\nu$  pour tout

$\nu \in J$ . Soit  $\nu$  un élément quelconque de  $J$ , et soit  $J'$  l'ensemble des éléments de  $J$  autres que  $\nu$ ; posons  $H' = \sum_{\nu \in J'} H_\nu$ . On a

$$-x_\nu = \sum_{\nu \in J'} x_\nu \in H_\nu \cap H'$$

Or  $H_\nu \cap H'$  est un sous-groupe stable de  $H_\nu$ ;  $H_\nu$  étant simple, on a ou bien  $H_\nu \cap H' = \{0\}$  ou bien  $H_\nu \cap H' = H_\nu$ . L'hypothèse  $H_\nu \cap H' = H_\nu$  entraînerait  $H_\nu \subset H'$ , d'où  $G = H_\nu + H' \subset H' + H' = H'$ , ce qui est impossible en vertu de notre choix de  $J$ . Donc  $H_\nu \cap H' = \{0\}$ , d'où  $x_\nu = 0$ , ce qui démontre notre assertion.

(Ajouter une proposition 2 bis: critère de semi-simplicité par modules supplémentaires).

Anneaux associés à un groupe à opérateurs.

Soit  $G$  un groupe abélien à opérateurs, et soit  $\tilde{G}$  le groupe abélien sous-jacent de  $G$  (la structure de  $\tilde{G}$  s'obtient donc à partir de celle de  $G$  en faisant omission de la loi de composition externe de  $G$  avec le domaine d'opérateurs, ou des lois de composition externes s'il y a plusieurs domaines d'opérateurs). Les endomorphismes de  $\tilde{G}$  forment un anneau  $\mathcal{O}$  (Alg., I, § 8, n° 1). A tout opérateur  $\alpha$  de  $G$  se trouve attaché un élément  $h_\alpha \in \mathcal{O}$  défini par  $h_\alpha(x) = \alpha x$  (pour tout  $x \in \tilde{G}$ ). Nous allons considérer l'anneau engendré par les éléments  $h_\alpha$ .

Définition 1. Soit  $G$  un groupe abélien à opérateurs, et soit  $\tilde{G}$  le groupe abélien sous-jacent de  $G$ . Soit  $\mathcal{O}$  l'anneau engendré par ceux des endomorphismes de  $\tilde{G}$  qui sont produits par les opérateurs de  $G$ . L'anneau  $\mathcal{O}$  s'appelle l'anneau opérationnel de  $G$ .

L'importance de l'anneau opérationnel provient du fait suivant :

Proposition 3. Soit  $\mathcal{O}$  l'anneau opérationnel d'un groupe abélien à opérateurs  $G$  et soit  $\tilde{G}$  le groupe abélien sous-jacent de  $G$ . Définissons une loi de composition externe  $(h, x) \rightarrow hx$  entre  $\mathcal{O}$  et  $\tilde{G}$  par la formule  $hx = h(x)$ . Nous obtenons ainsi un groupe abélien à opérateurs  $G_1$  dont  $\tilde{G}$  est le groupe sous-jacent et dont le domaine d'opérateurs est  $\mathcal{O}$ . Ceci dit, les sous-groupes stables de  $G_1$  sont les mêmes que ceux de  $G$ .

Il est évident que tout sous-groupe stable de  $G_1$  est aussi stable dans  $G$ . Soit réciproquement  $H$  un sous-groupe stable de  $G$ . On vérifie tout de suite que l'ensemble  $\mathcal{O}_1$  des endomorphismes  $h$  de  $G$  tels que  $h(H) \subset H$  est un sous-anneau de l'anneau des endomorphismes de  $G$ . Puisque  $H$  est stable dans  $G$ , l'anneau  $\mathcal{O}_1$  contient les endomorphismes produits par les opérateurs de  $G$ . Etant un anneau, il contient aussi l'anneau opérationnel de  $G$ , ce qui montre que  $H$  est stable dans  $G$ .

La loi de composition externe entre éléments de  $\mathcal{O}$  et éléments de

La loi de composition externe entre éléments de  $\mathcal{O}$  et éléments de  $G_1$  possède évidemment les propriétés suivantes :

1) Si  $h \in \mathcal{O}$ , l'application  $x \rightarrow hx$  (où  $x \in G_1$ ) est un endomorphisme du groupe abélien sous-jacent de  $G_1$  ;

2) Si  $h$  et  $h'$  sont dans  $\mathcal{O}$  et  $x$  dans  $G_1$ , on a  $(h+h')x = hx + h'x$ ,  $(hh')x = h(h'x)$ .

Définition 2. Soit  $G_1$  un groupe abélien à opérateurs dont le domaine d'opérateurs est un anneau  $\mathcal{O}$ . Supposons que la loi de composition externe entre éléments de  $\mathcal{O}$  et de  $G_1$  satisfasse aux conditions 1), 2) ci-dessus. On dit alors que  $G_1$  est un module sur l'anneau  $\mathcal{O}$ .

La proposition 3 montre qu'en ce qui concerne la recherche des sous-groupes stables d'un groupe à opérateurs  $G$ , on peut remplacer  $G$  par un module sur un anneau convenable (en fait, sur l'anneau opérationnel de  $G$ )

Il importe de remarquer à ce propos que les parties stables de  $G$  qui ne sont pas des sous-groupes ne sont plus nécessairement stables dans  $G_1$ .

Il existe un autre anneau qui joue un rôle important dans la théorie d'un groupe abélien à opérateurs  $G$  ; c'est l'anneau des endomorphismes de  $G$ , que nous allons maintenant définir.

Définition 3. Par un endomorphisme d'un groupe abélien à opérateurs  $G$  on entend une application  $\varphi$  de  $G$  dans lui-même telle que  $\varphi(g+h) = \varphi(g) + \varphi(h)$ ,  $\varphi(\alpha g) = \alpha \varphi(g)$  (où  $g, h$  des éléments quelconques de  $G$ , tandis que  $\alpha$  est un opérateur quelconque de  $G$ ).

On voit donc que tout endomorphisme de  $G$  est aussi un endomorphisme du groupe abélien sous-jacent de  $G$ . La réciproque n'est pas vraie en général, mais on peut caractériser les endomorphismes de  $G$  dans l'anneau des endomorphismes du groupe abélien sous-jacent de  $G$  au moyen de la proposition suivante :

Proposition 4. Soit  $G$  un groupe abélien à opérateurs, et soit  $\sigma$  l'anneau opérationnel de  $G$ . Soit  $\tilde{G}$  le groupe abélien sous-jacent de  $G$ . Les endomorphismes de  $G$  sont ceux des endomorphismes de  $G$  qui commutent avec tous les éléments de  $\sigma$ .

Soit  $\varphi$  un endomorphisme de  $G$  et soit  $\alpha$  un opérateur de  $G$ . A l'opérateur  $\alpha$  faisons correspondre un endomorphisme  $h_\alpha$  de  $\tilde{G}$  par la formule  $h_\alpha(x) = \alpha x$ , pour tout  $x \in G$ . On a donc  $(\varphi h_\alpha)(x) = \varphi(h_\alpha(x)) = \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x) = h_\alpha(\varphi(x)) = (h_\alpha \varphi)(x)$ , d'où  $\varphi h_\alpha = h_\alpha \varphi$ .

Or les éléments de la forme  $h_\alpha$  engendrent  $\sigma$ ; il en résulte que  $\varphi$  commute avec tout élément de  $\sigma$  (Alg., I, § 8, n° 4, prop. 2). Soit réciproquement  $\psi$  un endomorphisme de  $G$  qui commute avec tout élément de  $\sigma$ . On a donc en particulier  $\psi h_\alpha = h_\alpha \psi$ , d'où  $\psi(\alpha x) = \psi(h_\alpha(x)) = (\psi h_\alpha)(x) = (h_\alpha \psi)(x) = h_\alpha(\psi(x)) = \alpha \psi(x)$ , ce qui montre que  $\psi$  est un endomorphisme de  $G$ .

Remarque. Il résulte de la démonstration que les endomorphismes de  $G$  peuvent aussi être caractérisés comme étant ceux des endomorphismes de  $\tilde{G}$  qui commutent avec les endomorphismes produits par les opérateurs de  $G$ .

Corollaire. Les endomorphismes d'un groupe abélien à opérateurs  $G$  forment un anneau.

Cela résulte immédiatement de la proposition précédente et de la proposition 2, Alg., I, § 8, n° 4.

On observera qu'il n'est pas vrai en général que l'anneau opérationnel d'un groupe abélien à opérateurs  $G$  contienne tous les endomorphismes du groupe abélien sous-jacent qui commutent avec les éléments de l'anneau des endomorphismes. Néanmoins, il en est ainsi dans certains cas importants que nous examinerons plus tard.

Pour conclure, démontrons la proposition suivante, qui joue un rôle de premier plan, dans la théorie des groupes abéliens à opérateurs simples ou semi-simples :

Proposition 5. Soit  $G$  un groupe abélien à opérateurs simple.  
L'anneau des endomorphismes de  $G$  est alors un corps.

Soit en effet  $\varphi$  un endomorphisme  $\neq 0$  de  $G$ . Les ensembles  $\varphi^{-1}(0)$ ,  $\varphi(G)$  sont des sous-groupes stables de  $G$  (Alg.1, §6, n°12, Théorème 5). Puisque  $\varphi \neq 0$ , on a  $\varphi^{-1}(0) \neq G$ ,  $\varphi(G) \neq \{0\}$ . Puisque  $G$  est simple, il résulte de là que  $\varphi^{-1}(0) = \{0\}$ ,  $\varphi(G) = G$ . L'opération  $\varphi$  est donc un automorphisme de la structure de groupe à opérateurs de  $G$  (Ens., R., §8). Il en résulte que  $\varphi$  admet une application réciproque  $\varphi^{-1}$  qui est aussi un automorphisme de  $G$ . Les éléments  $\varphi^{-1}\varphi$  et  $\varphi\varphi^{-1}$  sont tous deux égaux à l'élément unité de l'anneau des endomorphismes du groupe abélien sous-jacent de  $G$ , ce qui montre que  $\varphi$  admet un inverse dans l'anneau des endomorphismes de  $G$ .



§ 2. ESPACES VECTORIELS.

1. DEFINITION. EXEMPLES.

Nous avons défini au § 1 la notion de module sur un anneau. Nous allons maintenant considérer le cas où l'anneau est un corps.

Définition 1. On appelle espace vectoriel sur un corps K un module V sur l'anneau K qui possède la propriété suivante : e étant l'élément unité de K , on a  $ex = x$  pour tout  $x \in V$  . Le corps K s'appelle le corps de base de l'espace vectoriel V .

Exemples. 1) Soit L un corps dont K est un sous-corps. L'ensemble L est porteur d'une structure de groupe additif ; la restriction à  $K \times L$  de la multiplication dans L (considérée comme application de  $L \times L$  dans L ) donne une loi de composition externe entre éléments de K et de L . On vérifie tout de suite que L devient ainsi un espace vectoriel sur K .

2) Soit E un ensemble quelconque, et soit K un corps. Puisque K est un groupe additif, l'ensemble  $K^E$  des applications de E dans K se trouve muni d'une structure de groupe additif (Alg. I, § 6, n° 5). Soient f un élément de  $K^E$  et a un élément de K ; définissons af comme étant l'application  $u \rightarrow af(u)$  de E dans K (où  $u \in E$ ). On vérifie tout de suite que l'application  $f \rightarrow af$  est un endomorphisme du groupe additif  $K^E$  . On obtient donc ainsi une loi de composition externe entre éléments de K et de  $K^E$  qui définit  $K^E$  comme groupe abélien à opérateurs, le domaine d'opérateurs étant K . On vérifie aisément d'abord que  $K^E$  est un module sur K , puis que c'est un espace vectoriel sur K . Lorsque E est l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  , où n est un entier  $> 0$  ,  $K^E$  n'est autre que le produit  $K^n$  de n ensembles identiques à K ; nous avons donc défini sur  $K^n$  une structure d'espace vectoriel sur K . On a

$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ ,  $a(x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n)$   
 (où  $a, x_1, \dots, x_n$  sont des éléments de  $K$ ). Nous conviendrons de désigner par  $K^0$  l'espace vectoriel sur  $K$  qui se réduit à son élément nul.

Définition 2. Soit  $V$  un espace vectoriel sur un corps  $K$ . On appelle sous-espace vectoriel (ou simplement sous-espace) de  $V$  un sous-groupe stable du groupe additif de  $V$  ( $V$  étant considéré comme groupe abélien à opérateurs, avec  $K$  comme domaine d'opérateurs).

Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $V$ . On vérifie tout de suite les faits suivants : a) la structure induite sur  $W$  par la structure de groupe à opérateurs de  $V$  est une structure d'espace vectoriel sur  $K$  ; b) la structure de groupe à opérateurs de  $V/W$  est une structure d'espace vectoriel sur  $K$ . On dit que  $V/W$  est l'espace vectoriel quotient de  $V$  par  $W$ .

Définition 3. Soient  $V$  et  $W$  des espaces vectoriels sur un corps  $K$ . On appelle application linéaire de  $V$  dans  $W$  un homomorphisme de la structure de  $V$  comme groupe à opérateurs (avec  $K$  comme domaine d'opérateurs) dans celle de  $W$ .

Une application linéaire de  $V$  dans  $W$  est donc une application  $\varphi$  de  $V$  dans  $W$  qui satisfait les conditions suivantes :  $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ ,  $\varphi(ax) = a \cdot \varphi(x)$  (où  $x, y$  sont des éléments de  $V$  et  $a \in K$ ).

Soit  $(V_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces vectoriels sur le corps  $K$ . Le produit  $\prod_{i \in I} V_i$  se trouve muni d'une structure de groupe abélien à opérateurs, avec  $K$  comme domaine d'opérateurs. On vérifie aisément que cette structure est une structure d'espace vectoriel sur  $K$ . L'espace vectoriel obtenu de cette manière est appelé le produit des espaces vectoriels  $V_i$ . La projection de  $\prod_{i \in I} V_i$  sur  $V_i$  est une application linéaire de  $\prod_{i \in I} V_i$  sur  $V_i$ .

2. INDEPENDANCE LINEAIRE. BASES.

Soit  $V$  un espace vectoriel sur un corps  $K$ , et soit  $x$  un élément de  $V$ . L'application  $a \rightarrow ax (a \in K)$  est, comme on le voit tout de suite, une application linéaire dans  $V$  de la structure de  $K$  comme espace vectoriel sur  $K$ . L'image de  $K$  donnée par cette application est donc un sous-espace vectoriel de  $V$ , qu'on désigne par  $Kx$ . Si  $x \neq 0$ , l'application  $a \rightarrow ax$  est un isomorphisme, comme il résulte immédiatement de la proposition suivante :

Proposition 1. Soit  $V$  un espace vectoriel sur un corps  $K$ , et soit  $a$  un élément  $\neq 0$  de  $K$ . Si  $x \in V$ , l'égalité  $ax = 0$  entraîne  $x = 0$ .

Soit en effet  $e$  l'élément unité de  $K$ . On a  $x = ex = (a^{-1}a)x = a^{-1}(ax) = 0$ , ce qui démontre la proposition 1.

Soit maintenant  $(x_\nu)_{\nu \in I}$  une famille d'éléments d'un espace vectoriel  $V$  sur un corps  $K$ . Nous allons définir la notion de combinaison linéaire d'éléments de cette famille. Nous dirons qu'une application  $\nu \rightarrow a(\nu)$  de  $I$  dans  $K$  est nulle à l'infini s'il existe une partie finie  $J$  de  $I$  telle que  $a(\nu) = 0$  pour tout  $\nu$  n'appartenant pas à  $J$ . Supposons cette condition satisfaite ; si  $J$  et  $J'$  sont deux parties finies de  $I$  telles que  $a(\nu) = 0$  pour tout  $\nu$  qui ou bien n'est pas dans  $J$  ou bien n'est pas dans  $J'$ , on a évidemment  $\sum_{\nu \in J} a(\nu)x_\nu = \sum_{\nu \in J'} a(\nu)x_\nu$ . Nous définirons  $\sum_{\nu \in I} a(\nu)x_\nu$  comme étant la valeur commune de tous les éléments  $\sum_{\nu \in J} a(\nu)x_\nu$  relatifs aux parties finies  $J$  de  $I$  telles que  $a(\nu) = 0$  pour tout  $\nu \notin J$ .

Définition 4. Soit  $(x_\nu)_{\nu \in I}$  une famille d'éléments d'un espace vectoriel  $V$  sur un corps  $K$ . Nous dirons qu'un élément  $x$  de  $V$  est une combinaison linéaire des éléments  $x_\nu$  s'il existe une application  $\nu \rightarrow a(\nu)$  de  $I$  dans  $K$ , nulle à l'infini, telle que

$x = \sum_{\iota \in I} a(\iota) x_\iota$ . Représenter  $x$  comme combinaison linéaire des  $x_\iota$ , c'est trouver une application  $\iota \rightarrow a(\iota)$  qui donne lieu à la formule précédente ; les éléments  $a(\iota)$  sont appelés les coefficients de la représentation en question.

On vérifie tout de suite que les applications nulles à l'infini de  $I$  dans  $K$  forment un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $K^I$  de toutes les applications de  $I$  dans  $K$ .

Désignons ce sous-espace par  $(K^I)_f$ . Soit  $(x_\iota)_{\iota \in I}$  une famille d'éléments d'un espace vectoriel  $V$  sur  $K$  ; on vérifie facilement que l'application  $\varphi$  de  $(K^I)_f$  dans  $V$  définie par  $\varphi(a) = \sum_{\iota \in I} a(\iota) x_\iota$  est une application linéaire. Donc  $\varphi((K^I)_f)$  est un sous-espace de  $V$ , (cf. Alg. I, § 6, n° 12, Théorème 5). Si  $\iota$  est un élément quelconque de  $I$ , l'application de  $I$  dans  $K$  qui fait correspondre à  $\iota$  l'élément unité de  $K$  et à tout autre élément de  $I$  l'élément 0 de  $K$  est dans  $(K^I)_f$  ; l'image de cette application par  $\varphi$  est l'élément  $x_\iota$ , d'où il résulte que tous les  $x_\iota$  appartiennent à  $\varphi((K^I)_f)$ . Réciproquement, il est clair que tout sous-espace vectoriel de  $V$  qui contient les  $x_\iota$  contient aussi toutes les combinaisons linéaires des  $x_\iota$ . Il en résulte que  $\varphi((K^I)_f)$  est le sous-espace engendré par les éléments  $x_\iota$ .

Nous avons donc démontré la

Proposition 2. Soit  $(x_\iota)_{\iota \in I}$  une famille d'éléments d'un espace vectoriel  $V$ . Le sous-espace de  $V$  engendré par les éléments de cette famille coïncide avec l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de cette famille.

Définition 5. Soit  $(x_\iota)_{\iota \in I}$  une famille d'éléments d'un espace vectoriel  $V$  sur un corps  $K$ . On appelle relation linéaire entre les éléments  $x_\iota$  toute formule vraie de la forme  $\sum_{\iota \in I} a(\iota) x_\iota = 0$  (où  $\iota \rightarrow a(\iota)$  est une application de  $I$  dans  $K$ , nulle à l'infini).

Une relation linéaire entre les  $x_\nu$  est donc une représentation de 0 comme combinaison linéaire des  $x_\nu$  ; les coefficients de cette représentation s'appellent les coefficients de la relation linéaire.

La relation linéaire dont tous les coefficients sont nuls est appelée la relation triviale.

Utilisant les mêmes notations que plus haut, on voit que les éléments  $a$  de  $(K^I)_F$  tels que  $\sum_{\nu \in I} a(\nu)x_\nu = 0$  sont les éléments du sous-espace vectoriel  $\phi^{-1}(0)$  de  $(K^I)_F$  (cf. Alg. I, §6, n° 12, Théorème 5). Ce sous-espace s'appelle (par abus de langage) l'espace des relations linéaires entre les  $x_\nu$ .

Définition 6. On dit que les éléments d'une famille  $(x_\nu)_{\nu \in I}$  d'éléments d'un espace vectoriel  $V$  sont linéairement indépendants s'ils ne sont liés par aucune autre relation linéaire que la relation triviale ; on dit alors aussi que la famille  $(x_\nu)_{\nu \in I}$  est libre.

Par exemple, si  $i \rightarrow \alpha_i$  est une application dans un ensemble  $A$  de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  (où  $n$  est un entier  $> 0$ ), et si  $\alpha \rightarrow x_\alpha$  est une application de  $A$  dans un espace vectoriel, on dit que les éléments  $x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}$  sont linéairement indépendants si la famille définie par l'application  $i \rightarrow x_{\alpha_i}$  de  $\{1, \dots, n\}$  dans l'espace vectoriel en question est libre, c'est-à-dire si le seul élément  $(a_1, \dots, a_n)$  de  $K^n$  (où  $K$  est le corps sur lequel  $V$  est un espace vectoriel) tel que  $\sum_{i=1}^n a_i x_{\alpha_i} = 0$  est l'élément  $(0, \dots, 0)$ .

