CHAPITRE VII
STRUCTURES UNIFORMES DANS LES ESPACES FONCTIONNELS
CHAPITRE VIII
ESPACES FONCTIONNELS

Rédaction n° 031

Nombre de pages : 46

Nombre de feuilles : 46

Top. générale

Chap VIII.

Espaces fonctionne

Chapitre X

(Ancien CHAPITRE VII.) Etat 1

STRUCTURES UNIFORMES DANS LES ESPACES FONCTIONNELS.

§ 1. Méthode générale de définition d'une structure uniforme sur un ensemble de fonctions.

La méthode qui va être exposée ci-dessous, et dont nous étudierons ensuite des cas particuliers au cours de ce chapitre, fait intervenir de manière <u>directe</u> le fait que les éléments de l'ensemble où on se propose de définir une structure uniforme sont des <u>fonctions</u> définies sur certaines parties d'un fondamental donné, et prenant leurs valeurs dans un espace uniforme. Nous rencontrerons par la suite d'autres méthodes, qu'on peut qualifier d'<u>indirectes</u>, car elles consistent à utiliser les propriétés des fonctions qu'on considère pour définir sur leur ensemble une <u>fonctionnelle</u> possédant les propriétés requises pour qu'on puisse la faire servir à définir une structure uniforme (par exemple une <u>distance</u>, voir ch. VI, §).

Dans ce qui suit, E désigne un fondamental quelconque, K un espace uniforme dont $\mathfrak{U}$ est le filtre des entourages, G l'ensemble des fonctions X définies sur une partie de E et prenant leurs valeurs dans K .

Soit Φ une <u>famille non vide de filtres</u> sur E , satisfaisant à la condition suivante :

I. <u>Le filtre intersection de deux filtres de</u> Φ <u>appartient à</u> Φ .

Soit d'autre part G_{Φ} la partie de G formée des fonctions X telles que, <u>pour tout filtre</u> $\mathfrak{F} \in \Phi$, <u>X soit définie sur un ensemble au moins de</u> $\mathfrak{F}$.

A chaque entourage symétrique $V \in \mathfrak{U}$, et à chaque filtre $\mathfrak{F} \in \Phi$, faisons correspondre, dans le produit $G_\Phi \times G_\Phi$, l'ensemble $W(V, \mathfrak{F})$ défini comme suit : c'est l'ensemble des couples (X,Y) *tels qu'il existe un ensemble* $A \in \mathfrak{F}$ *en tout point x duquel on ait* $(X(x), Y(x)) \in V$ (autrement dit, deux fonctions forment un couple de $W(V, \mathfrak{F})$ lorsqu'elles sont voisines d'ordre V sur un ensemble de $\mathfrak{F}$) ; cet énoncé suppose naturellement que X et Y sont *définies* dans A.

Montrons que la famille $\mathfrak{W}$ des ensembles $W(V, \mathfrak{F})$ est la base d'*un filtre d'entourages* définissant une structure uniforme (non séparée en général) sur G_Φ.

En effet, quel que soient $X \in G_\Phi$, $V \in \mathfrak{U}$ et $\mathfrak{F} \in \Phi$, il existe un ensemble $A \in \mathfrak{F}$ sur lequel X est définie, et on a, pour tout $x \in A$ $(X(x), X(x)) \in V$, ce qui montre que l'axiome U'-I a est vérifié.

Le fait que $\mathfrak{W}$ est une base de filtre résulte de la relation

$$W(V \cap V', \mathfrak{F} \cap \mathfrak{F}') \subset W(V, \mathfrak{F}) \cap W(V', \mathfrak{F}')$$

qu'on vérifie immédiatement.

Enfin, U'-II est évidemment vérifié, puisque les V sont symétriques, et U'-III résulte de ce que, si $\overset{2}{V_1} \subset V$, $(W(V_1, \mathfrak{F}))^2 \subset W(V, \mathfrak{F})$: car si on a $(X(x), Y(x)) \in V_1$ en tout point de $A \in \mathfrak{F}$, et $(Y(x), Z(x)) \in V_1$ en tout point de $B \in \mathfrak{F}$ on aura, en tout point de $A \cap B \in \mathfrak{F}$, $(X(x),Z(x)) \in \overset{2}{V_1} \subset V$.

