CHAPITRE VIII (ETAT 3)
TOPOLOGIES D'ESPACES FONCTIONNELS

Rédaction n° 032

Nombre de pages : 80

Nombre de feuilles : 80

Top. générale

Chap VIII. Etat 3

Topologie d'Espaces fonctionnels

(Ancien CHAPITRE VIII (Etat 3)

TOPOLOGIES D'ESPACES FONCTIONNELS

§ 1. Structures uniformes sur les espaces fonctionnels.

Etant donné un ensemble $\mathfrak{A}$ d'applications d'un ensemble E dans un ensemble F (partie de F^E), une partie H de $\mathfrak{A}$ et un $x \in E$, nous utiliserons dans ce chapitre la notation H_x pour désigner la partie de F formée des éléments $u(x)$, où u parcourt H ; de même, si Φ est une base de filtre sur $\mathfrak{A}$, les ensembles H_x forment, lorsque H parcourt Φ, une base de filtre sur F, que nous désignerons par Φ_x.

1. Convergence uniforme sur un ensemble. Soient E un espace topologique, F un espace uniforme ; nous désignerons dans ce qui suit par $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble (identique à F^E) de toutes les applications de E dans F. Soit A une partie quelconque de E, et V un entourage quelconque de la structure uniforme de F ; nous désignerons par $W(V,A)$ l'ensemble des couples (u,v) d'applications de E dans F tels que l'on ait $(u(x),v(x)) \in V$ quel que soit $x \in A$. Lorsque V parcourt le filtre des entourages de F, les ensembles $W(V,A)$ forment un système fondamental d'entourages d'une structure uniforme sur $\mathcal{F}(E,F)$; en effet, ils satisfont évidemment à l'axiome (U'_I), et si $V \quad V'$, on a $W(V,A) \subset W(V',A)$, donc les $W(V,A)$ forment une base de filtre ; on a $\overset{-1}{\widehat{W(V,A)}} = W(\overset{-1}{V},A)$, donc (U'_{II}) est vérifié ; enfin les relations "$(u(x),v(x)) \in V$ quel que soit $x \in A$" et "$(v(x),w(x)) \in V$ quel que soit $x \in A$" entraînent "$(u(x),w(x)) \in \overset{2}{V}$ quel que soit $x \in A$", autrement dit, on a $\overset{2}{\widehat{W(V,A)}} \subset W(\overset{2}{V},A)$, ce qui démontre (U'_{III}).

Définition 1. On dit que la structure uniforme définie sur l'ensemble $\mathcal{F}(E,F)$ des applications de E dans F, par la famille des ensembles $W(V,A)$, où V parcourt le filtre d'entourages de F, est la structure

<u>de la convergènce uniforme sur l'ensemble</u> A . <u>Si un filtre</u> Φ <u>sur l'ensemble</u> $\mathcal{F}(E,F)$ <u>converge vers un élément</u> u_0 , <u>pour la topologie déduite de cette structure uniforme, on dit que</u> Φ <u>converge uniformément vers</u> u_0 <u>dans</u> A .

2. <u>Convergence uniforme sur une famille d'ensembles</u>. Les notations restant les mêmes, soit $\mathfrak{S}$ un ensemble non vide de parties de E ; pour tout ensemble $A \in \mathfrak{S}$, désignons par $\mathcal{U}_A$ la structure uniforme (sur $\mathcal{F}(E,F)$) de la convergence uniforme sur A .

<u>Définition 2</u>. <u>On appelle structure de la convergence uniforme sur les ensembles de</u> $\mathfrak{S}$ <u>la borne supérieure</u> $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$ <u>des structures uniformes</u> $\mathcal{U}_A$, <u>lorsque</u> A <u>parcourt</u> $\mathfrak{S}$; <u>on note</u> $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ <u>l'espace uniforme obtenu en munissant l'ensemble</u> $\mathcal{F}(E,F)$ <u>de la structure uniforme</u> $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$.

D'après la définition de la borne supérieure d'un ensemble de structures uniformes (chap.II, § 1), on aura un système fondamental d'entourages de la structure $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$ en considérant, pour chaque entourage V d'un système fondamental d'entourages de F , et pour chaque suite finie $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'ensembles de $\mathfrak{S}$, l'entourage $\bigcap_{i=1}^{n} W(V,A_i)=W(V, \bigcup_{i=1}^{n} A_i)$.

Il en résulte que, pour qu'un filtre Φ sur l'espace $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ soit <u>convergent</u> vers u_0 , il faut et il suffit qu'il <u>converge uniformément vers</u> u_0 <u>sur tout ensemble</u> $A \in \mathfrak{S}$; autrement dit, il faut et il suffit que pour tout entourage V de F et tout ensemble $A \in \mathfrak{S}$, il existe un ensemble $H \in \Phi$ tel que, quels que soient $u \in H$ et $x \in A$, on ait $(u_0(x),u(x)) \in V$. En effet, si $H_i \in \Phi$ est tel que pour $u \in H_i$ et $x \in A_i$ on ait $(u_0(x),u(x))$ V , et si on pose $H = \bigcap_{i=1}^{n} H_i \in \Phi$, on aura pour $u \in H$ et $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $(u_0(x),u(x)) \in V$.

Si $\alpha \to u_\alpha$ est une application, dans $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$, d'un ensemble G filtré par un filtre $\mathfrak{G}$, et si cette application admet une limite v suivant le filtre $\mathfrak{F}$, on dit encore que, suivant le filtre $\mathfrak{F}$, les applications u_α de E dans F convergent uniformément (ou que la famille (u_α) est uniformément convergente) sur tout ensemble de $\mathfrak{S}$. En particulier, si (u_n) est une suite de points de l'espace $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ qui converge vers un point v , on dit (pour abréger) que les applications u_n convergent uniformément vers v (ou que la suite (u_n) est uniformément convergente vers v) sur tout ensemble de $\mathfrak{S}$.

Plus particulièrement, supposons définie dans F une loi de composition commutative et associative, notée additivement. Pour toute suite (u_n) d'applications de E dans F , désignons par v_n l'application $x \longrightarrow \sum_{p=1}^{n} u_p(x)$; on dira que la série de terme général u_n est uniformément convergente sur tout ensemble de $\mathfrak{S}$, si la suite (v_n) est uniformément convergente sur tout ensemble de $\mathfrak{S}$. On définit de même une famille uniformément sommable (u_α) d'applications de E dans F , en considérant les applications $x \longrightarrow \sum_{\alpha \in H} u_\alpha(x)$ pour les parties finies H de l'ensemble d'indices, et la limite de ces applications suivant l'ensemble ordonné filtrant formé par ces parties finies (cf. chap.III, §4) .

Remarques. 1) La définition des entourages de $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$ montre qu'on ne change pas cette structure uniforme lorsqu'on remplace $\mathfrak{S}$ tout d'abord par l'ensemble $\mathfrak{S}'$ des réunions finies d'ensembles de $\mathfrak{S}$, puis par l'ensemble $\mathfrak{S}''$ des parties d'ensembles de $\mathfrak{S}'$; autrement dit, on peut toujours supposer que l'ensemble $\mathfrak{S}$ satisfait aux deux conditions :

(F'_I) Toute partie d'un ensemble de $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}$.

(F'_{II}) Toute réunion finie d'ensembles de $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}$.

Lorsqu'il en est ainsi, on a un système fondamental d'entourages de la structure $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$, en considérant les ensembles W(V,A), où A parcourt $\mathfrak{S}$ et V un système fondamental d'entourages de F .

2) soit $(f_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'<u>écarts</u> définissant la structure uniforme de F (chap.VII, § 1). Pour tout $\iota \in I$ et tout $A \in \mathfrak{S}$, posons, pour tout couple (u,v) d'applications de E dans F, $g_{\iota,A}(u,v) = \sup_{x \in A} f_\iota(u(x),v(x))$; il est immédiat que $g_{\iota,A}$ est un <u>écart</u> sur $\mathcal{F}(E,F)$ et que la famille des écarts $g_{\iota,A}$ (où ι parcourt I et A parcourt $\mathfrak{S}$) définit la structure uniforme $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$.

<u>Exemples</u>. I : <u>Convergence simple</u>. Si on prend pour $\mathfrak{S}$ l'ensemble de <u>toutes les parties finies</u> de E, la structure uniforme correspondante $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$ sur $\mathcal{F}(E,F)$ est dite <u>structure uniforme de la convergence simple</u> et notée $\mathcal{U}_s$; l'ensemble $\mathcal{F}(E,F)$ muni de cette structure, se note encore $\mathcal{F}_s(E,F)$; il est immédiat que cet espace uniforme n'est autre que <u>l'espace uniforme produit</u> F^E (chap.II, § 5). Lorsqu'un filtre Φ sur $\mathcal{F}_s(E,F)$ converge vers u_0, on dit qu'il <u>converge simplement</u> vers u_0 ; cette condition peut s'exprimer de la façon suivante : pour tout $x \in E$, la base de filtre Φ_x converge vers $u_0(x)$.

II : <u>Convergence uniforme</u>. Si on prend pour $\mathfrak{S}$ l'ensemble formé du seul ensemble E (ou, ce qui revient au même, l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ de toutes les parties de E) la structure uniforme $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$ correspondante est appelée (si aucune confusion n'en peut résulter) <u>structure de la convergence uniforme</u> et notée $\mathcal{U}_u$; l'espace uniforme obtenu en munissant $\mathcal{F}(E,F)$ de cette structure se note $\mathcal{F}_u(E,F)$; si un filtre Φ sur cet espace converge vers u_0, on dit qu'il <u>converge uniformément vers</u> u_0.

Si la structure uniforme de F est <u>métrisable</u>, et si d est une distance sur F compatible avec cette structure, $\mathcal{U}_u$ est une structu[re] uniforme métrisable, définie par la distance

$$\delta(u,v) = \sup_{x \in E} d(u(x),v(x)) \quad \text{(cf. § 4).}$$

III : <u>Convergence compacte</u>. Si on prend pour $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties <u>compactes</u> de E (ou, ce qui revient au même, l'ensemble des parties relativement compactes), la structure uniforme $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$ correspondante est appelée <u>structure de la convergence compacte</u> et notée $\mathcal{U}_c$; l'espace uniforme obtenu en munissant $\mathcal{F}(E,F)$ de cette structure se note $\mathcal{F}_c(E,F)$; si un filtre Φ sur cet espace converge vers u_o , on dit qu'il <u>converge uniformément vers</u> u_o <u>sur tout ensemble compact</u>. Lorsque E est un espace <u>compact</u>, la structure de la convergence compacte est identique à celle de la convergence <u>uniforme</u> ; lorsque E est un espace <u>discret</u>, elle est identique à la structure de la convergence <u>simple</u>.

IV. Si E est un <u>espace normé</u> sur un corps valué K (chap. VII, § 3), on a aussi parfois à considérer sur $\mathcal{F}(E,F)$ la structure uniforme $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$ correspondant au cas où on prend pour $\mathfrak{S}$ l'ensemble de <u>toutes les boules</u> $\|x\| \leqslant r$ de centre l'origine (ou, ce qui revient au même, l'ensemble de toutes les parties <u>bornées</u> de E) ; lorsqu'un filtre Φ sur $\mathcal{F}(E,F)$ converge pour la topologie déduite de cette structure uniforme, on dit qu'il <u>converge uniformément sur tout ensemble borné de</u> E .

3. <u>Comparaison des structures uniformes sur</u> $\mathcal{F}(E,F)$. Soient $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ deux ensembles non vides de parties de E . Il est clair que si $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2$ la structure uniforme $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}_1}$ est <u>moins fine</u> que $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}_2}$. En particulier, comme tout ensemble de parties de E est contenu dans $\mathfrak{P}(E)$, la structure de la convergence uniforme est <u>la plus fine</u> des structures $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$ sur $\mathcal{F}(E,F)$; de même, la structure de la convergence simple est <u>la moins fine</u> des structures $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$ correspondant aux ensembles de parties tels que tout point de E appartienne à un ensemble de $\mathfrak{S}$ au moins. En général, la structure de la convergence uniforme est <u>strictement plus fine</u> que celle de la convergence compacte, et cette dernière est

<u>strictement plus fine</u> que la structure de la convergence simple (voir exerc. 1).

Soient maintenant F_1 et F_2 deux espaces uniformes ayant <u>même support</u>, mais tels que la structure uniforme de F_2 soit <u>plus fine</u> que celle de F_1 ; d'après la définition des entourages des structures $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$, la structure uniforme de $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F_2)$ sera <u>plus fine</u> que celle de $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F_1)$.

<u>4. Propriétés des espaces</u>. $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$. <u>Proposition 1</u>. <u>Pour que l'espace $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ soit séparé, il faut et il suffit que l'espace F soit séparé et</u> (lorsque F ne se réduit pas à un point) <u>que tout point de E appartienne à un ensemble de $\mathfrak{S}$ au moins</u>.

En premier lieu, si F n'est pas séparé, $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ n'est pas séparé : en effet, F a alors deux points distincts au moins a,b tels que (a,b) appartienne à tous les entourages V de F ; si u (resp. v) est la fonction constante égale à a (resp. b) dans E , (u,v) appartiendra à tous les entourages W(V,A), quels que soient V et A , et on a $u \neq v$.

De même, s'il existe $x_0 \in E$ n'appartenant à aucun ensemble de $\mathfrak{S}$ et si a et b sont deux points distincts de F , désignons par u la fonction constante égale à a dans E , par v la fonction égale à a pour tout $x \neq x_0$, à b au point x_0 ; on a $u \neq v$, mais (u,v) appartient à tous les entourages W(V,A), quels que soit $A \in \mathfrak{S}$.

Montrons réciproquement que ces deux conditions nécessaires sont suffisantes pour que $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ soit séparé. En effet, si u et v sont deux applications distinctes de E dans F , il existe $x \in E$ tel que $u(x) \neq v(x)$; les hypothèses entraînent qu'il existe un ensemble $A \in \mathfrak{S}$ contenant x , et un entourage V de F tel que $(u(x),v(x)) \notin V$; on aura donc $(u,v) \notin W(V,A)$, ce qui montre que $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est séparé.

Proposition 2. Si l'espace $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est séparé, pour qu'un filtre de Cauchy Φ sur cet espace soit convergent, il faut et il suffit qu'il converge simplement.

La condition est nécessaire, car si Φ est un filtre convergent dans l'espace $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$, il est aussi convergent dans l'espace $\mathcal{F}_s(E,F)$ dont la topologie est moins fine que celle de $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$.

La condition est suffisante. Supposons en effet que Φ converge simplement vers la fonction u_0 ; comme Φ est un filtre de Cauchy, pour tout entourage *fermé* V de F et tout ensemble $A \in \mathfrak{S}$, il existe un ensemble $H \in \Phi$ tel que pour tout couple (u,v) de points de H, on ait $(u,v) \in W(V,A)$. Soit x un point quelconque de A ; on a $(u(x),v(x)) \in V$; comme $u_0(x)$ est limite de $u(x)$ suivant le filtre Φ, et que V est fermé, on a donc aussi $(u_0(x),v(x)) \in V$ pour tout $v \in H$; mais cette relation ayant lieu pour tout $x \in A$, on a $(u_0,v) \in W(V,A)$ pour tout $v \in H$, ce qui démontre que u_0 est limite de Φ dans l'espace $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$.

On en déduit l'importante conséquence suivante :

Proposition 3. Si l'espace $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est séparé, pour qu'il soit complet, il faut et il suffit que F soit complet.

En effet, à tout $y \in F$, faisons correspondre l'application constante u_y de E dans F, égale à y en tout point de E. Il est clair que l'application $y \to u_y$ est un *isomorphisme* de l'espace uniforme F sur un sous-espace F' de $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$; en outre, F' est un sous-espace *fermé* de $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$, car si x,x' sont deux points distincts de E, A un ensemble de $\mathfrak{S}$ contenant x et x', v un point de $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ adhérent à F', pour tout entourage symétrique V de F, il existe un $y \in F$ tel que $(v(x),y) \in V$ et $(v(x'),y) \in V$, d'où $(v(x),v(x')) \in \overset{2}{V}$; comme V est arbitraire et F séparé, on en conclut $v(x)=v(x')$, donc v est constante dans E, autrement dit $v \in F'$. Si maintenant $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est complet, il en est de même de F' (chap. II, § 3, prop.), donc F est complet.

Réciproquement, supposons F complet, et soit Φ un filtre de Cauchy sur $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$; d'après la prop.2, il suffit de montrer que Φ converge simplement. Autrement dit, il faut prouver que pour tout $x \in E$ la base de filtre Φ_x est convergente dans F . Or, Φ_x est une base de filtre de Cauchy sur F : en effet, soit V un entourage quelconque de F , et A un ensemble de $\mathfrak{S}$ contenant x ; par hypothèse, il existe un ensemble $H \in \Phi$ petit d'ordre $W(V,A)$; on en conclut que H_x est petit d'ordre V , donc que Φ_x est une base de filtre de Cauchy dans F , d'où la proposition puisque F est complet.

5. Espaces de fonctions continues. Nous désignerons par $\mathcal{C}(E,F)$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(E,F)$ formé des applications continues de E dans F , par $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ le sous-espace uniforme de $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ obtenu en munissant $\mathcal{C}(E,F)$ de la structure uniforme induite par $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$; en particulier, $\mathcal{C}_s(E,F)$, $\mathcal{C}_u(E,F)$, $\mathcal{C}_c(E,F)$ désigneront l'ensemble $\mathcal{C}(E,F)$ muni de la structure uniforme induite par $\mathcal{U}_s$, $\mathcal{U}_u$, $\mathcal{U}_c$ respectivement.

Théorème 1. Si F est séparé et complet et si tout point de E est intérieur à un ensemble de $\mathfrak{S}$ au moins, l'espace $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est séparé et complet.

D'après les prop.1 et 3 , l'espace $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est alors complet, et il suffit donc de montrer que $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ (chap.II, § 3, prop.6). Soit donc u_o une application de E dans F , adhérente à $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$; montrons que u_o est continue dans E . Soit x_o un point quelconque de E , et A un ensemble de $\mathfrak{S}$ auquel x_o soit intérieur ; pour tout entourage symétrique V de F , il existe une application continue u de E dans F telle que $(u_o,u) \in W(V,A)$; d'autre part, il existe un voisinage U de x_o , contenu dans A , tel que, pour tout $x \in U$, on ait $(u(x_0),u(x)) \in V$. Comme on a $(u_0(x_0),u(x_0)) \in V$ et pour tout $x \in U$, $(u_0(x),u(x)) \in V$, on en conclut $(u_0(x_0),u_0(x)) \in \overset{3}{V}$ pour tout $x \in U$, ce qui prouve que u_0 est continue au point x_0 .

On notera que, si F n'est pas complet, cette démonstration prouve que $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est encore un sous-espace fermé de $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$; en outre, $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ n'est pas complet, car il contient le sous-espace F' des applications constantes de E dans F , qui est isomorphe à F (prop.3), donc non complet, mais fermé dans $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$, donc a fortiori dans $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$.

Corollaire 1. Si F est séparé et complet, l'espace $\mathcal{C}_u(E,F)$ est complet.

On exprime encore cette propriété en disant qu'un filtre sur l'ensemble des applications continues de E dans F , qui converge uniformément dans E , a pour limite une application continue de E dans F .

En particulier, si F est muni d'une loi de composition additive (commutative et associative) telle que $(y,z) \rightarrow y+z$ soit continue dans $F \times F$, et si (u_n) est une suite d'applications continues de E dans F , telle que la série de terme général u_n soit uniformément convergente dans E , la somme de cette série est continue dans E .

Remarque. Si E est un espace uniforme, le sous-espace de $\mathcal{C}_u(E,F)$ formé des applications uniformément continues de E dans F , est fermé dans $\mathcal{C}_u(E,F)$. En effet, soit u une application de E dans F telle que, pour tout entourage symétrique V de F, il existe une application uniformément continue de E dans F telle que $(u(x),v(x)) \in V$ pour tout $x \in E$. Comme v est uniformément continue, il existe un entourage U de E tel que la relation $(x,y) \in U$ entraîne $(v(x),v(y)) \in V$; la relation $(x,y) \in U$ entraîne par suite $(u(x),u(y)) \in \overset{3}{V}$, ce qui prouve que u est uniformément continue.

Corollaire 2. Si F est séparé et complet, et si E est localement compact l'espace $\mathcal{C}_c(E,F)$ est complet.

2

Par contre, en général, l'espace $\mathcal{C}_s(E,F)$ n'est pas complet, autrement dit un filtre sur l'ensemble des applications continues de E dans F , qui converge simplement dans E , peut avoir pour limite une application discontinue de E dans F (cf. exerc. 5).

La convergence d'un filtre sur l'espace $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ peut parfois s'établir à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 4. Si un filtre Φ sur $\mathcal{C}(E,F)$ converge uniformément dans un ensemble A , il converge uniformément dans $\bar{A}$.

En effet, pour tout entourage fermé V de F , il existe un ensemble $H \in \Phi$ tel que, pour tout couple (u,v) d'applications appartenant à H , on ait $(u(x),v(x)) \in V$ pour tout $x \in A$; dans cette relation, faisons tendre x vers un point x_0 adhérent à A ; comme u et v sont continues dans E , et V fermé, on a encore à la limite, $(u(x_0),v(x_0)) \in V$, ce qui prouve que Φ converge uniformément dans $\bar{A}$.

6. Convergence uniforme locale. Nous nous bornerons, dans ce qui suit, au cas où l'espace uniforme F est séparé et complet. Soit $(u_\alpha)_{\alpha \in G}$ une famille d'applications continues de E dans F , et $\mathfrak{G}$ un filtre sur l'ensemble d'indices G . Si, dans E , la famille (u_α) converge simplement vers une fonction u_0 , suivant le filtre $\mathfrak{G}$, nous avons vu ci-dessus que u_0 n'est pas nécessairement continue dans E . Une condition suffisante pour que u_0 soit continue en un point x_0 E , est que, suivant le filtre $\mathfrak{G}$ les u_α convergent uniformément vers u_0 dans un voisinage de x_0 (th.1) ; mais nous allons voir qu'on peut donner une autre condition suffisante moins restrictive que la précédente.