Définition 7. Soit  $E$  un sous-ensemble d'un espace vectoriel  $V$ , et soit  $F$  la famille définie par l'application identique de  $E$  dans  $V$ . On dit qu'un élément de  $V$  est une combinaison linéaire d'éléments de  $E$  s'il est une combinaison linéaire d'éléments de  $F$ . On appelle relation linéaire entre éléments de  $E$  une relation linéaire entre éléments de  $F$  relation linéaire triviale entre éléments de  $E$  la relation linéaire

la relation linéaire triviale entre éléments de F . On dit que E est libre si F est libre ; on dit alors aussi que les éléments de E sont linéairement indépendants.

Soit  $F = (x_\nu)_{\nu \in I}$  une famille d'éléments d'un espace vectoriel V sur un corps K ; soit I' un ensemble qui admette une application bi-univoque  $\bar{w}$  sur l'ensemble I , et soit F' la famille  $(x_{\bar{w}(\nu')})_{\nu' \in I'}$  . Il est clair que les familles F et F' sont ou ne sont pas libres en même temps. Il en résulte que, si l'ensemble E des éléments de F est libre et si l'application de I dans V qui définit F est bi-univoque, on peut affirmer que F est libre. Par contre, si l'application  $\nu \rightarrow x_\nu$  n'est pas bi-univoque, il peut fort bien arriver que E soit libre sans que F le soit. Prenons par exemple  $I = \{1, 2\}$  ,  $x_1 = x_2 = x$  , où x est un élément  $\neq 0$  de K . L'ensemble  $E = \{x\}$  est alors libre (en vertu de la proposition 1), tandis que la famille F n'est pas libre, puisqu'on a la relation non triviale  $ex_1 = ex_2 = 0$  , où e est l'élément unité de K . Quand on parle d'éléments linéairement indépendants, il faut donc préciser (toutes les fois que le contexte ne l'indique pas suffisamment) si on parle d'une famille d'éléments ou d'un ensemble d'éléments.

Proposition 3. Soit E un sous-ensemble d'un espace vectoriel. Pour que E soit libre, il est nécessaire et suffisant que toutes les parties finies de E soient libres.

Supposons E libre et soit E' une partie de E . Soit  $\sum_{x \in E'} a'(x)x = 0$  une relation linéaire entre éléments de E' ; a' est donc une application nulle à l'infini de E' dans le corps K de base de notre espace vectoriel. On peut prolonger a' par une application a de E dans K qui applique sur 0 tout élément de E non contenu dans E' . On a alors

$\sum_{x \in E} a(x)x = 0$  , d'où  $a(x) = 0$  pour tout  $x \in E$  , puisque E est libre. Il en résulte que  $a'(x) = 0$  pour tout  $x \in E'$  , donc que E' est libre.

Supposons maintenant que toutes les parties finies de  $E$  soient libres. Soit  $\sum_{x \in E} a(x)x = 0$  une relation linéaire entre éléments de  $E$ . Il existe une partie finie  $E_0$  de  $E$  telle que  $a(x) = 0$  pour  $x \notin E_0$ . On a donc  $\sum_{x \in E_0} a(x)x = 0$ , d'où  $a(x) = 0$  pour tout  $x \in E_0$  puisque  $E_0$  est libre. On en conclut que  $a(x) = 0$  pour tout  $x \in E$ , donc que  $E$  est libre.

Il résulte de la proposition 3 que la propriété pour un sous-ensemble d'un espace vectoriel  $V$  d'être libre est une propriété de caractère fini (cf. Ens. R., § 6, n° 8). Donc, tout ensemble non vide de sous-ensembles libres de  $V$  possède au moins un élément maximal.

Définition 8. Un sous-ensemble libre maximal d'un espace vectoriel  $V$  est appelé une base de  $V$ .

Proposition 4. Soit  $B$  un sous-ensemble libre d'un espace vectoriel  $V$  qui soit aussi un ensemble de générateurs de  $V$  (i.e.  $V$  est engendré par les éléments de  $B$ ). L'ensemble  $B$  est alors une base de  $V$ .

Soit  $x$  un élément de  $V$  non contenu dans  $B$ . Puisque  $B$  engendre  $V$ , on peut représenter  $x$  comme combinaison linéaire d'éléments de  $B$  :  $x = \sum_{b \in B} a(b)b$ . Soit  $e$  l'élément unité du corps sur lequel  $V$  est espace vectoriel ; on a donc  $\sum_{b \in B} a(b)b + (-e)x = 0$ , et, puisque  $x \notin B$ , cette formule est une relation linéaire non triviale entre éléments de  $B \cup \{x\}$ . On voit donc que  $B \cup \{x\}$  n'est pas libre.

Il résulte alors immédiatement de la proposition 3 que  $B$  est maximal dans l'ensemble des parties libres de  $V$ , ce qui démontre la prop. 4.

Théorème 1. Soit  $E$  un sous-ensemble d'un espace vectoriel  $V$  et soit  $W$  le sous-espace de  $V$  engendré par les éléments de  $E$ . L'ensemble  $E$  contient une base  $B$  de  $W$ . Tout élément de  $W$  peut se représenter d'une manière unique comme combinaison linéaire d'éléments de  $B$ . Il existe une base de l'espace  $V$  qui contient  $B$  comme sous-ensemble.

Soit  $B$  un élément maximal de l'ensemble des sous-ensembles libres qui sont contenus dans  $E$ , et soit  $W_1$  le sous-espace engendré par les éléments de  $B$ . Si  $x$  est un élément de  $E$  non contenu dans  $B$ , l'ensemble  $B \cup \{x\}$  n'est pas libre; il existe donc une relation linéaire non triviale de la forme  $ax + \sum_{b \in B} a(b)b = 0$ , où  $a$  et les  $a(b)$  sont des éléments du corps de base  $K$  de  $V$ . Si on avait  $a = 0$ , on aurait  $a(b) \neq 0$  pour au moins un  $b \in B$ , et il existerait une relation linéaire non triviale  $\sum_{b \in B} a(b)b = 0$  entre éléments de  $B$ , ce qui ne se peut pas. Donc  $a \neq 0$  et on a  $x = \sum_{b \in B} (-a^{-1}a(b))b$ , d'où  $x \in W_1$ . On a donc  $E \subset W_1$ , d'où  $W \subset W_1$  et par suite  $W = W_1$ . Il résulte alors de la proposition 4 que  $B$  est une base de  $W$ . Si  $\sum_{b \in B} a(b)b = \sum_{b \in B} a'(b)b$  sont des représentations d'un même élément de  $W$  comme combinaisons linéaires d'éléments de  $B$ , on a  $0 = \sum_{b \in B} (a'(b) - a(b))b$ , d'où  $a'(b) = a(b)$  pour tout  $b \in B$ , ce qui montre qu'un élément de  $W$  ne peut se représenter que d'une seule manière comme combinaison linéaire d'éléments de  $B$ . Soit enfin  $C$  un élément maximal de l'ensemble des parties libres de  $V$  qui contiennent  $B$ ;  $C$  est alors une base de  $V$  contenant  $B$ .

Corollaire. Toute partie libre d'un espace vectoriel  $V$  est contenue dans une base de  $V$ .

Soit en effet  $E$  une partie libre de  $V$ . Il résulte alors de la proposition 4 que  $E$  est la base du sous-espace engendré par les éléments de  $E$ ; on en conclut au moyen du théorème 1 que  $E$  est contenu dans une base de  $V$ .

Proposition 5. Soit  $U$  un sous-espace d'un espace vectoriel  $V$  et soit  $f$  l'homomorphisme canonique de  $V$  sur  $V/U$ . Soit  $E$  une partie de  $V$  telle que la famille d'éléments de  $V/U$  définie par la restriction de  $f$  à  $E$



soit libre dans  $V/U$  , et soit  $A$  une partie libre de  $U$  . On peut alors affirmer que  $A \cap E$  est vide et que l'ensemble  $A \cup E$  est libre.

De plus, il existe un sous-espace  $W$  de  $V$  contenant  $E$  et tel que  $V$  ~~soit la somme directe de  $U$  et de  $W$~~  soit la somme directe de  $U$  et de  $W$  .

Il est clair que si  $(y_\nu)_{\nu \in I}$  est une famille libre dans un espace vectoriel, on a  $y_\nu \neq 0$  pour tout  $\nu \in I$  . Se souvenant que  $f$  applique sur  $0$  tout élément de  $A$  , on voit que  $A \cap E = \emptyset$  . Soit maintenant

$$\sum_{a \in A} \alpha(a)a + \sum_{x \in E} \xi(x)x = 0 \text{ une relation linéaire entre éléments}$$

de l'ensemble  $A \cup E$  . L'application  $f$  étant linéaire, on a

$\sum_{x \in E} \xi(x)f(x) = 0$  , d'où  $\xi(x) = 0$  pour tout  $x \in E$  , puisque la famille  $(f(x))_{x \in E}$  est libre. On a donc  $\sum_{a \in A} \alpha(a)a = 0$  , d'où  $\alpha(a) = 0$  pour tout  $a \in A$  , puisque  $A$  est libre. On voit donc que notre relation linéaire est triviale, donc que  $A \cup E$  est libre.

Supposons maintenant que  $A$  soit une base de  $U$  ; il résulte du corollaire au théorème 1 que l'ensemble  $A \cup E$  est contenu dans une base  $B$  de  $V$  . Soit  $C$  l'ensemble des éléments de  $B$  non contenus dans  $A$  et soit  $W$  l'espace engendré par les éléments de  $C$  . On a  $B \subset U+W$  , d'où  $U+W = V$  . Soit  $x$  un élément de  $U \cap W$  ; on peut donc représenter  $x$  comme combinaison linéaire  $\sum_{a \in A} \alpha(a)a$  d'éléments de  $A$  et aussi comme combinaison linéaire  $\sum_{c \in C} \gamma(c)c$  d'éléments de  $C$  . On a donc  $\sum_{a \in A} \alpha(a)a + \sum_{c \in C} (-\gamma(c))c = 0$  , et ceci est une relation linéaire entre éléments de  $B$  . On a donc  $\alpha(a) = 0$  pour tout  $a \in A$  et  $\gamma(c) = 0$  pour tout  $c \in C$  , d'où  $x = 0$  et  $U \cap W = \{0\}$  . Il en résulte que la somme de  $U$  et de  $W$  est directe (cf. Alg. I, § 6, n° 6, proposition 7).

Corollaire 1. Soit U un sous-espace d'un espace vectoriel V. Il existe alors un sous-espace W de V tel que V soit somme directe de U et de W. Si W est un sous-espace quelconque satisfaisant cette condition, la restriction à W de l'homomorphisme canonique de V sur V/U est un isomorphisme de W avec V/U.

La première assertion résulte immédiatement de la proposition 5 en prenant pour E l'ensemble vide. Soit  $f_1$  la restriction de  $f$  à W ;  $f_1$  est donc un homomorphisme de W dans  $V/U$ . L'ensemble  $f^{-1}(0)$  étant U, on a  $f_1^{-1}(0) = \{0\}$ , ce qui montre que  $f_1$  est un isomorphisme de W dans  $V/U$ . Soit  $\bar{x}$  un élément quelconque de  $V/U$  et soit x un élément de V appartenant à la classe  $\bar{x}$  modulo U. On peut mettre x sous la forme  $u+w$ , avec  $u \in U$  et  $w \in W$ ; on a donc  $f(w) = f(x) = \bar{x}$ , d'où  $f(W) = V/U$ . (Ajouter un corollaire 2 : comment obtenir une base de  $V/U$ ).

Proposition 6. Soit  $(U_\nu)_{\nu \in I}$  une famille finie de sous-espaces d'un espace vectoriel V telle que V soit la somme directe des  $U_\nu$ . Soit, pour chaque  $\nu \in I$ ,  $B_\nu$  une base de  $U_\nu$ . On a alors  $B_\nu \cap B_{\nu'} = \emptyset$  si  $\nu \neq \nu'$ , et la réunion des ensembles  $B_\nu$  est une base de V.

Tout élément de  $B_\nu$  est évidemment  $\neq 0$  et contenu dans  $U_\nu$ . Si  $\nu \neq \nu'$  on a  $U_\nu \cap U_{\nu'} = \{0\}$  (cf. Alg., I, § 6, n° 6), d'où  $B_\nu \cap B_{\nu'} = \emptyset$ . Soit B la réunion des ensembles  $B_\nu$ ; le sous-espace engendré par les éléments de B contient alors chacun des  $B_\nu$ , donc aussi chacun des  $U_\nu$ ; ce sous-espace est donc V. Pour montrer que B est une base de V, il suffit de montrer que B est libre (cf. proposition 4). Une relation linéaire entre éléments de B peut s'écrire  $\sum_{\nu \in I} (\sum_{b_\nu \in B_\nu} a(b_\nu) b_\nu) = 0$ , où, pour chaque  $\nu$ ,  $b_\nu \rightarrow a(b_\nu)$  est une application nulle à l'infini de  $B_\nu$  dans le corps de base de V. Posons  $x_\nu = \sum_{b_\nu \in B_\nu} a(b_\nu) b_\nu$  d'où  $\sum_{\nu \in I} x_\nu = 0$ . On a donc  $x_\nu = 0$  pour tout  $\nu$  (Alg. I, § 6, n° 6, proposition 6). L'ensemble  $B_\nu$  étant libre, on a  $a(b_\nu) = 0$  pour tout  $b_\nu \in B_\nu$ , ce qui démontre notre assertion.

3. PROLONGEMENTS D'APPLICATIONS LINEAIRES.

Proposition 7. Soient  $V$  et  $V'$  des espaces vectoriels sur un corps  $K$ , et soit  $B$  une base de  $V$ . Toute application  $\varphi_0$  de  $B$  dans  $V'$  peut se prolonger d'une manière et d'une seule par une application linéaire  $\varphi$  de  $V$  dans  $V'$ . Si  $\varphi_0(B)$  est un ensemble de générateurs de  $V'$ , on a  $\varphi(V) = V'$ . Si la famille d'éléments de  $V'$  définie par l'application  $\varphi_0$  de  $B$  dans  $V'$  est libre, l'application  $\varphi$  est bi-univoque. Si  $\varphi_0$  applique bi-univoquement  $B$  sur une base de  $V'$ ,  $\varphi$  est un isomorphisme de  $V$  sur  $V'$ .

Soit  $x$  un élément quelconque de  $V$ , et soit  $x = \sum_{b \in B} a(b)b$  la représentation (unique en vertu du théorème <sup>1</sup>/<sub>n°2</sub>) de  $x$  comme combinaison linéaire d'éléments de  $B$ . L'application  $b \rightarrow a(b)$  de  $B$  dans le corps  $K$  étant nulle à l'infini, on peut définir un élément  $\varphi(x)$  de  $V'$  par la formule  $\varphi(x) = \sum_{b \in B} a(b) \varphi_0(b)$ . Si  $x' = \sum_{b \in B} a'(b)b$  est un autre élément de  $V$ , on a  $x - x' = \sum_{b \in B} (a(b) - a'(b))b$ , d'où  $\varphi(x - x') = \varphi(x) - \varphi(x')$ ; on voit de même que  $\varphi(ax) = a \varphi(x)$  pour tout  $a \in K$ . L'application  $\varphi$  est donc linéaire, et on voit tout de suite que  $\varphi$  est la seule application linéaire de  $V$  dans  $V'$  qui prolonge  $\varphi_0$ . Les autres assertions de la proposition 7 sont des conséquences immédiates des définitions.

Corollaire. Soit  $(U_\nu)_{\nu \in I}$  une famille finie de sous-espaces d'un espace vectoriel  $V$  telle que  $V$  soit somme directe des espaces  $U_\nu$ . Soit  $V'$  un espace vectoriel ayant le même corps de base que  $V$ . Donnons nous pour chaque  $\nu \in I$  une application linéaire  $\varphi_\nu$  de  $U_\nu$  dans  $V'$ . Il existe alors une application linéaire  $\varphi$  et une seule de  $V$  dans  $V'$  qui prolonge simultanément toutes les applications  $\varphi_\nu$ .

Soit, pour chaque  $\nu$ ,  $B_\nu$  une base de  $U_\nu$ , et soit  $B$  la réunion des ensembles  $B_\nu$ . On sait que les ensembles  $B_\nu$  sont deux à deux sans élément commun et que  $B$  est une base de  $V$  (n° 2, proposition 6).

Il existe une application  $\gamma_0$  de  $B$  dans  $V'$  qui prolonge simultanément les restrictions de toutes les  $\varphi_n$  aux  $B_n$  correspondants. L'application linéaire de  $V$  dans  $V'$  qui prolonge  $\gamma_0$  est évidemment la seule application linéaire de  $V$  dans  $V'$  qui prolonge simultanément toutes les applications  $\varphi_n$ .

Proposition 8. Soient  $V$  et  $V'$  des espaces vectoriels ayant le même corps de base. Soit  $U$  un sous-espace de  $V$  et soit  $f$  l'homomorphisme canonique de  $V$  sur  $V/U$ . Soit  $E$  une partie de  $V$  telle que la famille d'éléments de  $V/U$  définie par la restriction de  $f$  à  $E$  soit libre dans  $V/U$ .

Donnons-nous une application linéaire  $\varphi$  de  $U$  dans  $V'$  et une application quelconque  $\gamma_0$  de  $E$  dans  $V'$ . Il existe alors une application linéaire de  $V$  dans  $V'$  qui prolonge simultanément les applications  $\varphi$  et  $\gamma_0$ .

Soit  $W$  un sous-espace de  $V$  contenant  $E$  et tel que  $V$  soit somme directe de  $U$  et de  $W$  (cf. n° 2, proposition 5). Si  $A$  est une base de  $U$ , l'ensemble  $A \cup E$  est libre (l.c. ci-dessus); il en est par suite de même de  $E$ . On peut donc incorporer  $E$  à une base  $C$  de  $W$ . On peut prolonger  $\gamma_0$  par une application  $\gamma_1$  de  $C$  dans  $V'$ , puis par une application linéaire  $\gamma$  de  $W$  dans  $V'$  (proposition 7). La proposition 8 résulte alors du corollaire à la proposition 7.

Corollaire. Soient  $V$  et  $V'$  des espaces vectoriels ayant le même corps de base, et soit  $U$  un sous-espace de  $V$ . Toute application linéaire de  $U$  dans  $V'$  peut alors se prolonger par une application linéaire de  $V$  dans  $V'$ .

Il suffit d'appliquer la proposition 8 en prenant pour  $E$  l'ensemble vide.

#### 4. FORMES LINEAIRES. EQUATIONS D'UN SOUS-ESPACE

Définition 9. On appelle forme linéaire sur un espace vectoriel  $V$  une application linéaire de  $V$  dans le corps de base  $K$  de  $V$  (où  $K$  est considéré comme espace vectoriel sur  $K$  ; cf. n° 1, exemple 1).

Proposition 9. Soit  $F$  un ensemble de formes linéaires sur un espace vectoriel  $V$ . L'ensemble des éléments  $x$  de  $V$  tels que  $f(x) = 0$  pour tout  $f \in F$  est alors un sous-espace de  $V$ . Réciproquement, tout sous-espace de  $V$  peut être défini de la manière précédente au moyen d'un ensemble convenable  $F$  de formes linéaires.

La première assertion est évidente. Soit maintenant  $U$  un sous-espace de  $V$ , et soit  $F$  l'ensemble des formes linéaires qui prennent la valeur 0 en tout élément de  $U$ . Si  $x \in U$ , on a  $f(x) = 0$  pour tout  $f \in F$ . Soit maintenant  $y$  un élément non contenu dans  $U$ , et soit  $h$  l'homomorphisme canonique de  $V$  sur  $V/U$ . On a  $h(y) \neq 0$ , et par suite la famille d'éléments de  $V/U$  définie par la contraction de  $h$  à l'ensemble  $\{y\}$  est libre. Il existe donc, en vertu de la proposition 8, n° 3 une forme linéaire  $f$  sur  $V$  telle que  $f(U) = \{0\}$ ,  $f(y) = e$ , où  $e$  est l'élément unité de  $K$ . On a  $f \in F$ , ce qui montre qu'il existe dans  $F$  un élément qui ne prend pas la valeur 0 en  $y$ . La proposition 9 est ainsi démontrée.