Remarquons d'autre part que, si $\mathfrak{F}'$ est un filtre *plus fin* que $\mathfrak{F}$, on a $W(V, \mathfrak{F}) \subset W(V, \mathfrak{F}')$; on ne change donc pas la structure uniforme définie par Φ lorsqu'on adjoint à cette famille tous les filtres plus fins que ceux de la famille ; autrement dit, on peut supposer que Φ vérifie la condition :

II. <u>Tout filtre plus fin qu'un filtre de Φ appartient à Φ</u> .

Indiquons maintenant un critère pour que la structure uniforme définie par Φ soit <u>séparée</u> : il suffit que Φ vérifie la condition :

III. <u>Quel que soit</u> $x \in E$, <u>il existe un filtre</u> $\mathfrak{F} \in \Phi$ <u>dont tous les ensembles contiennent</u> <u>x</u> .

En effet, si $X \neq Y$, il existe x tel que $X(x) \neq Y(x)$, et par suite il existe $V \in \mathfrak{U}$ tel que $(X(x), Y(x)) \notin V$; on a donc $(X,Y) \notin W(V, \mathfrak{F})$ pour tout filtre $\mathfrak{F}$ dont tous les ensembles contiennent x , ce qui démontre U'-1 .

Nous allons considérer plus particulièrement les familles de filtres formées de la manière suivante : soit $\mathfrak{S}$ une famille de parties de E ; à chaque ensemble $S \in \mathfrak{S}$, faisons correspondre le filtre $\mathfrak{F}_S$ des ensembles contenant S ; les filtres $\mathfrak{F}_S$ formeront une famille Φ satisfaisant à la condition I si $\mathfrak{S}$ satisfait à la condition

I a. <u>La réunion de deux ensembles de $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}$</u> .

La famille G_Φ est alors la famille des fonctions à valeurs dans K , définies sur tout ensemble de $\mathfrak{S}$. Dans la structure uniforme définie par Φ , une base du filtre des entourages est formée par les ensembles $W(V,S)$ des couples (X,Y) tels que $(X(x),Y(x)) \in V$ en tout point $x \in S$.

D'après II, on peut toujours supposer que $\mathfrak{S}$ satisfait à la condition :

II a. <u>Toute partie d'un ensemble de $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}$</u> .

Enfin, la structure uniforme définie par $\mathfrak{S}$ sera <u>séparée</u> si $\mathfrak{S}$ vérifie la condition

III a . <u>Tout point de</u> E <u>appartient à au moins un ensemble de</u> $\mathfrak{S}$.

Lorsque cette dernière condition est remplie, la famille G_{Φ} n'est autre que la famille F de toutes les <u>applications</u> de E dans K ; nous désignerons alors par $F_{\mathfrak{S}}$ l'<u>espace uniforme</u> obtenu en munissant F de la structure uniforme définie par la famille $\mathfrak{S}$.

Nous supposerons toujours désormais que la famille $\mathfrak{S}$ vérifie les conditions Ia , IIa , IIIa . Nous supposerons de plus que K est <u>complet</u> ; alors

<u>Proposition 1</u>. <u>$F_{\mathfrak{S}}$ est complet</u>.