En effet, soit $\mathfrak{V}$ le filtre des voisinages de x_0 dans E ; la continuité de u_0 au point x_0 équivaut à la relation $\lim_{\mathfrak{V}} u_0(x)=u_0(x_0)$, ou encore à $\lim_{\mathfrak{V}} (\lim_{\mathfrak{S}} u_\alpha(x))=\lim_{\mathfrak{S}} u_\alpha(x_0)$, et enfin en tenant compte de la continuité de u_α au point x_0 , à

(1) $$\lim_{\mathfrak{V}}(\lim_{\mathfrak{S}} u_\alpha(x)) = \lim_{\mathfrak{S}} (\lim_{\mathfrak{V}} u_\alpha(x))$$

Or, on sait que le premier membre existe et est égal au second lorsque l'application $(\alpha,x) \to u_\alpha(x)$ a une limite suivant le <u>filtre produit</u> $\mathfrak{S} \times \mathfrak{V}$ (chap.I, §8,prop.8). Nous allons pouvoir transformer cette condition en tenant compte du fait que F est un espace <u>uniforme</u> :

<u>Proposition 5</u>. <u>Soit</u> $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ <u>le filtre produit, sur un ensemble</u> $E_1 \times E_2$, <u>d'un filtre</u> $\mathfrak{F}_1$ <u>sur</u> E_1 <u>par un filtre</u> $\mathfrak{F}_2$ <u>sur</u> E_2 . <u>Soit</u> f <u>une application de</u> $E_1 \times E_2$ <u>dans un espace uniforme séparé et complet</u> F , <u>telle que pour tout</u> $x_2 \in E_2$, $\lim_{\mathfrak{F}_1} f(x_1,x_2)=g(x_2)$ <u>existe. Dans ces conditions, pour que</u> f <u>ait une limite suivant le filtre</u> $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$, <u>il faut et il suffit que, pour tout entourage symétrique</u> V <u>de</u> F , <u>il existe un ensemble</u> $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ <u>et un ensemble</u> $A_2 \in \mathfrak{F}_2$ <u>tels que, quels que soient</u> x_1 <u>dans</u> A_1 , x_2 <u>et</u> x'_2 <u>dans</u> A_2 , on ait

(2) $$(f(x_1,x_2),f(x_1,x'_2)) \in V .$$

La condition est nécessaire, car si f a une limite suivant $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$, pour tout entourage V de F il existe $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ et $A_2 \in \mathfrak{F}_2$ tels que $(f(x_1,x_2),f(x'_1,x'_2)) \in V$ quels que soient x_1,x'_1 dans A_1 , x_2,x'_2 dans A_2 .

La condition est suffisante. Soit en effet a_2 un point quelconque de A_2 ; par hypothèse, $\lim_{\mathfrak{F}_1} f(x_1,a_2)$ existe, donc il existe un ensemble $B_1 \in \mathfrak{F}_1$ contenu dans A_1 et tel que, pour x_1 et x'_1 dans B_1 , on ait $(f(x_1,a_2);f(x'_1,a_2)) \in V$. Mais d'après (2), quels que soient x_2,x'_2 dans A_2 , on a $(f(x_1,a_2),f(x_1,x_2)) \in V$ et $(f(x'_1,a_2),f(x'_1,x'_2)) \in V$;

on en conclut $(f(x_1,x_2),f(x'_1,x'_2)) \in \overset{3}{V}$ pour x_1,x'_1 dans B_1 , x_2,x'_2 dans A_2 , d'où la proposition.

On observera que la condition de l'énoncé de la prop.5 n'implique nullement que, suivant le filtre $\mathfrak{F}_2$, les applications partielles $x_1 \to f(x_1,x_2)$ soient uniformément convergentes (ni même simplement convergentes) sur un quelconque des ensembles de $\mathfrak{F}_1$; mais réciproquement, s'il existe un ensemble $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ tel que ces applications convergent <u>uniformément</u> sur A_1 (suivant $\mathfrak{F}_2$) vers une application h de A_1 dans F , la condition de l'énoncé est remplie et f a une limite suivant $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$.

Revenons à la famille de fonctions continues (u_α) ; nous poserons la définition suivante :

<u>Définition 3. On dit qu'un filtre Φ sur</u> $\mathcal{F}(E,F)$ <u>est localement uniformément convergent au point</u> $x_0 \in E$ <u>si pour tout entourage</u> V <u>de</u> F , <u>il existe un ensemble</u> $M \in \Phi$ <u>et un voisinage</u> U <u>de</u> x_0 <u>tels que, quels que soient</u> $u \in M$, $v \in M$ <u>et</u> $x \in U$, <u>on ait</u> $(u(x),v(x)) \in V$.

En particulier, on aura $(u(x_0),v(x_0)) \in V$, et comme F est supposé complet, cela entraîne la convergence du filtre Φ_{x_0} (mais pour tout autre point x , Φ_x n'est pas nécessairement convergent).

Si G est un ensemble filtré par un filtre $\mathfrak{G}$, on dira de même qu'une application $\alpha \to u_\alpha$ de G dans $\mathcal{F}(E,F)$ est <u>localement uniformément convergente</u> (ou que les u_α sont <u>localement uniformément convergentes</u>) au point x_0 (suivant le filtre $\mathfrak{G}$) si l'image de $\mathfrak{G}$ par cette application est une base de filtre localement uniformément convergente au point x_0 .

La prop.5 montre que, si les u_α sont <u>continues</u> au point x_0 , et localement uniformément convergentes en ce point (suivant $\mathfrak{G}$), l'application

$(\alpha,x) \to u_\alpha(x)$ a une limite suivant le filtre produit $\mathfrak{F} \times \mathfrak{V}$. Nous obtenons donc le critère de continuité cherché :

<u>Proposition 6</u>. <u>Soit (u_α) une famille d'applications de E dans un espace uniforme séparé</u> F , <u>qui convergent simplement dans</u> E <u>vers une fonction</u> u_0, <u>suivant un filtre</u> $\mathfrak{F}$ <u>sur l'ensemble des indices</u>. <u>Si en un point</u> x_0 E, <u>les</u> u_α <u>sont continues et si en ce point elles sont localement uniformément convergentes</u> (suivant $\mathfrak{F}$), <u>la fonction</u> u_0 <u>est continue au point</u> x_0.

On conclut aussi de ce qui précède que :

<u>Proposition 7</u> : <u>Si</u> $\mathfrak{S}$ <u>est un ensemble de parties de</u> E <u>tel que tout point de</u> E <u>soit intérieur à un ensemble de</u> $\mathfrak{S}$ <u>au moins, et si</u> F <u>est séparé, l'application</u> $(u,x) \to u(x)$ <u>de</u> $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F) \times E$ <u>dans</u> F <u>est continue</u>.

En effet, soit u_0 une application continue de E dans F , x_0 un point de E . Soit A un ensemble de $\mathfrak{S}$ auquel x_0 est intérieur ; si $\mathfrak{F}$ désigne le filtre des voisinages de u_0 dans $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$, $\mathfrak{F}$ converge uniformément vers u_0 dans A ; a fortiori, il est localement uniformément convergent au point x_0 , et, d'après la prop.5, l'application $(u,x) \to u(x)$ tend vers $u_0(x_0)$ suivant le filtre produit $\mathfrak{F} \times \mathfrak{V}$ ($\mathfrak{V}$ filtre des voisinages de x_0), puisque les fonctions $u \in \mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ sont continues au point x_0.

Dans ces deux propositions, nous n'avons pas eu besoin de supposer F complet, lorsque F n'est pas complet, il suffit en effet de le considérer comme un sous-espace de son complété $\hat{F}$, et $\mathcal{F}(E,F)$ comme une partie de $\mathcal{F}(E,\hat{F})$.

La notion de convergence uniforme locale est particulièrement intéressante lorsqu'on considère sur $\mathcal{F}(E,F)$ la structure de la <u>convergence compacte</u>, et que E est <u>localement compact</u>. En effet :

<u>Proposition 8. Pour qu'un filtre</u> Φ <u>sur</u> $\mathcal{F}(E,F)$ <u>soit un filtre de Cauchy pour la structure uniforme</u> $\mathcal{U}_c$ <u>de la convergence compacte,</u>

<u>il suffit qu'il soit localement uniformément convergent en tout point de E. Cette condition suffisante est aussi nécessaire lorsque E est localement compact.</u>

La seconde partie de la proposition est immédiate. Pour établir la première, considérons un ensemble compact A dans E. Par hypothèse pour tout entourage V de F et tout point $x \in A$, il existe un ensemble $H \in \Phi$ et un voisinage U de x tels que, pour tout $y \in U$ et pour u et v dans H, on ait $(u(y),v(y)) \in V$. Comme A est compact, il existe un nombre fini de points x_i $(1 \leq i \leq n)$ tels que les voisinages U_i correspondants forment un recouvrement de A ; si H_i désigne l'ensemble de Φ correspondant à x_i, et si on pose $H_o = \bigcap_i H_i$, H_o appartient à Φ et on a $(u(y),v(y)) \in V$ quels que soient $y \in A$ et u et v dans H_o, d'où la proposition.

<u>Corollaire</u>. <u>Soient</u> E <u>un espace localement compact</u>, E' <u>un espace topologique séparé</u>, F <u>un espace uniforme séparé et complet</u>, f <u>une application de</u> $E \times E'$ <u>dans</u> F. <u>Pour tout</u> $y \in E'$, <u>on désigne par</u> f_y <u>l'application partielle</u> $x \to f(x,y)$ <u>de</u> E <u>dans</u> F. <u>Pour que</u> f <u>soit continue dans</u> $E \times E'$, <u>il faut et il suffit que</u> f_y <u>soit continue pour tout</u> y <u>et que l'application</u> $y \to f_y$ <u>de</u> E' <u>dans</u> $\mathcal{C}_c(E,F)$ <u>soit continue dans</u> E'.

En effet, dire que f est continue au point (x_o,y_o) signifie que l'application $(x,y) \to f(x,y)$ converge vers $f(x_o,y_o)$ suivant le filtre $\mathfrak{V} \times \mathfrak{V}'$, produit du filtre $\mathfrak{V}$ des voisinages de x_o et du filtre $\mathfrak{V}'$ des voisinages de y_o ; suivant le filtre $\mathfrak{V}'$, l'application $y \to f_y$ est donc localement uniformément convergente au point x_o ; comme cela est vrai pour tout $x_o \in E$, l'image de $\mathfrak{V}'$ par l'application $y \to f_y$ est un filtre de Cauchy pour la structure $\mathcal{U}_c$, d'après la prop.8 ; comme $\mathcal{C}_c(E,F)$ est complet, cela signifie que $y \to f_y$ est continue au point y_o. La réciproque est immédiate, d'après la prop.7 (ou le th.1)

On déduit de la proposition 8 le complément suivant à la prop. 7 :

<u>Proposition 9</u>. <u>Soit</u> E <u>un espace localement compact</u>, F <u>un espace uniforme séparé ; sur l'ensemble</u> $\mathcal{C}(E,F)$, <u>la topologie déduite de la structure uniforme</u> $\mathcal{U}_c$ <u>de la convergence compacte est la moins fine des topologie pour lesquelles l'application</u> $(u,x)\to u(x)$ <u>de</u> $\mathcal{C}(E,F)\times E$ <u>dans</u> F <u>est continue</u>.

En effet, dans une topologie rendant $(u,x)\to u(x)$ continue, soit $\mathfrak{F}$ le filtre des voisinages d'une application $u_0 \in \mathcal{C}(E,F)$; si $\mathfrak{V}$ est le filtre des voisinages d'un point $x_0 \in E$, l'application $(u,x)\to u(x)$ converge vers $u_0(x_0)$ suivant le filtre produit $\mathfrak{F}\times\mathfrak{V}$; il en résult (prop.5) que le filtre $\mathfrak{F}$ est localement uniformément convergent au point x_0, et par suite en tout point de E. D'après la prop.8, $\mathfrak{F}$ est donc un filtre de Cauchy pour la structure $\mathcal{U}_c$, et comme u_0 est adhérent à $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}$ converge vers u_0, autrement dit, est <u>plus fin</u> que le filtre des voisinages de u_0 dans la topologie déduite de $\mathcal{U}_c$, ce qui démontre la proposition (chap.I, § 2, prop.1).

On conclut de cette proposition que, lorsque E est localement compact, la topologie de $\mathcal{C}_c(E,F)$ ne dépend que de la <u>topologie</u> de F : elle est la même pour deux structures uniformes distinctes sur F, mais compatible avec une même topologie sur F.

<u>Exercices</u>. 1) Soit E un espace topologique séparé, F un espace uniforme séparé. Soient $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ deux ensembles de parties de E satisfaisant aux conditions (F'_I) et (F'_{II}) ; montrer que, si $\mathfrak{S}_1$ est contenu dans $\mathfrak{S}_2$ et distinct de $\mathfrak{S}_2$, la structure uniforme $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}_1}$ est strictement moins fine que $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}_2}$ sur l'ensemble $\mathcal{F}(E,F)$. En particulier :

a) Si E n'est pas compact, la structure uniforme $\mathcal{U}_u$ est strictement plus fine que la structure uniforme $\mathcal{U}_c$.

b) S'il existe dans E des ensembles compacts infinis (*), la structure uniforme $\mathcal{U}_c$ est strictement plus fine que la structre uniforme $\mathcal{U}_s$.

2) Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E, tel que, pour toute partie non vide A de E et tout $x \in \overline{A}$, il existe un ensemble $B \in \mathfrak{S}$, contenu dans A et tel que $x \in \overline{B}$. Montrer que le sous-espace $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est <u>fermé</u> dans $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ (utiliser la prop.4, et montrer que toute application de E dans F, continue relativement à l'adhérence de tout ensemble de $\mathfrak{S}$, est continue dans E). En déduire que, si E est un espace métrisable, l'espace $\mathcal{C}_c(E,F)$ est complet lorsque F est séparé et complet.

3) Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E ; montrer que, si $\mathfrak{S}'$ est l'ensemble des <u>adhérences</u> des ensembles de $\mathfrak{S}$ dans E, les structures uniformes induites sur $\mathcal{C}(E,F)$ par $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$ et $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}'}$, sont identiques (voir la prop.4).

4) Soit E un espace complètement régulier (chap. VII, § 1), $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ deux ensembles de parties de E satisfaisant à (F'_I) et (F'_{II}) et tels que l'adhérence de tout ensemble de $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$) appartienne aussi à $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$). Montrer que, si $\mathfrak{S}_1$ est contenu dans $\mathfrak{S}_2$ et distinct de $\mathfrak{S}_2$, la structure uniforme induite par $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}_1}$ sur l'ensemble $\mathcal{C}(E, R)$ des fonctions numériques continues dans E est strictement moins fine que la structure uniforme induite sur $\mathcal{C}(E, R)$ par $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}_2}$.

5) Si E est un espace complètement régulier, montrer que l'ensemble $\mathcal{C}(E, R)$ est partout dense dans $\mathcal{F}_s(E, R)$.

6) Soient E et F deux espaces uniformes séparés. A toute application continue f de E dans F , on fait correspondre son <u>ensemble représentatif</u> A(f) dans $E \times F$, qui est fermé (chap.I, § 8,exerc.6). On définit ainsi une application biunivoque de $\mathcal{C}(E,F)$ dans l'ensemble $\mathfrak{F}(E \times F)$ des parties fermées de l'espace uniforme produit $E \times F$. Si on munit $\mathfrak{F}(E \times F)$ de la structure uniforme définie dans l'exerc.7 du chap.II, § 2, montrer que l'application $f \to A(f)$ de l'espace uniforme $\mathcal{C}_u(E,F)$ dans $\mathfrak{F}(E \times F)$ est uniformément continue. Si en outre E est compact, l'application réciproque de $f \to A(f)$ est aussi uniformément continue. Lorsqu'on prend pour E l'intervalle ouvert $]0,1[$ de R , pour F la droite numérique R , montrer que l'application réciproque de $f \longrightarrow A(f)$ n'est pas uniformément continue.

7) Soit E un espace compact métrisable, F un espace métrisable ayant une base dénombrable. Montrer que l'espace métrisable $\mathcal{C}_u(E,F)$ admet une base dénombrable (utiliser l'exerc.12 du chap. VII, § 2 : pour tout couple d'entiers m,n, soit $A_{m,n}$ l'ensemble des applications continues (donc uniformément continues) de E dans F , telles que la distance de f(x) et f(x') soit $\leqslant 1/m$ dès que la distance de x et x' est $\leqslant 1/n$; montrer qu'il existe une partie dénombrable $B_{m,n}$ de $A_{m,n}$ telle que toute application de $A_{m,n}$ soit à une distance $\leqslant 4/m$ d'une application appartenant à $B_{m,n}$).

8) Soit E un espace localement compact métrisable et dénombrable à l'infini (chap. VII, § 1,exerc.10), F un espace métrisable ayant une base dénombrable. Montrer que l'espace $\mathcal{C}_c(E,F)$ est métrisable et admet une base dénombrable (pour voir que $\mathcal{C}_c(E,F)$ est métrisable, utiliser le corollaire du th.1 du chap.VII, § 2 ; pour voir que $\mathcal{C}_c(E,F)$ admet une base dénombrable, utiliser l'exerc. 7).

9) Soit $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ le filtre produit, sur un ensemble $E_1 \times E_2$, d'un filtre $\mathfrak{F}_1$ sur E_1 et d'un filtre $\mathfrak{F}_2$ sur E_2. Soit f une application de $E_1 \times E_2$ dans un espace uniforme séparé et complet F. On suppose que :

a) quel que soit $x_1 \in E_1$, $\lim_{\mathfrak{F}_2} f(x_1,x_2)=g(x_1)$ existe ;

b) quel que soit $x_2 \in E_2$, $\lim_{\mathfrak{F}_1} f(x_1,x_2)=h(x_2)$ existe ;

c) quel que soit l'entourage V de F, il existe $x_2 \in E_2$ et $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ tels que, quel que soit $x_1 \in A_1$, on ait $(f(x_1,x_2),g(x_1)) \in V$.

Montrer que, dans ces conditions, g a une limite suivant le filtre $\mathfrak{F}_1$.

10) Avec les notations de l'exerc.9, on suppose que les conditions a) et b) de cet exercice sont satisfaites, et en outre que g a une limite a suivant le filtre $\mathfrak{F}_1$. Pour que h ait pour limite a suivant le filtre $\mathfrak{F}_2$, il faut et il suffit que la condition suivante soit remplie :

d) quels que soient l'entourage V de F et l'ensemble $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ il existe $x_1 \in A_1$ et $A_2 \in \mathfrak{F}_2$ tels que, pour tout $x_2 \in A_2$, on ait $(f(x_1,x_2),h(x_2)) \in V$.

11) Soient E un espace compact, E' un ensemble filtré par un filtre $\mathfrak{F}$, f une application de $E \times E'$ dans un espace uniforme F séparé et complet. On suppose que, pour tout $y \in E'$, l'application $x \rightarrow f(x,y)$ est <u>continue</u> dans E, et que pour tout $x \in E$, $\lim_{\mathfrak{F}} f(x,y)=g(x)$ existe. Montrer que la condition suivante est <u>nécessaire et suffisante</u> pour que g soit continue dans E :

quels que soient l'entourage V de F et l'ensemble $A \in \mathfrak{F}$, il existe une application $\varphi_{A,V}$ de E dans A telle que, pour tout $x \in E$, on ait $(f(x, \varphi_{A,V}(x)),g(x)) \in V$, et que l'ensemble $\varphi_{A,V}(E)$ soit <u>fini</u>. (utiliser l'exerc.10).

§ 2. Familles équicontinues.

1. __Ensembles compacts de fonctions continues.__ Soit E un espace topologique séparé, F un espace uniforme séparé, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E tel que tout point de E appartienne à un ensemble de $\mathfrak{S}$ au moins ; on sait alors (§ 1,prop.1) que l'espace uniforme $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ des applications continues de E dans F est séparé. Proposons-nous de chercher des conditions __nécessaires__ pour qu'un sous-espace H de $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ soit __précompact__ (chap.II, § 4) ; ces conditions sont a fortiori nécessaires pour que H soit __compact__.

En premier lieu, si H est précompact pour la structure uniforme induite par $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$, il est a fortiori précompact pour la structure uniforme induite par la structure uniforme __moins fine__ $\mathcal{U}_s$; autrement dit, H est un sous-espace précompact de l'espace uniforme produit F^E, donc aussi de son complété $\hat{F}^E$; comme ce dernier espace est complet, il revient au même de dire que H est __relativement compact__ dans $\hat{F}^E$, ce qui entraine que la projection de H sur chacun des facteurs $\hat{F}$ de cet espace est relativement compacte (chap.I, § 10,cor. du th.2) ; cette dernière condition enfin signifie que, __pour tout__ $x \in E$, H_x __est un sous-espace précompact de__ F.

Pour donner une seconde condition nécessaire, nous poserons la définition suivante :

__Définition 1.__ __On dit qu'une partie__ H __de l'ensemble__ $\mathcal{F}(E,F)$ __des applications de__ E __dans__ F __est un ensemble équicontinu au point__ $x \in E$ __si, quel que soit l'entourage__ V __de__ F, __il existe un voisinage__ U __de__ x __tel que, quels que soient__ $y \in U$ et $u \in H$, __on ait__ $(u(x),u(y)) \in V$.

__On dit que__ H __est un ensemble équicontinu relativement à une partie__ A __de__ E __si l'ensemble des restrictions__ à A __des fonctions__ $u \in H$ __est équicontinu en tout point du sous-espace__ A.