Définition 10. Soit  $U$  un sous-espace d'un espace vectoriel  $V$ , et soit  $(f_\nu)_{\nu \in I}$  une famille de formes linéaires sur  $V$  telles que  $U$  soit le sous-espace formé de tous les éléments  $x \in V$  tels que  $f_\nu(x) = 0$  pour tout  $\nu \in I$ . On dit alors que les formules  $f_\nu(x) = 0$  (ou, simplement  $f_\nu = 0$ ) constituent un système d'équations de  $U$ .

D'une manière générale,  $U$  étend un sous-ensemble d'un ensemble  $V$ , un système d'équations de  $U$  est d'un système de formules contenant un élément générique  $x$  de  $V$  et qui a la propriété que toutes les formules du système ne deviennent simultanément vraies que si on remplace  $x$  par un élément de  $U$ .

5. PROBLEMES LINEAIRES.

Définition 10. On entend par problème linéaire tout problème qui peut se formuler de la manière suivante : étant donnés des espaces vectoriels  $V$  et  $W$  sur un même corps de base, une application linéaire  $\phi$  de  $V$  dans  $W$  et un élément  $w$  de  $W$ , trouver les éléments  $x$  (s'il y en a) de  $V$  tels que  $\phi(x) = w$  ; ces éléments sont alors appelés les solutions du problème. Si  $w = 0$ , on dit que le problème est homogène. Si un problème est défini par une application  $\phi$  de  $V$  dans  $W$  et un élément  $w$  de  $W$ , le problème de trouver les éléments  $y$  de  $V$  tels que  $\phi(y) = 0$  est appelé le problème homogène associé au problème donné.

Exemples. Les problèmes linéaires se présentent si fréquemment dans toutes les parties des mathématiques que l'on n'a que l'embaras du choix pour en donner des exemples. Nous donnerons un exemple purement algébrique et un exemple tiré de l'analyse.

1. Soient  $n$  et  $r$  deux entiers  $> 0$ . Posons  $I_n = \{1, \dots, n\}$  et  $I_r = \{1, \dots, r\}$ . Soient données deux familles  $(a_{ij})_{(i,j) \in I_r \times I_n}$  et  $(b_i)_{i \in I_r}$  d'éléments d'un corps  $K$ , la première ayant  $I_r \times I_n$  comme ensemble d'indices et la seconde  $I_r$ . Considérons le problème qui consiste à trouver les éléments  $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$  tels que

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n x_j a_{ij} = b_i \quad (1 \leq i \leq r)$$

Chacune des  $r$  formules (1) est appelée une équation linéaire, et le système de ces formules est appelé un système d'équations linéaires.

Les éléments  $a_{ij}$  sont appelés les coefficients de ces équations, tandis que les éléments  $b_i$  sont appelés les seconds membres. Une équation linéaire dont le second membre est 0 est dite homogène. Le système (1) étant donné, soit  $\phi$  l'application de  $K^n$  dans  $K^r$  définie par la formule

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \left( \sum_{j=1}^n x_j a_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^n x_j a_{rj} \right)$$

On vérifie tout de suite que  $\varphi$  est une application linéaire. Le problème de trouver les éléments  $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$  pour lesquels les formules (1) sont vraies est donc identique au problème de trouver les éléments  $x \in K^n$  tels que  $\varphi(x) = (b_1, \dots, b_r)$  : c'est un problème linéaire. Ce problème est homogène dans le cas où les équations (1) sont toutes homogènes.

On notera que,  $i$  étant un indice entre 1 et  $r$ , l'application  $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \sum_{j=1}^n x_j a_{ji}$  de  $K^n$  dans  $K$  est une forme linéaire sur  $K^n$ . On désigne en général (par abus de langage) cette forme linéaire par l'expression  $\sum_{j=1}^n x_j a_{ji}$  elle-même. On peut donc dire que le premier membre d'une équation linéaire à  $n$  inconnues est une forme linéaire sur  $K^n$ .

\* 2. Une équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  est une équation de la forme

$$(2) \quad \sum_0^n a_i (d^i y / dx^i) = b$$

où  $a_0, \dots, a_n, b$  sont des fonctions données d'une variable réelle, définies sur un intervalle ouvert  $] \alpha, \beta [$ . Une solution de (2) est une fonction  $y$ , définie sur  $] \alpha, \beta [$  et  $y$  admettant des dérivées jusqu'à l'ordre  $n$  telle que (2) soit vraie. Ceci dit, le problème de trouver les solutions de (2) est un problème linéaire. En effet, l'ensemble de toutes les fonctions à valeurs réelles définies sur  $] \alpha, \beta [$  est un espace vectoriel  $F$  sur le corps des nombres réels, et l'ensemble de celles de ces fonctions qui admettent des dérivées jusqu'à l'ordre  $n$  est un sous-espace  $F_0$  de  $F$ . L'application  $y \rightarrow \sum_{i=0}^n a_i (d^i y / dx^i)$  est une application linéaire  $\varphi$  de  $F_0$  dans  $F$ , et notre problème revient à trouver les éléments  $y$  de  $F_0$  tels que  $\varphi(y) = b$ . \*

Théorème 3. Soit  $P$  un problème linéaire, et soit  $P_0$  le problème homogène associé. Toute combinaison linéaire de solutions de  $P_0$  est alors une solution de  $P_0$ . Si le problème  $P$  admet au moins une solution  $x_1$ , on obtient toutes ses solutions en ajoutant à  $x_1$  les solutions de  $P_0$ . Supposons que  $P$  consiste à trouver les éléments  $x$  d'un espace vectoriel  $V$  tels que  $\varphi(x) = w$ ,  $\varphi$  étant une application linéaire de  $V$  dans un espace vectoriel  $W$  et  $w$  étant un élément de  $W$ . Si  $(f_\alpha(y) = 0)_{\alpha \in I}$  est un système d'équations du sous-espace  $\varphi(V)$  de  $W$ , une condition nécessaire et suffisante pour que le problème  $P$  admette une solution au moins est que l'on ait  $f_\alpha(w) = 0$  pour tout  $\alpha \in I$ .

On sait que  $\varphi^{-1}(0)$  est un sous-espace de  $V$  et que  $\varphi(V)$  est un sous-espace de  $W$  (cf. Alg.I, § 6, n° 12, théorème 5). Les solutions de  $P_0$  sont les éléments de  $\varphi^{-1}(0)$ , et les éléments  $w$  pour lesquels  $P$  admet au moins une solution sont ceux de  $\varphi(V)$ . Si  $v$  et  $v'$  sont des solutions de  $P$ , on a  $\varphi(v-v')=0$ , de sorte que  $v-v'$  est une solution de  $P_0$ . Réciproquement, si  $v''$  est une solution quelconque de  $P_0$ ,  $v+v''$  est une solution de  $P$ . Toutes les assertions du théorème 2 sont donc démontrées.

Remarque. Un problème linéaire homogène admet toujours au moins une solution, à savoir la solution 0. Cette solution est souvent appelée la solution triviale.



### 6. ESPACES VECTORIELS DE DIMENSIONS FINIES.

Il résulte immédiatement de la proposition 7, n° 3 que si des espaces vectoriels  $V$  et  $V'$  sur un même corps  $K$  admettent des bases qui soient équipotentes, les espaces  $V$  et  $V'$  sont isomorphes. La réciproque de cette assertion est vraie ; c'est-à-dire que, si  $V$  et  $V'$  sont isomorphes, toute base de  $V$  est équipotente à toute base de  $V'$ . Cette assertion est évidemment équivalente à celle qui consiste à dire que toutes les bases d'un même espace vectoriel ont la même puissance. Nous ne démontrerons (et utiliserons) ce fait que dans le cas où l'espace admet au moins une base finie.

Théorème 3. Supposons qu'un espace vectoriel  $V$  admette une base finie  $B$ .  
Toute base de  $V$  est alors finie et a le même nombre d'éléments que  $B$ .

Soient  $x_1, \dots, x_n$  les éléments distincts de  $B$ . Posons  $V_k = \sum_{i \leq k} Kx_i$  ( $0 \leq k \leq n$ ) ; il est clair que  $V_k$  est la somme directe de  $V_{k-1}$  et de  $Kx_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) et par suite que  $V_k/V_{k-1}$  est isomorphe à  $Kx_k$ . Si  $y$  est un élément  $\neq 0$  quelconque de  $Kx_k$ , on a  $y = ax_k$ ,  $a \in K$ ,  $a \neq 0$ , d'où  $x_k = a^{-1}y$  et par suite  $Kx_k = Ky$  ; il en résulte que  $Kx_k$  est simple en tant que groupe à opérateurs. Donc la suite  $\Sigma = (V_n, \dots, V_0)$  est une suite de Jordan-Holder de  $V$ . Soit  $B'$  une base quelconque de  $V$ , et soient  $x'_1, \dots, x'_m$  des éléments mutuellement différents de  $B'$ . Posons  $V'_l = \sum_{i \leq l} Kx'_i$  pour  $0 \leq l < m$  et  $V'_m = V$  ; donc  $\Sigma' = (V'_m, \dots, V'_0)$  est une suite de composition strictement décroissante de  $V$ . En vertu du théorème 8, Alg., I, § 6, n° 14 et de son corollaire, il existe une suite de Jordan-Hölder plus fine que  $\Sigma'$ , et cette suite est de longueur  $n$ . On a donc  $m \leq n$ , ce qui montre que  $B'$  est un ensemble fini dont le nombre  $n'$  d'éléments est au plus égal à  $n$ . Echangeant les rôles joués par  $B$  et  $B'$ , on voit de même que  $n \leq n'$ , d'où  $n = n'$ . Le théorème 3 est donc démontré.

Définition 12. Soit V un espace vectoriel qui admet une base finie B .  
On dit alors que V est de dimension finie, et on appelle dimension de V  
le nombre d'éléments d'une base quelconque de V . Ce nombre se désigne  
par le symbole dim V .

Proposition 10. Soit n un entier positif et soit K un corps. L'espace  
vectoriel  $K^n$  est alors de dimension n , et tout espace vectoriel de  
dimension n sur K est isomorphe à  $K^n$  .

Soit e l'élément unité de K . Posons

$$(1) \quad \begin{cases} e_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j ; & e_{ii} = e \\ u_i = (e_{i1}, \dots, e_{in}) \end{cases} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

Si  $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$  , on a  $x_j = \sum_{i=1}^n x_i e_{ij}$  ( $1 \leq j \leq n$ ), d'où  $(x_1, \dots, x_n)$   
 $= \sum_{i=1}^n x_i u_i$  . Il résulte alors immédiatement de la proposition 4, n° 2  
 que  $\{u_1, \dots, u_n\}$  est une base de  $K^n$  . La seconde assertion de la  
 proposition 10 résulte alors immédiatement de la proposition 7, n° 3 .

Définition 13. La base  $\{u_1, \dots, u_n\}$  de  $K^n$  qui est définie par les  
formules (1) est appelée la base canonique de  $K^n$  .

Proposition 11. Soit  $(V_\nu)_{\nu \in I}$  une famille finie d'espaces vectoriels  
ayant le même corps de base. Supposons que chaque  $V_\nu$  soit de dimension  
finie  $n_\nu$  . L'espace  $\prod_{\nu \in I} V_\nu$  est alors de dimension finie égale à  
 $\sum_{\nu \in I} n_\nu$  .

Soit K le corps de base des  $V_\nu$  ;  $V_\nu$  est donc isomorphe à  $K^{n_\nu}$  .  
 Considérant d'abord  $K^{n_\nu}$  seulement comme un ensemble, on sait qu'il  
 existe une application canonique de  $\prod_{\nu \in I} K^{n_\nu}$  sur  $K^{\sum_{\nu \in I} n_\nu}$   
 (Ens. R, § 4, n° 11). On vérifie tout de suite que cette application  
 canonique est un isomorphisme de la structure d'espace vectoriel de  
 $\prod_{\nu \in I} K^{n_\nu}$  sur celle de  $K^{\sum_{\nu \in I} n_\nu}$  . Ceci dit, la proposition 11 résulte  
 immédiatement de la proposition 10 .

Proposition 12. Soit V un espace vectoriel de dimension finie n , et soit W un sous-espace de V . L'espace W est alors de dimension finie. Si  $m = \dim W$  , on a  $m \leq n$  ; l'égalité  $m = n$  entraîne  $U = V$  et l'espace  $V/U$  est de dimension finie égale à  $n-m$  .

Si on observe qu'un espace vectoriel qui est somme directe de deux sous-espaces est isomorphe au produit de ces sous-espaces (Alg.I, §6, n° 6, prop. 6), on voit que la proposition 12 résulte immédiatement du corollaire à la proposition 5 , n° 2 et de la proposition 11 ci-dessus.

Corollaire 1. Soient  $x_1, \dots, x_m$  des éléments d'un espace vectoriel V et soit r la dimension du sous-espace engendré par  $x_1, \dots, x_m$  . L'espace des relations linéaires entre  $x_1, \dots, x_m$  est alors de dimension  $m-r$  .

Soit en effet  $\phi$  l'application linéaire de  $K^m$  dans V définie par la formule  $\phi(a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^m a_i x_i$  . L'espace  $\phi(K^m)$  est l'espace engendré par  $x_1, \dots, x_m$  et est isomorphe à  $K^m / \phi^{-1}(0)$  (Alg.I, §6, n° 12, théorème 5). L'espace  $\phi^{-1}(0)$  étant l'espace des relations linéaires entre  $x_1, \dots, x_m$  , le corollaire découle immédiatement de la prop. 12.

Corollaire 2. Soit V un espace vectoriel de dimension n . Si un ensemble de n éléments de V est un système de générateurs de V , c'est une base de V .

Il résulte en effet du corollaire 1 que l'espace des relations linéaires entre nos n éléments est de dimension 0 , donc que les n éléments en question sont linéairement indépendants. Le corollaire 2 résulte alors de la proposition 4 , n° 2 .

Corollaire 3. Soit V un espace vectoriel de dimension n . Tout ensemble libre de n éléments de V est une base de V .

L'espace des relations linéaires entre les n éléments de l'ensemble étant de dimension 0 , le sous-espace engendré par ces éléments est de dimension n et est par suite identique à V en vertu de la proposition 12

Le corollaire 3 résulte alors de la proposition 4, n° 2 .

Proposition 13. Soient U et W deux espaces vectoriels de dimensions finies d'un espace vectoriel V . On a alors

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W .$$

En vertu de la proposition 12, on a  $\dim (U+W) = \dim U + \dim (U+W)/U$ .  
Or  $(U+W)/U$  est isomorphe à  $W/(U \cap W)$  (Alg.I, § 6, n° 13, théor. 6),  
d'où  $\dim (U+W)/U = \dim W - \dim (U \cap W)$ , ce qui démontre la prop. 13.

### 7. L'ANNEAU DES ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE VECTORIEL.

Soit  $V$  un espace vectoriel ; nous savons déjà que les homomorphismes de  $V$  dans lui-même ( $V$  étant considéré comme groupe abélien à opérateurs) forment un anneau, l'anneau des endomorphismes de  $V$  (cf. § 1, n° 2). Les éléments de cet anneau ne sont autres que les applications linéaires de  $V$  dans lui-même. L'anneau des endomorphismes possède un élément unité, à savoir l'application identique de  $V$  sur lui-même.

Soit  $\varphi$  un endomorphisme de l'espace vectoriel  $V$ , et soit  $a$  un élément du corps de base  $K$  de  $V$ . L'application  $a\varphi$  de  $V$  dans lui-même définie par la formule  $(a\varphi)(x) = a\varphi(x)$  (pour tout  $x \in V$ ) est toujours un homomorphisme dans lui-même du groupe abélien sous-jacent de  $V$  (c'est-à-dire que  $(a\varphi)(x-y) = (a\varphi)(x) - (a\varphi)(y)$  si  $(x,y) \in V \times V$ ). Mais, si  $a$  n'est pas dans le centre de  $K$  et si  $\varphi \neq 0$ ,  $a\varphi$  n'est pas une application linéaire de  $V$ . Soit en effet  $x$  un élément de  $V$  tel que  $\varphi(x) \neq 0$ , et soit  $b$  un élément de  $K$  qui ne commute pas avec  $a$  ; on a alors  $(a\varphi)(bx) = ab\varphi(x)$ ,  $b((a\varphi)(x)) = ba\varphi(x)$  et  $(ab-ba)\varphi(x) \neq 0$  puisque  $ab - ba$  et  $\varphi(x)$  sont  $\neq 0$ . Par contre, si  $a$  est un élément du centre de  $K$ , on voit tout de suite que  $a\varphi$  est une application linéaire. Soit  $\varepsilon$  l'élément unité de l'anneau  $\mathcal{O}$  des endomorphismes de  $V$ . Si  $a$  est un élément du centre de  $K$ , l'opération  $a\varepsilon$  appartient au centre de  $\mathcal{O}$ . Soit en effet  $\varphi$  un élément de  $\mathcal{O}$  ; si  $x \in V$ , on a  $((a\varepsilon).\varphi)(x) = a\varphi(x)$ ,  $(\varphi.(a\varepsilon))(x) = \varphi(ax) = a\varphi(x)$ , ce qui démontre notre assertion. Nous allons voir que, réciproquement ; tout élément  $\alpha$  du centre de  $\mathcal{O}$  peut se mettre sous la forme  $a\varepsilon$ , où  $a$  est un élément du centre de  $K$ . Soit en effet  $B$  une base de  $V$ . Si  $b, b'$  sont des éléments de  $B$ , il existe un élément  $\varphi_{bb'}$  de  $\mathcal{O}$  tel que  $\varphi_{bb'}(b) = b'$ ,  $\varphi_{bb'}(b'') = 0$  pour tout  $b'' \in B$

différent de  $b$  (cf. n° 3, proposition 7) ; si  $x = \sum_{u \in B} a(u)u$  est un élément quelconque de  $V$ , on a  $\varphi_{bb'}(x) = a(b)b' \in Kb'$ , d'où  $\varphi_{bb'}(V) = Kb'$ . La formule  $\alpha\varphi_{bb'} = \varphi_{bb'}\alpha$  montre que  $\alpha(b') \in Kb'$  ; soit donc  $\alpha(b') = c(b')b'$ , où  $c(b') \in K$ . Appliquant une fois de plus la formule  $\alpha\varphi_{bb'} = \varphi_{bb'}\alpha$ , il vient  $c(b)b' = c(b')b'$ , d'où  $c(b) = c(b')$ . Soit  $c$  la valeur commune de tous les  $c(b)$  (si  $B$  n'est pas vide) ; on a donc  $(\alpha - c\varepsilon)(b) = 0$  pour tout  $b \in B$ , d'où  $\alpha = c\varepsilon$  (en vertu de la proposition 7, n° 3). Supposant toujours  $B$  non vide, on a  $\varepsilon \neq 0$ , d'où il résulte (en vertu de ce que nous avons dit plus haut) que  $c$  doit appartenir au centre de  $K$ . Si  $B$  est vide,  $V$  est de dimension 0,  $\mathcal{O}$  consiste en un seul élément et il n'y a rien à démontrer. Nous avons donc prouvé la

Proposition 14. Soit  $\mathcal{O}$  l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel  $V$  sur un corps  $K$ . Si  $a$  est un élément du centre de  $K$  et si  $\varphi \in \mathcal{O}$ , nous désignons par  $a\varphi$  l'élément de  $\mathcal{O}$  défini par  $(a\varphi)(x) = a\varphi(x)$  pour tout  $x \in V$ . Le centre de  $\mathcal{O}$  se compose alors des éléments de la forme  $a\varepsilon$ , où  $a$  décrit le centre de  $K$  et où  $\varepsilon$  est l'élément unité de  $\mathcal{O}$ . (Définir l'endomorphisme de  $V/U$  induit par un endomorphisme de  $V$  qui conserve  $U$ ).

Remarque. L'application  $a \rightarrow a\varepsilon$  est un homomorphisme d'anneau du centre de  $K$  dans l'anneau  $\mathcal{O}$ , comme on le vérifie aisément. Si  $V$  ne se réduit pas à son élément nul, on a  $a\varepsilon \neq 0$  pour tout  $a \neq 0$  ; le centre de  $K$  étant un corps, il en résulte que le centre de  $\mathcal{O}$  est un corps isomorphe au centre de  $K$ .

Proposition 15. Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie sur un corps  $K$ . Les assertions suivantes, relatives à un endomorphisme  $\varphi$  de  $V$ , sont alors équivalentes les unes aux autres : a)  $\varphi$  n'est pas diviseur de zéro à gauche (dans l'anneau des endomorphismes) ;

- b)  $\varphi$  n'est pas diviseur de zéro à droite ; c)  $\varphi(V) = V$  ;  
 d)  $\varphi^{-1}(0) = \{0\}$  ; e)  $\varphi$  est inversible dans l'anneau des endomorphismes de  $V$  .