Soit en effet $\mathfrak{F}$ un filtre de Cauchy sur $F_{\mathfrak{S}}$; si x est un point quelconque de E , H un ensemble de $\mathfrak{F}$, on désignera par $H(x)$ l'ensemble des points $X(x)$ lorsque X parcourt H , et par $\mathfrak{F}(x)$ le filtre engendré par les $H(x)$ lorsque H parcourt $\mathfrak{F}$. $\mathfrak{F}(x)$ est un filtre de Cauchy sur K , car, quel que soit V , si S est un ensemble de $\mathfrak{S}$ contenant x , il existe $H \in \mathfrak{F}$ tel que $(X,Y) \in W(V,S)$ quels que soient X et Y dans H ; donc en particulier $(X(x),Y(x)) \in V$ quels que soient X et Y dans H . Soit $X_0(x)$ le point limite du filtre $\mathfrak{F}(x)$; on définit ainsi une application X_0 de E dans K ; montrons que X_0 est point limite du filtre $\mathfrak{F}$ dans $F_{\mathfrak{S}}$. Il suffit de remarquer que, si H est déterminé comme ci-dessus, on a $(X_0(x),X(x)) \in \overset{2}{V}$ quel que soit $X \in H$ et quel que soit $x \in S$ donc $(X_0,X) \in W(\overset{2}{V},S)$ quel que soit $X \in H$, ce qui montre que $\mathfrak{F}$ converge vers X_0 .

Il est clair que si $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}'$, la structure uniforme de $F_{\mathfrak{S}'}$

est <u>plus fine</u> que celle de $F_{\mathfrak{S}}$. D'après Ia, IIa et IIIa , toute famille $\mathfrak{S}$ satisfaisant à ces conditions contient la famille $\mathfrak{S}_o$ des <u>parties finies</u> de E , et cette famille satisfait aussi à Ia, IIa et IIIa ; parmi tous les espaces $F_{\mathfrak{S}}$, l'espace $F_{\mathfrak{S}_o}$, qu'on notera de façon abrégée F_o , a donc la structure uniforme <u>la moins fine</u> ; on voit immédiatement d'ailleurs que F_o n'est autre que l'<u>espace produit</u> K^E . Pour qu'un filtre $\mathfrak{F}$ soit convergent sur F_o , il faut et il suffit donc que le filtre $\mathfrak{F}(x)$ soit convergent quel que soit $x \in E$; on dit qu'un tel filtre converge <u>simplement</u> (ou <u>faiblement</u>) <u>sur</u> E vers la fonction dont la valeur en chaque point x est la limite du filtre $\mathfrak{F}(x)$, et la topologie (resp. structure uniforme) de F_o est encore appelée <u>topologie</u> (resp. <u>structure uniforme</u>) <u>de la convergence simple</u> (ou <u>faible</u>).

De même, toutes les familles $\mathfrak{S}$ sont contenues dans la famille $\mathfrak{P}(E)$ de toutes les parties de E , famille qui satisfait évidemment à Ia, IIa et IIIa , et définit par conséquent un espace uniforme F_∞ dont la structure est <u>la plus fine</u> parmi tous les $F_{\mathfrak{S}}$. Un filtre $\mathfrak{F}$ qui converge sur F_∞ est dit <u>uniformément convergent</u> sur E : pour qu'il possède cette propriété, il faut et il suffit qu'à tout entourage $V \in \mathfrak{U}$ corresponde un ensemble $H \in \mathfrak{F}$ tel que, <u>pour tout</u> $x \in E$, $(X(x), Y(x)) \in V$ quels que soient X et Y dans H .

Plus généralement, si A est une partie quelconque de E , on dira qu'un filtre $\mathfrak{F}$ de fonctions définies dans A (et éventuellement en dehors), à valeurs dans K , <u>converge uniformément sur A</u> si à tout entourage $V \in \mathfrak{U}$ correspond un ensemble $H \in \mathfrak{F}$ tel que, <u>pour tout</u> $x \in A$, $(X(x),Y(x)) \in V$ quels que soient X et Y dans H.

Si $X_0(x)$ est le point limite du filtre $\mathfrak{F}(x)$ quel que soit $x \in A$, on dit que $\mathfrak{F}$ <u>converge uniformément vers</u> toute fonction égale à X_0 en tout point de A.

Cela revient à dire que $\mathfrak{F}$ converge sur G_Φ, où Φ se compose ici du filtre des ensembles contenant A et de tous les filtres plus fins ; l'espace uniforme G_Φ <u>n'est pas séparé</u> dans ce cas, puisque, si $X(x) = Y(x)$ pour tout $x \in A$, le couple (X,Y) appartient à tous les entourages.