Il est clair que toute partie d'un ensemble H équicontinu en un point $x \in E$ est un ensemble équicontinu en ce point. Un ensemble H équicontinu relativement au sous-espace A, l'est aussi relativement à un sous-espace $B \subset A$. Si H est équicontinu relativement à un nombre <u>fini</u> de sous-espaces A_i de E, il l'est encore relativement à leur réunion.

<u>Exemples</u>. 1) Toute ensemble <u>fini</u> de fonctions f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ continues au point $x_0 \in E$, est équicontinu en ce point ; en effet, pour chaque indice i et pour un entourage V quelconque de F, il existe un voisinage U_i de x_0 tel que $(f_i(x), f_i(x_0)) \in V$ pour tout $x \in U_i$; ces n relations seront simultanément vérifiées dans le voisinage $U = \bigcap_i U_i$ de x_0.

2) Soient E et F deux espaces <u>métriques</u>, d la distance dans E, d' la distance dans F. L'ensemble H des applications u de E dans F telles que

$$d'(u(x), u(x_0)) \leqslant k . d(x, x_0)$$

pour tout x situé dans un voisinage U_0 de x_0 (le nombre $k > 0$ et le voisinage U_0 étant indépendants de u) est équicontinu au point x_0.

<u>Remarque</u>. Si H est un ensemble équicontinu au point $x \in E$, les fonctions $u \in H$ sont évidemment toutes <u>continues</u> au point x ; mais elles ne sont pas nécessairement continues en tout autre point de E

<u>Proposition 1</u>. <u>Si H est un sous-espace précompact de</u> $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$, <u>$H$ est équicontinu relativement à toute partie</u> $A \in \mathfrak{S}$.

En effet, soit A un ensemble quelconque de $\mathfrak{S}$, x un point de A, V un entourage symétrique quelconque de F. Par hypothèse, H peut être recouvert par un nombre fini d'ensembles petits d'ordre $W(V,A)$; autrement dit, il existe un nombre fini de fonctions $u_i \in H$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ tel que, pour tout $u \in H$, il existe au moins un indice i tel que, pour tout $y \in A$, on ait $(u(y), u_i(y)) \in V$. Comme u_i est continue, il existe un voisinage U_i de x tel que, pour tout $y \in U_i$, on ait $(u_i(x),u_i(y)) \in V$. Soit U le voisinage de x , intersection des U_i ; pour tout $y \in U$, on a $(u_i(x),u_i(y)) \in V$ pour <u>tout</u> indice i ; par suite, pour tout $u \in H$ et tout y appartenant au voisinage $U \cap A$ de x par rapport à A , on a $(u(x),u(y)) \in \overset{3}{V}$, ce qui démontre la proposition.

Les deux conditions nécessaires que nous venons d'obtenir <u>ne sont pas suffisantes en général</u> pour que H soit précompact.

Par exemple, dans l'espace $\mathcal{C}_u(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, l'ensemble H des fonctions $x \to ax$, où a prend toutes les valeurs de l'intervalle $[0,1]$, satisfait à ces deux conditions, mais n'est pas un sous-espace précompact (cf. exerc.1).

<u>2. Propriétés des ensembles équicontinus</u>. La notion d'ensemble équicontinu en un point x d'un espace E est relative à la <u>topologie</u> de E et à la <u>structure uniforme</u> de F : si on remplace la topologie de E par une topologie <u>plus fine</u>, et la structure uniforme de F par une structure uniforme <u>moins fine</u>, un ensemble H équicontinu au point x reste encore équicontinu en ce point. Plus généralement, soit E' un deuxième espace topologique, F' un deuxième espace uniforme, ψ une application <u>continue</u> de E' dans E , φ une application <u>uniformément continue</u> de F dans F' : l'ensemble des fonctions $\varphi \circ u \circ \psi^*$, où u parcourt H , est équicontinu en tout point $x' \in E'$ tel que $\psi(x')=x$.

<u>Proposition 2</u>. <u>Soit</u> H <u>un sous-ensemble de</u> $\mathcal{F}(E,F)$, <u>équicontinu au point</u> $x \in E$. <u>Si</u> Φ <u>est un filtre sur</u> H , <u>tel que</u> Φ_x <u>soit convergent</u>, Φ <u>est localement uniformément convergent au point</u> x .

En effet, pour tout entourage symétrique V de F , il existe par hypothèse un voisinage U de x tel que, pour tout $y \in U$ et tout $u \in H$, $(u(x),u(y)) \in V$. D'autre part, comme Φ_x est convergent, il existe un ensemble $K \in \Phi$ tel que pour $u \in K$ et $v \in K$, on ait $(u(x),v(x)) \in V$.

Comme $K \subset H$, on en conclut que $(u(y),v(y)) \in \overset{3}{V}$ pour tout $y \in U$, et quels que soient u et v dans K, d'où la proposition.

De cette proposition, et de la prop. 8 du § 1, on déduit que si H est <u>équicontinu relativement à tout ensemble compact</u>, un filtre Φ sur H qui converge <u>simplement</u> dans E, est un filtre de Cauchy pour la structure $\mathcal{U}_c$ de la <u>convergence compacte</u>. Mais cette proposition résulte aussi de la proposition plus précise suivante :

<u>Proposition 3</u>. <u>Soit</u> H <u>un ensemble équicontinu relativement à toute partie compacte de</u> E ; <u>les structures uniformes induites sur</u> H <u>par</u> $\mathcal{U}_s$ <u>et</u> $\mathcal{U}_c$ <u>sont identiques</u>

En effet, soit A une partie compacte de E et V un entourage symétrique quelconque de F ; pour tout $x \in A$, il existe un voisinage ouvert U_x de x <u>par rapport à</u> A tel que, pour tout $u \in H$ et tout $y \in U_x$, on ait $(u(x),u(y)) \in V$; comme A est compact, il existe un nombre fini de points $x_i \in A$ tels que les U_{x_i} recouvrent A ; on en conclut que, si u et v sont deux fonctions appartenant à H et telles que $(u(x_i),v(x_i)) \in V$ pour <u>tout</u> indice i, on a aussi $(u(y),v(y)) \in \overset{3}{V}$ pour <u>tout</u> $y \in A$. Autrement dit, si B désigne l'ensemble fini formé des x_i, la trace sur $H \times H$ de l'entourage $W(V,B)$ est contenue dans l'entourage $W(\overset{3}{V},A)$; comme d'autre part, on a $W(V,B) \supset W(V,A)$, la proposition est démontrée.

<u>Proposition 4</u>. <u>Soit</u> H <u>un sous-ensemble de</u> $\mathcal{F}(E,F)$, <u>équicontinu au point</u> $x \in E$. <u>L'adhérence</u> $\overline{H}$ <u>de</u> H <u>dans l'espace</u> $\mathcal{F}_s(E,F)$ $(=F^E)$, <u>est un ensemble équicontinu au point</u> x.

En effet pour tout entourage symétrique V de F, il existe un voisinage U de x tel que, pour <u>tout</u> $w \in H$ et tout $y \in U$, $(w(x),w(y)) \in V$; d'autre part pour tout $u \in \overline{H}$ et pour chaque $y \in U$, il existe $w_y \in H$ tel que $(u(y),w_y(y)) \in V$ et $(u(x),w_y(x)) \in V$; on en conclut

$(u(x),u(y)) \in \overset{3}{V}$ pour tout $y \in U$ et tout $u \in \overline{H}$, ce qui démontre la proposition.

Si on suppose que H est *équicontinu relativement à tout ensemble compact*, il en est donc de même de l'adhérence $\overline{H}$ de H dans l'espace $\mathcal{F}_s(E,F)$; en outre, $\overline{H}$ est aussi l'adhérence de H dans l'espace $\mathcal{F}_c(E,F)$: en effet, l'adhérence de H dans cet espace est contenue dans $\overline{H}$; mais sur $\overline{H}$, les structures uniformes induites par $\mathcal{U}_s$ et $\mathcal{U}_c$ sont identiques d'après la prop.3, et il en est donc de même des topologies déduites respectivement de ces structures uniformes.

Plus particulièrement :

Corollaire. *Si* H *est un sous-ensemble de* $\mathcal{C}(E,F)$, *équicontinu relativement à* E, *l'adhérence* $\overline{H}$ *de* H *dans* $\mathcal{F}_s(E,F)$ *est contenue dans* $\mathcal{C}(E,F)$ *et est un ensemble équicontinu relativement à* E, *identique à l'adhérence de* H *dans* $\mathcal{C}_c(E,F)$.

Proposition 5. *Soit* H *un sous-ensemble de* $\mathcal{C}(E,F)$, *équicontinu relativement à* E. *Si* B *est une partie partout dense de* E, *la structure uniforme de la convergence simple dans* B *induit sur* H *la même structure uniforme que* $\mathcal{U}_s$.

Il faut montrer que, si A est une partie finie quelconque de E et V un entourage symétrique quelconque de F, il existe une partie finie A' de B et un entourage V' de F tels que la trace sur $H \times H$ de l'entourage $W(V,A)$ contienne la trace de l'entourage $W(V',A')$. Prenons pour V' un entourage symétrique tel que $\overset{3}{V'} \subset V$; pour chaque point x_i de A $(1 \leq i \leq n)$, il existe un voisinage U_i de x_i tel que, pour tout $u \in H$ et tout $y \in U_i$, on ait $(u(x_i),u(y)) \in V'$; soit y_i un point de $U_i \cap B$, et A' la partie finie de B formée des y_i. Si u et v sont deux fonctions de H telles que $(u(y_i),v(y_i)) \in V'$ pour $1 \leq i \leq n$, on aura donc aussi

$(u(x_i),v(x_i)) \in \overset{3}{V'} \subset V$ pour $1 \leq i \leq n$, d'où la proposition.

Nous allons maintenant compléter la prop.1 dans le cas où la structure uniforme considérée est celle de la convergence compacte.

Proposition 6. Pour qu'un sous-espace H de $\mathcal{C}_c(E,F)$ soit précompact, il faut et il suffit que H soit équicontinu relativement à toute partie compacte de E , et que pour tout $x \in E$, H_x soit un sous-espace précompact de F .

Nous avons vu au n°1 que ces conditions sont nécessaires ; montrons qu'elles sont suffisantes. Supposons les remplies ; d'après la prop.3 , il suffit de montrer que H est précompact pour la structure uniforme de la convergence simple, c'est-à-dire lorsqu'on considère H comme un sous-espace de $\mathcal{F}_s(E,F)=F^E$; or l'hypothèse entraîne que les projections H_x de H sur les espaces facteurs de cet espace produit sont des sous espaces précompacts de F , c'est-à-dire des sous-espaces relativement compacts du complété $\hat{F}$ de F ; on en conclut (chap.I, §10, cor. du th.2) que H est relativement compact dans l'espace produit $(\hat{F})^E$; comme ce dernier est le complété de F^E , H est précompact dans F^E .

Le cas particulier le plus important de la prop.6 est le suivant :

Théorème 1 (Arzela). Soit E un espace localement compact, F un espace uniforme complet. Pour qu'un sous-ensemble H de $\mathcal{C}_c(E,F)$ soit relativement compact, il faut et il suffit que H soit équicontinu dans E , et que pour tout $x \in E$, H_x soit relativement compact dans F .

En effet, les notions d'ensemble précompact et d'ensemble relativement compact dans F sont alors identiques, puisque F est complet ; il en est de même dans l'espace $\mathcal{C}_c(E,F)$ qui est aussi complet (§1, cor.2 du th.1).

26

Corollaire. Soient E un espace localement compact, F un espace compact. Pour qu'un sous-ensemble H de $\mathcal{C}_c(E,F)$ soit relativement compact, il faut et il suffit qu'il soit équicontinu dans E.

Remarques. 1) Si H est précompact dans $\mathcal{C}_c(E,F)$, et A compact dans E, l'ensemble $H(A) = \bigcup_{x\in A} H_x$ est précompact dans F. En effet, pour tout $x\in A$, il existe un voisinage U de x dans A tel que, pour tout $y\in U$ et tout $u\in H$, on ait $(u(x),u(y))\in V$. Comme A est compact, il existe un nombre fini de points x_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ de A, tels que les voisinages U_i correspondants forment un recouvrement de A. Comme H_{x_i} est précompact, il existe un recouvrement fini de la réunion M des H_{x_i} $(1\leqslant i\leqslant n)$ par des ensembles A_j petits d'ordre V $(1\leqslant j\leqslant p)$. Pour tout $x\in A$, il existe un indice i tel que $x\in U_i$, donc $H_x\subset V(H_{x_i})$; il résulte que

$$H(A) = \bigcup_{x\in A} H_x \subset V\Big(\bigcup_{i=1}^{n} H_{x_i}\Big) \subset \bigcup_{j=1}^{p} V(A_j)$$

Or, les ensembles $V(A_j)$ sont petits d'ordre V, d'où la proposition.

2) D'après la prop.5, la prop.6 reste vraie lorsqu'on suppose, d'une part, que H_x est précompact seulement pour les points x d'une partie partout dense B de E, mais d'autre part que H est équicontinu relativement à E.

En particulier, le th.1 reste vrai si on suppose seulement que H_x est relativement compact dans F pour tous les points x d'une partie B partout dense dans E.

3. Ensembles uniformément équicontinus. Définition 2. Soient E et F deux espaces uniformes séparés. On dit qu'une partie H de $\mathcal{C}(E,F)$ est un ensemble uniformément équicontinu si, pour tout entourage V de F, il existe un entourage U de E tel que, pour tout $u\in H$, la relation $(x,y)\in U$ entraîne $(u(x),u(y))\in V$.

On dit qu'une partie H de $\mathcal{F}(E,F)$ est un ensemble uniformément équicontinu relativement à une partie A de E, si les restrictions au sous-espace uniforme A des fonctions $u \in H$ forment un ensemble uniformément équicontinu dans $\mathcal{C}(A,F)$.

Il est clair que, si H est uniformément équicontinu relativement à une partie $A \subset E$, toutes les fonctions $u \in H$ sont uniformément continues relativement à A. Si H est uniformément équicontinu relativement à A, il l'est aussi relativement a tout sous-espace $B \subset A$; toute partie de H est aussi un ensemble uniformément équicontinu relativement à A. Si H est uniformément équicontinu relativement a un nombre fini de sous-espaces A_i de E, il l'est aussi relativement a leur réunion

Exemples. 1) Tout ensemble fini de fonctions f_i $(1 \leq i \leq n)$ uniformément continues dans E, est uniformément équicontinu (relativement à E) ; en effet, pour chaque indice i et tout entourage V de F, il existe un entourage U_i de E tel que la relation $(x,y) \in U_i$ entraîne $(f_i(x),f_i(y)) \in V$; si $U = \bigcap_i U_i$, la relation $(x,y) \in U$ entraînera donc $(f_i(x),f_i(y)) \in V$ pour tout indice i .

2) Soient E et F deux espaces métriques, d la distance dans E, d' la distance dans F. L'ensemble H des aplications u de E dans F telles que

$$d'(u(x),u(y)) \leq k.d(x,y)$$

quels que soient $x \in E$, $y \in E$ (k nombre > 0 indépendant de u) est uniformément équicontinu. Il en est ainsi, plus particulièrement, de l'ensemble des isomètries de E sur une partie de F.

Remarque. Si H est un sous-ensemble de $\mathcal{C}(E,F)$, uniformément équicontinu relativement à une partie A de E, H est aussi uniformément équicontinu relativement au sous-espace $\bar{A}$; en effet, les restrictions à $\bar{A}$ des fonctions $u \in H$ sont les prolongements par

28

par continuité des restrictions de ces fonctions à A ; si U est un entourage ouvert de E tel que, pour $x \in A$, $y \in A$, $(x,y) \in U$, on ait $(u(x),u(y)) \in V$, V étant un entourage fermé de F , on a encore, pour $x_1 \in \bar{A}$, $y_1 \in \bar{A}$, $(x_1,y_1) \in U$, $(u(x_1),u(y_1)) \in V$ car $(u(x_1),u(y_1))$ est limite de $(u(x),u(y))$ lorsque (x,y) tend vers (x_1,y_1) en restant dans $U \cap (A \times A)$.

Comme une application continue de E dans F n'est pas nécessairement uniformément continue (si E n'est pas compact), un ensemble $H \in \mathcal{C}(E,F)$, également continu relativement à E , n'est pas nécessairement uniformément équicontinu ; mais on a la proposition suivante :

<u>Proposition 7</u> . <u>Soient</u> E <u>un espace compact,</u> F <u>un espace uniforme séparé</u>. <u>Tout sous-ensemble</u> H <u>de</u> $\mathcal{C}(E,F)$, <u>équicontinu relativement à</u> E , <u>est uniformément équicontinu</u>.

En effet, pour tout $x \in E$ et tout entourage symétrique V de F , il existe un entourage U_x de E tel que la relation $y \in U_x(x)$ entraîne $(u(x),u(y)) \in V$ pour tout $u \in H$. Soit T_x un entourage symétrique de E tel que $\overset{2}{T}_x \subset U_x$; comme E est compact, il existe un nombre fini de points $x_i \in E$ tels que les voisinages $T_{x_i}(x_i)$ forment un recouvrement de E ; soit T l'entourage de E , intersection des T_{x_i} . Si on a (x,y) T , il existe un indice i tel que $x \in T_{x_i}(x_i)$, donc $y \in \overset{2}{T}_{x_i}(x_i) \subset U_{x_i}(x_i)$; par suite, pour tout $u \in H$, on a $(u(x_i),u(x)) \in V$ et $(u(x_i),u(y)) \in V$, d'où $(u(x),u(y)) \in \overset{2}{V}$, ce qui démontre la proposition.

Toutes les propriétés des ensembles équicontinus (relativement à E ou à une partie de E) sont a fortiori valables pour les ensembles uniformément équicontinus relativement à E . En outre, la prop.4 se complète par la suivante :

<u>Proposition 8</u>. <u>L'adherence, dans</u> $\mathcal{F}_s(E,F)$, <u>d'un ensemble</u> H <u>uniformément équicontinu, est un ensemble uniformément équicontinu</u>.

Il suffit, pour le voir, de remplacer, dans la démonstration de la prop.4, le voisinage U de x par un voisinage de la forme $T(x)$, où T est un entourage de la structure uniforme de E', tel que pour tout $u \in H$, la relation $(x,y)\in T$ entraîne $(u(x),u(y))\in V$.

<u>Exercices</u>. *1) Dans l'espace $\mathcal{C}_u(R_+,I)$ des applications continues de R_+ dans $I=[-1,+1]$, muni de la structure de la convergence uniforme, on considère l'ensemble H formé des fonctions $\sin\sqrt{x+4n^2\pi^2}$ (n entier $\geqslant 0$). Montrer que H est équicontinu dans R_+, mais n'est pas relativement compact dans l'espace $\mathcal{C}_u(R_+,I)$. (Remarquer que la suite formée des fonctions de H converge simplement vers 0 dans R_+).*

2) Soit E un espace complètement régulier (chap.VII, §1), $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E tel que tout point de E soit intérieur a un ensemble de $\mathfrak{S}$ au moins. Montrer que l'espace $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,R)$ n'est pas localement compact.

3) Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E, tel que, pour toute partie non vide A de E et tout $x\in\bar{A}$, il existe un ensemble $B\in\mathfrak{S}$, contenu dans A et tel que $x\in\bar{B}$. Si H est un ensemble de fonctions équicontinu relativement a toute partie B appartenant à $\mathfrak{S}$, montrer que H est equicontinu relativement à E (raisonner par l'absurde). En déduire que si E est métrisable, et si H est équicontinu relativement a toute partie compacte de E, H est équicontinu relativement à E.

4) Soient E un espace topologique, H un sous-ensemble de $\mathcal{C}(E,F)$ équicontinu relativement à E, V un entourage quelconque de F.

Etant donné un point quelconque $x \in E$, l'ensemble des points $y \in E$ pour lesquels ils existe un entier n (dépendant de y) tel que $H_y \subset \overset{n}{V}(H_x)$ est à la fois ouvert et fermé.

En déduire que, si A est un ensemble compact et connexe dans E , et x un point quelconque de A , il existe un entier $n > 0$ tel que $H(A) \subset \overset{n}{V}(H_x)$.

5) Soient E un espace topologique connexe, F un espace localement compact, dont la structure uniforme est telle qu'il existe un entourage V tel que $V(y)$ soit compact pour tout $y \in F$. Soit H un sous-ensemble de $\mathcal{C}_c(E,F)$, équicontinu relativement a toute partie compacte de E . Montrer que, pour que H soit un sous-espace précompact de $\mathcal{C}_c(E,F)$, il suffit que, pour <u>un</u> point $x \in E$, l'ensemble H_x soit précompact dans F (utiliser l'exerc. 4).

6) Soit E un espace compact métrisable, d une distance compatible avec la topologie de E et telle que $d(x,y) \leqslant \frac{1}{2}$ dans E . Soit (E_α) une famille infinie d'espaces identiques à E , F un espace somme topologique des espaces E_α ; on définit sur F une métrique d' compatible avec sa topologie en posant $d'(x,y)=d(x,y)$ si x et y appartiennent à un même E_α , $d'(x,y)=1$ dans le cas contraire. Soit H l'ensemble des applications isométriques u de F dans lui-même, telles que $u(E_\beta) \subset E_\beta$ pour un indice β ; montrer que H_x est précompact pour $x \in E_\beta$, mais non pour $x \in E_\alpha$, où $\alpha \neq \beta$.

§ 3. Groupes d'homéomorphismes.

<u>1. Continuité de l'application</u> $(u,v) \to v \circ u$. Soit E un espace topologique, F et G deux espaces uniformes, un ensemble de parties de E , $\mathfrak{T}$ un ensemble de parties de F . Considérons l'application $(u,v) \to v \circ u$ de l'espace $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F) \times \mathcal{C}_{\mathfrak{T}}(F,G)$ dans $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,G)$, et proposons-nous

de trouver des conditions <u>suffisantes</u> pour que cette application soit <u>continue</u> en un point donné (u_0,v_0). Par définition, cette propriété signifie que, si on se donne arbitrairement un ensemble $C \in \mathfrak{S}$ et un entourage W de G, il existe un ensemble $A \in \mathfrak{S}$, un entourage U de F, un ensemble $B \in \mathfrak{T}$ et un entourage V de G, tels que les relations $(u(x),u_0(x)) \in U$ pour tout $x \in A$, $(v(y),v_0(y)) \in V$ pour tout $y \in B$, entraînent

(1) $$(v(u(x)),v_0(u_0(x))) \in W$$

pour tout $x \in C$.