On sait que  $V/\varphi^{-1}(0)$  est isomorphe à  $\varphi(V)$  (Alg.I, §6, n°12, théorème 5), d'où, en vertu de la proposition 12, n°6,  $\dim V = \dim \varphi(V) + \dim (\varphi^{-1}(0))$ . Les conditions c) et d) sont donc équivalentes en vertu de la proposition 12, n°6. Si elles sont vérifiées  $\varphi$  est un automorphisme de la structure d'espace vectoriel de  $V$ , et par suite admet un automorphisme réciproque, ce qui prouve que chacune des assertions c), d) entraîne e). Il est évident que e) entraîne a), b), c) et d). Il suffira donc maintenant de montrer que a) entraîne c) et que b) entraîne d). Soient  $U$  et  $U_1$  des sous-espaces de  $V$  tels que  $V$  soit somme directe de  $U$  et de  $\varphi(V)$  et aussi de  $U_1$  et de  $\varphi^{-1}(0)$  (cf. n° 2, corollaire à la proposition 5). Il existe un endomorphisme  $\psi$  de  $V$  qui coïncide avec l'identité sur  $U$  et qui applique  $\varphi(V)$  sur  $\{0\}$  (cf. n° 3, corollaire à la proposition 7) ; on a donc  $\psi\varphi = 0$ . L'assertion a) entraîne  $\psi = 0$ , d'où  $U = \{0\}$ ,  $V = \varphi(V)$ . De même, il existe un endomorphisme  $\theta$  de  $V$  qui applique  $U_1$  sur  $\{0\}$  et qui coïncide avec l'identité sur  $\varphi^{-1}(0)$ . On a  $\varphi\theta = 0$ , et par suite b) entraîne  $\theta = 0$ , d'où  $\varphi^{-1}(0) = \{0\}$ . La proposition 15 est ainsi complètement démontrée.

Les endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie pour lesquels les conditions énoncées dans la proposition 15 sont satisfaites sont les éléments réguliers (par rapport à la multiplication) de l'anneau des endomorphismes (Alg.I, §2, n°2) ; on les appelle endomorphismes réguliers. Ils forment un groupe multiplicatif.

Soit  $B$  une base d'un espace vectoriel  $V$  de dimension finie. Tout endomorphisme régulier  $\phi$  de  $V$  applique  $B$  bi-univoquement sur une base  $B'$  de  $V$ , (cela résulte immédiatement du fait que  $\phi$  est un automorphisme de la structure d'espace vectoriel de  $V$ ). Réciproquement, si  $B'$  est une base quelconque de  $V$ ,  $B'$  et  $B$  ont le même nombre d'éléments, de sorte qu'il existe une application bi-univoque de  $B$  sur  $B'$ ; cette application peut se prolonger par un endomorphisme régulier de  $V$ , ce qui montre que deux bases quelconques de  $V$  peuvent être transformées l'une en l'autre par un endomorphisme régulier.



## 8. RESOLUTION EFFECTIVE DES SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES.

Nous nous proposons de montrer comment, un système d'équations linéaires étant explicitement donné, il est possible de déterminer si ce système admet une solution et, si oui, de trouver toutes les solutions du système.

Nous considérerons d'abord le problème suivant. Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur un corps  $K$  dans lequel on a donné une certaine base  $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Soient  $y_1, \dots, y_m$  des éléments de  $V$  dont on donne explicitement les expressions

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

comme combinaisons linéaires d'éléments de  $B$ . Soit  $U$  le sous-espace engendré par  $y_1, \dots, y_m$ . Nous nous proposons de déterminer explicitement une base  $B'$  de  $B$  satisfaisant les conditions suivantes : 1) les éléments de  $B'$  sont les uns dans  $B$ , les autres dans l'ensemble  $\{y_1, \dots, y_m\}$ ; 2) ceux des éléments de  $B'$  qui sont contenus dans l'ensemble  $\{y_1, \dots, y_m\}$  forment une base de  $U$ . De plus, la solution de notre problème sera telle que l'on ait aussi des expressions explicites pour les éléments de  $B$  et pour  $y_1, \dots, y_m$  comme combinaisons linéaires d'éléments de  $B'$ .

Nous procéderons en  $m$  étapes successives, construisant explicitement une suite finie  $(B_0, \dots, B_m)$  de bases de  $V$  de telle manière que : 1) les éléments de  $B_r$  soient les uns dans  $B$ , les autres dans l'ensemble  $\{y_1, \dots, y_r\}$ ; 2) ceux des éléments de  $B_r$  qui sont contenus dans l'ensemble  $\{y_1, \dots, y_r\}$  forment une base du sous-espace engendré par les éléments de cet ensemble. Posons  $B_0 = B$ . Supposons déjà construite, pour un certain  $r < m$ , une base  $B_r = \{x_1^{(r)}, \dots, x_n^{(r)}\}$  satisfaisant aux conditions 1), 2), et supposons que l'on ait déterminé les expressions explicites

$$(1) \quad x_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j^{(r)} \quad (1 \leq i \leq n) ; \quad y_k = \sum_{j=1}^n c_{kj} x_j^{(r)} \quad (1 \leq k \leq m)$$

de  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$  comme combinaisons linéaires d'éléments de  $B_r$ . On peut supposer les éléments de  $B_r$  rangés dans un ordre tel que  $x_1^{(r)}, \dots, x_{d_r}^{(r)}$  forment une base de  $U_r$ . Si on a  $c_{r+1, j} = 0$  pour tous les  $j > d_r$ ,  $y_{r+1}$  appartient à  $U_r$  et on prend alors  $B_{r+1} = B_r$ . Supposons qu'il n'en soit pas ainsi ; on peut alors supposer les éléments de  $B_r$  rangés dans un ordre tel que  $\gamma = c_{d_r+1, r+1} \neq 0$ . Nous poserons alors  $x_j^{(r+1)} = x_j^{(r)}$  pour  $j \neq d_r + 1$ ,  $x_{d_r+1}^{(r+1)} = y_{r+1}$ . Nous allons d'abord montrer que  $B_{r+1}$  est une base de  $V$ . On a

$$(2) \quad x_{d_r+1}^{(r+1)} = \gamma^{-1} x_{d_r+1}^{(r)} - \sum_{j=1}^n, j \neq d_r+1 \gamma^{-1} c_{r+1, j} x_j^{(r)}$$

ce qui montre que tous les éléments de  $B_r$  appartiennent au sous-espace engendré par les éléments de  $B_{r+1}$ . Ce sous-espace est donc  $V$ , d'où il résulte que  $B_{r+1}$  est une base de  $V$  en vertu du corollaire 2 à la proposition 12, n°6. L'espace  $U_{r+1}$  est  $U_r + Ky_{r+1}$  ; l'élément  $y_{r+1}$  n'appartient pas à  $U_r$  puisque  $y_{r+1} \notin U_r$  n'est pas une combinaison linéaire des éléments de la base  $\{x_1^{(r)}, \dots, x_{d_r}^{(r)}\}$  de  $U_r$ . Il en résulte que la somme  $U_r + Ky_{r+1}$  est directe et que l'ensemble

$$\{x_1^{(r+1)}, \dots, x_{d_r+1}^{(r+1)}\} = \{x_1^{(r)}, \dots, x_{d_r}^{(r)}, y_{r+1}\}$$
 est une base de  $U_{r+1}$ .

Les éléments de  $B_{r+1}$  étant linéairement indépendants, aucun élément de  $B_{r+1}$  différent de  $x_1^{(r+1)}, \dots, x_{d_r+1}^{(r+1)}$  ne peut appartenir à l'ensemble  $\{y_1, \dots, y_{r+1}\}$ . La base  $B_{r+1}$  satisfait donc bien les conditions requises

Se souvenant que  $x_j^{(r)} = x_j^{(r+1)}$  pour  $j \neq d_r+1$  et substituant l'expression (2) de  $x_{d_r+1}^{(r+1)}$  dans les formules (1), on obtient explicitement les expressions de  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$  comme combinaisons linéaires d'éléments de  $B_{r+1}$ . La base  $B_m$  que nous obtiendrons à la fin de notre processus inductif sera évidemment une base  $B'$  satisfaisant aux conditions 1), 2) imposées plus haut.

Appliquons maintenant les considérations précédentes au problème de la résolution d'un système d'équations linéaires

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n x_j a_{ij} = b_i \quad (1 \leq i \leq r)$$

Soit  $\phi$  l'application linéaire de  $K^n$  dans  $K^r$  définie par la formule

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \left( \sum_{j=1}^n x_j a_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^n x_j a_{rj} \right)$$

et soit  $U$  le sous-espace  $\phi(K_n)$  de  $K^r$ . Nous désignerons par  $\rho$  la dimension de cet espace, qui s'appelle le rang du système (2). Soient  $\{u_1, \dots, u_n\}$  et  $\{v_1, \dots, v_r\}$  les bases canoniques de  $K^n$  et de  $K^r$  respectivement. L'espace  $U$  est donc engendré par les  $n$  éléments  $\phi(u_j) = \sum_{i=1}^r a_{ij} v_i$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Nous pourrions donc déterminer explicitement  $\rho$  éléments  $u'_1, \dots, u'_\rho$  de l'ensemble  $\{u_1, \dots, u_n\}$  tels que  $\phi(u'_1), \dots, \phi(u'_\rho)$  forment une base de  $U$ , et  $r - \rho$  éléments  $v'_{\rho+1}, \dots, v'_r$  de l'ensemble  $\{v_1, \dots, v_r\}$  tels que  $\phi(u'_1), \dots, \phi(u'_\rho), v'_{\rho+1}, \dots, v'_r$  forment une base de  $K^r$ . Nous désignerons par  $u'_{\rho+1}, \dots, u'_n$  ceux des éléments de l'ensemble  $\{u_1, \dots, u_n\}$  qui ne se trouvent pas parmi les éléments  $u'_1, \dots, u'_\rho$  et par  $v'_1, \dots, v'_\rho$  ceux des éléments de l'ensemble  $\{v_1, \dots, v_r\}$  qui ne se trouvent pas parmi  $v'_{\rho+1}, \dots, v'_r$ . Nous obtiendrons les expressions explicites

$$\begin{aligned} \phi(u'_{\rho+h}) &= \sum_{\lambda=1}^{\rho} b_{h\lambda} \phi(u'_\lambda) \quad (1 \leq h \leq n - \rho); \\ v_i &= \sum_{\lambda=1}^{\rho} c_{i\lambda} \phi(u'_\lambda) + \sum_{j=\rho+1}^r c'_{ij} v'_j \end{aligned}$$

de  $\phi(u'_{\rho+1}), \dots, \phi(u'_n), v'_1, \dots, v'_r$  comme combinaisons linéaires de  $\phi(u'_1), \dots, \phi(u'_\rho), v'_1, \dots, v'_r$ . On a donc

$$\sum_{i=1}^r b_i v_i = \sum_{\lambda=1}^{\rho} \left( \sum_{i=1}^r b_i c_{i\lambda} \right) \phi(u'_\lambda) + \sum_{j=\rho+1}^r \left( \sum_{i=1}^r b_i c'_{ij} \right) v'_j$$

Pour que notre système d'équations ait au moins une solution, il est nécessaire et suffisant que  $\sum_{i=1}^r b_i v_i$  appartienne à  $U$ , donc que les conditions

$$\sum_{i=1}^z b_i c'_{ij} = 0 \quad (\rho+1 \leq j \leq r)$$

soient satisfaites. Supposons qu'il en soit ainsi, et posons alors  $b'_\lambda = \sum_{i=1}^z b_i c_{i\lambda}$ , d'où  $\sum_{i=1}^z b_i v_i = \sum_{\lambda=1}^p b'_\lambda \varphi(u'_\lambda)$ . On aperçoit tout de suite que  $\varphi(\sum_{\lambda=1}^p b'_\lambda u'_\lambda) = \sum_{i=1}^z b_i v_i$ , ce qui nous donne une solution particulière du système (2). Pour obtenir les autres solutions, il faudra ajouter à celle que nous avons déjà les solutions du système d'équations homogènes

$$(3) \quad \sum_{j=1}^n x_j a_{ij} = 0.$$

On voit tout de suite que  $\varphi(u'_{\rho+h} - \sum_{\lambda=1}^p b_{h\lambda} u'_\lambda) = 0$ , et que les éléments  $u'_{\rho+h} - \sum_{\lambda=1}^p b_{h\lambda} u'_\lambda$  fournissent  $n-\rho$  solutions linéairement indépendantes du système (3). Or l'ensemble de toutes les solutions de (3) est le sous-espace  $\varphi^{-1}(0)$  de  $K^n$ , qui est de dimension  $n-\rho$  puisque  $\dim \varphi(K^n) = \rho$ . Toutes les solutions de (3) sont donc combinaisons linéaires des  $n-\rho$  solutions déjà obtenues.

### 3. DUALITÉ ENTRE ESPACES VECTORIELS.

---

#### 1. ESPACES D'APPLICATIONS LINEAIRES.

Soient  $V$  et  $V'$  des espaces vectoriels ayant un même corps de base  $K$ , et soit  $\varphi$  une application linéaire de  $V$  dans  $V'$ . Soit  $a$  un élément de  $K$ , et soit  $a\varphi$  l'application de  $V$  dans  $V'$  définie par  $(a\varphi)(x) = a\varphi(x)$  pour tout  $x \in V$ . Raisonnant de la même manière que dans le cas des endomorphismes d'un espace vectoriel (§ 2, n° 7) on voit que, si  $\varphi \neq 0$ , l'application  $a\varphi$  n'est linéaire que si  $a$  appartient au centre de  $K$ . Nous allons maintenant, et dans tout ce qui suit, supposer que  $K$  est commutatif ; s'il en est ainsi, l'application  $a\varphi$  est toujours une application linéaire de  $V$  dans  $V'$ .

On vérifie tout de suite que les applications linéaires de  $V$  dans  $V'$  forment un groupe additif, l'opération d'addition étant définie par la formule  $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ . Il résulte de cette formule de définition que,  $a$  étant un élément de  $K$ , l'application  $\varphi \rightarrow a\varphi$  est un homomorphisme dans lui-même du groupe additif des applications linéaires de  $V$  dans  $V'$ . Ce dernier groupe se trouve donc muni d'une structure de groupe abélien à opérateurs avec  $K$  comme domaine d'opérateurs. Si  $\varphi$  est une application linéaire de  $V$  dans  $V'$  et si  $a$  et  $b$  sont dans  $K$ , on voit aisément que  $(a+b)\varphi = a\varphi + b\varphi$ ,  $(ab)\varphi = a(b\varphi)$  ; de plus, si  $e$  est l'élément unité de  $K$ , on a  $e\varphi = \varphi$ . Nous avons donc défini sur l'ensemble des applications linéaires de  $V$  dans  $V'$  une structure d'espace vectoriel sur  $K$  ; l'espace vectoriel ainsi obtenu s'appelle l'espace des applications linéaires de  $V$  dans  $V'$ . EN particulier, les formes linéaires sur  $V$  forment un espace vectoriel sur  $K$ , l'espace des formes linéaires.

Soient maintenant  $V, V'$  et  $V''$  des espaces vectoriels sur un même corps commutatif  $K$ . Soient  $E$  l'espace des applications linéaires de  $V$  dans  $V'$ ,  $E'$  celui des applications linéaires de  $V'$  dans  $V''$ .

Si  $\varphi \in E, \varphi' \in E'$ , nous désignerons souvent par  $\varphi'\varphi$  l'application  $\varphi' \circ \varphi$  de  $V$  dans  $V''$ ; cette application est évidemment linéaire. De plus, on vérifie aisément la validité des formules suivantes, où  $\varphi, \psi$  représentent des éléments de  $E, \varphi', \psi'$  des éléments de  $E'$  et  $a$  un élément de  $K$ :

$$\begin{aligned}
 (\varphi' + \psi')\varphi &= \varphi'\varphi + \psi'\varphi \\
 \varphi'(\varphi + \psi) &= \varphi'\varphi + \varphi'\psi \\
 a(\varphi'\varphi) &= (a\varphi')\varphi = \varphi'(a\varphi)
 \end{aligned}$$

Dans le cas où  $V = V' = V''$ , les espaces  $E$  et  $E'$  coïncident avec l'ensemble des endomorphismes de  $V$ , qui se trouve ainsi muni d'une structure d'espace vectoriel sur  $K$ . L'addition dans  $E$  et l'opération  $(\varphi, \varphi') \rightarrow \varphi'\varphi$  deviennent respectivement l'addition et la multiplication dans l'anneau des endomorphismes. Si  $e$  est l'élément unité de l'anneau des endomorphismes, et si  $a \in K$ , l'opération  $\varphi \rightarrow a\varphi$  peut aussi s'interpréter comme multiplication (dans l'anneau des endomorphismes) par l'élément central  $ae$ .

Proposition 1. Soient  $V$  et  $V'$  des espaces vectoriels de dimensions finies respectivement égales à  $n$  et à  $n'$  sur un corps commutatif  $K$ , et soit  $E$  l'espace des applications linéaires de  $V$  dans  $V'$ . L'espace  $E$  est alors de dimension finie égale à  $nn'$ . Soient  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  et  $B' = \{u'_1, \dots, u'_{n'}\}$  des bases de  $V$  et  $V'$  respectivement. Désignons par  $e_{ij}$  l'application linéaire de  $V$  dans  $V'$  définie par  $e_{ij}(u_i) = u'_j, e_{ij}(u_k) = 0$  si  $k \neq i$  ( $1 \leq i, k \leq n, 1 \leq j \leq n'$ ). Les applications  $e_{ij}$  forment alors une base de  $E$ .

Il suffira de démontrer la seconde assertion (on notera que l'existence et l'unicité des applications  $e_{ij}$  sont garanties par la proposition 7, § 2, n° 3). Soit  $\varphi$  une application linéaire quelconque de  $V$  dans  $V'$  ; posons  $\varphi(u_i) = \sum_{j=1}^{n'} a_{ij} u'_j$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $a_{ij} \in K$ ) .

On a alors  $\varphi(u_k) = (\sum_{i,j=1}^{n,n'} a_{ij} e_{ij})(u_k)$  ( $1 \leq k \leq n$ ), d'où

(en vertu de la proposition 7, § 2, n° 3),  $\varphi = \sum_{i,j=1}^{n,n'} a_{ij} e_{ij}$  .

La proposition 1 résulte immédiatement de cette formule.

On notera que, dans le cas où  $V = V'$  , les applications  $e_{ij}$  se multiplient entre elles suivant les formules

$$e_{ij} e_{i'j'} = 0 \quad \text{si} \quad j' \neq i$$

$$e_{ij} e_{i'i} = e_{i'j}$$

Dans le cas où  $V'$  est le corps  $K$  (considéré comme espace vectoriel sur  $K$ ), on a  $n'=1$ , ce qui montre que l'espace des formes linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie  $n$  est de dimension  $n$  .

On peut prendre pour base de  $K$  l'ensemble composé de l'élément unité  $e$  de  $K$  . On voit alors que les formes linéaires  $f_1, \dots, f_n$  définies par les formules  $f_i(u_k) = 0$  si  $k \neq i$ ,  $f_i(u_i) = e$  forment une base de l'espace des formes linéaires.

## 2. DUALITÉ ENTRE ESPACES VECTORIELS.

Soient  $V$  un espace vectoriel sur un corps commutatif  $K$  et  $F$  l'espace des formes linéaires sur  $V$ . Si  $x \in V$ ,  $f \in F$ , posons

$$(1) \quad \beta(x, f) = f(x)$$

Il est clair que, pour tout  $f$  fixe dans  $F$ , l'application  $x \rightarrow \beta(x, f)$  de  $V$  dans  $K$  est linéaire, et que, pour tout  $x$  fixe dans  $V$ , l'application  $f \rightarrow \beta(x, f)$  de  $F$  dans  $K$  est linéaire.

Définition 1. Soient  $V$  et  $V'$  des espaces vectoriels sur un corps commutatif  $K$ . Une application  $\beta$  de  $V \times V'$  dans  $K$  est appelée une forme bilinéaire sur  $V \times V'$  lorsqu'elle satisfait les conditions suivantes :

1) si  $x'$  est un élément quelconque de  $V'$ , l'application  $x \rightarrow \beta(x, x')$  de  $V$  dans  $K$  est linéaire ; 2) si  $x$  est un élément quelconque de  $V$ , l'application  $x' \rightarrow \beta(x, x')$  de  $V'$  dans  $K$  est linéaire. Lorsque  $V'$  est l'espace  $F$  des formes linéaires sur  $V$ , la forme bilinéaire  $\beta$  définie par la formule (1) ci-dessus est appelée la forme bilinéaire canonique sur  $V \times F$ .