Cette dernière définition montre immédiatement que, pour qu'un filtre $\mathfrak{F}$ converge sur $F_{\mathfrak{S}}$, <u>il faut et il suffit qu'il converge uniformément sur tout ensemble de</u> $\mathfrak{S}$. Aussi appelle-t-on la structure uniforme de $F_{\mathfrak{S}}$ <u>structure uniforme de la convergence uniforme sur les ensembles de</u> $\mathfrak{S}$.

On a des définitions et résultats analogues pour les <u>bases de filtres</u>.

<u>Exercice</u>. 1) Montrer que pour tout E <u>infini</u>, la structure uniforme de la convergence faible est <u>strictement moins fine</u> que celle de la convergence uniforme.

2) Lorsque E est infini, comparer la topologie de la convergence uniforme sur E à la topologie définie dans l'exercice 1 ch. I, § 8 (où tous les espaces facteurs sont identiques à K). Etudier en particulier cette dernière topologie lorsque K est la droite numérique ; montrer que, pour qu'une suite (X_n) de fonctions numériques sur E converge, dans cette topologie, vers X_0, il faut et il suffit que $X_n(x) = X_0(x)$ à partir d'une valeur n_0 de n, pour tout x à l'exception d'un nombre <u>fini</u> de points, et que, en ces derniers points, $X_n(x)$ converge vers $X_0(x)$.

§ 2. Application à l'étude topologique de l'ensemble des fonctions continues.

Nous supposons maintenant E muni d'une structure topologique, et nous désignerons par C l'ensemble des applications continues de E dans K, par $C(A)$ l'ensemble des fonctions définies dans un sous-ensemble quelconque A de E (et éventuellement au dehors), à valeurs dans K et continues sur A au sens de la topologie induite par celle de E. Nous allons étudier les propriétés topologiques des ensembles C et $C(A)$, considérés comme parties de l'un des espaces $F_{\mathfrak{S}}$ ($\mathfrak{S}$ satisfaisant toujours aux conditions Ia, IIa, IIIa).

<u>Théorème 1. Soit $\mathfrak{F}$ une base de filtre sur</u> $C(\bar{A})$, <u>uniformément convergente sur A ; dans ces conditions, $\mathfrak{F}$ est aussi uniformément convergente sur $\bar{A}$, et la fonction limite appartient à</u> $C(\bar{A})$.

Soit X_0 la fonction limite de $\mathfrak{F}$, définie sur A, et soit x un point quelconque de $\bar{A}$, V un entourage quelconque de $\mathfrak{U}$; il existe un ensemble H de $\mathfrak{F}$ tel que, pour tout $X \in H$ et pour tout $y \in A$, $(X_0(y), X(y)) \in V$; choisissons un X_1 dans H. Comme X_1 est continue sur $\bar{A}$, il existe un voisinage U de x tel que , quels que soient y, y' dans $U \cap \bar{A}$, $(X_1(y), X_1(y')) \in V$; il en résulte qu'on a aussi $(X_0(y), X_0(y')) \in V^3$, quels que soient y, y' dans $U \cap A$. Autrement dit, si $\mathfrak{V}_A$ est la trace sur A du filtre des voisinages de x , $X_0(\mathfrak{V}_A)$ est la base d'un filtre de Cauchy ; donc (ch. II, §   , prop.   ) on peut prolonger X_0 en une fonction $\bar{X}_0$ <u>continue sur</u> $\bar{A}$. Cela étant, quel que soit $x \in \bar{A}$ et quel que soit $X \in H$, on a $(\bar{X}_0(x), X(x)) \in V^3$; car cette relation est évidemment vérifiée si $x \in A$, et si $x \in \bar{A}$, il suffit de remarquer qu'on peut trouver $y \in A$ tel que $(\overline{X_0}(x), X_0(y)) \in V$ et $(X(x), X(y)) \in V$. Le théorème est donc complètement démontré.

<u>Corollaire</u>. <u>$\overline{C}$ désignant l'adhérence de C dans $F_{\mathfrak{S}}$</u>, <u>tout point de $\overline{C}$ est une fonction continue sur l'adhérence de chacun des ensembles de $\mathfrak{S}$</u>.