Prenons $A=C$, et pour V un entourage symétrique tel que $\overset{2}{V} \subset W$. La relation (1) sera satisfaite pour tout $x \in C$ si, d'une part, la relation $(u(x),u_0(x)) \in U$ pour $x \in C$ entraîne

(2) $$(v_0(u(x)),v_0(u_0(x))) \in V$$

et si, d'autre part, la relation $(v(y),v_0(y)) \in V$ pour $y \in B$ entraîne

(3) $$(v(u(x)),v_0(u(x))) \in V$$

pour $x \in C$. Or, la relation (3) sera vérifiée pour tout $x \in C$ si on a $u(x) \in B$ pour tout u tel que $(u(x),u_0(x)) \in U$ dans C, autrement dit, si $U(u_0(C)) \subset B$; et si cette condition est remplie, la relation (2) sera vérifiée si v_0 est <u>uniformément continue</u> dans B. En résumé, on sera assuré de la continuité de la fonction $v\,u$ au point (u_0,v_0) si, quels que soient l'ensemble $C \in \mathfrak{S}$, et l'entourage V de G, il existe un entourage U de F et un ensemble $B \in \mathfrak{T}$ tels que :

a) $U(u_0(C)) \subset B$;

b) v_0 est uniformément continue dans B.

Les applications les plus importantes de ce résultat ont trait au cas où $E=F=G$; on a notamment les propositions suivantes :

<u>Proposition 1</u>. <u>L'application</u> $(u,v) \to v\circ u$ <u>de l'espace</u> $\mathcal{C}_u(E,E) \times \mathcal{C}_u(E,E)$ <u>dans</u> $\mathcal{C}_u(E,E)$ <u>est continue en tout point</u> (u_0,v_0) <u>tel que</u> v_0 <u>soit uniformément continue dans</u> E .

En effet, on peut se borner à vérifier les conditions précédentes pour $C=E$; en prenant $B=E$, les conditions a) et b) sont alors bien satisfaites.

<u>Proposition 2</u>. <u>Soit</u> E <u>un espace localement compact ; l'application</u> $(u,v) \to v\circ u$ <u>de l'espace</u> $\mathcal{C}_c(E,E) \times \mathcal{C}_c(E,E)$ <u>dans</u> $\mathcal{C}_c(E,E)$ <u>est continue en tout point</u>.

En effet, il suffit de vérifier les conditions a) et b) pour un ensemble C compact ; $u_0(C)$ est alors compact. Comme tout point de $u_0(C)$ admet dans E un voisinage compact, il existe un recouvrement de $u_0(C)$ par un nombre fini de ces voisinages, dont la réunion forme donc un voisinage compact K de $u_0(C)$; on peut prendre $B=K$, car il existe alors un entourage U de E tel que $U(u_0(C)) \subset K$ (chap.II, § 4,prop.1), et d'autre part v_0 étant continue dans l'ensemble compact B , y est uniformément continue.

<u>2. Continuité de l'application</u> $u \to u^{-1}$. Soit E un espace uniforme ; dans l'ensemble $\mathcal{C}(E,E)$ des applications continues de E dans lui-même, l'ensemble $\mathfrak{G}$ des <u>homéomorphismes</u> de E <u>sur</u> lui-même forme un <u>groupe</u> pour la loi de composition $(u,v) \to u\circ v$; nous désignerons par u^{-1} l'inverse, dans $\mathfrak{G}$, d'un homéomorphisme u de E sur lui-même, c'est-à-dire l'homoémorphisme réciproque de u . Proposons-nous de trouver des conditions <u>suffisantes</u> pour que l'application $u \to u^{-1}$ de $\mathfrak{G}$ sur lui-même soit <u>continue</u> en un point $u_0 \in \mathfrak{G}$, lorsqu'on munit $\mathfrak{G}$ de la topologie induite par celle de l'espace $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,E)$.

Par définition, si on se donne arbitrairement un ensemble $B \in \mathfrak{S}$ et un entourage V de E, il doit exister un ensemble $A \in \mathfrak{S}$ et un entourage U de E tels que les relations $(u(x), u_0(x)) \in U$ pour tout $x \in A$, entraînent $(u^{-1}(y), u_0^{-1}(y)) \in V$ pour tout $y \in B$ (u_0 et u étant des homéomorphismes de E sur lui-même). Faisons l'hypothèse supplémentaire que u_0^{-1} est uniformément continue dans B ; alors il existe un entourage U tel que la relation $(u^{-1}(y), u_0^{-1}(y)) \in V$ soit vérifiée pour tout $y \in B$ si on a, pour tout $y \in B$, $(u_0(u^{-1}(y)), y) \in U$. Or, si on pose $u^{-1}(y) = x$, cette dernière relation s'écrit $(u_0(x), u(x)) \in U$; la relation $(u_0(x), u(x)) \in U$ pour tout $x \in A$ entraînera donc $(u_0(u^{-1}(y)), y) \in U$ pour tout $y \in B$, pourvu qu'elle entraîne $B \subset u(A)$. En résumé, on sera assuré de la continuité de $u \to u^{-1}$ au point u_0 si, quels que soient l'ensemble $B \in \mathfrak{S}$ et l'entourage V de E, il existe un ensemble $A \in \mathfrak{S}$ et un entourage U de E tels que :

a) u_0^{-1} est uniformément continue dans B ;

b) les relations $(u_0(x), u(x)) \in U$ pour tout $x \in A$ entraînent $B \subset u(A)$.

En particulier :

Proposition 3. Soit E un espace uniforme ; si on munit le groupe $\mathfrak{G}$ des homéomorphismes de E sur lui-même de la topologie induite par $\mathcal{C}_u(E,E)$, l'application $u \to u^{-1}$ de $\mathfrak{G}$ sur lui-même est continue en tout point u_0 tel que u_0^{-1} soit uniformément continue dans E.

On peut en effet se borner alors à vérifier les conditions a) et b) précédentes pour $B = E$; or, a) est satisfaite par hypothèse, et b) est trivialement vérifiée pour $A = E$, puisque $u(E) = E$ par définition.

Proposition 4. Soit E un espace uniforme discret ; si on munit le groupe $\mathfrak{G}$ des applications biunivoques de E sur lui-même de la topologie induite par $\mathcal{C}_s(E,E)$ $(=E^E)$, l'application $u \to u^{-1}$ de $\mathfrak{G}$ sur lui-même est continue en tout point.

En effet, on peut se borner à vérifier les conditions a) et b) lorsque V est la diagonale Δ de $E \times E$, B un ensemble fini ; la condition a) est trivialement vérifiée, et si on prend $U = \Delta$ et $A = u_0^{-1}(B)$, la condition b) est aussi vérifiée, puisque alors $u(A) = u_0(A) = B$.

On pourrait croire, par analogie avec la prop.2, que, plus généralement, si E est <u>localement compact</u>, et si on munit $\mathfrak{G}$ de la topologie induite par $\mathcal{C}_c(E,E)$, $u \to u^{-1}$ est continue en tout point ; mais cette proposition est <u>inexacte</u> si on ne fait aucune hypothèse plus restrictive sur E (voir exerc. 6).

<u>3. Topologie des groupes d'homéomorphismes</u>. Les prop.1 et 3 ont en particulier la conséquence suivante :

<u>Théorème 1</u>. <u>Soit E un espace uniforme, $\mathfrak{G}_0$ le groupe des automorphismes de la structure uniforme de E. La topologie induite sur $\mathfrak{G}_0$ par $\mathcal{C}_u(E,E)$ est compatible avec la structure de groupe de $\mathfrak{G}_0$</u>.

Corollaire. Soit E un compact, la topologie induite sur $\mathfrak{G}$, groupe des automorphismes de E, est compatible avec la structure de groupe de $\mathfrak{G}$.

En effet, tout homéomorphisme de E est aussi un automorphisme de la structure uniforme (unique) de E (chap.II, §4, th.2).

Si E est un espace localement compact, E' l'espace compact obtenu par adjonction à E d'un "point à l'infini" ω (chap.I, §10, th.3), tout homéomorphisme de E se prolonge par continuité en un homéomorphisme de E' laissant invariant ω, car tout homéomorphisme de E transforme toute partie compacte de E en une partie compacte, et par suite tout complémentaire d'une partie compacte en le complémentaire d'une partie compacte. Si on munit E de la structure uniforme induite par celle de E' (cf. chap.VII, §1), la topologie induite sur le groupe des homéomorphismes de E par $\mathcal{C}_u(E,E)$ est donc compatible avec sa structure de groupe.

On peut compléter l'énoncé du th.1 en remarquant que la structure uniforme induite sur $\mathfrak{G}_o$ par la structure uniforme de $\mathcal{C}_u(E,E)$ n'est autre que la <u>structure uniforme droite</u> du groupe topologique $\mathfrak{G}_o$. En effet, on a une base du filtre des voisinages de l'élément neutre de $\mathfrak{G}_o$ (application identique de E sur lui-même) en faisant correspondre à tout entourage symétrique V de E l'ensemble des automorphismes u de la structure uniforme de E tels que $(u(x),x)\in V$ pour tout $x\in E$. Par suite, on a une base du filtre des entourages de la structure uniforme droite de $\mathfrak{G}_o$ en faisant correspondre à tout entourage symétrique V de E l'ensemble des couples (u,v) tels que $(v(u^{-1}(x)),x)\in V$ pour tout $x\in E$. Mais comme u est une application biunivoque de E sur lui-même, cette dernière relation équivaut à $(v(y),u(y))\in V$ pour tout $y\in E$, ce qui établit la propositèon.

On peut donner des exemples simples d'espaces compacts E pour lesquels le groupe $\mathfrak{G}$ des homéomorphismes de E, muni de la topologie induite par $\mathcal{C}_u(E,E)$, <u>ne peut être complété</u> (c'est-à-dire, de façon précise, n'est pas isomorphe à un sous-groupe d'un groupe complet) (cf. exerc.8) ; les deux structures uniformes d'un tel groupe sont naturellement distinctes.

Les prop.2 et 4 prouvent de même que :

<u>Proposition 5</u>. <u>Soit</u> E <u>un espace uniforme discret</u> ; <u>la topologie induite sur le groupe</u> $\mathfrak{G}$ <u>des applications biunivoques de</u> E <u>sur lui-même par</u> $\mathcal{C}_s(E,E)$, <u>est compatible avec la structure de groupe de</u> $\mathfrak{G}$.

Ici c'est la structure uniforme <u>gauche</u> du groupe topologique ainsi défini, qui coïncide avec la structure uniforme induite par $\mathcal{C}_s(E,E)$: on a en effet un système fondamental d'entourages de cette dernière, en faisant correspondre à toute partie finie F de E, l'ensemble des couples (u,v) tels que $u(x)=v(x)$ pour tou $x\in F$, et cette relation s'écrit aussi $u^{-1}(v(x))=x$ pour tout $x \in F$.

La structure uniforme droite de $\mathcal{G}$ est encore distincte, en général, de sa structure uniforme gauche (exerc. 9).

<u>4. Groupes équicontinus. Proposition 6</u>. Soient E un espace uniforme séparé, H <u>un sous ensemble de l'espace</u> $\mathcal{C}_s(E,E)$, <u>équicontinu relativement à</u> E. <u>L'application</u> $(u,v) \rightarrow v\circ u$ <u>de</u> H H <u>dans</u> $\mathcal{C}_s(E,E)$ <u>est continue dans l'espace</u> $H \times H$.

Soit (u_o,v_o) un point quelconque de $H\times H$. Tout revient à montrer que, étant donnés arbitrairement un entourage W de E et un nombre fini de points z_k de E , il existe d'une part un entourage U de E et un nombre fini de points $x_i \in E$, d'autre part un entourage V de E et un nombre fini de points $y_j \in E$, tels que les relations $(u(x_i),u_o(x_i)) \in U$, $v(y_j),v_o(y_j)) \in V$ pour tous les indices i et j (u et v appartenant à H) , entraînent

$$(4) \qquad (v(u(z_k)),v_o(u_o(z_k))) \in W$$

pour tout indice k .

Prenons les x_i identiques aux z_k , et l'entourage V tel que $\overset{2}{V} \subset W$. Alors les relations (4) seront vérifiées si on a d'une part

$$(5) \qquad (v(u(z_k)),v(u_o(z_k))) \in V$$

et de l'autre

$$(6) \qquad (v(u_o(z_k)),v_o(u_o(z_k)) \in V$$

pour tout indice k . La condition (6) sera réalisée si on prend pour les y_j les points $u_o(z_k)$. D'autre part, comme H est équicontinu en tout point de E , il existe un entourage U de E tel que la relation $(y,u_o(z_k)) \in U$ entraîne $(v(y),v(u_o(z_k))) \in V$ pour tout indice k et tout v H ; par suite, les relations $(u(z_k),u_o(z_k)) \in U$ entraînent (5), ce qui achève la démonstration.

Proposition 7. *Soient E un espace uniforme séparé, H un sous-ensemble de $\mathcal{C}_s(E,E)$, formé d'homéomorphismes de E, et tel que l'image H^{-1} de H par $u \to u^{-1}$ soit équicontinu relativement à E. Dans ces conditions, l'application $u \to u^{-1}$ de H dans $\mathcal{C}_s(E,E)$ est continue dans H.*

Soit u_o un point quelconque de H. Tout revient à prouver que, étant donnés arbitrairement un entourage V de E et un nombre fini de points $y_j \in E$, il existe un entourage U de E et un nombre fini de points $x_i \in E$, tels que les conditions $(u(x_i),u_o(x_i)) \in U$ pour tout indice i entraînent $(u^{-1}(y_j),u_o^{-1}(y_j)) \in V$ pour tout indice j (u appartenant à H).

Prenons les x_i identiques aux points $u_o^{-1}(y_j)$. Comme H^{-1} est équicontinu en tout point de E, il existe un entourage U de E tel que la relation $(y,y_j) \in U$ entraîne $(u^{-1}(y),u^{1}(y_j)) \in V$ pour tout indice j, et tout u H. Les relations $(u(x_j),y_j) \in U$ entraînent donc $(x_j,u^{-1}(y_j)) \in V$, c'est-à-dire $(u_o^{-1}(y_j),u^{-1}(y_j)) \in V$ pour tout indice j, d'où la proposition. De ces deux propositions résulte en particulier le théorème suivant :

Théorème 2. *Si H est un groupe d'homéomorphismes d'un espace topologique séparé E, équicontinu relativement à E, la topologie induite sur H par celle de $\mathcal{C}_s(E,E)$* (ou, ce qui revient au même, *par celle de $\mathcal{C}_c(E,E)$*) *est compatible avec la structure de groupe de H.*

Exemples. 1) Tout groupe *fini* H d'homéomorphismes d'un espace topologique séparé E est équicontinu ; la topologie induite sur H par celle de $\mathcal{C}_s(E,E)$ est la topologie *discrète*.

2) Si E est un espace *métrique*, le groupe I des *isométries* de E est équicontinu (et même uniformément équicontinu) ; la topologie induite sur I par celle de $\mathcal{C}_s(E,E)$ est donc compatible avec sa structure de groupe. On observera qu'on retrouve ainsi la prop.5,

car les permutations d'un espace discret E ne sont autres que les isométries de l'espace métrique obtenu en munissant E de la distance d telle que $d(x,y)=1$ pour tout couple (x,y) de points distincts.

On notera aussi que, sur I, les topologies induites par celle de $\mathcal{C}_u(E,E)$ et celle de $\mathcal{C}_s(E,E)$ sont toutes deux compatibles avec la structure de groupe de I ; mais ces topologies sont en général distinctes (exerc.11), celle induite par $\mathcal{C}_u(E,E)$ étant naturellement plus fine que celle induite par $\mathcal{C}_s(E,E)$.

On peut compléter le th.2 par la proposition suivante :

Proposition 8. Soit H un groupe uniformément équicontinu d'automorphismes d'un espace uniforme E, muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{C}_s(E,E)$. La structure uniforme gauche du groupe topologique H ainsi défini, est identique à la structure uniforme induite sur H par $\mathcal{U}_s$.

En effet, on a un système fondamental d'entourages de la structure uniforme gauche de H en considérant arbitrairement un entourage smétrique U de E, un nombre fini de points $x_i \in E$, et en prenant l'ensemble T des couples (u,v) d'éléments de H tels que $(u^{-1}(v(x_i)),x_i) \in U$. Comme H est équicontinu en tout point de E, pour tout entourage V de E, il existe un entourage U tel que chacune des n relations $(x,x_i) \in U$ entraîne pour tout $u \in H$, $(u(x),u(x_i)) \in V$; si on suppose U choisi de cette maniere, on voit que, pour tout couple $(u,v) \in T$, on a $(v(x_i),u(x_i)) \in V$ pour tout indice i, et par suite la structure uniforme induite sur H par $\mathcal{U}_s$ est moins fine que la structure uniforme gauche de H. Réciproquement, comme H est uniformément équicontinu, pour tout entourage U de E, il existe un entourage V tel que la relation $(x,y) \in V$ entraîne $(u(x),u(y)) \in U$ pour tout $u \in H$; la relation $(v(x_i),u(x_i)) \in V$ entraîne donc pour tout indice i $(u^{-1}(v(x_i)),x_i) \in U$, ce qui montre que la structure uniforme gauche de H est moins fine que la structure uniforme induite par $\mathcal{U}_s$ et achève la démontration.

La première partie du raisonnement précédent prouve que, lorsqu'on suppose seulement le groupe H équicontinu, sa structure uniforme gauche est <u>plus fine</u> que la structure induite par $\mathcal{U}_s$. On peut effectivement donner des exemples de groupes H équicontinus, mais non uniformément équicontinus, dans lequel la structure induite par $\mathcal{U}_s$ est strictement moins fine que la structure uniforme gauche ; elle est d'ailleurs en général distincte aussi de la structure uniforme droite de H (n°5 et exerc. 13).

En général, si H est un groupe uniformément équicontinu d'automorphismes d'un espace uniforme E, ses deux structures uniformes sont distinctes ; il se peut en outre que H <u>ne puisse être complété</u> (exerc. 9). Cette dernière circonstance ne peut toutefois se produire si le groupe topologique H est <u>précompact</u> pour une de ses structures uniformes. En effet, si G est un groupe topologique <u>précompact</u> pour sa structure uniforme droite (par exemple), ses deux structures uniformes sont <u>identiques</u>. Il suffit de prouver que, pour tout voisinage symétrique V de l'élément neutre e dans G, il existe un voisinage W de e tel que la relation $yx^{-1} \in W$ entraîne $x^{-1}y \in V$. Soit U un voisinage symétrique de e tel que $U^3 \subset V$; comme G est précompact, il existe un recouvrement de G par un nombre fini d'ensembles de la forme Ux_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; pour tout x G on peut écrire $x^{-1}y = x^{-1}(yx^{-1})x$; il existe un indice i tel que $x^{-1} = zx_i$, avec $z \in U$, d'où

$$x^{-1}y = zx_i(yx^{-1})x_i^{-1}z^{-1}$$

Supposons alors W choisi de sorte que, pour tous les indices i, on ait $x_i W x_i^{-1} \subset U$ (axiome (GV_{IV})) ; la relation $yx^{-1} \in W$ entraînera donc $x^{-1}y = z(x_i y x^{-1} x_i^{-1})z^{-1} \in U^3 \subset V$.

On déduit de cette remarque le théorème suivant :

Théorème 3. Soit E un espace uniforme complet, H un groupe d'automorphismes de la structure uniforme de E, uniformément équicontinu, et tel que pour tout $x \in H$, H_x soit un sous-espace précompact de E. Si on munit H de la topologie induite par $\mathcal{C}_s(E,E)$, H devient un groupe topologique précompact ; ses deux structures uniformes sont identiques à la structure uniforme induite par $\mathcal{U}_s$; en outre l'adhérence $\overline{H}$ de H dans $\mathcal{C}_s(E,E)$ est un groupe compact d'homéomorphismes de E, uniformément équicontinu.

En effet, la structure uniforme induite par $\mathcal{U}_s$ est identique à la structure uniforme gauche de H (prop.8) ; d'après la prop.6 du § 2, H est donc précompact pour la structure induite par $\mathcal{U}_s$, et cette dernière est identique aux structures uniformes gauche et droite du groupe H.

Comme E est complet, il en est de même de $\mathcal{F}_s(E,E)$; donc l'espace uniforme complété de H (pour la structure induite par $\mathcal{U}_s$ est isomorphe à l'adhérence $\overline{H}$ de H dans $\mathcal{F}_s(E,E)$, et $\overline{H}$ est uniformément équicontinu, et contenu par suite dans $\mathcal{C}(E,E)$ (§ 2, prop.8) ; par ailleurs, comme H est précompact, $\overline{H}$ est compact.

Reste à montrer que $\overline{H}$ est un groupe d'homéomorphismes de E. Or, l'application $(u,v) \to u \circ v$ de $\overline{H} \times \overline{H}$ dans $\mathcal{C}_s(E,E)$ est continue (prop.6) ; elle prolonge l'application $(u,v) \to u \circ v$ de $H \times H$ dans H, et par suite applique $\overline{H} \times \overline{H}$ dans $\overline{H}$. Soit maintenant u_0 un point quelconque de $\overline{H}$; u_0 est la limite d'un filtre de Cauchy $\mathfrak{F}$ sur H, et l'image $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{F}$ par l'application $u \to u^{-1}$ est un filtre de Cauchy sur H, puisque les structures uniformes droite et gauche du groupe H sont identiques ; $\mathfrak{G}$ converge donc vers un point v_0 de $\overline{H}$, et $u_0 \circ v_0$ (resp. $v_0 \circ u_0$) est la limite, dans $\mathcal{C}_s(E,E)$, de $u \circ u^{-1}$ (resp. $u^{-1} \circ u$) suivant le filtre $\mathfrak{F}$;

$u_o \circ v_o$ et $v_o \circ u_o$ sont donc l'application identique de E sur lui-même, ce qui montre que u_o est un homéomorphisme de E sur lui-même, et v_1 l'homéomorphisme réciproque ; la démonstration est ainsi achevée.