Soit  $\beta$  une forme bilinéaire sur  $V \times V'$ , et soient  $F$  et  $F'$  les espaces des formes linéaires sur  $V$  et  $V'$  réciproquement. Si  $x \in V$ , désignons par  $J(x)$  l'élément de  $F'$  défini par  $(J(x))(x') = \beta(x, x')$  ;  $J$  est donc une application de  $V$  dans  $F'$ . Si  $x$  et  $y$  sont des éléments de  $V$ , on a, pour tout  $x' \in V'$ ,  $(J(x-y))(x') = \beta(x-y, x') = \beta(x, x') - \beta(y, x') = (J(x) - J(y))(x')$ , d'où  $J(x-y) = J(x) - J(y)$ . On vérifie de même que, pour  $a \in K$ , on a  $J(ax) = aJ(x)$ . L'application  $J$  est donc un homomorphisme de la structure d'espace vectoriel de  $V$  dans celle de  $F'$  ; on l'appelle le premier homomorphisme associé à la forme  $\beta$ . On définit de même le second homomorphisme associé à  $\beta$  : c'est l'application  $J'$  de  $V'$



dans  $F$  qui fait correspondre à tout  $x' \in V'$  la forme linéaire  $J(x')$  définie par  $(J(x'))(x) = \beta(x, x')$ . Réciproquement, on voit aisément qu'à tout homomorphisme  $J$  de  $V$  dans  $F'$  on peut associer une forme bilinéaire  $\beta$  sur  $V \times V'$  telle que  $J$  soit le premier homomorphisme associé à  $\beta$  : il suffit de poser  $\beta(x, x') = (J(x))(x')$ .

Définition 2. Soient  $V, V'$  des espaces vectoriels sur un corps commutatif  $K$ . Une forme bilinéaire  $\beta$  sur  $V \times V'$  est dite non dégénérée si les conditions suivantes sont satisfaites : 1)  $x$  étant un élément  $\neq 0$  de  $V$ , il existe toujours un élément  $x'$  de  $V'$  tel que  $\beta(x, x') \neq 0$  ; 2)  $x'$  étant un élément  $\neq 0$  de  $V'$ , il existe toujours un élément  $x$  de  $V$  tel que  $\beta(x, x') \neq 0$ .

On voit tout de suite qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme bilinéaire  $\beta$  sur  $V \times V'$  soit non dégénérée est que les homomorphismes  $J$  et  $J'$  associés à  $\beta$  soient, le premier un isomorphisme de  $V$  dans l'espace  $F'$  des formes linéaires sur  $V'$  et le second un isomorphisme de  $V'$  dans l'espace  $F$  des formes linéaires sur  $V$ . On observera que, même s'il en est ainsi, les espaces  $J(V), J'(V')$  peuvent fort bien être différents de  $F', F$  respectivement.

Proposition 2. Soit  $V$  un espace vectoriel sur un corps commutatif  $K$ , et soit  $F$  l'espace des formes linéaires sur  $V$ . La forme bilinéaire canonique sur  $V \times F$  est alors non dégénérée.

Si  $f$  est  $\neq 0$  dans  $F$ , il existe par définition un  $x \in V$  tel que  $f(x) \neq 0$ . Si  $x$  est un élément  $\neq 0$  de  $V$ , il résulte de la proposition 9, § 2, n°4 (appliquée au sous-espace  $\{0\}$  de  $V$ ) qu'il existe une forme linéaire  $f$  sur  $V$  telle que  $f(x) \neq 0$ . La proposition 2 est donc démontrée.

Si  $\beta$  est une forme bilinéaire sur  $V \times V'$ , l'application  $\beta'$  de  $V' \times V$  définie par  $\beta'(x', x) = \beta(x, x')$  est une forme bilinéaire sur  $V' \times V$ . Si  $\beta$  est non dégénérée, il en est de même de  $\beta'$ , et réciproquement. On voit donc que la condition d'existence d'une forme bilinéaire non dégénérée sur  $V \times V'$  est une condition par rapport à laquelle  $V$  et  $V'$  jouent des rôles symétriques.

Définition 3. Soient  $V$  et  $V'$  des espaces vectoriels sur un corps commutatif  $K$ . S'il existe une forme bilinéaire  $\beta$  non dégénérée sur  $V \times V'$ , on dit que les espaces  $V, V'$  sont duals l'un de l'autre. On dit aussi que la forme  $\beta$  met  $V$  et  $V'$  en dualité l'un avec l'autre. La structure constituée par les données de  $V, V'$  et  $\beta$  est appelée une paire d'espaces vectoriels; on la représente par la notation  $(V, V', \beta)$ .

Quand nous parlerons d'une paire d'espaces vectoriels, il sera toujours sous-entendu que ces espaces ont le même corps de base, et que ce corps est commutatif.

Proposition 3. Soit  $(V, V', \beta)$  une paire d'espaces vectoriels. Si l'un des espaces vectoriels  $V$  ou  $V'$  est de dimension finie, il en est de même de l'autre et les deux espaces ont la même dimension. Les homomorphismes associés à  $\beta$  sont le premier un isomorphisme de  $V$  sur l'espace  $F'$  des formes linéaires sur  $V'$ , le second un isomorphisme de  $V'$  sur l'espace  $F$  des formes linéaires sur  $V$ . Si  $\{u_1, \dots, u_n\}$  est une base de  $V$ , il existe une base  $\{u'_1, \dots, u'_n\}$  de  $V'$  telle que  $\beta(u_i, u'_j) = 0$  pour  $i \neq j$ ,  $\beta(u_i, u'_i) = e$  (où  $e$  est l'élément unité de  $K$ ).

Soient  $J$  et  $J'$  les homomorphismes associés à  $\beta$ ; nous savons que  $J$  et  $J'$  sont des isomorphismes. Supposant par exemple que  $V$  est de dimension finie  $n$ , on voit que  $V'$  est isomorphe à  $J'(V')$  qui est un sous-espace de  $F$ . Or nous savons que  $F$  est de dimension  $n$  (prop. 1,  $n^0 1$ );

donc  $V'$  est de dimension finie  $n'$ , et on a  $n' = \dim J'(V') \leq n$ .  
 Intervertissant les rôles joués par  $V$  et  $V'$ , on voit de même que  
 $n = \dim J(V) \leq n'$ . On a donc  $n = n'$ ; de plus, les égalités  
 $\dim J(V) = n$ ,  $\dim J'(V') = n$  entraînent  $J(V) = F'$ ,  $J'(V') = F$   
 (cf. proposition 12, § 2, n°6). Prenant pour  $u'_1, \dots, u'_n$  les éléments  
 de  $V'$  qui sont appliqués par  $J'$  sur les éléments de la base de  $F$   
 résultant de l'application de la proposition 1, n°1 aux espaces  $V$   
 et  $K$ , on obtient une base de  $V'$  satisfaisant aux conditions imposées.

Corollaire. Soit  $V$  un espace de dimension finie sur un corps commu-  
tatif  $K$ , et soit  $\lambda$  une forme linéaire sur l'espace  $F$  des formes  
linéaires sur  $V$ . Il existe alors un élément  $x$  et un seul de  $V$   
tel que  $\lambda(f) = f(x)$  pour tout  $f \in F$ .

Cela résulte immédiatement de l'application de la proposition 3  
 à la paire constituée par  $V$ , par  $F$  et par la forme bilinéaire  
 canonique sur  $V \times F$ .

(Insérer la définition des bases duales).

3. APPLICATION AUX EQUATIONS LINEAIRES.

Proposition 4. Soit  $(V, V', \beta)$  une paire d'espaces vectoriels. Soit  $W$  un sous-espace de  $V$ , et soit  $W'$  l'ensemble des éléments  $x' \in V'$  tels que  $\beta(x, x') = 0$  pour tout  $x \in W$ . Dans ces conditions, on a les résultats suivants :

1)  $W'$  est un sous-espace de  $V'$  ; 2) Si  $x \in W$ , la valeur de  $\beta(x, x')$  ne dépend que de la classe  $\bar{x}'$  de  $x'$  modulo  $W'$  ; si on pose  $\bar{\beta}(x, \bar{x}') = \beta(x, x')$ ,  $\bar{\beta}$  est une forme bilinéaire non dégénérée sur  $W \times (V'/W')$  ; 3) Si l'un des espaces  $W$  ou  $V'/W'$  est de dimension finie  $n$ , il en est de même de l'autre et les deux espaces ont la même dimension ; on peut affirmer dans ce cas que tout élément  $x$  de  $V$  tel que  $\beta(x, x') = 0$  pour tout  $x' \in W'$  est dans  $W$ . 4) Si  $V$  est de dimension finie  $m$ , on a  $\dim W' = m - \dim W$ .

L'assertion 1) et la première partie de 2) sont évidentes.

Soit  $\bar{x}'_0$  un élément de  $V'/W'$  tel que  $\bar{\beta}(x, \bar{x}'_0) = 0$  pour tout  $x \in W$ , et soit  $x'_0$  un élément de  $V'$  appartenant à la classe  $\bar{x}'_0$  modulo  $W'$  ; on a alors  $\beta(x, x'_0) = 0$  pour tout  $x \in W$ , d'où  $x'_0 \in W'$ ,  $\bar{x}'_0 = 0$ . Si  $x_0$  est un élément  $\neq 0$  de  $W$ , le caractère non dégénéré de  $\beta$  implique l'existence d'un  $x' \in V'$  tel que  $\beta(x_0, x') \neq 0$ , d'où  $\bar{\beta}(x_0, \bar{x}') \neq 0$ , si  $\bar{x}'$  est la classe de  $x'$  modulo  $W'$ . L'assertion 2) est donc démontrée.

La première partie de 3) en résulte si on tient compte de la propos. 3, n° 2. L'ensemble  $W_1$  des éléments  $x \in V$  tels que  $\beta(x, x') = 0$  pour tout  $x' \in W'$  est évidemment un sous-espace de  $V$  contenant  $W$ , et il est clair que l'ensemble des  $x' \in V'$  tels que  $\beta(x, x') = 0$  pour tout  $x \in W_1$  est  $W'$ . Utilisant alors la première partie de l'assertion 3), on obtient  $\dim W_1 = \dim (V'/W') = \dim W$ , d'où  $W_1 = W$  en vertu de la propos. 12, § 2, n° 2. Si  $V$  est de dimension finie  $m$ , on a  $\dim W = \dim (V'/W') = \dim V' - \dim W' = m - \dim W'$  (cf. prop. 12, § 2, n° 6 et proposition 3, n° 2).

Corollaire. Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ , sur un corps commutatif et soit  $W$  un sous-espace de  $V$  de dimension  $m$ . L'ensemble des formes linéaires  $f$  sur  $V$  qui s'annulent sur  $W$  (c'est-à-dire telles que  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in W$ ) est un sous-espace de dimension  $m-n$  de l'espace des formes linéaires sur  $V$ . On peut définir  $W$  par un système de  $n-m$  équations  $f_1 = 0, \dots, f_{n-m} = 0$ , où  $f_1, \dots, f_{n-m}$  sont des formes linéaires linéairement indépendantes.

La première assertion résulte tout de suite de la proposition 4, appliquée à la paire  $(V, F, \beta)$ , où  $F$  est l'espace des formes linéaires sur  $V$  et  $\beta$  la forme bilinéaire canonique sur  $V \times F$ . Si  $\{f_1, \dots, f_{m-n}\}$  est une base de l'espace des formes linéaires sur  $V$  qui s'annulent sur  $W$ , tout  $x \in V$  tel que  $f_1(x) = 0, \dots, f_{m-n}(x) = 0$  sera aussi tel que  $f(x) = 0$  pour toute forme linéaire  $f$  qui s'annule sur  $W$ , et il résulte de la proposition 4 que les équations  $f_1 = 0, \dots, f_{m-n} = 0$  formeront un système d'équations de  $W$ .

Corollaire 2. Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif, et soient  $f_1, \dots, f_n$  des formes linéaires sur  $V$ . Soit  $W$  le sous-espace de  $V$  formé des éléments  $x$  tels que  $f_i(x) = 0$  ( $1 \leq i \leq n$ ). La dimension de  $W$  est alors  $n-r$ , où  $r$  est la dimension de l'espace des relations linéaires entre  $f_1, \dots, f_n$ . Toute forme  $f$  qui s'annule sur  $W$  est une combinaison linéaire de  $f_1, \dots, f_n$ .

Soit en effet  $G$  le sous-espace de l'espace  $F$  des formes linéaires sur  $V$  qui est engendré par  $f_1, \dots, f_n$ . L'espace  $G$  est alors de dimension  $n-r$  (corollaire 1 à la prop. 12, §2, n°6). Le corollaire 2 résulte alors de l'application de la proposition 4 à la paire  $(F, V, \beta)$ , où on pose  $\beta(f, x) = f(x)$  pour tout  $(f, x) \in F \times V$ .

Considérons maintenant un système d'équations linéaires

$$\sum_{j=1}^n x_j a_{ij} = b_i \quad (1 \leq i \leq r)$$

sur un corps commutatif  $K$ . Soit  $\varphi$  l'application de  $K^n$  dans  $K^r$  définie par la formule

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \left( \sum_{j=1}^n x_j a_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^n x_j a_{rj} \right)$$

Nous avons appelé rang du système (1) la dimension du sous-espace  $\varphi(K^n)$  de  $K^r$ . D'autre part, nous avons dit qu'on désigne communément par  $\sum_{i=1}^n x_i a_i$  la forme linéaire sur  $K^n$  qui associe à tout  $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$  l'élément  $\sum_{i=1}^n x_i a_i$  de  $K$ .

Proposition 5. Soit  $\sum_{j=1}^n x_j a_{ij} = b_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) un système d'équations linéaires sur un corps commutatif  $K$ . Si parmi les  $r$  formes linéaires  $\sum_{j=1}^n x_j a_{ij}$  ( $1 \leq i \leq r$ ) on peut en trouver  $\rho$  mais non  $\rho+1$  qui soient linéairement indépendantes, le système est de rang  $\rho$ . Les solutions d'un système d'équations linéaires homogènes de rang  $\rho$  à  $n$  inconnues forment un sous-espace de  $K^n$  de dimension  $n-\rho$ .

Utilisant les mêmes notations que plus haut, on observera que la dimension de l'espace  $\varphi^{-1}(0)$  des solutions du système  $\sum_{j=1}^n x_j a_{ij} = 0$  ( $1 \leq i \leq r$ ) est de dimension  $n-\rho$  parce que  $\varphi(K^n)$  est isomorphe à  $K^n / \varphi^{-1}(0)$ . En vertu du corollaire 2 à la proposition 4,  $\rho = n - (n-\rho)$  est égal à la dimension du sous-espace de l'espace des formes linéaires sur  $K^n$  engendré par les  $r$  formes  $\sum_{j=1}^n x_j a_{ij}$  ( $1 \leq i \leq r$ ). La proposition 5 résulte donc de la dernière assertion du théorème 1, §2, n°2.

Le rang d'un système de  $r$  équations linéaires à  $n$  inconnues est évidemment au plus égal au plus grand des nombres  $r$  et  $n$ . La proposition 5 admet donc le corollaire suivant :

Corollaire : Un système de  $r$  équations linéaires homogènes à  $n$  inconnues admet certainement une solution non triviale si  $r < n$ .

4. APPLICATIONS LINEAIRES DUALES.

Définition 4. Soient  $(V, V', \beta)$  et  $(W, W', \gamma)$  des paires d'espaces vectoriels sur un même corps, et soit  $\varphi$  une application linéaire de  $V$  dans  $W$ . On dit qu'une application  $\varphi'$  de  $W'$  dans  $V'$  est une application duale de  $\varphi$  (par rapport aux formes bilinéaires  $\beta$  et  $\gamma$ ) si on a  $\gamma(\varphi(x), y') = \beta(x, \varphi'(y'))$  pour tout  $(x, y') \in V \times W'$ .

Supposons qu'il en soit ainsi, et désignons par  $J'$  le second homomorphisme associé à la forme bilinéaire  $\beta$ . Si  $y'$  est un élément quelconque de  $W'$ , l'application  $x \rightarrow \gamma(\varphi(x), y')$  est une forme linéaire  $f_{y'}$  sur  $V$ , et on a  $f_{y'} = J'(\varphi'(y'))$ , ce qui montre que  $f_{y'}$  est dans le sous-espace  $J'(V')$  de l'espace  $F$  des formes linéaires sur  $V$ . Nous savons que  $J'$  est un isomorphisme de  $V'$  sur  $J'(V')$ ; soit  $J'^{-1}$  l'application réciproque de  $J'$ . On a donc  $\varphi'(y') = J'^{-1}(f_{y'})$ . Il résulte de là que si une application linéaire de  $V$  dans  $W$  admet une duale, cette duale est unique. De plus, l'application  $y' \rightarrow f_{y'}$  de  $W'$  dans  $F$  étant visiblement linéaire, on voit que la duale d'une application linéaire (si elle existe) est linéaire.

Si le contexte indique suffisamment quelles sont les formes bilinéaires  $\beta$  et  $\gamma$  qui définissent les dualités entre  $V$  et  $V'$  et  $W$  et  $W'$ , nous désignerons par  ${}^t\varphi$  l'application duale d'une application linéaire  $\varphi$  (lorsqu'elle existe).

Soient  $\beta'$  et  $\gamma'$  les formes bilinéaires sur  $V' \times V$  et  $W' \times W$  définies par les formules  $\beta'(x', x) = \beta(x, x')$ ,  $\gamma'(y', y) = \gamma(y, y')$ . Si une application linéaire  $\varphi$  de  $V$  dans  $W$  admet une duale  ${}^t\varphi$  par rapport aux formes  $\beta, \gamma$ , l'application  $\varphi$  est duale de  ${}^t\varphi$  par rapport aux formes  $\gamma', \beta'$ . Nous dirons aussi que les applications  $\varphi, {}^t\varphi$  sont duales l'une de l'autre.

Proposition 6. Soient  $(V, V', \beta)$  et  $(W, W', \gamma)$  des paires d'espaces  
vectoriels sur un même corps de base. Soient  $\varphi$  et  $\psi$  des applications  
linéaires de  $V$  dans  $W$  qui admettent des applications duales  ${}^t\varphi$  et  ${}^t\psi$  ,  
et soient  $a$  et  $b$  des éléments du corps de base. L'application  $a\varphi + b\psi$   
admet alors une application duale, qui est  $a({}^t\varphi) + b({}^t\psi)$  .

Soit  $(x, y')$  un élément quelconque de  $V \times W'$  . On a  
$$\beta(x, (a({}^t\varphi) + b({}^t\psi))(y')) = a\beta(x, {}^t\varphi(y')) + b\beta(x, {}^t\psi(y')) =$$
  
$$= a\gamma(\varphi(x), y') + b\gamma(\psi(x), y') = \gamma((a\varphi + b\psi)(x), y')$$
  
ce qui démontre la proposition 6 .

Proposition 7. Soient  $(U, U', \alpha), (V, V', \beta)$  et  $(W, W', \gamma)$  des paires  
d'espaces vectoriels sur un même corps de base. Soient  $\varphi$  une application  
linéaire de  $U$  dans  $V$  et  $\psi$  une application linéaire de  $V$  dans  $W$  .  
Si les applications  $\varphi$  et  $\psi$  admettent les duales  ${}^t\varphi$  et  ${}^t\psi$  ,  
l'application  $\psi\varphi$  de  $U$  dans  $W$  admet une duale qui est  
 $({}^t\varphi)({}^t\psi)$  .

Soit en effet  $(x, z')$  un élément quelconque de  $U \times W'$  . On a  
$$\gamma(\psi\varphi(x), z') = \beta(\varphi(x), {}^t\psi(z')) = \alpha(x, ({}^t\varphi)({}^t\psi(z')))$$
  
ce qui démontre notre assertion.

Proposition 8. Soient  $(V, V', \beta)$  et  $(W, W', \gamma)$  des paires d'espaces  
vectoriels sur un même corps de base. Supposons que  $V$  soit de  
dimension finie. Toute application linéaire de  $V$  dans  $W$  admet  
alors une duale.

Soit  $J'$  le second homomorphisme associé à la forme  $\beta$  . Nous savons  
que  $J'$  est un isomorphisme de  $V'$  sur l'espace  $F$  des formes linéaires  
sur  $V$  . Soit  $y'$  un élément quelconque de  $W'$  , et soit  $f_{y'}$  la forme  
linéaire sur  $V$  définie par  $f_{y'}(x) = \beta(\varphi(x), y')$  ( $x \in V$ ) . L'application  
 ${}^t\varphi$  définie par  ${}^t\varphi(y') = J'^{-1}(f_{y'})$  est alors duale de  $\varphi$  , ce qui  
démontre la proposition 8 .