Il suffit en effet de remarquer que tout point de $\overline{C}$ est limite d'une base de filtre sur C, que $C \subset C(\overline{A})$, quel que soit $A \subset E$, et qu'une base de filtre convergente dans $F_{\mathfrak{S}}$ converge uniformément sur tout ensemble de $\mathfrak{S}$.

On peut se demander si, inversement, une fonction X continue sur l'adhérence de chaque ensemble de $\mathfrak{S}$ appartient à $\overline{C}$; il en sera certainement ainsi lorsqu'une fonction continue sur un ensemble fermé, et à valeurs dans K, peut être prolongée par une fonction continue dans E (ce qui a lieu par exemple lorsque E est <u>normal</u> et que K est la droite numérique (ch.VI, §)) ; en effet, S étant un ensemble quelconque de $\mathfrak{S}$, Y une fonction continue dans E, égale à X sur S, on a $(X,Y) \in W(V,S)$ quel que soit l'entourage V.

On voit de plus que, si $\mathfrak{S}^*$ est la famille formée des <u>adhérences</u> des ensembles de $\mathfrak{S}$, ainsi que des parties de ces adhérences, l'adhérence de C dans $F_{\mathfrak{S}^*}$ est <u>la même</u> que dans $F_{\mathfrak{S}}$; et si $\overline{C}$ désigne cette adhérence, les topologies induites sur $\overline{C}$ par $F_{\mathfrak{S}}$ et $F_{\mathfrak{S}^*}$ sont identiques.

Le corollaire du th. 1 permet de donner un critère pour que C soit un ensemble <u>fermé</u> dans $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}$ (et par suite <u>complet</u> d'après la prop. 1 du § 1) :

<u>Théorème 2</u>. <u>C est fermé dans $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}$ si la famille $\mathfrak{S}$ vérifie la condition</u>

IV. <u>Quelle que soit la partie A de E, et quel que soit x adhérent à A, il existe un ensemble S de $\mathfrak{S}$ contenu dans A et tel que x soit adhérent à S</u> .

Il suffit de montrer que, si la condition IV est réalisée, une fonction X continue sur chaque ensemble $\bar{S}$ (S quelconque dans $\mathfrak{S}$) est continue dans E . Or, supposons que X ne soit pas continue en un point x ; il existerait alors un entourage $V \in \mathfrak{U}$ tel que, dans chaque voisinage U de x , il existe un point y_U tel que $(X(x),X(y_U)) \notin V$. Soit A l'ensemble des y_U lorsque U parcourt le filtre des voisinages de x ; on a évidemment $x \in \bar{A}$; d'après IV , il existe donc un ensemble S de $\mathfrak{S}$, contenu dans A et tel que $x \in \bar{S}$. Or, quel que soit $y \in S$, $(X(x),X(y)) \notin V$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que X est continue sur $\bar{S}$.

Il résulte évidemment de ce théorème que <u>C est fermé dans $\mathcal{F}_{\infty}$</u> (ce qui résulte d'ailleurs immédiatement du corollaire du th. 1).

<u>La structure uniforme de la convergence uniforme sur les ensembles compacts</u>.

Il est souvent intéressant de considérer la structure uniforme définie par la famille $\mathfrak{S}$ de tous les ensembles <u>relativement compacts</u> de E ; on désignera par $\mathcal{F}_{\text{comp.}}$ l'espace uniforme correspondant.

Le théorème 2 montre ici que C sera *fermé dans* $\mathcal{F}_{comp}$ si l'espace $\mathcal{E}$ vérifie la condition suivante :

P . *Quels que soient la partie A de* $\mathcal{E}$, *et le point x adhérent à A, il existe un ensemble relativement compact contenu dans A et auquel x est adhérent*.

Cette condition est vérifiée en particulier dans les deux cas importants suivants :

a) si $\mathcal{E}$ est *localement compact* ;

b) si $\mathcal{E}$ est *métrisable*, (car il existe alors une suite dénombrable contenue dans A et qui converge vers x , et on sait que l'ensemble des points d'une telle suite est relativement compact).