Corollaire. Soit E un espace compact, $\mathcal{G}$ le groupe des homéomorphismes de E, muni de la topologie induite par $\mathcal{C}_u(E,E)$; tout sous-groupe H de $\mathcal{G}$, équicontinu relativement à E, est relativement compact dans $\mathcal{G}$.

En effet, l'adhérence de H dans $\mathcal{C}_u(E,E)$ est identique à son adhérence dans $\mathcal{C}_s(E,E)$, et est un groupe d'homéomorphismes de E, d'après le th.3, en tenant compte de ce que H est uniformément équicontinu (§ 2, prop.7) et que les structures uniformes induites sur H par $\mathcal{U}_s$ et $\mathcal{U}_u$ sont identiques (§ 2, prop.3).

Ce corollaire s'applique en particulier à tout groupe d'isométries d'un espace compact métrique ; on retrouve de cette manière, par exemple, les topologies définies sur le groupe orthogonal $O_n(R)$, considéré comme groupe d'isométries de S_{n-1} (pour la distance euclidienne), et sur le groupe unitaire U_n, considéré comme groupe d'isométries de la sphère S_{2n-1} dans C^n (chap.V, § 5).

Remarque. Une partie des résultats précédents s'étendent aux groupes localement équicontinus d'homéomorphismes. Nous dirons qu'un groupe H d'homéomorphismes d'un espace uniforme E est localement équicontinu si tout point $u_o \in H$ admet un voisinage K dans H (pour la topologie induite par celle de $\mathcal{C}_s(E,E)$), équicontinu relativement à E, et tel que l'image K^{-1} de K par l'application $u \to u^{-1}$ soit aussi équicontinu relativement à E. Dans ces conditions, les prop.6 et 7 prouvent que la topologie induite sur H par celle de $\mathcal{C}_s(E,E)$ est compatible avec la structure de groupe de H.

Cette définition peut se simplifier lorsque les homéomorphismes $u \in H$ sont uniformément continus : il suffit alors que l'application identique e de E sur lui-même (élément neutre de H) admette un voisinage K équicontinu relativement à E, ainsi que son image K^{-1} par l'application $u \to u^{-1}$. En effet, supposons que K soit l'ensemble des $w \in H$ tels que $(x_i, w(x_i)) \in V_o$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$: soit u_o quelconque dans H ; comme u_o est uniformément continue, les ensembles u_oK et $(u_oK)^{-1} = K^{-1}u_o^{-1}$ sont équicontinus relativement a E (§ 2, n°2). D'autre part, u_oK est un voisinage de u_o dans la topologie induite sur H par $\mathcal{C}_s(E,E)$; en effet, il existe un entourage U_o contenu dans V_o, tel que $(x,y) \in U_o$ entraîne $(u_o^{-1}(x), u_o^{-1}(y)) \in V_o$; il en résulte que le voisinage de u_o formé des u tels que $(u_o(x_i), u(x_i)) \in U_o$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, est contenu dans u_oK, car on déduit de ces relations qu'on a $(x_i, u_o^{-1}(u(x_i))) \in V_o$, donc $u_o^{-1}u \in K$.

Comme exemple de groupe localement équicontinu, citons le <u>groupe linéaire</u> $GL_n(\mathbb{R})$ (ou $GL_n(\mathbb{C})$). Si e_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ désignent les n vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (chap.V, §1), l'ensemble K des applications linéaires u de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même, telles que $\| u(e_i) - e_i \| \leqslant \varepsilon$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ est visiblement équicontinu en tout point de $\mathbb{R}^n$ (en raison de la relation $u(\sum_i x_i e_i) = \sum_i x_i u(e_i)$), et il en est de même de K^{-1} dès que ε est assez petit. Comme toute fonction linéaire est uniformément continue, la topologie induite sur $GL_n(\mathbb{R})$ par celle de $\mathcal{C}_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est compatible avec la structure de groupe de $GL_n(\mathbb{R})$; on retrouve ainsi la topologie définie au chap.V, §5 sur ce groupe.

Si le voisinage K de e dans H est <u>uniformément équicontinu</u> la prop.8 montre que les structures uniformes induites, sur K par $\mathcal{U}_s$ et par la structure uniforme gauche du groupe H sont identiques ; mais la structure uniforme induite sur H lui-même par $\mathcal{U}_s$ peut fort bien être distincte de la structure uniforme gauche de ce groupe. C'est ce que montre déjà l'exemple du groupe $GL_1(R) = R^*$, où la structure uniforme induite par $\mathcal{U}_s$ est la structure uniforme additive de R, alors que les deux structures uniformes du groupe R^* sont ici identiques à la structure uniforme multiplicative du corps R (cf. chap. IV, § 3).

5. Groupes discrets d'homéomorphismes. Soit E un espace uniforme séparé et complet, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E telles que tout point de E appartienne à un ensemble de $\mathfrak{S}$ au moins, G un groupe d'homéomorphismes de E . Si la topologie induite sur G par celle de $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,E)$ est la topologie discrète, elle est évidemment compatible avec la structure de groupe de G ; on dit alors que G est un groupe discret d'homéomorphismes (pour la topologie de $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,E)$).

On a déjà remarqué que la structure uniforme induite par $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$ sur G n'est pas nécessairement identique à l'une des structures uniformes droite et gauche de G , qui sont ici toutes deux identiques à la structure uniforme discrète ; en particulier, pour la structure uniforme induite par $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$, G peut fort bien ne pas être complet ; comme l'espace $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,E)$ est complet (§ 1, prop. 3), il revient au même de dire que G peut ne pas être fermé dans $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,E)$.

Exemple. Soit u l'homéomorphisme de la droite achevée $\overline{R}$ défini par $u(x)=x+1$ si x est fini, $u(+\infty)=+\infty$, $u(-\infty)=-\infty$. On vérifie aussitôt que le groupe monogène G engendré par u est discret pour la topologie de la convergence simple ; mais, dans $\mathcal{F}_s(\overline{R},\overline{R})$, la suite $(u^n)_{n\geq 0}$ a pour limite l'application v définie par $v(-\infty)=-\infty$, $v(x)=+\infty$ pour $x\neq-\infty$; donc G n'est pas fermé dans $\mathcal{F}_s(\overline{R},\overline{R})$.

Nous allons étudier plus particulièrement les groupes d'homéomorphismes G discrets pour la topologie de la convergence <u>simple</u> (ils sont alors a fortiori discrets pour la topologie induite par $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,E)$, quel que soit l'ensemble de parties $\mathfrak{S}$ tel que tout point de E appartienne à un ensemble de $\mathfrak{S}$). Cette propriété se traduit de la manière suivante : pour tout homéomorphisme $u\in G$, il existe un entourage V de E et un nombre fini de points $x_i\in E$ tels qu'il n'existe aucun homéomorphisme $v\in G$, distinct de u , et satisfaisant simultanément aux relations $(u(x_i),v(x_i))\in V$.

<u>Proposition 9</u>. <u>Tout groupe</u> G <u>d'homéomorphismes de</u> E , <u>équicontinu relativement à</u> E , <u>et discret pour la topologie de la convergence simple, est fermé dans</u> $\mathcal{F}_s(E,E)$.

Si G n'était pas fermé, il existerait une aplication $u_0\notin G$ de E dans E , qui serait <u>adhérente</u> à G dans $\mathcal{F}_s(E,E)$; comme tout point de G est <u>isolé</u>, tout voisinage de u_0 dans $\mathcal{F}_s(E,E)$ contiendrait une <u>infinité</u> de points de G ; autrement dit, pour tout entourage V de E et toute suite finie (x_i) de points de E , il existerait une infinite d'homéomorphismes u G satisfaisant simultanément aux relations $(u_0(x_i),u(x_i))\in V$.

Prenons alors arbitrairement un entourage V de E et une suite finie (x_i) de points de E $(1\leqslant i\leqslant n)$; comme G est équicontinu, il existe un entourage U de E tel que, pour chaque indice i , les deux relations $(u_0(x_i),y)\in U$, $(u_0(x_i),z)\in U$ entraînent $(u(y),u(z))\in V$ pour <u>tout</u> $u\in G$. Or, il existe par hypothèse une infinité d'homéomorphismes $u\in G$ satisfaisant simultanément à $(u_0(x_i),u(x_i))\in U$ pour $1\leqslant i\leqslant n$; si u et v sont deux quelconques de ces homéomorphismes, on aurait donc $(x_i, u^{-1}(v(x_i))) \in V$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$; mais comme V et les x_i ont été pris arbitraires, et que $u^{-1}v$ n'est pas l'application identique de E sur lui-même, ce résultat contredirait l'hypothèse que G est <u>discret</u> pour la topologie de la convergence simple.

On notera que la structure uniforme induite sur G par la structure $\mathcal{U}_s$ de la convergence simple n'est pas nécessairement la structure uniforme discrète. Un exemple est fourni en prenant sur la droite numérique $\mathbb{R}$ la structure uniforme induite par celle de la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$, et en considérant le groupe G des translations $x \to x+n$ $(n \in \mathbb{Z})$. G est équicontinu et discret pour la topologie de la convergence simple, mais quels que soient l'entourage V de la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$, et les points $x_i \in \mathbb{R}$ en nombre fini, il existe un entier n_0 tel que, pour $m \geqslant n_0$ et $n \geqslant n_0$, on ait $(x_i+m, x_i+n) \in V$ pour tous les indices i, ce qui prouve que la structure uniforme de G n'est pas la structure uniforme discrète. Dans cet exemple, l'espace $\mathbb{R}$ n'est pas complet pour la structure uniforme considérée ; mais on peut donner des exemples analogues où l'espace E est complet (exerc. 13).

<u>Remarque</u>. Si E est un espace <u>compact</u>, G un groupe d'homéomorphismes de E, équicontinu relativement à E, G est <u>précompact</u> (pour la topologie de la convergence simple) d'après le th. d'Arzela ; si G est en outre <u>discret</u> pour la topologie de la convergence simple, il est complet d'après la prop. 9, donc compact et discret, et par suite <u>fini</u>.

Si un groupe d'homéomorphismes G de E est discret mais non fermé dans $\mathcal{F}_s(E,E)$, il existe un $u_0 \notin G$ adhérent à G, donc, pour <u>tout</u> $x \in E$, et tout voisinage U de $y=u_0(x)$, il existe une <u>infinité</u> d'homéomorphismes $u \in G$ tels que $(u(x), y) \in V$. Par suite, s'il existe <u>un</u> point $x \in E$

tel qu'aucun y E ne possède cette propriété pour l'ensemble G_x des $u(x)$ (où u parcourt G), on pourra affirmer que G est fermé. On est donc conduit à poser la définition suivante :

<u>Définition 1</u>. <u>Soit</u> G <u>un groupe d'homéomorphismes d'un espace uniforme séparé</u> E ; <u>on dit que</u> G <u>est proprement discret en un point</u> $x_0 \in E$ <u>si, pour tout point</u> $y \in E$, <u>il existe un voisinage</u> U <u>de</u> y <u>tel qu'il n'existe qu'un nombre fini d'homéomorphismes</u> $u \in G$ <u>pour lesquels</u> $u(x_0) \in U$.

Cette condition peut aussi s'exprimer comme suit : 1° il n'existe qu'un nombre fini d'homéomorphismes $u \in G$ tels que $u(x_0)=x_0$; 2° tous les points de l'ensemble G_{x_0} des $u(x_0)$ sont isolés ; 3° cet ensemble est fermé dans E .

<u>Remarques</u>. 1) Tout groupe <u>fini</u> d'homéomorphismes est evidemment proprement discret.

2) Si E est <u>compact</u>, tout groupe G d'homéomorphismes de E est <u>fini</u> s'il est proprement discret en un point x_0 au moins. En effet, on peut alors recouvrir E par un nombre fini de voisinages V_i tels que, pour chaque i , il n'existe qu'un nombre fini d'homéomorphismes $u \in G$ pour lesquels $u(x_0) \in V_i$; il ne peut donc y avoir une infinité d'homéomorphismes appartenant à G .

Il est immédiat que si un groupe G d'homéomorphismes de E est proprement discret en <u>un</u> point au moins G , il est discret (pour la topologie de la convergence simple), car pour tout $u \in G$, il existe un voisinage U de $u(x_0)$ tel qu'il n'existe qu'un nombre fini d'homéomorphismes $v \in G$ satisfaisant à $v(x_0) \in U$; cela signifie que u possède, dans G , un voisinage ne contenant qu'un nombre fini de points, et comme G est séparé, il est discret. En outre, le raisonnement fait ci-dessus prouve qu'il est <u>fermé</u> dans $\mathcal{F}_s(E,E)$. Mais inversement, un groupe d'homéomorphismes

G peut être discret et fermé dans $\mathcal{F}_s(E,E)$ sans être proprement discret en aucun point de E (cf. exerc. 14).

Si G est proprement discret en un point x_0, il est évidemment proprement discret en tous les points $u(x_0)$ transformés de x_0 par les homéomorphismes de G. En outre :

Proposition 10. *Soit* G *un groupe d'homéomorphismes d'un espace uniforme séparé* E, *équicontinu relativement à* E ; *si* G *est proprement discret en un point* $x_0 \in E$, *il existe un voisinage* V *de* x_0 *tel qu'il n'existe qu'un nombre fini d'homéomorphismes* $u \in G$ *pour lesquels* $u(V)$ *rencontre* V.

En effet, il existe un voisinage U_0 de x_0 tel qu'il n'existe qu'un nombre fini d'homéomorphismes $u \in G$ pour lesquels $u(x_0) \in U_0$ et on peut évidemment supposer que, pour ces homéomorphismes, on a $u(x_0)=x_0$. Il existe par suite un entourage symétrique U de E tel que, pour tout homéomorphisme $u \in G$ tel que $u(x_0) \neq x_0$, on ait $(x_0,u(x_0)) \notin \overset{2}{U}$. Or, comme G est équicontinu, il existe un voisinage V de x_0 tel que pour $x \in V$ et pour *tout* $u \in G$, on ait $(u(x_0),u(x)) \in U$; on peut d'ailleurs supposer $V \quad U(x_0)$. On en conclut que, pour tout homéomorphisme $u \in G$ tel que $u(x_0) \neq x_0$ on a $u(V) \cap V = \emptyset$, car si on avait $x \in V$ et $u(x) \in V$, on en conclurait $(x_0,u(x_0)) \in \overset{2}{U}$.

Remarque. Un groupe G d'homéomorphismes d'un espace uniforme E peut être proprement discret en tout point de E sans être équicontinu en tout point de E ; pour un tel groupe, la prop. 10 peut être inexacte (exerc. 15).

Corollaire. *Si* G *est un groupe d'homéomorphismes d'un espace uniforme séparé* E, *équicontinu relativement à* E, *l'ensemble des points de* E *où* G *est proprement discret est ouvert*.

En effet, soit x_0 un point où G est proprement discret, V un voisinage de x_0 tel que $u(V) \cap V$ soit vide sauf pour un nombre fini d'homéomorphismes $u \in G$; soit x un point quelconque de V ; nous allons voir que G est proprement discret au point x. Supposons en effet que pour un point $y \in E$, et pour tout voisinage U de y, il existe une infinité d'homéomorphismes $u \in G$ tels que $u(x) \in U$. On peut supposer U pris de telle sorte que les relations $z \in U$, $z' \in U$ entraînent $(u(z), u(z')) \in W$ pour tout $u \in G$, W étant un entourage symétrique de E tel que $W(x) \subset V$. Par suite, comme il existe une infinité de $u \in G$ tels que $u(x) \in U$, pour deux quelconques de ces homéomorphismes u, v, on aurait $(x, u^{-1}v(x)) \in W$; donc, pour tous les homéomorphismes $u^{-1}v$, on aurait $u^{-1}v(V) \cap V \neq \emptyset$, et il y a une infinité de $u^{-1}v$ distincts, contrairement au choix de V.

On peut préciser ce corollaire lorsque l'espace E est <u>localement compact</u> :

<u>Proposition 11.</u> <u>Soient E un espace localement compact, G un groupe d'homéomorphismes de E, équicontinu relativement à E ; l'ensemble D des points de E où G est proprement discret est à la fois ouvert et fermé</u>.

Il suffit de montrer que tout point x_0 adhérent à D appartient à D. Dans le cas contraire, il existerait un $y \in E$ tel que, pour tout voisinage U de y, il existe une infinité de $u \in G$ pour lesquels $u(x_0) \in U$. Soit U_0 un voisinage <u>compact</u> de y, et soit V un entourage symétrique de la structure uniforme de E tel que $\overset{2}{V}(y) \subset U_0$. Il existe un voisinage W de x_0 tel que, pour tout $x \in W$ et tout $u \in G$, on ait $(u(x_0), u(x)) \in V$; comme x_0 est adhérent à D, il existe un $x \in W$ tel que G soit proprement discret au point x. Cela étant, il existe une infinité de $u \in G$ tels que $u(x_0) \in V(y)$; pour ces homéomorphismes on aura donc $u(x) \in \overset{2}{V}(y) \subset U_0$. Si (u_n) est une suite infinie de ces homéomorphismes, la suite $(u_n(x))$ aurait donc une valeur d'adhérence $z \in U_o$; par suite pour tout voisinage T de z , il existerait une infinité d'indices n tels que $u_n(x) \in T$, contrairement à l'hypothèse que G est proprement discret au point x .

Au contraire, si on ne suppose pas E localement compact, l'ensemble D peut n'être pas fermé (exerc. 16).

Corollaire. Soient E un espace localement compact et connexe, G un groupe d'homéomorphismes de E , équicontinu relativement à E ; si G est proprement discret en un point de E , G est proprement discret en tout point de E .

On dit dans ce cas que G est proprement discret dans E .

D'une façon générale, étant donné un groupe G d'homéomorphismes d'un espace uniforme séparé E , équicontinu relativement à E , la prop. 10 montre que l'ensemble D des points où G est proprement discret est un ensemble ouvert dans E ; nous le supposerons non vide dans ce qui suit. Comme D est réunion de classes d'intransitivité suivant G , la restriction à D de tout homéomorphisme $u \in G$ est un homéomorphisme de D sur lui-même ; donc G peut être considéré comme un groupe d'homéomorphismes de D , proprement discret dans D . Autrement dit, on peut sans inconvénient se limiter désormais à l'étude du cas où G est proprement discret dans E tout entier.

Désignons par R la relation d'équivalence dans E : "il existe $u \in G$ tel que $y=u(x)$" , dont les classes sont les classes d'intransitivité de G . Il est immédiat que la relation d'équivalence R est ouverte, car pour saturer (pour R) un ensemble ouvert $U \subset E$, il faut prendre la réunion de U et de tous les ensembles ouverts u(U), où u parcourt G .

Considérons alors l'espace quotient $F=E/R$, que nous appellerons <u>l'espace des classes d'intransitivité</u> de G ; montrons d'abord que F est <u>séparé</u>. En effet, soient $\dot{x}$ et $\dot{y}$ deux classes distinctes mod.R , et soit $x \in \dot{x}$, $y \in \dot{y}$; d'après la déf.1 il existe un voisinage U_0 de x ne contenant qu'un nombre fini de points de $\dot{y}$; comme en outre x est distinct de tout $u(y)$, on peut supposer que U_0 ne contient <u>aucun</u> point de $\dot{y}$. Soit V un entourage symétrique de E tel que $\overset{2}{V}(x) \subset U_0$; comme G est équicontinu au point y , il existe un voisinage W de y tel que, pour $z \in W$ et pour tout $u \in G$, on ait $(u(y),u(z)) \in V$. Cela étant, si $U=V(x)$, les ensembles ouverts obtenus par saturation de U et de W ne se rencontrent pas. Sinon, il existerait deux homéomorphismes $u \in G$, $v \in G$, tels que $u(U) \cap v(W) \neq \emptyset$, donc il existerait $z \in W$ tel que $u^{-1}v(z) \in U$; mais cela est absurde, car on en déduirait que $u^{-1}v(y) \in \overset{2}{V}(x) \subset U_0$, contrairement à la définition de U_0 .

On notera que ce raisonnement s'applique à tout groupe équicontinu G d'homéomorphismes de E , tel que toute classe d'intransitivité de G soit un ensemble <u>fermé</u> dans E . Si on considère par exemple le groupe G formé de l'application identique de la sphère S_{n+1} et de la symétrie $x \to -x$, on obtient ainsi une nouvelle démonstration du fait que l'espace projectif $P_n(R)$ est séparé (chap.V, § 5) ; on établit de même que $P_n(C)$ est séparé, en considérant le groupe des isométries $x \longrightarrow \varepsilon x$ de la sphère S_{2n+1} , telles que $|\varepsilon|=1$, cette sphère étant plongée dans l'espace numérique complexe C^n .

Soit alors x_0 un point quelconque de E . D'après la prop.10, il existe un voisinage V de x_0 tel qu'il n'existe qu'un nombre fini d'homéomorphismes $u \in G$ tels que $u(V) \cap V \neq \emptyset$; comme E est séparé, on peut toujours supposer que ces homéomorphismes u sont ceux pour lesquels $u(x_0)=x_0$;

ils forment un sous-groupe $S(x_0)$ de G ("groupe de stabilité" de x_0), qui est fini d'après l'hypothèse ; le voisinage $W = \bigcap_u u(V)$, où u parcourt $S(x_0)$ est donc un voisinage de x_0 , invariant par les $u \in S(x_0)$, et tel que $v(W) \cap W = \emptyset$ pour tout homéomorphisme $v \in G$ n'appartenant pas à $S(x_0)$.