Soit en particulier  $V$  un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif  $K$ , et soit  $F$  l'espace des formes linéaires sur  $V$ . La forme bilinéaire canonique  $\beta$  sur  $V \times F$  met  $V$  et  $F$  en dualité l'un avec l'autre ; tout endomorphisme  $\varphi$  de  $V$  admet une application duale qui est un endomorphisme  ${}^t\varphi$  de  $F$ . L'application  $\varphi \rightarrow {}^t\varphi$  applique bi-univoquement l'anneau  $\mathcal{O}$  des endomorphismes de  $V$  sur l'anneau  $\mathcal{O}'$  des endomorphismes de  $F$ . Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont des éléments de  $\mathcal{O}$ , on a  ${}^t(\varphi + \psi) = {}^t\varphi + {}^t\psi$ , mais  ${}^t(\varphi \cdot \psi) = ({}^t\psi)({}^t\varphi)$ . On exprime ces faits en disant que l'application  $\varphi \rightarrow {}^t\varphi$  est un anti-isomorphisme de  $\mathcal{O}$  avec  $\mathcal{O}'$ . L'application identique de  $V$  admet pour duale l'application identique de  $F$  ; il résulte de là et de ce que nous avons dit plus haut que le dual d'un endomorphisme régulier  $\varphi$  de  $V$  est un endomorphisme régulier de  $F$ , et que  ${}^t(\varphi^{-1}) = ({}^t\varphi)^{-1}$ . On posera  ${}^t\varphi^{-1} = ({}^t\varphi)^{-1}$ .

4. MATRICES

n° 1. DÉFINITIONS.

Définition 1. Soient  $m$  et  $n$  des entiers  $> 0$  et  $E$  un ensemble. On appelle matrice de type  $(m,n)$  à coefficients dans  $E$  une famille  $(a_{ij})$  d'éléments de  $E$ , définie par une application  $(i,j) \rightarrow a_{ij}$  de l'ensemble  $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$  dans  $E$ . Les éléments  $a_{ij}$  s'appellent les coefficients de la matrice ;  $a_{ij}$  s'appelle le coefficient d'indice  $i$  et  $j$ .

Si  $1 \leq i_0 \leq m$ , la famille définie par l'application  $(1,j) \rightarrow a_{i_0 j}$  de  $\{1\} \times \{1, \dots, n\}$  dans  $E$  est appelée la ligne d'indice  $i_0$  (ou la  $i_0$ -ième ligne) de la matrice ; si  $1 \leq j_0 \leq n$ , la famille définie par l'application  $(i,1) \rightarrow a_{i j_0}$  de  $\{1, \dots, m\} \times \{1\}$  dans  $E$  est appelée la colonne d'indice  $j_0$  (ou la  $j_0$ -ième colonne) de la matrice. Une matrice de type  $(m,m)$  est appelée une matrice carrée ; le nombre  $m$  est appelé le degré de cette matrice carrée.

Les termes de "ligne", "colonne", "matrice carrée" proviennent de ce que l'on représente souvent une matrice  $(a_{ij})$  par un tableau rectangulaire que l'on imagine divisé en  $mn$  cases, les coefficients de la  $i$ -ième ligne de la matrice occupant les cases de la  $i$ -ième rangée horizontale, ceux de la  $j$ -ième colonne, les cases de la  $j$ -ième rangée verticale :

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Il existe une application unique de l'ensemble vide dans  $E$ . Il est souvent commode de convenir que cette application est aussi appelée une matrice ; la matrice définie par cette application est appelée la matrice vide. Si  $m$  est un entier  $\geq 0$  quelconque, on convient que la matrice vide

est de type  $(0,m)$  ou  $(m,0)$ . La matrice vide est donc la seule matrice qui soit à la fois de plusieurs types différents.

Donnons-nous maintenant une famille  $(A_{kl})_{1 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq q}$  de matrices à coefficients dans un ensemble  $E$ . Supposons que  $A_{kl}$  soit de type  $(m_k, n_l)$  (c'est-à-dire que le nombre  $m_k$  des lignes de  $A_{kl}$  ne dépende que de  $k$  et que le nombre  $n_l$  des colonnes de  $A_{kl}$  ne dépende que de  $l$ ) ; soit  $a_{kl,uv}$  le coefficient d'indices  $u$  et  $v$  de  $A_{kl}$ . Posons  $M = \sum_{k=1}^p m_k$ ,  $N = \sum_{l=1}^q n_l$ ,  $M_r = \sum_{k=1}^r m_k$ ,  $N_s = \sum_{l=1}^s n_l$  ( $0 \leq r \leq p$ ,  $0 \leq s \leq q$ ). On a donc  $0 = M_0 < M_1 < \dots < M_p = M$ ,  $0 = N_0 < N_1 < \dots < N_q = N$ . Si  $(i,j) \in [1, M] \times [1, N]$ , nous posons

$$a_{ij} = a_{rs; i-M_{r-1}, j-N_{s-1}}$$

où les entiers  $r$  et  $s$  sont définis par les conditions  $M_{r-1} < i \leq M_r$ ,  $N_{s-1} < j \leq N_s$ . On obtient ainsi une matrice  $(a_{ij})$  de type  $(M, N)$  à coefficients dans  $E$ . La structure constituée par les données de la matrice  $(a_{ij})$  et des matrices  $A_{kl}$  constitue ce que l'on appelle une matrice compartimentée ; on dit que les matrices  $A_{kl}$  sont les blocs de cette matrice compartimentée. Une matrice compartimentée de type  $(M, N)$  est uniquement déterminée quand on donne les décompositions  $M = \sum_{k=1}^p m_k$ ,  $N = \sum_{l=1}^q n_l$  des entiers  $M$  et  $N$  ; et, si on donne arbitrairement des décompositions de  $M$  et de  $N$  en sommes d'entiers  $> 0$ , on en déduit une compartimentation de toute matrice de type  $(M, N)$ . Deux matrices compartimentées sont dites compartimentées de la même manière si les décompositions  $M = \sum_{k=1}^p m_k$ ,  $N = \sum_{l=1}^q n_l$  qui définissent les compartimentations de ces matrices sont les mêmes. Une matrice  $A$  étant compartimentée au moyen de matrices  $A_{kl}$  ( $1 \leq k \leq p$ ,  $1 \leq l \leq q$ ), on convient de représenter  $A$  par le tableau rectangulaire

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1q} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{p1} & \dots & A_{pq} \end{pmatrix}$$

dont on imagine les cases occupées par les lettres  $A_{kl}$ . On notera qu'il y a là un abus de notation, puisque le tableau (1) devrait de droit représenter la matrice de type  $(p,q)$  dont les coefficients sont les matrices  $A_{kl}$ . Cet abus de notation n'est pas dangereux en pratique, car il est rare que l'on ait à considérer des matrices dont les coefficients soient eux-mêmes des matrices.

Nous aurons principalement à considérer des matrices à coefficients dans un corps  $K$ . L'ensemble des matrices d'un certain type  $(m,n)$  à coefficients dans  $K$  n'est autre que l'ensemble des applications dans  $K$  de l'ensemble  $\{1, m\} \times \{1, n\}$ . Cet ensemble se trouve donc muni d'une structure d'espace vectoriel sur  $K$  (cf. § 2, n°1, exemple 2). Si  $(a_{ij})$  et  $(b_{ij})$  sont des éléments de cet espace vectoriel, on a  $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$  et  $a(a_{ij}) = (aa_{ij})$  pour tout  $a \in K$ . On remarquera que, si  $G$  est un sous-groupe du groupe additif de  $K$ , les matrices dont les coefficients appartiennent à  $G$  forment elles-mêmes un groupe additif. Désignons par  $E_{ij}$  la matrice de type  $(m,n)$  dont le coefficient d'indices  $i,j$  est l'élément unité de  $K$ , tous les autres coefficients étant nuls. On a alors  $(a_{ij}) = \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} a_{ij} E_{ij}$ , d'où il résulte que l'ensemble des éléments  $E_{ij}$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ) est une base de l'espace des matrices de type  $(m,n)$ . Ce dernier espace est donc de dimension  $mn$ .

On notera que si

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1q} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{p1} & \dots & A_{pq} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1q} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{p1} & \dots & B_{pq} \end{pmatrix}$$

sont des matrices compartimentées de la même manière à coefficients dans  $K$ , on a (pour tout  $a \in K$ )

$$A+B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & \dots & A_{1q} + B_{1q} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{p1} + B_{p1} & \dots & A_{pq} + B_{pq} \end{pmatrix} \quad aA = \begin{pmatrix} aA_{11} & \dots & aA_{1q} \\ \dots & \dots & \dots \\ aA_{p1} & \dots & aA_{pq} \end{pmatrix}$$

n° 2. EMPLOI DES MATRICES POUR REPRESENTER LES APPLICATIONS LINEAIRES.

Définition 2. Soit  $U$  un espace vectoriel de dimension finie  $m$  sur un corps  $K$ . On entend par famille basique dans  $U$  une famille libre d'éléments de  $U$  définie par une application dans  $U$  de l'ensemble  $[1, m]$ .

Il résulte tout de suite du corollaire 3 à la proposition 12, § 2, n° 6 que l'ensemble des éléments d'une famille basique dans  $U$  est une base de  $U$ .

Définition 3. Soient  $U$  et  $V$  des espaces vectoriels de dimensions finies  $m$  et  $n$  sur un corps  $K$ , et soit  $\varphi$  une application linéaire de  $U$  dans  $V$ .

Soient  $(u_i)_{1 \leq i \leq m}$  et  $(v_j)_{1 \leq j \leq n}$  des familles basiques dans  $U$  et dans  $V$ . Posons  $\varphi(u_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} v_j$  ( $1 \leq i \leq m$ ), où les  $a_{ji}$  sont des éléments de  $K$ . Soit  $\Phi_\varphi$  la matrice définie par l'application  $(j, i) \rightarrow a_{ji}$  de  $[1, n] \times [1, m]$  dans  $K$ . Nous dirons que  $\Phi_\varphi$  est la matrice qui représente  $\varphi$  (par rapport aux familles basiques  $(u_i)$  et  $(v_j)$ ).

Les familles  $(u_i)$  et  $(v_j)$  étant données, on voit qu'il existe une correspondance bi-univoque entre les applications linéaires de  $U$  dans  $V$  et les matrices qui les représentent ; de plus, toute matrice de type  $(n, m)$  à coefficients dans  $K$  représente une application linéaire de  $U$  dans  $V$  (cf. proposition 7, § 2, n° 3). Si  $K$  est commutatif, les applications linéaires de  $U$  dans  $V$  forment un espace vectoriel sur  $K$ , et l'application  $\varphi \rightarrow \Phi_\varphi$  est un isomorphisme de cet espace vectoriel sur l'espace des matrices de type  $(n, m)$  à coefficients dans  $K$ .

Si nous prenons en particulier pour  $V$  l'ensemble  $K$ , considéré comme espace vectoriel de dimension 1 sur  $K$ , et pour famille basique la famille définie par l'application  $1 \rightarrow e$  (où  $e$  est l'élément unité de  $K$ ), nous voyons que nous pouvons représenter les formes linéaires  $f$  sur  $U$  par des matrices de type  $(1, m)$  : si  $f(u_i) = a_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ),

la forme linéaire  $f$  sera représentée par la matrice  $(a_1, \dots, a_m)$ .

Considérons maintenant le cas où  $U = K$ ,  $u_1 = e$ . Si on fait correspondre à tout  $x \in V$  la matrice qui représente l'application  $\phi_x$  de  $K$  dans  $V$  définie par  $\phi_x(e) = x$ , on obtient un isomorphisme de  $V$  sur l'espace des matrices de type  $(n,1)$  à coefficients dans  $K$ . On peut donc, une famille basique  $(v_j)$  étant donnée dans  $V$ , représenter les éléments de  $V$  par des matrices de type  $(n,1)$ . Les coefficients de la matrice qui représente un  $x \in V$  ne sont autres que les coefficients de l'expression de  $x$  comme combinaison linéaire de  $v_1, \dots, v_n$ .

Enfin, dans le cas où  $V = U$ , on prend en général les familles  $(u_i)$  et  $(v_j)$  identiques l'une à l'autre. Si  $\phi$  est un endomorphisme de  $U$ , la matrice qui représente  $\phi$  par rapport aux familles  $(u_i)$  et  $(u_i)$  est dite représenter  $\phi$  par rapport à la famille  $(u_i)$ . On notera que les matrices qui représentent les endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension  $m$  sont des matrices carrées de degré  $m$ .

Revenant aux notations de la définition 3, on observera que les colonnes de la matrice  $\Phi_\phi$  sont les matrices qui représentent les vecteurs  $\phi(u_i) \in V$  ( $1 \leq i \leq m$ ) par rapport à la famille  $(v_j)$ . La dimension de  $\phi(U)$  est donc égale à la dimension de l'espace engendré par les colonnes de  $\Phi_\phi$ .

Définition 4. Soit  $\Phi$  une matrice de type  $(n,m)$  à coefficients dans un corps  $K$ . On appelle rang de  $\Phi$  la dimension du sous-espace de l'espace des matrices de type  $(n,1)$  qui est engendré par les colonnes de  $\Phi$ .

On notera que la notion de rang d'une matrice à coefficients dans un corps  $K$ , telle qu'elle est définie ici, semble dépendre non seulement de la matrice, mais du corps  $K$ . Nous verrons cependant plus loin (corollaire 2, à la prop.4, § 5, n° 2) que, si les coefficients de la matrice appartiennent à un sous-corps  $K'$  de  $K$ , le rang de la matrice

est le même, qu'on la considère comme matrice à coefficients dans K ou dans K' .

On a donc les résultats suivants :

Proposition 1. Si une matrice  $\Phi$  représente une application linéaire  $\varphi$  d'un espace vectoriel U dans un espace vectoriel V , la dimension de l'espace  $\varphi(U)$  est égale au rang de  $\Phi$  .

Proposition 2. Soit  $\sum_{j=1}^n x_j a_{ij} = b_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) un système d'équations linéaires sur un corps K . Le rang de ce système (cf. § 2, n° 8) est égal au rang de la matrice  $(a_{ij})$  .

Soit maintenant  $(U, U^*, \beta)$  une paire d'espaces vectoriels sur un corps commutatif K . Supposons que U soit de dimension finie m , et soit  $(u_i)$  une famille basique de U . Il existe alors une famille  $(u_i^*)$  d'éléments de  $U^*$  telle que  $\beta(u_i, u_k^*)$  soit 0 si  $k \neq i$  et soit l'élément unité de K si  $k = i$  ; de plus, la famille  $(u_i^*)$  est basique dans  $U^*$  (cf. prop. 3, § 3, n° 2). Nous dirons que  $(u_i^*)$  est la famille basique duale de  $(u_i)$  par rapport à  $\beta$  .

Soient  $(U, U^*, \beta)$  et  $(V, V^*, \gamma)$  des paires d'espaces vectoriels de dimensions finies sur un corps commutatif K , et soit  $\varphi$  une application linéaire de U dans V . Il existe alors une application linéaire  $t_\varphi$  de  $V^*$  dans  $U^*$  , duale de  $\varphi$  par rapport à  $\beta$  et  $\gamma$  (proposition 8, n° 4, § 3). Soient  $(u_i)$  et  $(v_j)$  des familles basiques dans U et dans V ; soient  $(u_i^*)$  et  $(v_j^*)$  leurs duales par rapport à  $\beta$  et  $\gamma$  respectivement. Posons  $\varphi(u_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} v_j$  . On a alors  $\beta(u_i, t_\varphi(v_j^*)) = \gamma(\varphi(u_i), v_j^*) = a_{ji}$  d'où on déduit facilement que  $t_\varphi(v_j^*) = \sum_{i=1}^m a_{ji} u_i^*$  . On voit donc que la matrice qui représente  $t_\varphi$  par rapport aux familles basiques  $(v_j^*)$  et  $(u_i^*)$  est la matrice définie par l'application  $(i, j) \rightarrow a_{ij}$  de  $[1, m] \times [1, n]$  dans K .

Définition 5. Soit  $A$  une matrice de type  $(n,m)$  définie par une application  $(j,i) \rightarrow a_{ji}$  de  $[1,n] \times [1,m]$  dans un ensemble  $E$ . La matrice de type  $(m,n)$  définie par l'application  $(i,j) \rightarrow a_{ij}$  de  $[1,m] \times [1,n]$  dans  $E$  est appelée la transposée de  $A$ ; on désigne cette matrice par  $A$ .

Nous avons donc démontré le résultat suivant :

Proposition 3. Soient  $(U, U^*, \beta)$  et  $(V, V^*, \gamma)$  des paires d'espaces vectoriels de dimensions finies sur un corps  $K$ ; soit  $\varphi$  une application linéaire de  $U$  dans  $V$ , et soit  ${}^t\varphi$  l'application linéaire de  $V^*$  dans  $U^*$ , duals de  $\varphi$  par rapport à  $\beta$  et  $\gamma$ . Soient  $(u_i)$  et  $(v_j)$  des familles basiques dans  $U$  et dans  $V$ ; soient  $(u_i^*)$  et  $(v_j^*)$  leurs familles duales par rapport à  $\beta$  et  $\gamma$  respectivement. Soit  $\Phi$  la matrice qui représente  $\varphi$  par rapport aux familles  $(u_i)$  et  $(v_j)$ . La matrice qui représente l'application  ${}^t\varphi$  par rapport aux familles  $(v_j^*)$  et  $(u_i^*)$  est alors la transposée de la matrice  $\Phi$ .

Il est facile de voir que l'opération de transposition est un isomorphisme de l'espace des matrices de type  $(n,m)$  à coefficients dans un certain corps  $K$  sur l'espace des matrices de type  $(m,n)$  à coefficients dans un corps  $K$ . Faisant usage de la proposition 3, le résultat peut aussi se déduire de la proposition 6, n° 4, § 3.



n° 3. MULTIPLICATION DES MATRICES.

Soient U, V et W des espaces vectoriels de dimensions finies m, n et p sur un même corps de base K ; soient φ une application linéaire de U dans V et ψ une application linéaire de V dans W . Choisissons des familles basiques (u<sub>i</sub>), (v<sub>j</sub>) et (w<sub>k</sub>) dans U, V et W , et posons

φ(u<sub>i</sub>) = ∑<sub>j=1</sub><sup>n</sup> a<sub>ji</sub>v<sub>j</sub> (1 ≤ i ≤ m) ; ψ(v<sub>j</sub>) = ∑<sub>k=1</sub><sup>p</sup> b<sub>kj</sub>w<sub>k</sub> (1 ≤ j ≤ n)

où les a<sub>ji</sub>, b<sub>kj</sub> sont des éléments de K . On a donc

ψ φ(u<sub>i</sub>) = ∑<sub>k=1</sub><sup>p</sup> c<sub>ki</sub>w<sub>k</sub> (1 ≤ i ≤ m)

où c<sub>ki</sub> = ∑<sub>j=1</sub><sup>n</sup> b<sub>kj</sub>a<sub>ji</sub> . Ceci suggère la définition suivante :

~~Propriété~~ Définition 6. Soient Φ = (a<sub>ji</sub>)<sub>1 ≤ j ≤ n, 1 ≤ i ≤ m</sub> et

~~Ψ = (b<sub>kj</sub>)<sub>1 ≤ k ≤ p, 1 ≤ j ≤ n</sub>~~ et Ψ = (b<sub>kj</sub>)<sub>1 ≤ k ≤ p, 1 ≤ j ≤ n</sub> des matrices

de types respectifs (n,m) et (p,n) à coefficients dans un corps K .

On appelle produit de Ψ par Φ , et on désigne par Ψ Φ , la matri-

ce (c<sub>ki</sub>)<sub>1 ≤ k ≤ p, 1 ≤ i ≤ m</sub> dont les coefficients sont définis par les

formules c<sub>ki</sub> = ∑<sub>j=1</sub><sup>n</sup> b<sub>kj</sub>a<sub>ji</sub> .

Remarques. 1) Le produit d'une matrice de type (p,n') par une matrice de type (n,m) n'est pas défini si n ≠ n'. En particulier, le produit de deux matrices carrées est défini si et seulement si ces matrices ont le même degré.

2) On voit que le coefficient d'indices k,i de la matrice Ψ Φ est l'unique coefficient de la matrice de type (1,1), produit de la k-ième ligne de Ψ par la i-ème colonne de Φ .

3) Si A est un sous-anneau du corps K et si les coefficients des matrices Φ et Ψ appartiennent à A , il en est de même des coefficients de Ψ Φ .