Nous dirons que x_0 est ramifié pour le groupe G si le sous-groupe $S(x_0)$ ne se réduit pas à l'application identique ; il est clair que l'ensemble des points non ramifiés de E est ouvert. Cet ensemble peut d'ailleurs être vide (exerc. 17) ; nous allons supposer dans ce qui suit qu'il est partout dense (ce sera le cas lorsque, pour tout $u \in G$ distinct de l'application identique, l'ensemble des points invariants par u est rare) Désignons alors par $\mathfrak{F}$ la famille des ensembles ouverts $A \subset E$ tels que, pour tout u G distinct de l'application identique, on ait $A \cap u(A) = \emptyset$; d'après la prop. 10, tout point non ramifié de E possède un voisinage appartenant à $\mathfrak{F}$. Il est clair que $\mathfrak{F}$, ordonné par inclusion, est un ensemble inductif ; il possède donc un élément maximal M , en vertu du th. de Zorn. Montrons que la réunion R des ensembles $u(M)$ pour $u \in G$ (ensembles qui sont deux à deux sans point commun) est partout dense dans E . En effet, dans le cas contraire, il existerait un point non ramifié $x_0 \in E$ et un voisinage V de x_0 ne rencontrant aucun des ensembles $u(M)$; on peut en outre supposer que $V \cap u(V) = \emptyset$ pour tout $u \in G$ distinct de l'application identique ; dans ces conditions, l'ensemble ouvert $M \cup V$ appartiendrait à $\mathfrak{F}$, contrairement à la définition de M . On dit que M est une région fondamentale du groupe G (on dit aussi domaine fondamental lorsque M est connexe) ; l'image canonique de M dans l'espace quotient F est partout dense dans F ;

52

en outre, la restriction à M de l'application canonique φ de E sur F est un <u>homéomorphisme</u> de M sur $\varphi(M)$, car elle est biunivoque et transforme tout ensemble ouvert en ensemble ouvert.

Si x_0 n'appartient pas à la reunion R des $u(M)$, il est adhérent à R, mais il peut n'être adhérent à <u>aucun</u> des $u(M)$ (exerc. 18). On notera aussi qu'il n'existe pas de voisinage V de x_0 ne rencontrant qu'<u>un seul</u> des $u(M)$; en effet, $V \cap \complement u(M)$ serait contenu dans la frontière de R, donc ne contiendrait aucun ensemble ouvert non vide ; comme, pour tout v distinct de l'application identique, on a $u(M) \cap v(u(M)) = \emptyset$, on aurait nécessairement $V \cap v(V) \subset V \cap \complement u(M)$ ce qui implique que l'ensemble ouvert $V \cap v(V)$ serait vide. Mais alors $M \cup V$ appartiendrait à $\mathfrak{F}$, car s'il existait v tel que $v(V) \cap M \neq \emptyset$, on aurait aussi $V \cap v^{-1}(M) \neq \emptyset$, contrairement à l'hypothèse ; M ne serait donc pas une région fondamentale.

6. <u>Groupes d'opérateurs et groupes d'homéomorphismes</u>. Soit E un espace uniform muni d'un groupe d'opérateurs G (<u>Alg.</u>, chap. I, § 7, n°2) tel que, pour tout $s \in G$, la permutation $x \rightarrow sx$ de E produite par l'opérateur s (permutation que nous désignerons par u_s) soit un <u>homéomorphisme</u> de E sur lui-même. L'application $s \rightarrow u_s$ est une <u>representation</u> de G sur un sous-groupe Γ du groupe des homéomorphismes de E. Si on suppose G muni d'une topologie (compatible avec sa structure de groupe), et Γ muni de la topologie induite par celle d'un espace $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,E)$ (en supposant aussi que cette topologie induite soit compatible avec la structure de groupe de Γ) il y a lieu de rechercher à quelle condition cette représentation est <u>continue</u>. Nous ne nous occuperons que du cas où Γ est muni de la topologie de la convergence <u>simple</u> dans E (on sait que cette topologie sera par exemple compatible avec la structure de groupe de Γ lorsque Γ est équicontinu relativement à E). Dans ces conditions :

<u>Proposition 12. Pour que la représentation</u> $s \to u_s$ <u>de</u> G <u>sur le groupe</u> Γ (muni de la topologie de la convergence simple) <u>soit continue, il faut et il suffit que, pour tout</u> $x \in E$, <u>l'application</u> $s \to sx$ <u>de</u> G <u>dans</u> E <u>soit continue au point</u> e (élément neutre de G).

En effet, pour que la représentation $s \to u_s$ soit continue dans G , il suffit qu'elle le soit au point e (chap.III, § 2,prop.13) ; cette condition s'exprime de la manière suivante : pour tout entourage V de E et toute suite finie (x_i) de points de E , l'ensemble des $s \in G$ tels que $(sx_i, x_i) \in V$, pour tout indice i , doit être un voisinage de e dans G ; en prenant la suite (x_i) réduite à un seul terme, on voit que $s \to sx$ doit être continue au point e pour tout $x \in E$. Réciproquement, si cette condition est vérifiée, l'ensemble U_i des $s \in G$ tels que $(sx_i, x_i) \in V$ est un voisinage de e pour chaque i ; il en résulte que l'intersection des U_i est encore un voisinage de e , d'où la propositio[n]

<u>Remarque</u>. Si Γ est <u>équicontinu</u> relativement à E , la prop.12 est encore valable quand on remplace l'hypothèse que $s \to sx$ est continue au point e pour <u>tout</u> $x \in E$, par celle que cette application soit continue au point e pour tout x appartenant à une partie <u>partout dense</u> de E (§ 2, prop.5).

<u>Corollaire</u>. <u>Si</u> E <u>est un espace compact, pour que la représentation</u> $s \to u_s$ <u>de</u> G <u>sur</u> Γ <u>soit continue, il faut et il suffit que, pour tout couple de points distincts</u> x, y <u>de</u> E , <u>il existe un voisinage</u> U <u>de</u> e <u>dans</u> G <u>et un voisinage</u> V <u>de</u> y <u>dans</u> E <u>tels que la relation</u> $s \in U$ <u>entraîne</u> $sx \notin V$.

La condition est évidemment nécessaire, car si $s \to sx$ est continue au point e , et si on se donne un voisinage V de y et un voisinage W de x sans point commun, il existe un voisinage U de e tel que $s \in U$ entraîne $sx \in W$, donc $sx \notin V$. Inversement, supposons la condition

54

la condition vérifiée, et donnons-nous un voisinage ouvert W de x ; pour tout $y \in \complement W$, il existe un voisinage V_y de y et un voisinage U_y de e tels que $s \in U_y$ entraîne $sx \notin V_y$. Comme $\complement W$ est compact (étant fermé dans E), il existe un nombre fini de points $y_i \in \complement W$ tels que les V_{y_i} forment un recouvrement de $\complement W$; l'intersection U des U_{y_i} est un voisinage de e, et la relation $s \in U$ entraîne que sx n'appartient à aucun des V_{y_i}, donc $sx \in V$, ce qui prouve la continuité de $s \to sx$ au point e.

Exercices. 1) Soit v_0 l'homéomorphisme $x \to x^3$ de R sur lui-même. Montrer que l'application $u \to v_0 u$ de $\mathcal{C}_u(R, R)$ dans $\mathcal{C}_u(R, R)$ n'est pas continue en tout point.

2) Soit $\mathfrak{G}$ le groupe des homéomorphismes du plan numérique R^2, muni de la topologie de la convergence simple. Montrer que l'application $(u,v) \to u \circ v$ de $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{G}$ n'est pas continue (considérer d'une part, des homéomorphismes u_n tels que u_n laisse invariant tout point (x,y) pour lequel y n'appartient pas à l'intervalle $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, et que, la restriction de u_n à la droite $y = \frac{2}{2n+1}$ soit une translation $(x,y) \to (x+1, y)$*; prendre d'autre part pour v_n la translation $(x,y) \to (x,y) + \frac{2}{2n+1}$)).

3) Soit E un espace métrique, $\mathfrak{S}$ l'ensemble des ensembles bornés (chap. VII, § 2, exerc. 20) dans E. On désigne par $\mathcal{L}$ l'ensemble des applications continues u de E dans E, lipschitziennes sur tout ensemble borné, c'est-à-dire telles que, pour toute partie bornée A de E, il existe une constante $k_A > 0$ (dépendant de u et de A) telle que pour $x \in A, y \in A$, $d(u(x), u(y)) < k_A d(x,y)$. Montrer que l'application $(u,v) \to u \circ v$ de $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}$ est continue lorsqu'on munit $\mathcal{L}$ de la topologie induite par $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,E)$.

4) Soit E un espace uniforme, réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts connexes U_n tels que : a) $U_n \subset U_{n+1}$; b) pour tout indice n , il existe un entourage V de E tel que les ensembles $V(U_n)$ et $V(\complement U_{n+1})$ ne se rencontrent pas. Soit u_o un homéomorphisme de E sur lui-même, tel que pour tout n, il existe m tel que $u_o(U_m) \supset V_n$, et que u_o^{-1} soit uniformément continu dans chacun des ensembles $u_o(U_n)$. Si $\mathfrak{S}$ désigne la famille des ensembles U_n , montrer que l'application $u \to u^{-1}$ du groupe $\mathfrak{G}$ des homéomorphismes de E sur lui-même, est continue au point u_o , lorsqu'on munit $\mathfrak{G}$ de la topologie induite par $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,E)$. (Utiliser le critère du n°2)

En déduire que :

a) La topologie de la convergence compacte est compatible avec la structure de groupe du groupe d'homéomorphismes de l'espace R^n ;

b) Si E est un espace métrique, Γ un groupe d'homéomorphismes de E , lipschitziens sur tout ensemble borné (exerc.3), et si toute boule ouverte dans E est connexe, la topologie induite sur Γ par $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,E)$, où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties bornées de E , est compatible avec la structure de groupe de Γ .

5) Montrer que, sur le groupe des homéomorphismes de R sur lui-même, la topologie de la convergence simple est identique à la topologie de la convergence compacte.

6) Soit E le sous-espace localement compact de R , formé du point 0 et des points 2^n , où n parcourt l'ensemble Z des entiers rationnels. Si $\mathfrak{G}$ est le groupe des homéomorphismes de E sur lui-même, montrer que, lorsqu'on munit $\mathfrak{G}$ de la topologie de la convergence compacte, l'application $u \to u^{-1}$ n'est pas continue au point e (application identique de E sur lui-même).

7) Soit E un espace localement compact, muni d'une structure uniforme compatible avec sa topologie ; soit $\mathfrak{G}$ le groupe des homéomorphismes de E. Pour tout entourage V de E, et tout sous-ensemble compact A de E, soit $W(V,A)$ l'ensemble des couples (u,v) d'homéomorphismes de E satisfaisant aux relations $(u(x),v(x)) \in V$, $(u^{-1}(x),v^{-1}(x)) \in V$ pour tout $x \in A$. Montrer que les $W(V,A)$ forment la base d'un filtre d'entourages d'une structure uniforme sur $\mathfrak{G}$, et que la topologie déduite de cette structure uniforme est compatible avec la structure de groupe de $\mathfrak{G}$.

8) Soit I l'intervalle compact $[0,1]$ de la droite R ; si $\mathfrak{G}$ est le groupe des homéomorphismes de I, muni de la topologie de la convergence uniforme, montrer que le groupe topologique $\mathfrak{G}$ ne peut être complété (former une suite (u_n) d'homéomorphismes de I, uniformément convergente, mais telle que la suite (u_n^{-1}) ne soit pas uniformément convergente).

9) Soit $\mathfrak{G}$ le groupe des permutations de l'espace discret N des entiers naturels, munide la topologie de la convergence simple ; montrer que $\mathfrak{G}$ ne peut être complété (même méthode que dans l'ex. 8).

10) Soit E un espace uniforme séparé, H un sous-ensemble de $\mathcal{C}(E,E)$, uniformément équicontinu dans E. Montrer que l'ensemble K des applications $u \circ v$, où u et v parcourent H, est uniformément équicontinu dans E. Donner un exemple d'ensemble H équicontinu relativement à E, et tel que K ne soit équicontinu en aucun point de E.

10 bis) Soit E un espace localement compact et connexe, H un groupe d'homéomorphismes de E, équicontinu relativement à E. Si on munit H de la topologie de la convergence simple H devient un groupe topologique localement précompact, et l'adhérence $\bar{H}$ de H dans $\mathcal{C}_s(E,E)$ est un groupe localement compact d'homéomorphismes de E (utiliser l'exerc.14 du chap.III, § 3, la prop.7 et l'exerc.5 du § 2 et montrer que la

que la structure uniforme induite sur un voisinage de e dans H par la structure uniforme gauche de H est identique à celle de la convergence simple).

11) Montrer que, sur le groupe I des isomètries de l'espace R^n (muni de la distance euclidienne), la topologie de la convergence uniforme est strictement plus fine que celle de la convergence simple (remarquer que, sur le sous-groupe des rotations autour d'un point, la topologie induite par la topologie de la convergence uniforme est la topologie discrète).

12) Montrer que, sur le groupe $GL_n(R)$ des automorphismes de l'espace vectoriel R^n, la structure uniforme de la convergence simple est distincte des structures uniformes droite et gauche de ce groupe (remarquer que $GL_n(R)$ n'est pas complet pour la structure de la convergence simple).

13) Soit u l'homéomorphisme de la droite numérique R, défini par $u(x)=x+1$ pour $x \leqslant 0$, $u(x)=x+\frac{1}{1+x}$ pour $x \geqslant 0$. Soit G le groupe monogène engendré par u ; montrer que G est un groupe équicontinu, discret pour la topologie de la convergence simple, mais que la structure uniforme induite sur G par $\mathcal{U}_s$ est distincte de la structure uniforme discrète.

14) Soit E un espace topologique somme topologique de deux espaces E_1, E_2 isomorphes à la droite numérique R. Pour tout couple (m,n) d'entiers rationnels, on désigne par $u_{m,n}$ l'homéomorphisme de E défini par $u_{m,n}(x_1)=x_1+m\alpha+n\beta$ pour $x_1 \in E_1$, $u_{m,n}(x_2)=x_2+m\gamma+n\delta$ pour $x_2 \in E_2$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont quatre nombres réels non nuls tels que $\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\gamma}{\delta}$ soient irrationnels, et $\frac{\alpha}{\beta} \neq \frac{\gamma}{\delta}$.

Montrer que les $u_{m,n}$ forment un groupe G d'homéomorphismes de E , qui est équicontinu et discret pour la topologie de la convergence simple, mais que G n'est proprement discret en aucun point de E .

15) Dans le plan numérique $\mathbb{R}^2$, soit E l'ensemble formé de l'origine et des points $(0,1/2^n)$ pour $n \geq 0$. Pour tout entier rationnel $n \neq 0$, on désigne par u_n la restriction à E d'une application linéaire affine de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même, telle que $u_n(0,0)=(n,0)$, et $u_n(0, \frac{1}{2^{|n|}}) = (0, \frac{\theta}{2^{|n|}})$ où θ est un nombre irrationnel ; soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^2$, réunion de E et des $u_n(E)$; u_0 désignant l'application identique de E sur lui-même, on définit u_n dans tout F par les conditions $u_n(u_m(x))=u_{m+n}(x)$ pour tout $x \in E$ et tout entier rationnel m ; l'ensemble des u_n ainsi définis est un groupe G d'homéomorphismes de F . Montrer que G est proprement discret en tout point de F , mais n'est pas équicontinu relativement à F , et ne vérifie pas la prop. 10.

16) Soit E le sous-espace du plan numérique $\mathbb{R}^2$, réunion du demi-plan $y > 0$ et de l'origine. On définit un homéomorphisme u de E sur lui-même en posant $u(0,0)=(0,0)$, et $u(re^{i\theta})=re^{i\theta'}$, avec $\theta' = \frac{\theta}{2}$ pour $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $\theta' = \theta - \frac{\pi}{4}$ pour $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$, $\theta' = 2\theta - \pi$ pour $\frac{3\pi}{4} \leq \theta < \pi$, pour tout point $re^{i\theta}$ du demi-plan $y > 0$. Si G est le groupe monogène d'homéomorphismes de E engendré par u , montrer que G est équicontinu relativement à E , et est proprement discret en tout point de E distinct de $(0,0)$.

17) Soit G le groupe d'homéomorphismes de l'espace discret $\mathbb{Z}$ des entiers rationnels, engendré par les symétries $x \to 2n-x$ (où n parcourt $\mathbb{Z}$). Montrer que G est équicontinu, proprement discret dans , mais que tout point de $\mathbb{Z}$ est ramifié pour le groupe G .

18) Soit E le demi-plan $y \geqslant 0$ dans le plan numérique $\mathbf{R}^2$; soit G le groupe des translations $(x,y) \rightarrow (x+n,y)$ dans E $(n \in \mathbf{Z})$; G est équicontinu dans E, proprement discret dans E, et aucun point de E n'est ramifié pour G. On désigne par M la partie de E réunion des ensembles M_n définis pour $n \in \mathbf{Z}$ par les relations suivantes :
$n < x < n+1$, $\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2} - \left|x-n-\frac{1}{2}\right|\right) < y < \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2} - \left|x-n-\frac{1}{2}\right|\right)$. Montrer que M est une région fondamentale pour le groupe G ; tout point $(n,0)$ est adhérent à chacun des transformés de M ; tout point (n,y) où $y > 0$, est adhérent à la réunion R des transformés de M, mais n'est adhérent à aucun d'eux.

19) On considère le sous-espace E de la droite numérique $\mathbf{R}$, formé du point $x=0$, des points $1/2^n$ (n entier $\geqslant 0$) et des points $x_{m,n} = \frac{3}{2^{n+2}} - \frac{\operatorname{sgn} m}{2^{|m|+n+2}}$ $(m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N})$. Soit u l'homéomorphisme de E sur lui-même, défini par les conditions $u(0)=0$, $u(1/2^n)=1/2^n$, $u(x_{m,n})=x_{m+1,n}$. Si G est le groupe monogène d'homéomorphismes de E, engendré par u, montrer que G est équicontinu au point $x=0$, mais n'est équicontinu en aucun des points $1/2^n$.

20) Si G est un groupe d'homéomorphismes de $\mathbf{R}$, équicontinu relativement à $\mathbf{R}$, montrer qu'il ne peut exister d'homéomorphisme $u \in G$, possédant au moins un point invariant, et distinct de l'homéomorphisme identique et des symétries $x \rightarrow a-x$ (montrer que le groupe monogène engendré par un tel homéomorphisme ne peut être équicontinu en un point invariant de u).

21) Soit G un groupe topologique, Γ le groupe des translations à gauche $\gamma_a : x \rightarrow ax$ de G ; on sait que $x \rightarrow \gamma_x$ est un isomorphisme de la structure de <u>groupe</u> de G sur celle de Γ.

a) Si on munit G de sa structure uniforme gauche, Γ est uniformément équicontinu dans G ; si on munit Γ de la topologie de la convergence simple, $x \to \gamma_x$ est un isomorphisme du groupe topologique G sur le groupe topologique Γ. Pour toute partie A (non vide) de G, la topologie de la convergence uniforme sur A induit sur Γ une topologie compatible avec la structure de groupe de Γ ; si on munit Γ de cette topologie, on obtient un groupe topologique isomorphe au groupe topologique obtenu en munissant G de la topologie dans laquelle un système fondamental de voisinages de e est formé des ensembles $V' = \bigcap_{x \in A} xVx^{-1}$, où V parcourt le filtre des voisinages de e dans G.

b) Si on munit G de sa structure uniforme droite, pour toute partie non vide A de G, la topologie de la convergence uniforme sur A induit sur Γ la même topologie, pour laquelle $x \to \gamma_x$ est un isomorphisme du groupe topologique G sur le groupe topologique Γ. Pour que Γ soit équicontinu en un point de G, il faut et il suffit que les deux structures uniformes de G soient identiques.

22) Soit G un groupe topologique, Δ le groupe des automorphismes intérieurs de G ; si Z est le centre de G, et si à toute classe $\overline{x} \in G/Z$ on fait correspondre l'automorphisme intérieur $z \to xzx^{-1}$ pour un x quelconque de la classe $\overline{x}$, on définit un isomorphisme canonique de la structure de groupe de G/Z sur celle de Δ.

Montrer que, pour que Δ soit un groupe équicontinu en un point de G il faut et il suffit que les deux structures uniformes de G soient identiques ; Δ est alors uniformément équicontinu. Si on identifie et G/Z par l'isomorphisme canonique, la topologie de la convergence uniforme sur Δ est alors moins fine que la topologie quotient de celle de G par Z. Cas où G est compact.

§ 4. Espaces de fonctions continues numériques.

1. <u>Espaces des applications continues bornées dans un espace normé</u>. Soit E un espace topologique séparé, F un espace normé sur un corps valué commutatif K (chap. VII, § 3) ; on dit qu'une application u de E dans F est <u>bornée</u> si la fonction numérique $x \to \|u(x)\|$ est bornée dans E. Si u et v sont deux applications bornées de E dans F, il est immédiat que $u+v$ et λu sont des applications bornées de E dans F pour tout scalaire $\lambda \in K$; autrement dit, l'ensemble $\mathcal{B}_0(E,F)$ des applications bornées de E dans F est un <u>espace vectoriel</u> sur le corps K (sous-espace de l'espace vectoriel F^E de toutes les applications de E dans F). Nous allons voir que, sur cet espace, la fonction

$$(1) \qquad \|u\| = \sup_{x \in E} \|u(x)\|$$

est une <u>norme</u>, et que la structure uniforme définie par cette norme est identique à la structure de la <u>convergence uniforme</u>.