4) L'ensemble des matrices de type  $(n,m)$  à coefficients dans  $K$  possède une structure d'anneau produit de  $nm$  anneaux identiques à  $K$ . La multiplication dans cet anneau est différente de la multiplication définie plus haut ; toutes les fois qu'on parlera de produits de matrices, c'est à la multiplication décrite dans la définition 6 qu'on se réfèrera.

Le résultat démontré au début de ce  $n^o$  peut maintenant s'exprimer de la manière suivante :

Proposition 4. Soient  $U, V$  et  $W$  des espaces vectoriels de dimensions finies dans un corps  $K$ , et soient  $(u_i), (v_j)$  et  $(w_k)$  des familles basiques dans ces espaces. Soient  $\phi$  une application linéaire de  $U$  dans  $V$  et  $\gamma$  une application linéaire de  $V$  dans  $W$ ; soient  $\Phi$  la matrice qui représente  $\phi$  par rapport aux familles basiques  $(u_i)$  et  $(v_j)$ , et  $\Psi$  la matrice qui représente  $\gamma$  par rapport aux familles basiques  $(v_j)$  et  $(w_k)$ . La matrice qui représente l'application linéaire  $\gamma \circ \phi$  de  $U$  dans  $W$  par rapport aux familles basiques  $(u_i)$  et  $(w_k)$  est alors le produit  $\Psi \Phi$ .

Proposition 5. Soient  $m, n, p, q$  des entiers  $> 0$ , soient  $\Phi, \Phi'$  des matrices de type  $(m,n)$ ,  $\Psi, \Psi'$  des matrices de type  $(n,p)$ ,  $\Theta$  une matrice de type  $(p,q)$ , toutes à coefficients dans un corps  $K$ . On a alors  $(\Phi + \Phi') \Psi = \Phi \Psi + \Phi' \Psi$ ,  $\Phi (\Psi + \Psi') = \Phi \Psi + \Phi \Psi'$ ,  $(\Phi \Psi) \Theta = \Phi (\Psi \Theta)$ .

Ces résultats se déduisent aisément de la proposition 4 si on interprète les matrices  $\Phi, \Phi', \Psi, \Psi', \Theta$  comme représentant des applications linéaires d'espaces vectoriels de dimensions convenables sur  $K$ .

Corollaire. Si  $A$  est un sous-anneau d'un corps  $K$ , les matrices carrées d'un certain degré  $m$  à coefficients dans  $A$  forment un anneau.

Soit maintenant  $(\Phi_i)_{1 \leq i \leq r}$  une séquence de matrices à coefficients dans un corps  $K$  ; supposons que  $\Phi_i$  soit de type  $(m_i, n_i)$  et que  $n_i = m_{i+1}$  ( $1 \leq i < r$ ). On peut alors, en opérant comme dans la définition 3, Alg.I, § 1, n°2, définir le produit de la séquence  $(\Phi_i)$ , produit que l'on note  $\prod_{i=1}^r \Phi_i$ . Si  $r = \sum_{u=1}^h r_u$  est une décomposition de  $r$  en somme d'entiers  $> 0$ , on a  $\prod_{i=1}^r \Phi_i = \prod_{u=1}^h \Psi_u$ , ou on a posé  $\Psi_u = \prod_{i=s_{u-1}+1}^{s_u} \Phi_i$ ,  $s_u = \sum_{v \leq u} r_v$  ; ce résultat se démontre exactement de la même manière que le théorème 1, Alg.I, § 1, n°3 ..

Proposition 6. Soient U et V des espaces vectoriels de dimensions finies sur un corps K, et soient  $(u_i)$  et  $(v_j)$  des familles basiques dans ces espaces. Soient  $\phi$  une application linéaire de U dans V et  $\Phi$  la matrice qui représente  $\phi$  par rapport aux familles  $(u_i)$  et  $(v_j)$ . Soient u un élément de U et  $\tilde{u}$  la matrice qui représente u par rapport à la famille  $(u_i)$ . Dans ces conditions, la matrice qui représente l'élément  $\phi(u)$  par rapport à la famille  $(v_j)$  est le produit  $\Phi \tilde{u}$ .

Soit  $\theta$  l'application linéaire de  $K$  (considéré comme espace vectoriel sur  $K$ ) dans U qui applique l'élément unité sur u. L'application  $\phi \theta$  est alors l'application linéaire de  $K$  dans V qui applique l'élément unité sur  $\phi(u)$ . La proposition 6 se déduit immédiatement de ce fait et de la proposition 3.

Proposition 7. Soient  $\Phi$  et  $\Psi$  des matrices compartimentées à coefficients dans un corps K. Supposons que

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \dots & \Phi_{1q} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{p1} & \dots & \Phi_{pq} \end{pmatrix} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \dots & \Psi_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Psi_{q1} & \dots & \Psi_{qr} \end{pmatrix},$$

que  $\Phi_{ij}$  soit de type  $(m_i, n_j)$  et que  $\Psi_{jk}$  soit de type  $(n_j, p_k)$ . Le produit  $\Phi \Psi$  est alors défini, et on a

$$\Phi \Psi = \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \dots & \Theta_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Theta_{p1} & \dots & \Theta_{pr} \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \Theta_{ik} = \sum_{j=1}^q \Phi_{ij} \Psi_{jk}$$

Posons  $M = \sum_{i=1}^p m_i$ ,  $N = \sum_{j=1}^q n_j$ ,  $P = \sum_{k=1}^r p_k$ . La matrice  $\Phi$  est donc de type  $(M, N)$ , tandis que  $\Psi$  est de type  $(N, P)$ , ce qui montre que  $\Phi \Psi$  est défini. Soient  $\lambda$  et  $\bar{w}$  des entiers tels que  $1 \leq \lambda \leq M$ ,  $1 \leq \bar{w} \leq P$ . Soient  $s$  le plus petit entier tel que  $\lambda \leq \sum_{i=1}^s m_i$  et  $t$  le plus petit entier tel que  $\bar{w} \leq \sum_{k=1}^t p_k$ ; posons  $\lambda' = \lambda - \sum_{i=1}^{s-1} m_i$ ,  $\bar{w}' = \bar{w} - \sum_{k=1}^{t-1} p_k$ . On voit tout de suite que la ligne  $L_\lambda$  d'indice  $\lambda$  dans  $\Phi$  est la matrice compartimentée  $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_q)$ , où  $\Lambda_j$  est la ligne d'indice  $\lambda'$  de  $\Phi_{sj}$ ; de même, la colonne  $C_{\bar{w}}$  d'indice  $\bar{w}$  de  $\Psi$  est la matrice compartimentée

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_q \end{pmatrix}$$

où  $\Gamma_j$  est la colonne d'indice  $\bar{w}'$  de  $\Psi_{jt}$ . Si nous posons

$$\Lambda_j = (a_{j1} \dots a_{jn_j}) \quad \Gamma_j = \begin{pmatrix} b_{j1} \\ \vdots \\ b_{jn_j} \end{pmatrix}$$

$L_\lambda C_{\bar{w}}$  est la matrice de type  $(1, 1)$  dont l'unique coefficient est  $\sum_{j=1}^q \sum_{p=1}^{n_j} a_{jp} b_{jp}$ , d'où  $L_\lambda C_{\bar{w}} = \sum_{j=1}^q \Lambda_j \Gamma_j$ . Or, l'unique coefficient de  $L_\lambda C_{\bar{w}}$  est le coefficient  $c_{\lambda \bar{w}}$  d'indices  $\lambda$  et  $\bar{w}$  dans  $\Phi \Psi$  (cf. remarque 2 ci-dessus), tandis que l'unique coefficient de  $\Lambda_j \Gamma_j$  est le coefficient  $c_{\lambda' \bar{w}', j}$  d'indices  $\lambda'$  et  $\bar{w}'$  dans  $\Phi_{sj} \Psi_{jt}$ . On a donc  $c_{\lambda \bar{w}} = \sum_{j=1}^q c_{\lambda' \bar{w}', j}$ , ce qui démontre la proposition 7.

Proposition 8. Soient  $\Phi$  et  $\Psi$  des matrices à coefficients dans un corps  $K$ . Si le produit  $\Phi \Psi$  est défini, il en est de même de  ${}^t \Psi \cdot {}^t \Phi$ , et on a  ${}^t \Psi \cdot {}^t \Phi = {}^t (\Phi \Psi)$ .

La proposition 8 se déduit tout de suite de la proposition 7, § 3, n° 4 en faisant usage de la proposition 3, n° 2 et de la proposition 4 ci-dessus.

Soit  $(\Phi)_{1 \leq i \leq r}$  une séquence de matrices à coefficients dans un corps commutatif  $K$  telle que le produit  $\prod_{i=1}^r \Phi_i$  soit défini. Posons  $\Psi_i = {}^t \Phi_{r-i+1}$ ; on déduit alors aisément de la proposition 7 (par récurrence sur  $r$ ) que le produit  $\prod_{i=1}^r \Psi_i$  est défini et égal à  ${}^t(\prod_{i=1}^r \Phi_i)$ .

Nous avons déjà observé que les matrices carrées d'un certain degré  $n$  à coefficients dans un corps  $K$  forment un anneau. Cet anneau possède un élément unité, car il est isomorphe à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $K$ . De plus, on voit tout de suite que cet élément unité est la matrice  $(a_{ij})$  définie par les conditions  $a_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ ,  $a_{ii} = e$  (où  $e$  est l'élément unité de  $K$ ). La matrice ainsi définie s'appelle la matrice unité de degré  $n$ .

Proposition 9. Soit  $\Phi$  une matrice carrée de degré  $n$  à coefficients dans un corps  $K$ . Une condition nécessaire et suffisante pour que  $\Phi$  soit inversible dans l'anneau de toutes les matrices carrées de degré  $n$  à coefficients dans  $K$  est que le rang de  $\Phi$  soit égal à  $n$ .

Ce résultat se déduit tout de suite de la proposition 1, n° 2 et de la proposition 15, § 2, n° 7.

Remarque. Soit  $\Phi$  une matrice carrée inversible de degré  $n$  à coefficients dans un corps  $K$ . On a donc  $\Phi \Phi^{-1} = E_n$ , où  $E_n$  est la matrice unité de degré  $n$ . Or, on voit tout de suite que  ${}^t E_n = E_n$ . Il résulte donc de la proposition 8 que  ${}^t(\Phi^{-1}) \cdot {}^t \Phi = E_n$ , ce qui montre que  ${}^t \Phi$  est inversible et que  $({}^t \Phi)^{-1} = {}^t(\Phi^{-1})$ . La matrice  ${}^t(\Phi^{-1})$  peut donc être désignée sans crainte de confusion par  ${}^t \Phi^{-1}$ .

n° 4. EMPLOI DES MATRICES POUR REPRESENTER LES FORMES BILINEAIRES.

Définition 7. Soient  $U$  et  $V$  des espaces vectoriels de dimensions finies  $m$  et  $n$  sur un corps commutatif  $K$ , et soient  $(u_i)$  et  $(v_j)$  des familles basiques dans  $U$  et dans  $V$ . Soit  $\beta$  une forme bilinéaire sur  $U \times V$ ; posons  $\beta(u_i, v_j) = b_{ij}$  ( $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ ), et soit  $B$  la matrice  $(b_{ij})$ . Nous dirons que  $B$  représente la forme bilinéaire  $\beta$  par rapport aux familles  $(u_i)$  et  $(v_j)$ .

Soient  $J$  et  $J'$  les homomorphismes associés à  $\beta$  (cf. § 3, n° 2). Soient  $F$  l'espace des formes linéaires sur  $U$  et  $(f_i)$  la famille basique de  $F$ , duale de la famille  $(u_i)$  par rapport à la forme bilinéaire canonique sur  $U \times F$ . On a donc  $J'(v_j) = \sum_{i=1}^m b_{ij} f_i$ . On voit donc que la matrice  $B$  est la matrice qui représente  $J'$  par rapport aux familles basiques  $(v_j)$  et  $(f_i)$ . Soit  $G$  l'espace des formes linéaires sur  $V$  et soit  $(g_j)$  la famille basique de  $G$ , duale de la famille  $(v_j)$  par rapport à la forme bilinéaire canonique sur  $V \times G$ . On voit alors que la matrice qui représente  $J$  par rapport aux familles  $(u_i)$  et  $(g_j)$  est  ${}^t B$ .

Il résulte tout de suite de ce que nous venons de dire qu'il y a une correspondance bi-univoque entre les formes bilinéaires sur  $U \times V$  et les matrices qui les représentent, et que toute matrice de type  $(m, n)$  à coefficients dans  $K$  représente une forme bilinéaire sur  $U \times V$ .

Proposition 10. Les notations étant les mêmes que dans la définition 7, une condition nécessaire et suffisante pour que  $\beta$  soit non dégénérée est que  $B$  soit une matrice carrée inversible.

Si  $\beta$  est non dégénérée, l'application  $J'$  est un isomorphisme de  $V$  sur  $F$ , d'où il résulte tout de suite que  $B$  est inversible.

Inversement, supposons que  $B$  soit une matrice carrée inversible ; il en est alors de même de  ${}^t B$  (voir la remarque qui conclut le n° 3), ce qui montre que  $J$  et  $J'$  sont des isomorphismes, donc que  $\beta$  est non dégénérée.

Proposition 11. Les notations étant les mêmes que dans la définition 7,  
soient de plus  $u$  un élément de  $U$ ,  $v$  un élément de  $V$ ,  $\tilde{u}$  la matrice  
qui représente  $u$  par rapport à la famille  $(u_i)$ ,  $\tilde{v}$  la matrice qui  
représente  $v$  par rapport à la famille  $(v_j)$ . La matrice  ${}^t \tilde{u} \cdot B \cdot \tilde{v}$   
est alors de type  $(1,1)$  et son unique coefficient est  $\beta(u,v)$ .

Il résulte tout de suite de la proposition 6 , n°3 que la matrice qui représente  $J'(v)$  par rapport à la famille basique  $(f_i)$  est  $B \tilde{v}$ .  
 Si  $u = \sum_{i=1}^m a_i u_i$ ,  $J'(v) = \sum_{i=1}^m b_i f_i$ , on a  
 $\beta(u,v) = (J'(v))(u) = \sum_{i=1}^m a_i b_i$ , et il est clair que  $\sum_{i=1}^m a_i b_i$  est  
 l'unique coefficient de la matrice  ${}^t \tilde{u} \cdot B \cdot \tilde{v}$ .

n° 5. CHANGEMENTS DE BASE.

Proposition 12. Soit  $(u_i)_{1 \leq i \leq m}$  une famille basique dans un espace vectoriel U, sur un corps K et soit  $(u'_i)_{1 \leq i \leq m}$  une séquence de m éléments de U. Posons  $u'_i = \sum_{k=1}^m a_{ki} u_k$ , où les  $a_{ki}$  sont des éléments de K. Une condition nécessaire et suffisante pour que  $(u'_i)$  soit une famille basique est que la matrice carrée  $(a_{ki})$  soit inversible.

Supposons cette condition satisfaite, et posons  $u_i = \sum_{k=1}^m p_{ki} u'_k$ ; la matrice  $(p_{ki})$  est alors l'inverse de la matrice  $(a_{ki})$ .

Soit  $\phi$  l'endomorphisme de U défini par les conditions  $\phi(u_i) = u'_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) (cf. proposition 7, § 2, n° 3); il est clair qu'une condition nécessaire et suffisante pour que  $(u'_i)$  soit une famille basique est que  $\phi$  soit un automorphisme, i.e. que  $\phi$  admette une application réciproque. La première partie de la proposition 12 résulte alors tout de suite de ce que  $(a_{ki})$  est la matrice qui représente  $\phi$  par rapport à la famille  $(u_i)$ . Si  $\phi$  est un automorphisme, on a  $\phi^{-1}(u'_i) = \sum_{k=1}^m p_{ki} \phi^{-1}(u'_k) = \sum_{k=1}^m p_{ki} u_k$ , de sorte que  $(p_{ki})$  est la matrice qui représente  $\phi^{-1}$  par rapport à la famille  $(u_i)$ , ce qui démontre la seconde assertion de la proposition 12.

(Ajouter une proposition pour la transformation de la famille basique duale (?)).

Notations. Dans le reste de ce n°, nous utiliserons les notations suivantes :

U et V seront des espaces vectoriels de dimensions finies m et n sur un corps K;  $(u_i)$  et  $(u'_i)$  seront des familles basiques dans U;  $(v_j)$  et  $(v'_j)$  seront des familles basiques dans V. Nous poserons  $u_i = \sum_{k=1}^m p_{ki} u'_k$ ,  $v_j = \sum_{l=1}^n q_{lj} v'_l$ . Nous désignerons par P la matrice carrée  $(p_{ki})$  de degré m, et par Q la matrice carrée  $(q_{lj})$  de degré n.



Proposition 13. Soient  $\varphi$  une application linéaire de  $U$  dans  $V$  et  $\Phi$  la matrice qui représente  $\varphi$  par rapport aux familles  $(u_i)$  et  $(v_j)$ . Dans ces conditions, la matrice qui représente  $\varphi$  par rapport aux familles  $(u'_i)$  et  $(v'_j)$  est  $Q \Phi P^{-1}$ .

Posons  $\varphi(u_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} v_j$ ,  $\varphi(u'_i) = \sum_{j=1}^n a'_{ji} v_j$ , où les  $a_{ji}$ ,  $a'_{ji}$  sont des éléments de  $K$ . Désignons par  $\bar{\omega}$  l'endomorphisme de  $U$  défini par les conditions  $\bar{\omega}(u'_i) = u_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) et par  $\chi$  l'endomorphisme de  $V$  défini par les conditions  $\chi(v'_j) = v_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ). On a donc  $(\chi \varphi \bar{\omega}^{-1})(u_i) = \chi(\varphi(u'_i)) = \sum_{j=1}^n a'_{ji} v_j$ . La matrice  $(a'_{ji})$  est donc celle qui représente  $\chi \varphi \bar{\omega}^{-1}$  par rapport aux familles  $(u_i)$  et  $(v_j)$ . D'autre part  $P$  représente  $\bar{\omega}$  par rapport à la famille  $(u_i)$  et  $Q$  représente  $\chi$  par rapport à la famille  $(v_j)$ . La proposition 13 résulte donc tout de suite de la proposition 4, n° 3.

Corollaire 1. Soient  $\varphi$  un endomorphisme de l'espace  $U$  et  $\Phi$  la matrice qui représente  $\varphi$  par rapport à la famille  $(u_i)$ . La matrice qui représente  $\varphi$  par rapport à la famille  $(u'_i)$  est alors  $P \Phi P^{-1}$ .

Corollaire 2. Soient  $v$  un élément de  $V$  et  $\eta$  la matrice qui représente  $v$  par rapport à la famille  $(v_j)$ . La matrice qui représente  $v$  par rapport à la famille  $(v'_j)$  est alors  $Q \eta$ .

Le corollaire 2 se déduit tout de suite de la proposition 1 en prenant pour  $U$  l'ensemble  $K$  (considéré comme espace vectoriel sur  $K$ ), en posant  $u_1 = u'_1 = e$  (l'élément unité de  $K$ ) et en prenant pour  $\varphi$  l'application linéaire de  $K$  dans  $V$  qui applique  $e$  sur  $v$ .

Corollaire 3. Soient  $f$  une forme linéaire sur  $U$ , et  $\mathcal{F}$  la matrice qui représente  $f$  par rapport à la famille  $(u_i)$ . La matrice qui représente  $f$  par rapport à la famille  $(u'_i)$  est alors  $\mathcal{F} P^{-1}$ .

On prendra ici  $\varphi = f$ ,  $V = K$ ,  $v_1 = v'_1 = e$ .

Corollaire 4. Soit  $\Phi$  une matrice de type  $(n,m)$  à coefficients dans un corps  $K$ , et soient  $A$  et  $B$  des matrices carrées inversibles à coefficients dans  $K$ , la première de degré  $m$ , la seconde de degré  $n$ .  
La matrice  $B\Phi A$  a alors le même rang que  $\Phi$ .

Il résulte en effet de la proposition 13 que  $\Phi$  et  $B\Phi A$  peuvent être considérées comme représentant une même application linéaire  $\varphi$  de  $U$  dans  $V$  par rapport à deux systèmes de familles basiques dans  $U$  et dans  $V$ ; le rang de  $\Phi$  étant alors la dimension de  $\varphi(U)$ , le corollaire est démontré.

Proposition 14. Soit  $\Phi$  une matrice de type  $(n,m)$  et de rang  $\rho$  à coefficients dans un corps  $K$ . Il existe alors des matrices carrées inversibles  $A$  et  $B$  à coefficients dans  $K$ , de degrés respectifs  $m$  et  $n$ , telles que

$$B\Phi A = \begin{pmatrix} E_\rho & O_{\rho, m-\rho} \\ O_{n-\rho, \rho} & O_{n-\rho, m-\rho} \end{pmatrix}$$

où  $E_\rho$  est la matrice unité de degré  $\rho$ , et où  $O_{\alpha\beta}$  représente la matrice nulle de type  $(\alpha, \beta)$  (donc, la matrice vide si l'un des nombres  $\alpha$  ou  $\beta$  est nul).