En effet, $\|u\|=0$ signifie $\|u(x)\|=0$ pour tout x, donc $u=0$; on a

$$\|u+v\| = \sup_{x \in E} \|u(x)+v(x)\| \leqslant \sup_{x \in E} (\|u(x)\| + \|v(x)\|) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \in E} \|u(x)\| + \sup_{x \in E} \|v(x)\| = \|u\| + \|v\|$$

et il est immédiat que $\|\lambda u\| = |\lambda| . \|u\|$ pour tout scalaire $\lambda \in K$. D'autre part, on a un système fondamental d'entourages de la structure uniforme de la convergence uniforme sur $\mathcal{B}_0(E,F)$, en prenant pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble des couples (u,v) d'applications bornées de E dans F, tels que $\|u(x)-v(x)\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in E$; mais d'après (1), cette relation équivaut à $\|u-v\| \leqslant \varepsilon$, ce qui achève la démonstration.

Lorsque nous parlerons désormais de l'espace $\mathcal{B}_0(E,F)$, nous le considérerons toujours (sauf mention expresse du contraire) comme muni de la structure d'espace normé définie par la norme (1). Les applications $(u,v) \to u+v$ et $(\lambda,u) \to \lambda u$ sont donc continues dans

$\mathcal{B}_0(E,F) \times \mathcal{B}_0(E,F)$ et dans $K \times \mathcal{B}_0(E,F)$ respectivement. Pour que $\mathcal{B}_0(E,F)$ soit complet, il faut et il suffit que F le soit ; en effet, $\mathcal{B}_0(E,F)$ contient le sous-espace (fermé dans $\mathcal{F}_u(E,F)$) des applications constantes de E dans F, et est lui-même un sous-espace fermé de $\mathcal{F}_u(E,F)$, car si u est adhérent à $\mathcal{B}_0(E,F)$, il existe $v \in \mathcal{B}_0(E,F)$ tel que $\|u(x)-v(x)\| \leq 1$ pour tout $x \in E$, d'où $\|u(x)\| \leq \|v\|+1$ dans E ; la proposition résulte alors du th.1 du § 1. Dans ce cas, pour qu'une série (u_n) d'applications bornées de E dans F soit <u>uniformément convergente</u> dans E, il <u>suffit</u> que, dans $\mathcal{B}_0(E,F)$, la série de terme général u_n soit <u>absolument convergente</u> (c'est-à-dire que $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\| < +\infty$; cf. chap.VII, § 3, prop.10).

Cette condition entraîne naturellement que, pour tout x E, la série de terme général $u_n(x)$ est <u>absolument convergente</u> dans l'espace F, la reciproque étant naturellement inexacte en général ; pour éviter toute confusion, on exprime parfois que la série de terme général $\|u_n\|$ est convergente, en disant que la série de terme général u_n est <u>normalement convergente</u>.

Soit maintenant $\mathcal{B}(E,F)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}_0(E,F)$ formé des applications <u>bornées</u> et <u>continues</u> de E dans F ; comme $\mathcal{B}(E,F)$ est l'intersection de $\mathcal{B}_0(E,F)$ et de $\mathcal{C}(E,F)$, et que chacun de ces sous-espaces est fermé dans $\mathcal{F}_u(E,F)$, $\mathcal{B}(E,F)$ est fermé dans $\mathcal{F}_u(E,F)$, donc <u>complet</u> lorsque F est complet. Si E est <u>compact</u>, on a $\mathcal{C}(E,F) = \mathcal{B}(E,F)$ (chap.IV, § 6, th.1).

Lorsque F est une <u>algèbre normée</u> (chap.VII, § 3, n°8) sur le corps valué commutatif K, $\mathcal{B}_0(E,F)$ est une algèbre (commutative) sur K ; en outre, la norme (1) est alors <u>compatible</u> avec cette structure d'algèbre, car on a

$$\|uv\| = \sup_{x\in E} \|u(x)v(x)\| \leqslant \sup_{x\in E} \|u(x)\| \cdot \|v(x)\| \leqslant \sup_{x\in E} \|u(x)\| \cdot \sup_{x\in E} \|v(x)\|$$
$$= \|u\| \cdot \|v\|$$

$\mathcal{B}_0(E,F)$, muni de la norme (1) est alors une <u>algèbre normée</u> sur le corps K ; $\mathcal{B}(E,F)$ en est une <u>sous-algèbre</u>.

<u>2. Familles équicontinues d'applications dans un espace normé</u>. Considérons d'abord l'ensemble $\mathcal{C}(E,R)$ des fonctions numériques <u>finies</u> et continues dans E, et soit H un sous-ensemble de $\mathcal{C}(E,R)$, équicontinu relativement à E. On peut considérer H comme une partie de l'ensemble $\mathcal{C}(E,\overline{R})$; comme la structure uniforme induite sur R par celle de $\overline{R}$ est <u>moins fine</u> que la structure uniforme de la droite numérique, H est encore équicontinu relativement à E quand on le considère comme partie de $\mathcal{C}(E,\overline{R})$. Il en résulte (§2,prop.4) que l'<u>adhérence</u> $\overline{H}$ de H dans l'espace $\mathcal{F}_s(E,\overline{R})$ (espace des fonctions numériques finies ou non, définies sur E, muni de la topologie de la convergence simple), est encore un ensemble équicontinu relativement à E (pour la structure uniforme de $\overline{R}$).

En particulier, l'<u>enveloppe supérieure</u> et l'<u>enveloppe inférieure</u> de H (chap.IV, §5), qui appartiennent à $\overline{H}$, sont <u>continues</u> dans E.

Nous allons montrer en outre que, si $u_0 \in \overline{H}$, les ensembles $\overset{-1}{u_0}(+\infty)$ et $\overset{-1}{u_0}(-\infty)$ sont <u>à la fois ouverts et fermés</u> dans E. Ils sont en effet fermés, puisque u_0 est continue dans E. D'autre part, soit x E tel que $u_0(x)=+\infty$; pour tout $\varepsilon>0$, il existe un voisinage U de x tel que, pour tout $y\in U$ et tout u H on ait $|u(x)-u(y)|\leqslant\varepsilon$. Or, quel que soit le nombre $k>0$, il existe un voisinage V de u_0 dans $\overline{H}$ tel que, pour tout $u\in V\cap H$, on ait $u(x)\geqslant k$; on aura donc aussi $u(y)\geqslant k-\varepsilon$ pour tout $u\in V\cap H$ et tout $y\in U$; comme k est arbitraire, cela entraîne que $u_0(y)=+\infty$ pour tout $y\in U$, ce qui prouve que

*

$\overset{-1}{u}_o(+\infty)$ est ouvert ; démonstration analogue pour $\overset{-1}{u}_o(-\infty)$.

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 1. Soit E *un espace compact et connexe,* H *un ensemble équicontinu de fonctions numériques finies, définies dans* E *. Si l'ensemble* H_x *est majoré* (resp. minoré, borné) *en un point* $x \in E$ *, les fonctions de* H *sont uniformément majorées* (resp. uniformément minorées, uniformément bornées) *dans* E .

En effet, soit u_o l'enveloppe supérieure des fonctions $u \in H$; on a $u_o \in \overline{H}$, donc $\overset{-1}{u}_o(+\infty)$ est un ensemble à la fois ouvert et fermé dans E ; comme E est connexe, cet ensemble ne peut être que vide ou identique à E , et l'hypothèse entraîne qu'il est vide ; mais alors u_o est une fonction numérique continue et $<+\infty$ dans l'espace compact E , donc le th. de Weierstrass (chap. IV, § 5, th. 2) entraîne qu'elle est *majorée* dans E .

Corollaire. Soit E *un espace compact et connexe,* F *un espace normé sur un corps valué* K *,* H *un ensemble équicontinu d'applications de* E *dans* F *. Si l'ensemble* H_x *est borné dans* F *pour un point* $x \in E$ *, les fonctions de* H *sont uniformément bornées dans* E .

Il suffit en effet d'appliquer la prop. 1 à l'ensemble des fonctions $x \longrightarrow \|u(x)\|$, qui est équicontinu dans E , puisque $x \longrightarrow \|x\|$ est une application uniformément continue de F dans $\mathbb{R}$.

3. Fonctions continues numériques définies dans un produit d'espaces compacts.

Dans ce n° et le suivant, nous allons nous borner à l'étude d'espaces de fonctions continues numériques (*finies*) ou de fonctions continues à valeurs dans un espace normé sur le corps $\mathbb{R}$, et définies dans un espace *compact* ; nous démontrerons des "théorèmes d'approximation" fondamentaux pour certains de ces espaces fonctionnels, c'est-à-dire des théorèmes établissant l'existence, dans les espaces considérés, de de sous-ensembles partout denses particulièrement simples.

Théorème 1. Soient E et F deux espaces compacts. Dans l'espace $\mathcal{C}(E\times F, \mathbb{R})$ des fonctions continues numériques finies définies dans l'espace produit $E\times F$, le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions de la forme $(x,y)\to u(x)v(y)$, où u parcourt $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ et v parcourt $\mathcal{C}(F, \mathbb{R})$, est partout dense.

Soit f une fonction continue numérique définie dans $E\times F$, ε un nombre >0 arbitraire. Donnons-nous un point quelconque $x\in E$; pour tout $y\in F$, il existe un voisinage $U_{x,y}$ de x dans E et un voisinage $V_{x,y}$ de y dans F tels que, pour tout point $(x',y')\in U_{x,y}\times V_{x,y}$, on ait $|f(x',y')-f(x,y)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. F étant compact, il existe un nombre fini de points $y_k(x)$ $(1\leqslant k\leqslant n(x))$ de F tels que les $V_{x,y_k(x)}$ forment un recouvrement de F ; soit W_x le voisinage de x, intersection des $U_{x,y_k(x)}$. Comme E est compact, il existe un nombre fini de points x_i $(1\leqslant i\leqslant m)$ de E tels que les W_{x_i} forment un recouvrement de E. Posons $A_i=W_{x_i}$; d'autre part, pour tout $y\in F$, soit T_y l'intersection des ensembles $V_{x_i,y_k(x_i)}$ qui contiennent y ; les T_y distincts sont en nombre fini, et forment un recouvrement de F ; désignons-les par B_j $(1\leqslant j\leqslant p)$. D'après ces définitions, pour tout couple d'indices (i,j), l'ensemble $A_i\times B_j$ est tel que, pour tout couple de points $(x,y),(x',y')$ de cet ensemble, on ait $|f(x,y)-f(x',y')|\leqslant\varepsilon$. Cela étant, il existe une partition continue de l'unité (chap. VII, §4, n°3) (u_i) sur E, telle que $u_i(x)=0$ dans $\complement A_i$, et une partition continue de l'unité (v_j) sur F telle que $v_j(y)=0$ dans $\complement B_j$ $(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant p)$. Quel que soit $(x,y)\in E\times F$, on a

(2) $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}u_i(x)v_j(y)=\left(\sum_{i=1}^{m}u_i(x)\right)\left(\sum_{j=1}^{p}v_j(y)\right)=1$$

Pour tout couple d'indices (i,j), soit (x_{ij},y_{ij}) un point de $A_i\times B_j$; considérons la différence

$$\varphi(x,y)=f(x,y)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p} f(x_{ij},y_{ij})u_i(x)v_j(y)$$

D'après (2), on peut l'écrire

$$\varphi(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}(f(x,y)-f(x_{ij},y_{ij}))u_i(x)v_j(y)$$

Or, quel que soit $(x,y)\in E\times F$, pour tout couple d'indices (i,j) tel que $(x,y)\in A_i\times B_j$, on a $|f(x,y)-f(x_{ij},y_{ij})|\leqslant\varepsilon$; pour tout autre couple d'indices, $u_i(x)v_j(y)=0$ d'après le choix des u_i et v_j ; donc, comme les u_i et v_j ont des valeurs $\geqslant 0$

$$|\varphi(x,y)|\leqslant\varepsilon\,.\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}u_i(x)v_j(y)=\varepsilon$$

C.Q.F.D.

Par récurrence sur n, on déduit aussitôt du th.1 que, si (E_i) $(1\leqslant i\leqslant n)$ est une famille finie d'espaces compacts, $E=\prod_{i=1}^{n}E_i$ leur produit, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(E,R)$ engendré par les fonctions de la forme

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)\longrightarrow u_1(x_1)u_2(x_2)\ldots u_n(x_n)$$

où u_i parcourt $\mathcal{C}(E_i,R)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ est partout dense dans $\mathcal{C}(E,R)$.

Nous allons en déduire la généralisation suivante :

Proposition 2. Soit $(E_\iota)_{\iota\in I}$ une famille infinie d'espaces compacts, $E=\prod_{\iota\in I}E_\iota$ leur produit. Dans l'espace $\mathcal{C}(E,R)$, le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions de la forme

$$(x_\iota)\longrightarrow\prod_{\alpha\in H}u_\alpha(x_\alpha)$$

où H parcourt l'ensemble des parties finies de I, et où, pour chaque $\alpha\in H$, u_α parcourt $\mathcal{C}(E_\alpha,R)$, est partout dense.

Soit f une fonction continue numérique finie définie dans E, $\varepsilon>0$ un nombre arbitraire. Pour tout $x\in E$, il existe un ensemble élémentaire (chap.I, § 8) V_x, contenant x et tel que, pour tout $x'\in V_x$, on ait $|f(x')-f(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$. Comme E est compact, il existe un nombre fini de points $x_i\in E$ tels que les V_{x_i} forment un recouvrement de E. Or tout ensemble élémentaire est un produit d'ensembles ouverts $A_\iota\subset E_\iota$ tels que $A_\iota=E_\iota$ sauf pour un nombre fini d'indices.

Soit alors H la partie finie de I telle que, pour tout $\iota \in H$, le facteur d'indice ι d'un au moins des V_{x_i} soit distinct à E_ι ; posons $E' = \prod_{\iota \in H} E_\iota$, $E'' = \prod_{\iota \in \complement H} E_\iota$, et identifions E avec le produit $E' \times E''$ en posant pour tout $x=(x_\iota)_{\iota \in I}$, $x=(x',x'')$, avec $x'=(x_\iota)_{\iota \in H}$, $x''=(x_\iota)_{\iota \in \complement H}$. Soit a un point fixe de E'' ; pour tout $x' \in E'$, il existe un indice i tel que, pour tout $x'' \in E''$, (x',a) et (x',x'') appartiennent au même V_{x_i}, donc on a $|f(x',a)-f(x',x'')| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ quel que soit $x'' \in E''$. Autrement dit, si on pose $g(x)=f(x',a)$, on a $|f(x)-g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $x \in E$. Mais la fonction $x' \to f(x',a)$ est définie dans un produit <u>fini</u> E' d'espaces compacts, donc il existe une combinaison linéaire h de fonctions de la forme $x_\iota \to \prod_{\alpha \in H} u_\alpha(x_\alpha)$ telle que, pour tout $x \in E$, $|g(x)-h(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$; d'où $|f(x)-h(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in E$, ce qui démontre la proposition.

<u>Remarques</u>. 1) La première partie de ce raisonnement prouve plus généralement que, dans l'espace $\mathcal{C}_u(E,F)$ des applications continues de E dans un espace uniforme F, muni de la topologie de la convergence uniforme, les fonctions continues d'un nombre <u>fini</u> des variables x_ι forment un ensemble <u>partout dense</u>.

2) La prop.2 est encore valable lorsqu'on y remplace le corps $\mathbb{R}$ par une <u>algèbre</u> F de rang <u>fini</u> sur $\mathbb{R}$, admettant un élément unité; il suffit de remarquer que, si $(e_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de F, telle que e_0 soit élément unité de F, la continuité d'une application $x \longrightarrow \sum_{i=0}^{n} f_i(x)e_i$ de E dans F équivaut à la continuité de chacun des f_i, et que d'autre part, si les u_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ sont des fonctions continues numériques définies dans E, on peut écrire

$$(u_1(x)\ldots u_m(x))e_i=(u_1(x)e_0)\ldots(u_m(x)e_0)e_i \; .$$

En particulier, la prop.2 est valable quand on remplace $\mathbb{R}$ par l'un des corps $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{K}$.

4. Le théorème de Weierstrass. Théorème 2 (Weierstrass). *Soit I un intervalle compact de la droite numérique* $\mathbb{R}$, E *un espace normé sur le corps* $\mathbb{R}$. *Dans l'espace* $\mathcal{C}(I,E)$ *des applications continues de* I *dans* E , *l'ensemble des restrictions à* I *des polynomes d'une variable réelle, à coefficients dans* E , *est partout dense*.

On peut toujours supposer (par un homéomorphisme de $\mathbb{R}$) que I est l'intervalle $[0,1]$. Soit f une application continue de I dans E ; pour tout indice $n>0$, formons le polynome à coefficients dans E

$$p_n(x) = \sum_{p=0}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p}$$

Nous allons montrer que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un indice n tel que, pour tout $x\in I$, $\|f(x)-p_n(x)\| \leqslant \varepsilon$. D'après la formule du binôme, on a

$$(2\text{ bis}) \qquad \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p} = (x+1-x)^n = 1$$

donc on peut écrire

$$(3) \qquad f(x)-p_n(x) = \sum_{p=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\frac{p}{n}\right)\right)\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p}$$

Comme f est uniformément continue dans I , on peut trouver un entier n tel que, pour tout couple de points x,x' de I tels que $|x-x'| < \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$ on ait $\|f(x)-f(x')\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Pour tout $x\in I$, décomposons la somme du second membre de (3) en deux autres ; désignant par H_x l'ensemble des indices p tels que $\left|x-\frac{p}{n}\right| < \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$, nous évaluerons successivement la somme des termes pour lesquels $p\in H_x$, et la somme de ceux pour lesquels $p\notin H_x$. D'après l'hypothèse et la relation (2 bis), on a

$$\left\|\sum_{p\in H_x}\left(f(x)-f\left(\frac{p}{n}\right)\right)\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p}\right\| \leqslant \varepsilon \sum_{p\in H_x}\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p} \leqslant \varepsilon$$

Pour évaluer la seconde somme, nous établirons d'abord l'identité suivante :

$$(4) \qquad \sum_{p=0}^{n}\left(x-\frac{p}{n}\right)^2\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p} = \frac{x(1-x)}{n}$$

En effet, en dérivant le polynome (2 bis), il vient, après multiplication par $x(1-x)$

$$\sum_{p=0}^{n} (p-nx)\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p} = 0$$

et en dérivant de nouveau cette identité et multipliant par $x(1-x)$, il vient

$$\sum_{p=0}^{n} (p-nx)^2\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p} - nx(1-x)\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p} = 0$$

ce qui n'est autre que (4) en vertu de (2 bis).

Par définition, pour tout p tel que $p \notin H_x$, on a $\left|x - \frac{p}{n}\right| > \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$ donc, d'après (4)

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p \notin H_x} \binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p} \leq \sum_{p \notin H_x} \left(x - \frac{p}{n}\right)^2 \binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p} \leq \frac{1}{n}$$

et par suite, en désignant par M la borne supérieure de $\|f(x)\|$ dans I, on a

$$\left\| \sum_{p \notin H_x} \left(f(x) - f\left(\tfrac{p}{n}\right)\right)\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p} \right\| \leq \frac{2M}{\sqrt{n}}$$

On voit donc qu'on a pour tout $x \in I$

$$\|f(x) - p_n(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\sqrt{n}}$$

et le second membre est $\leq \varepsilon$ dès que $n \geqslant \frac{16\,M^2}{\varepsilon^2}$

C.Q.F.D.

Corollaire. Soit A un ensemble compact dans l'espace numérique R^m. Dans l'espace $\mathcal{C}(A, R)$ des fonctions numériques continues finies définies dans A, l'ensemble des restrictions à A des polynomes de m variables réelles, à coefficients réels, est partout dense.

En effet, on peut se borner au cas où A est un pavé compact dans R^m, puisque A est toujours contenu dans un tel pavé P et que toute fonction numérique continue dans A est la restriction à A d'une fonction numérique définie dans P (chap.VII, §4, th.2). La proposition est alors une conséquence immédiate des th.1 et 2.

Remarques. 1) Le th. de Weierstrass n'est plus toujours exact lorsqu'on y remplace le corps $\mathbb{R}$ par un autre corps valué ; par exemple, nous verrons plus tard qu'il est inexact pour le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

2) Le cor. du th.2 est encore valable lorsqu'on considère l'espace des applications continues de A dans une algèbre de rang fini sur $\mathbb{R}$. En particulier, si A est une partie compacte du corps $\mathbb{C}$, identifié à $\mathbb{R}^2$, dans l'espace des applications continues de A dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des polynomes de 2 variables réelles, à coeffcients complexes, est partout dense, mais non l'ensemble des polynomes d'une variable complexe, à coefficients complexes.

Le th. de Weierstrass admet la généralisation suivante :

Théorème 3 (Stone). Soit E un espace compact, $(f_\iota)_{\iota\in I}$ une famille de fonctions continues numériques finies définies dans E, telle que pour tout couple (x,y) de points distincts de E, il existe un indice ι tel que $f_\iota(x)\neq f_\iota(y)$. Dans l'espace $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ des fonctions numériques continues finies définies dans E, les fonctions de la forme

$$x \to p(f_{\iota_1}(x), f_{\iota_2}(x), \ldots, f_{\iota_n}(x))$$

où n est un entier >0 quelconque, p un polynome quelconque de n variables à coefficients réels, et les ι_k n indices quelconques dans I, forment un ensemble partout dense.

Soit K_ι un intervalle compact de $\mathbb{R}$ contenant l'ensemble compact $f_\iota(E)$, et soit $K = \prod_{\iota\in I} K_\iota$ l'espace compact produit des K_ι ; considérons l'application $x \to (f_\iota(x))$ de E dans K ; c'est une application continue biunivoque d'après l'hypothèse ; donc (chap.I, §10, th.1), c'est un homéomorphisme de E sur un sous-espace compact E' de K. Désignons par u l'homéomorphisme réciproque de E' sur E.

Soit maintenant g une fonction numérique continue finie définie dans E ; l'application $y \to g(u(y))$ est une fonction numérique continue finie définie dans E' ; elle se prolonge donc (chap.VII, § 4,th.2) en une application continue h de K dans $\mathbb{R}$. D'après la prop.2 et le cor. du th.2, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe donc un entier n , un polynome p de n variables à coefficients réels, et n indices $\iota_k \in I$ $(1 \leq k \leq n)$ tels que dans K , on ait

$$\left| h(y)-p(y_{\iota_1}, y_{\iota_2}, \ldots, y_{\iota_n}) \right| \leq \varepsilon$$

Cette relation a donc lieu en particulier pour $y \in E'$, c'est-à-dire pour $y=(f_\iota(x))$ et pour tout $x \in E$; mais alors $h(y)=g(x)$ et $y_\iota = f_\iota(x)$, donc, pour tout $x \in E$, on a

$$\left| g(x)-p(f_{\iota_1}(x),f_{\iota_2}(x),\ldots,f_{\iota_n}(x)) \right| \leq \varepsilon$$

ce qui démontre le théorème.

On notera que la condition de l'énoncé est non seulement suffisante, mais aussi <u>nécessaire</u> pour que le théorème soit exact ; en effet, si pour deux points distincts x,y , on a $f_\iota(x)=f_\iota(y)$ pour tout ι , et si h est une fonction continue égale à 0 au point x , à 1 au point y , h ne peut être limite uniforme de polynomes par rapport aux f_ι , car un tel polynome prend toujours des valeurs égales aux points x et y .

<u>Corollaire</u>. <u>Soit</u> E <u>un espace compact</u>, $(f_\iota)_{\iota \in I}$ <u>une famille d'applications continues de</u> E <u>dans le corps des nombres complexes</u> $\mathbb{C}$, <u>telle que pour tout couple</u> (x,y) <u>de points distincts de</u> E , <u>il existe un indice</u> ι <u>tel que</u> $f_\iota(x) \neq f_\iota(y)$. <u>Dans l'espace</u> $\mathcal{C}(E, \mathbb{C})$ <u>des applications continues de</u> E <u>dans</u> $\mathbb{C}$, <u>les fonctions de la forme</u>

$$x \to p(f_{\iota_1}(x),f_{\iota_2}(x),\ldots,f_{\iota_n}(x),\overline{f}_{\iota_1}(x),\overline{f}_{\iota_2}(x),\ldots,\overline{f}_{\iota_n}(x))$$

<u>où</u> n <u>est un entier</u> >0 <u>quelconque</u>, p <u>un polynome quelconque de</u> 2n <u>variables à coefficients complexes, et les</u> ι_k <u>n indices quelconques dans</u> I , <u>forment un ensemble partout dense</u>.

Il suffit d'appliquer le th.3 à la famille formée des parties réelles g_ι et des parties imaginaires h_ι des f_ι , en remarquant que $g_\iota = \frac{1}{2}(f_\iota + \overline{f}_\iota)$, $h_\iota = \frac{1}{2i}(f_\iota - \overline{f}_\iota)$.

Comme exemple d'application du th.3, citons le résultat suivant :

<u>Proposition 3</u>. <u>Soit</u> P <u>le sous-espace de</u> $\mathcal{C}(R^m, C)$ <u>formé des applications continues de</u> R^m <u>dans</u> C, <u>admettant</u> Z^m <u>comme groupe des périodes</u>. <u>L'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients complexes des fonctions de la forme</u> $(x_1,..,x_m) \to e(h_1x_1+h_2x_2+...+h_mx_m)$, <u>où les</u> h_i <u>sont des entiers rationnels</u> (combinaisons dites "polynomes trigonométriques à m variables") <u>est partout dense dans</u> p .

Il suffit en effet de remarquer que p est isomorphe à l'espace $\mathcal{C}(T^m, C)$ des applications continues de l'espace compact T^m dans C , et de prendre comme fonctions f_ι celles qui correspondent aux m applications $(x_1,..,x_m) \to e(x_i)$ de R^m dans C .

<u>5. Ensembles filtrants de fonctions continues numériques</u>. Nous avons déjà remarqué (chap.IV, § 5) que l'ensemble $\mathcal{C}(E, R)$ des fonctions continues numériques définies dans un espace E , est <u>ordonné</u> par la relation "quel que soit $x \in E$, $f(x) \leqslant g(x)$" qu'on note $f \leqslant g$; en outre, il est <u>réticulé</u> pour cette relation d'ordre, la fonction sup(f,g) (resp. inf(f,g)) étant l'application $x \to \mathrm{Max}(f(x),g(x))$ (resp. $x \to \mathrm{Min}(f(x),g(x))$).

Cette structure permet dans certains cas d'établir la convergence d'un filtre sur l'espace $\mathcal{C}(E, R)$ (c'est-à-dire sa convergence uniforme dans E) grâce au théorème suivant :

<u>Théorème 4</u> (Dini). <u>Soit</u> E <u>un espace compact</u>, H <u>un ensemble filtrant à gauche de fonctions numériques semi-continues supérieurement définies dans</u> E . <u>Si</u> H <u>possède une enveloppe inférieure continue</u> g , <u>son filtre des sections converge uniformément vers</u> g <u>dans</u> E .

En considérant l'ensemble des fonctions $f-g$, où f parcourt H, on peut se ramener au cas où $g=0$. Pour tout $x \in E$, on a $\inf_{f \in H} f(x)=0$; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc une fonction u_x H telle que $u_x(x) \leq \varepsilon$; comme u_x est semi-continue supérieurement, il existe un voisinage V_x de x tel que, pour $y \in V_x$, on ait $u_x(y) \leq 2\varepsilon$; a fortiori pour toute fonction f H telle que $f \leq u_x$, on a $f(y) \leq 2\varepsilon$ pour tout $y \in V_x$. Comme E est compact, il existe un nombre fini de points $x_i \in E$ tels que les V_{x_i} forment un recouvrement de E; comme H est filtrant, il existe une fonction $u_0 \in H$ telle que $u_0 \leq u_{x_i}$ pour tout indice i; pour toute fonction $f \in H$ telle que $f \leq u_0$, on aura donc $f(x) \leq 2\varepsilon$ pour tout $x \in E$, ce qui démontre le théorème.

On a naturellement un énoncé correspondant pour un ensemble filtrant <u>à droite</u> de fonctions semi-continues <u>inférieurement</u>.

<u>Remarque</u>. L'hypothèse que E est <u>compact</u> est essentielle pour la validité du théorème de Dini. Par exemple, pour $E=\mathbb{R}$, si (f_n) désigne la suite décroissante de fonctions continues numériques définies par les relations $f_n(x)=0$ pour $x \leq n$, $f_n(x)=x-n$ pour $n \leq x \leq n+1$, $f_n(x)=1$ pour $x \geq n+1$, l'enveloppe inférieure de la suite (f_n) est la fonction 0, mais la suite ne converge pas uniformément vers 0.

Un raisonnement analogue prouve la proposition suivante :

<u>Proposition 4. Soit</u> E <u>un espace compact,</u> g <u>une fonction numérique semi-continue inférieurement dans</u> E, h <u>une fonction numérique semi-continue supérieurement dans</u> E, <u>telles qu'en tout point</u> $x \in E$, <u>on ait</u> $h(x) < g(x)$ <u>Dans ces conditions, il existe une fonction numérique</u> f, <u>continue dans</u> E <u>et telle que</u> $h(x) < f(x) < g(x)$ <u>en tout point de</u> E.

Comme $h(x) < +\infty$ et $g(x) > -\infty$ pour tout $x \in E$, la fonction $g-h$ est définie dans E, et semi-continue inférieurement ; comme $g(x)-h(x) > 0$

pour tout $x \in E$ et que E est compact, la borne inférieure α de $g-h$ est un nombre >0 (chap.IV, § 6, th.   ). Soit H l'ensemble (filtrant à gauche) des fonctions continues $f \geqslant h$; on sait (chap.VII, § 1, prop.   ) que h est l'enveloppe inférieure de H ; soit K l'ensemble filtrant à gauche des fonctions semi-continues supérieurement $f-g$, où f parcourt H ; on a pour tout $x \in E$, $\inf_{f \in H} (f(x)-g(x)) \leqslant -\alpha$. Pour tout $x \in E$, il existe donc une fonction $u_x \in H$ telle que $u_x(x)-g(x) \leqslant -\frac{\alpha}{2}$ et comme u_x-g est semi-continue supérieurement, il existe un voisinage V_x de x tel que, pour tout $y \in V_x$, $u_x(y)-g(y) < 0$. Comme dans le th.4, on en déduit l'existence d'une fonction continue $f \in H$ telle que, pour tout $x \in E$, $f(x)-g(x) < 0$, d'où la proposition.

Corollaire. Soit E un espace compact, g une fonction numérique semi-continue inférieurement dans E, h une fonction numérique semi-continue supérieurement dans E, telles que $h \leqslant g$.

Dans ces conditions, il existe une fonction numérique f, continue dans E, telle que $h \leqslant f \leqslant g$.

On peut se borner au cas où h et g prennent leurs valeurs dans $[-1,+1]$, en remplaçant au besoin g par $\frac{g}{1+|g|}$ et h par $\frac{h}{1+|h|}$ (avec la convention $\frac{x}{1+|x|} = +1$ pour $x = +\infty$, $\frac{x}{1+|x|} = -1$ pour $x = -\infty$). Définissons par récurrence pour $n \geqslant 0$ trois suites (f_n), (g_n), (h_n) de fonctions numériques définies dans E, telles que $g_0 = g+1$, $h_0 = h-1$, $g_n = \inf(g+\frac{1}{2^n}, f_{n-1}+\frac{1}{2^n})$ et $h_n = \sup(h-\frac{1}{2^n}, f_{n-1}-\frac{1}{2^n})$ pour $n \geqslant 1$, et enfin que f_n soit continue et telle que $h_n(x) < f_n(x) < g_n(x)$ pour $x \in E$. Cette définition est possible ; supposons-la faite en effet pour les indices $m < n$; alors g_n est semi-continue inférieurement, et h_n semi-continue supérieurement ; en outre, comme on a

$f_{n-1}(x) < g_{n-1}(x) \leqslant g(x) + \frac{1}{2^{n-1}}$, on en tire $f_{n-1}(x) - \frac{1}{2^n} < g(x) + \frac{1}{2^n}$ et de même $f_{n-1}(x) + \frac{1}{2^n} > h(x) - \frac{1}{2^n}$, d'où $h_n(x) < g_n(x)$ pour tout $x \in E$ l'existence d'une fonction continue f_n telle que $h_n(x) < f_n(x) < g_n(x)$ résulte alors de la prop.4 . Il est immédiat en outre qu'on a $\|f_n - f_{n-1}\| \leqslant \frac{1}{2^n}$, donc la série de terme général $f_n - f_{n-1}$ est normalement convergente, ce qui entraîne que la suite (f_n) est uniformément convergente dans E ; sa limite f est une fonction continue dans E , et en passant à la limite dans les inégalités $h - \frac{1}{2^n} \leqslant f_n \leqslant g + \frac{1}{2^n}$, il vient $h \leqslant f \leqslant g$.

<u>Exercices</u>. 1) Soient E un espace topologique, G un groupe topologique l'ensemble $\mathcal{C}(E,G)$ des applications continues de E dans G est muni d'une structure de groupe en désignant par uv l'application $x \to u(x)v(x)$ et par u^{-1} l'application $x \to (u(x))^{-1}$. Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E . Si on munit G de l'une de ses structures uniformes, la topologie de l'espace $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,G)$ est compatible avec la structure de groupe de $\mathcal{C}(E,G)$ si pour tout $A \in \mathfrak{S}$ et tout $u \in \mathcal{C}(E,G)$, l'application $y \to y^{-1}$ de u(A) dans G est uniformément continue ; la structure uniforme induite sur $\mathcal{C}(E,G)$ par $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$ est alors identique à la structure uniforme de ce groupe topologique, de même nom que la structure uniforme considérée sur G .

Cas de la convergence compacte et de la convergence simple. Cas où G est abélien.

2) Soit G le groupe topologique des matrices régulières d'ordre 2 à éléments réels (groupe isomorphe à $GL_2(\mathbb{R})$).

Montrer que la topologie de la convergence uniforme sur le groupe $\mathcal{C}(\mathbb{R},G)$ des applications continues de $\mathbb{R}$ dans G n'est pas compatible avec la structure de groupe de $\mathcal{C}(\mathbb{R},G)$.

3) Soit G un groupe abélien topologique, $\mathcal{L}(G)$ l'anneau des endomorphismes continus de G . Montrer que, sur $\mathcal{L}(G)$ (considéré comme sous-espace de $\mathcal{C}(G,G)$) la topologie de la convergence uniforme est compatible avec la structure d'anneau de $\mathcal{L}(G)$; il en est de même de la topologie de la convergence compacte lorsque G est localement compact.

4) Soient E un espace topologique, A un anneau topologique ; l'ensemble $\mathcal{C}(E,A)$ des applications continues de E dans A est muni d'une structure d'anneau, en désignant par u-v l'application $x \to u(x)-v(x)$, par uv l'application $x \to u(x)v(x)$ de E dans A . Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E . Si on munit A de sa structure uniforme, la topologie de l'espace $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,A)$ est compatible avec sa structure d'anneau si, pour tout $M \in \mathfrak{S}$, tout $u \in \mathcal{C}(E,A)$ et tout voisinage V de 0 dans A , il existe un voisinage W de 0 dans A tel que $u(A).W \subset V$ et $W.u(A) \subset V$. Cas de la convergence simple et de la convergence compacte.

5) Montrer que, si E est un espace localement compact dénombrable à l'infini, la topologie de la convergence uniforme sur l'anneau $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ n'est pas compatible avec sa structure d'anneau.

6) Soit (r_n) la suite des nombres rationnels appartenant à l'intervalle $[0,1]=I$. On définit par récurrence une suite d'intervalles fermés $I_n \subset I$ de la façon suivante : I_n a pour milieu le point r_{k_n} de plus petit indice, non contenu dans la réunion des I_p d'indice $p<n$; il a une longueur $\leq 1/4^n$ et ne rencontre aucun des I_p d'indice $p<n$; les I_n forment donc une suite d'intervalles fermés deux à deux sans point commun, et contenus dans I . Dans l'espace produit $I \times \mathbb{R}$, on définit une fonction continue $u(x,y)$ de la façon suivante : pour

pour chaque entier $n \geqslant 1$, la fonction $u(x,n)$ est égale à 1 en un point de I_n, à 0 en tout point extérieur à I_n, et prend des valeurs comprises entre 0 et 1 ; d'autre part, pour chaque $x \in I$, la fonction $y \rightarrow u(x,y)$ est linéaire dans chaque intervalle $[n,n+1]$. Montrer qu'il ne peut exister de système formé d'un nombre fini de fonctions v_i continues dans I et d'un même nombre de fonctions w_i continues dans R, telles que $\left|u(x,y) - \sum_i v_i(x) w_i(y)\right| \leqslant \frac{1}{4}$. (Considérer dans l'espace $\mathcal{B}(R, R)$ des fonctions continues bornées, l'ensemble des fonctions $y \rightarrow u(x,y)$, et montrer qu'il y a une suite infinie (u_n) de ces fonctions telle que $\|u_n\| = 1$ et $\|u_n - u_m\| = 1$ pour deux indices distincts ; en déduire qu'il ne saurait y avoir de sous-espace vectoriel de dimension finie dans $\mathcal{B}(R, R)$ tel que chacun des u_n soit à une distance $\leqslant \frac{1}{4}$ de ce sous-espace, en remarquant qu'il existerait alors une suite (x_n) de points de ce sous-espace, telle que $\|x_n\| \leqslant 2$ et $\|x_n - x_m\| \geqslant \frac{1}{2}$ pour tout couple d'indices distincts, contrairement au fait que tout sous-espace de dimension finie de $\mathcal{B}(R, R)$ est localement compact).

7) Soit E un espace compact, (f_ι) une famille de fonctions continues numériques finies, définies dans E, s'annulant toutes en un point $x_0 \in E$, et telles que, pour tout couple (x,y) de points distincts de E, il existe un indice ι tel que $f_\iota(x) \neq f_\iota(y)$. Montrer que l'ensemble des polynomes sans terme constant par rapport aux f_ι est partout dense dans le sous-anneau de l'anneau $\mathcal{C}(E, R)$ formé des fonctions continues dans E et s'annulant au point x_0.

8) Soit $\mathfrak{a}$ un idéal fermé dans l'anneau normé $\mathcal{C}(E, R)$ des applications continues d'un espace compact E dans R.

Soit A la partie fermée de E formée des points x tels que $u(x)=0$ pour tout $u \in \mathfrak{a}$; montrer que si x et y sont deux points distincts de E n'appartenant pas à A, il existe $u \in \mathfrak{a}$ telle que $u(x) \neq u(y)$ (utiliser le fait que $\mathfrak{a}$ est un idéal). En déduire que $\mathfrak{a}$ est identique à l'ensemble des fonctions continues qui s'annulent dans A (se ramener au cas où A est réduit à un point, en prenant l'espace quotient de E obtenu en identifiant tous les points de A ; puis appliquer l'exerc. 7).

En particulier, tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{C}(E, \mathbf{R})$ est identique à l'ensemble des fonctions continues qui s'annulent en un point de E.

9) Soit $\mathfrak{a}$ un idéal fermé dans l'anneau normé $\mathcal{C}(E, \mathbf{C})$ des applications continues d'un espace compact E dans $\mathbf{C}$. Montrer que, si $x \in \mathfrak{a}$, la fonction conjuguée $\bar{x}$ appartient aussi à $\mathfrak{a}$ (remarquer que $\bar{x}$ est limite uniforme de fonctions de la forme zx). En déduire que, si A est la partie fermée de E formée des points t tels que $x(t)=0$ pour tout $x \in \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ est identique à l'ensemble des fonctions continues ~~[illegible]~~ complexes s'annulant dans A (raisonner comme dans l'exerc. 8).

10) Soient E, E' deux espaces compacts. Montrer que, s'il existe un isomorphisme $u \to u'$ de la structure d'algèbre par rapport à $\mathbf{R}$ (non topologique) de $\mathcal{C}(E, \mathbf{R})$ sur celle de $\mathcal{C}(E', \mathbf{R})$, E et E' sont homéomorphes. (Remarquer d'une part que l'isomorphisme $u \to u'$ définit une application biunivoque de l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathcal{C}(E, \mathbf{R})$ sur l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathcal{C}(E', \mathbf{R})$, et utiliser l'exerc. 8 ; ayant obtenu ainsi une application biunivoque de E sur E', montrer que pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, elle transforme l'ensemble des $x \in E$ tels que $u(x)=\alpha$, en l'ensemble des $x' \in E'$ tels que $u'(x')=\alpha$; utiliser enfin l'axiome (O_{IV})).

11) Soient E, E' deux espaces compacts. Montrer que, s'il existe un isomorphisme $u \to \varphi(u) = u'$ de la structure d'espace normé de $\mathscr{C}(E, R)$ sur celle de $\mathscr{C}(E', R')$, (on suppose donc que $\|u'\| = \|u\|$ pour tout u), il existe un homéomorphisme ψ de E sur E' tel que $u'(\psi(x)) = u(x)$ pour tout $x \in E$ et tout $u \in \mathscr{C}(E, R)$, (pour chaque $x \in E$, on désigne par M_x l'ensemble des $u \in \mathscr{C}(E, R)$ tels que $|u(x)| = \|u\|$; montrer d'abord que la relation $M_x \subset M_y$ entraîne $x = y$, en vertu de l'axiome (O_{IV}). Montrer ensuite que $\varphi(M_x)$ est de la forme $M_{x'}$, où $x' \in E'$; pour cela, remarquer que x est l'intersection des ensembles N_u pour tout $u \in M_x$, N_u désignant l'ensemble des points y tels que $|u(y)| = \|u\|$; établir que les ensembles $N_{\varphi(u)}$ où u parcourt M_x, ont une intersection non vide, en se ramenant à considérer un nombre fini de ces ensembles $N_{\varphi(u_i)}$; pour élucider ce dernier point, considérer la fonction $v = \sum_i (\operatorname{sgn} u_i(x)).u_i$, et prouver que, si x' est un point tel que $|v'(x')| = \|v'\|$, on a $x' \in N_{\varphi(u_i)}$ pour tous les indices i.

Ayant défini l'application biunivoque ψ de E sur E' à l'aide de cette construction, montrer que c'est un homéomorphisme, en remarquant que, pour toute fonction $u \in \mathscr{C}(E, R)$, l'image de N_u par ψ est $N_{\varphi(u)}$.

12) Soit Φ un ensemble de fonctions numériques bornées définies dans un ensemble E, telles que, pour tout couple de points distincts t_1, t_2 de E, il existe $x \in \Phi$ telle que $x(t_1) \neq x(t_2)$. Soit K le plus petit sous-anneau fermé dans $\mathscr{B}_0(E, R)$ contenant Φ. Soit $\mathscr{U}$ la structure uniforme la moins fine sur E rendant uniformément continue les fonctions de Φ ; soit $\hat{E}$ le complété de E pour cette structure,

qui est compact (chap. II, § 5). Montrer que toute fonction continue numérique (finie) sur $\hat{E}$ est un prolongement d'une fonction appartenant à K (appliquer le théorème de Stone à K).

13) Soient E, E' deux espaces complètement réguliers, $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{U}'$) la structure uniforme la moins fine sur E (resp. E') rendant uniformément continues les fonctions numériques continues et bornées dans E (resp. E'), $\hat{E}$ (resp. $\hat{E}'$) le complété de E (resp. E') pour la structure $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{U}'$). Pour que les structures d'algèbre de $\mathcal{B}(E, R)$ et $\mathcal{B}(E', R)$ soient isomorphes, il faut et il suffit que $\hat{E}$ et $\hat{E}'$ soient homéomorphes (utiliser les exerc. 12 et 10) ; la même condition est nécessaire et suffisante pour qu'il existe un isomorphisme de la structure d'espace normé de $\mathcal{B}(E, R)$ sur celle de $\mathcal{B}(E', R)$.