Soit  $\varphi$  l'application linéaire de  $U$  dans  $V$  qui est représentée par  $\Phi$  par rapport aux familles basiques  $(u_i)$  et  $(v_j)$ . L'espace  $\varphi(U)$  est de dimension  $\rho$ ; soit  $(v_j'')_{1 \leq j \leq \rho}$  une famille basique de cet espace. Il résulte immédiatement du théorème 1, § 2, n° 2 que  $(v_j'')_{1 \leq j \leq \rho}$  est une sous-famille d'une famille basique  $(v_j'')_{1 \leq j \leq n}$  de  $V$ . Si  $i \leq \rho$ , soit  $u_i''$  un élément de  $U$  tel que  $\varphi(u_i'') = v_i''$ . Soit  $U_0$  le sous-espace  $\varphi^{-1}(0)$  de  $U$ , et soit  $\bar{u}_i''$  la classe de restes de  $u_i''$  modulo  $U_0$ . Nous savons que  $\varphi$  définit par passage aux quotients un isomorphisme de  $U/U_0$  sur  $\varphi(U)$  (cf. théorème 5, Alg. I, § 6, n° 12); il en résulte que la famille  $(\bar{u}_i'')$  est basique dans  $U/U_0$ . Faisant usage de la proposition 5,

§ 2, n° 2, on conclut aisément de là que la famille  $(u_i^n)_{1 \leq i \leq \rho}$  est une sous-famille d'une famille basique  $(u_i^n)_{1 \leq i \leq m}$  de  $U$  telle que  $u_i^n \in U_0$  pour  $i > \rho$ . La matrice qui représente  $\phi$  par rapport aux familles  $(u_i^n)$  et  $(v_j^n)$  est alors

$$\begin{pmatrix} E_\rho & O_{\rho, m-\rho} \\ O_{n-\rho, \rho} & O_{n-\rho, m-\rho} \end{pmatrix}$$

et la proposition 14 se déduit tout de suite de la proposition 13.

Corollaire 1. Si  $\Phi$  est une matrice à coefficients dans un corps commutatif  $K$ , les matrices  $\Phi$  et  ${}^t \Phi$  ont le même rang.

Utilisant les notations de la proposition 14, on a (tenant compte de la proposition 18),

$${}^t_A \cdot {}^t \Phi \cdot {}^t_B = \begin{pmatrix} E_\rho & O_{\rho, n-\rho} \\ O_{m-\rho, \rho} & O_{m-\rho, n-\rho} \end{pmatrix}$$

et le corollaire résulte du corollaire 4 à la proposition 13 si on remarque que la matrice qui se trouve au second membre de la formule précédente est évidemment de rang  $\rho$ .

Soit  $\Phi$  une matrice de type  $(n, m)$  à coefficients dans un corps commutatif  $K$ . Le rang de  $\Phi$  est alors égal à la dimension du sous-espace de l'espace des matrices de type  $(1, m)$  qui est engendré par les lignes de  $\Phi$ .

Cela se déduit tout de suite du corollaire 1.

Remarques.

1. Les conclusions des corollaires 1 et 2 restent vraies si on ~~omet~~ omet l'hypothèse que  $K$  est commutatif (cf. exercice ).

2. Si  $\Phi$  est une matrice carrée, le problème de trouver une matrice  $\Delta$  de forme aussi simple que possible qui soit de la forme  $A \Phi A^{-1}$  (où  $A$  est une matrice carrée inversible) est un problème beaucoup plus difficile que celui dont la proposition 14 donne la solution. Nous aurons à traiter de ce problème plus tard.

Proposition 15. Le corps  $K$  étant supposé commutatif, soient  $\beta$  une forme bilinéaire sur  $U \times V$  et  $B$  la matrice qui représente  $\beta$  par rapport aux familles  $(u_i)$  et  $(v_j)$ . La matrice qui représente  $\beta$  par rapport aux familles  $(u'_i)$  et  $(v'_j)$  est alors  ${}^t P^{-1} \cdot \Phi \cdot Q^{-1}$ .

Posons en effet  $P^{-1} = (\tilde{p}_{ki})$ ,  $Q^{-1} = (\tilde{q}_{lj})$ ; on a donc

$$u'_i = \sum_{k=1}^m \tilde{p}_{ki} u_k, \quad v'_j = \sum_{l=1}^n \tilde{q}_{lj} v_l \quad (\text{cf. proposition 12}), \text{ d'où}$$

$$\beta(u'_i, v'_j) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \tilde{p}_{ki} \beta(u_k, v_l) \tilde{q}_{lj}$$

La proposition 15 résulte immédiatement de cette formule.

§ 5. CHANGEMENT DU CORPS DE BASE.

n° 1. RESTRICTION DU CORPS DE BASE.

Soient  $L$  un corps,  $K$  un sous-corps de  $L$  et  $U$  un espace vectoriel sur  $L$ . La restriction à  $K \times U$  de l'application  $(a, x) \rightarrow ax$  de  $L \times U$  dans  $U$  est une loi de composition externe entre éléments de  $K$  et de  $U$ . On vérifie tout de suite que la structure déterminée sur  $U$  par cette loi de composition et par l'addition dans  $U$  est une structure d'espace vectoriel sur  $K$ .

Définition 1. Soient  $U$  un espace vectoriel sur un corps  $L$  et  $K$  un sous-corps de  $L$ . L'espace vectoriel sur  $K$  dont les lois de composition sont l'addition dans  $U$  et la restriction à  $K \times U$  de la multiplication entre éléments de  $L$  et de  $U$  est appelé l'espace vectoriel déduit de  $U$  par restriction à  $K$  du corps de base.

Nous avons déjà observé que, si  $K$  est un sous-corps d'un corps  $L$ , le corps  $L$  possède une structure d'espace vectoriel sur  $K$  (cf. § 2, n°1, exemple 2). Quand nous voudrions parler de cet espace vectoriel, nous dirons que c'est  $L$ , considéré comme espace vectoriel sur  $K$ .

Proposition 1. Soient  $L$  un corps,  $U$  un espace vectoriel sur  $L$ ,  $K$  un sous-corps de  $L$  et  $U'$  l'espace vectoriel déduit de  $U$  par restriction à  $K$  du corps de base. Soient  $S$  une partie libre de  $U$ , et soient  $V$  et  $V_0$  les sous-espaces respectifs de  $U$  et de  $U'$  qui sont engendrés par  $S$ . L'ensemble  $S$  est alors une base de  $V_0$ ; toute partie libre de  $V_0$  est aussi libre dans  $U$ ; toute base de  $V_0$  est aussi libre dans  $V$ . Soient  $B$  une base de  $U$  et  $\Omega$  une base de  $L$ , considéré comme espace vectoriel sur  $L$ ; l'application  $(\omega, u) \rightarrow \omega u$  applique alors  $\Omega \times B$  bi-univoquement sur une base de  $U'$ . Si  $S \subset B$ , on a  $V_0 = V \cap U_0$ , où  $U_0$  est le sous-espace de  $U'$  engendré par  $B$ .

Il est clair qu'il n'y a pas de relation linéaire non triviale entre éléments de  $S$  à coefficients dans  $K$ , donc que  $S$  est une base de  $V_0$ .

Pour démontrer qu'une partie libre  $T$  de  $V_0$  est aussi libre dans  $W$ , on peut évidemment se limiter au cas où  $T$  est fini. Il existe alors une partie finie  $S_1$  de  $S$  telle que  $T$  soit contenu dans le sous-espace de  $U'$  engendré par  $S_1$ ; soit  $T_1$  une base de ce sous-espace contenant  $T$ . Tout élément de  $S_1$  est alors une combinaison linéaire d'éléments de  $T_1$  à coefficients dans  $K$ , et réciproquement, de sorte que  $S_1$  et  $T_1$  engendrent le même sous-espace  $W$  de  $U$ . Puisque  $S_1 \subset S$ ,  $S_1$  est libre et est par conséquent une base de  $W$ . D'autre part,  $S_1$  et  $T_1$  ont le même nombre d'éléments, d'où il résulte que  $T_1$  est aussi une base de  $W$  (cf. corollaire 2 à la proposition 12, §2, n°6). Puisque  $T \subset T_1$ , il en résulte que  $T$  est libre dans  $U$ . Soit  $x$  un élément quelconque de  $U$ ; on peut alors écrire  $x = \sum_{u \in B} \varphi(u)u$ , où  $\varphi$  est une application nulle à l'infini de  $B$  dans  $L$ . Pour chaque  $u \in B$ , on peut mettre  $\varphi(u)$  sous la forme  $\sum_{\omega \in \Omega} \psi(\omega, u)\omega$ , où l'application  $\omega \rightarrow \psi(\omega, u)$  est une application nulle à l'infini de  $\Omega$  dans  $K$ . On voit tout de suite que l'application  $(\omega, u) \rightarrow \psi(\omega, u)$  de  $\Omega \times B$  dans  $K$  est nulle à l'infini et que  $x = \sum_{(\omega, u) \in \Omega \times B} \psi(\omega, u)\omega u$  ce qui montre que l'ensemble  $\Omega \times B$  est un système de générateurs de  $U'$ . Soit maintenant  $\theta$  une application nulle à l'infini de  $\Omega \times B$  dans  $K$  telle que  $\sum_{(\omega, u) \in \Omega \times B} \theta(\omega, u)\omega u = 0$ . On a alors 
$$\sum_{u \in B} \left( \sum_{\omega \in \Omega} \theta(\omega, u)\omega \right) u = 0, \text{ d'où } \sum_{\omega \in \Omega} \theta(\omega, u)\omega = 0 \text{ pour tout } u \in B$$
 et par suite  $\theta(\omega, u) = 0$  pour tout  $(\omega, u) \in \Omega \times B$ . On voit donc que l'application  $(\omega, u) \rightarrow \omega u$  applique  $\Omega \times B$  bi-univoquement sur une base de  $U'$ . Pour qu'un élément  $x = \sum_{u \in B} \varphi(u)u$  de  $U$  appartienne à  $U_0$ , il faut et suffit que

$\varphi(u) \in K$  pour tout  $u \in B$  ; si  $S \subset B$  , une condition nécessaire et suffisante pour que  $x \in V$  est que  $\varphi(u) = 0$  pour tout  $u \in B \cap \int S$  ; la dernière assertion de la proposition 1 résulte immédiatement de là.

Corollaire. Les notations étant les mêmes que dans la proposition 1 ,  
supposons de plus que U soit de dimension finie m sur L et que L soit  
de dimension finie l sur K . L'espace U' est alors de dimension  
finie égale à lm .

Ceci résulte immédiatement de la proposition 1 .

n° 2. EXTENSION DU CORPS DE BASE.

Définition 2. Soient  $L$  un corps,  $K$  un sous-corps de  $L$ ,  $U$  un espace vectoriel sur  $L$  et  $U_0$  un espace vectoriel sur  $K$ . Supposons les conditions suivantes satisfaites : 1)  $U_0$  est un sous-espace de l'espace  $U$  déduit de  $U$  par restriction à  $K$  du corps de base ; 2) il existe une base de  $U_0$  qui est aussi une base de  $U$ . On dit alors que  $U$  est un espace vectoriel qui résulte de  $U_0$  par extension à  $L$  du corps de base.

Proposition 2. Soient  $L$  un corps,  $K$  un sous-corps de  $L$ , et  $U_0$  un espace vectoriel sur  $K$ . Il existe alors un espace vectoriel  $U$  sur  $L$  et une application  $J$  de  $U_0$  dans  $U$  qui satisfont aux conditions suivantes :

1)  $J$  est un isomorphisme de  $U_0$  sur un sous-espace de l'espace déduit de  $U$  par restriction à  $K$  du corps de base ; 2)  $U$  résulte de  $J(U_0)$  par extension à  $L$  du corps de base.

Soit  $B$  une base de  $U_0$ , et soit  $U$  l'espace vectoriel des applications nulles à l'infini de  $B$  dans  $L$ . Nous savons que  $U$  possède une structure d'espace vectoriel sur  $L$ . Soit  $x = \sum_{u \in B} a(u)u$  un élément de  $U_0$  ; l'application  $u \rightarrow a(u)$  peut être considérée comme un élément  $J(x)$  de  $U$ . Il est clair que  $J$  est un isomorphisme de  $U_0$  sur un sous-espace de l'espace déduit de  $U$  par restriction à  $K$  du corps de base. Si  $y \in U$ , on a, comme on le voit tout de suite,  $y = \sum_{u \in B} y(u)J(u)$ , ce qui montre que  $J(B)$  est une base de  $U$ . La proposition 1 est donc démontrée.

Proposition 3. Soient  $L$  un corps,  $K$  un sous-corps de  $L$ ,  $U_0$  un espace vectoriel sur  $K$ ,  $V_0$  un sous-espace de  $U_0$  et  $U$  un espace vectoriel sur  $L$  qui résulte de  $U_0$  par extension à  $L$  du corps de base. Toute base de  $U_0$  est alors aussi une base de  $U$  ; si  $V$  est le sous-espace de  $U$  engendré par les éléments de  $V_0$ , l'espace  $V$  résulte de  $V_0$  par extension à  $L$  du corps de base et on a  $V_0 = V \cap U_0$ .



Cela résulte immédiatement de la proposition 1, n° 1.

Proposition 4. Soient  $L$  un corps,  $K$  un sous-corps de  $L$ ,  $U_0$  et  $V_0$  des espaces vectoriels sur  $K$ ,  $\varphi_0$  une application linéaire de  $U_0$  dans  $V_0$ ,  $U$  et  $V$  des espaces vectoriels qui résultent de  $U_0$  et  $V_0$  par extension à  $L$  du corps de base. Il existe alors une application linéaire  $\varphi$  et une seule de  $U$  dans  $V$  qui prolonge  $\varphi_0$ . Le sous-espace  $\varphi^{-1}(0)$  de  $U$  résulte de  $\varphi_0^{-1}(0)$  par extension à  $L$  du corps de base, et le sous-espace  $\varphi(U)$  de  $V$  résulte de  $\varphi_0(U_0)$  par extension à  $L$  du corps de base. En particulier, si  $\varphi_0$  est univalente, il en est de même de  $\varphi$ ; et si  $\varphi_0(U_0) = V_0$ , on a  $\varphi(U) = V$ .

Soit  $B$  une base de  $U_0$  qui contienne une base  $B_0$  de l'espace  $\varphi_0^{-1}(0)$ ,  $B$  est alors aussi une base de  $U$  (en vertu de la proposition 3). Il existe une application linéaire  $\varphi$  et une seule de  $U$  dans  $V$  qui prolonge la restriction de  $\varphi_0$  à  $B$ ; il est clair que  $\varphi$  prolonge  $\varphi_0$ . Soit  $B_1$  le complément de  $B_0$  par rapport à  $B$ ;  $\varphi_0$  applique donc bi-univoquement  $B_1$  sur une base de  $\varphi_0(U_0)$  (on sait en effet que les classes de restes des éléments de  $B_1$  modulo  $\varphi_0^{-1}(0)$  forment une base de  $U_0/\varphi_0^{-1}(0)$ ; notre assertion résulte alors du théorème 5, Alg. I, § 6, n° 12). Il résulte de la proposition 3 que  $\varphi_0(B_1)$  est une partie libre de  $V$ . Si  $x = \sum_{u \in B} a(u)u$  est un élément de  $U$ , on a  $\varphi(x) = \sum_{u \in B_1} a(u) \varphi_0(u)$ ; par suite, l'hypothèse  $\varphi(x) = 0$  entraîne  $a(u) = 0$  pour tout  $u \in B_1$ , ce qui montre que  $\varphi^{-1}(0)$  résulte de  $\varphi_0^{-1}(0)$  par extension à  $L$  du corps de base. De plus, on voit que les éléments de  $\varphi_0(B_1)$  engendrent  $\varphi(U)$ , donc que  $\varphi(U)$  résulte de  $\varphi_0(U)$  par extension à  $L$  du corps de base. Les dernières assertions de la proposition 4 sont des conséquences immédiates des précédentes.

Corollaire 1. Soient L un corps, K un sous-corps de L, U<sub>0</sub> un espace vectoriel sur K, U et U' des espaces vectoriels sur L qui résultent de U<sub>0</sub> par extension à L du corps de base. Il existe alors un isomorphisme et un seul de U sur U' qui coïncide sur U<sub>0</sub> avec l'application identique.

Cela résulte immédiatement de la proposition 4.

Remarque :

Les notations étant les mêmes que dans la proposition 4, supposons de plus que U<sub>0</sub> et V<sub>0</sub> soient de dimensions finies sur K. Soient alors (u<sub>i</sub>) et (v<sub>j</sub>) des familles basiques dans U<sub>0</sub> et dans V<sub>0</sub>; ce sont aussi des familles basiques dans U et dans V, et la matrice qui représente φ par rapport aux familles (u<sub>i</sub>) et (v<sub>j</sub>) est identique à la matrice qui représente φ<sub>0</sub> par rapport à ces mêmes familles. Faisant usage de la proposition 1, § 4, n° 2, on déduit de là le

Corollaire 2. Soit Φ une matrice à coefficients dans un corps K, et soit L un corps contenant K comme sous-corps. Le rang de la matrice Φ est alors le même, qu'on la considère comme matrice à coefficients dans K ou dans L.

Théorème 4. Soit

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n x_j a_{ji} = b_i \quad (1 \leq i \leq m)$$

un système d'équations linéaires dont les coefficients a<sub>ji</sub> et les seconds membres b<sub>i</sub> appartiennent à un corps K, et soit L un corps contenant K comme sous-corps. Le rang du système (1) est alors le même, qu'on le considère comme système à coefficients dans K ou dans L.

Si les b<sub>i</sub> sont nuls (1 ≤ i ≤ m) et si (1) admet une solution non triviale dans L<sup>n</sup>, il admet une solution non triviale dans K<sup>n</sup>. Quels que soient les b<sub>i</sub>, si le système (1) admet une solution dans L<sup>n</sup>, il admet aussi une solution dans K<sup>n</sup>.

La première assertion résulte du corollaire 2 ci-dessus et de la proposition 2, § 4, n° 2. La seconde assertion résulte de la première et du fait que, pour qu'un système homogène d'équations à n inconnues à coefficients dans un corps admette une solution en éléments de ce corps, il faut et suffit que le rang du système soit  $< n$  (cf. § 2, n° 8).

Soit  $\varphi_0$  l'application linéaire de  $K^n$  dans  $K^m$  définie par

$$\varphi_0(x_1, \dots, x_n) = \left( \sum_{j=1}^n a_{j1} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{jm} x_j \right)$$

Observons que  $L_n^n$  et  $L_m^m$  résultent de  $K^n$  et  $K^m$  par extension à  $L$  du corps de base et que l'application linéaire  $\varphi$  de  $L^n$  qui prolonge  $\varphi_0$

applique tout  $(x_1, \dots, x_n) \in L^n$  sur  $\left( \sum_{j=1}^n a_{j1} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{jm} x_j \right)$ .

Ceci dit, si le système (1) admet une solution dans  $L^n$ , on a  $(b_1, \dots, b_m) \in K^m \cap \varphi(L^n) = \varphi_0(K^n)$  en vertu des propositions 3 et 4, ce qui prouve que (1) admet une solution dans  $K^n$ .

Remarque 1. Il résulte immédiatement du théorème 4 que, si le système (1) admet une solution unique dans  $L^n$ , cette solution est dans  $K^n$ .

Remarque 2. Les notations étant les mêmes que dans le théorème 4, supposons de plus que  $K$  appartienne au centre de  $L$  et que le système (1) admette une solution  $(x_1, \dots, x_n)$  dans  $L^n$ . Soit  $\Omega$  une base de  $L$

(considéré comme espace vectoriel sur  $K$ ) qui contienne l'élément unité  $e$  de  $L$ . Posons  $x_j = \sum_{\omega \in \Omega} \xi_j(\omega) \omega$ ,  $\xi_j(\omega) \in K$ . On a alors

$$\sum_{\omega \in \Omega} \sum_{j=1}^n \xi_j(\omega) a_{ji} \omega = b_i \quad (1 \leq i \leq m)$$

d'où  $\sum_{j=1}^n \xi_j(c) a_{ji} = b_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ), ce qui fournit une nouvelle

démonstration de la première assertion du théorème 1 et permet de construire explicitement une solution du système (1) dans  $K^n$ .