Le cas où $\mathcal{E}$ est *localement compact* est particulièrement intéressant, car la topologie induite sur C par celle de $\mathcal{F}_{comp.}$ peut alors être caractérisée de la manière suivante :

Théorème 3. *Si* $\mathcal{E}$ *est localement compact, la topologie induite sur C par* $\mathcal{F}_{comp.}$ *est la moins fine de toutes les topologies pour lesquelles* $X(x)$ *est une fonction continue du couple* (X,x) *dans le produit* $C \times \mathcal{E}$.

1° Montrons que $X(x)$ est continue sur $C \times \mathcal{E}$ lorsque la topologie de C est la topologie induite par $\mathcal{F}_{comp.}$. Soit en effet (X_0,x_0) un point quelconque de $C \times \mathcal{E}$ et V un entourage quelconque de $\mathcal{U}$. Comme X_0 est continue dans $\mathcal{E}$, il existe un voisinage *compact* S de x_0 tel que $(X_0(x_0),X_0(x)) \in V$ quel que soit $x \in S$. D'autre part, l'ensemble U des fonctions X de C telles que $(X_0,X) \in W(V,S)$, c'est-à-dire $(X_0(x),X(x)) \in V$ quel que soit $x \in S$, est un voisinage de X_0 dans la topologie induite sur C par $\mathcal{F}_{comp.}$.

$U \times S$ est donc un voisinage de (X_0, x_0) dans $C \times E$, et, quel que soit $(X,x) \in U \times S$, on a $(X_0(x_0), X(x)) \in V^2$, ce qui montre que $X(x)$ est continue au point (X_0, x_0).

2° Soit maintenant $\mathcal{C}$ une topologie quelconque sur C telle que $X(x)$ soit continue dans l'espace produit $C \times E$; montrons que tout voisinage U d'un point X_0 de C, dans la topologie induite sur C par $F_{comp.}$, <u>est aussi un voisinage de X_0 dans la topologie $\mathcal{C}$</u>. En effet, U contient l'ensemble des points $X \in C$ tels que $(X_0(x), X(x)) \in V$ pour tout $x \in S$, où S est un ensemble <u>compact</u> et $V \in \mathcal{U}$. A tout $x \in S$ correspond par hypothèse un voisinage A_x de x dans E, et un voisinage B_x de X_0 <u>dans la topologie</u> $\mathcal{C}$ sur C tels que, quel que soit $y \in A_x$ et quel que soit $X \in B_x$, on ait $(X_0(x), X(y)) \in V_1$ (V_1 entourage de $\mathcal{U}$ tel que $\overset{2}{V_1} \subset V$). Par suite, quel que soient $y \in A_x$ et $X \in B_x$, $(X_0(y), X(y)) \in V$. Or, on peut trouver un nombre <u>fini</u> de points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que $S \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_{x_i}$; si on pose $B = \bigcap_{i=1}^{n} B_{x_i}$, B est un voisinage de X_0 dans la topologie $\mathcal{C}$, et, quels que soient $x \in S$, et $X \in B$, on a $(X_0(x), X(x)) \in V$, ce qui démontre que $B \subset U$, et par suite que U est un voisinage de X_0 dans la topologie $\mathcal{C}$.

Lorsque E n'est pas localement compact, il peut se faire que la topologie intersection de toutes les topologies $\mathcal{C}$ sur C qui rendent continue la fonction $X(x)$ sur $C \times E$, ne possède pas cette propriété ; autrement dit, parmi toutes les topologies $\mathcal{C}$, il n'en existe pas alors de moins fine que toutes les autres (voir Appendice).

Remarquons encore que, lorsque E est compact, les espaces $F_{comp.}$ et F_{∞} sont évidemment identiques.

Exercice. Montrer que, lorsqu'on prend pour E et K la droite numérique, l'ensemble C est partout dense dans F_0.

§ 3. Les familles de fonctions également continues.

Nous allons maintenant étudier les parties de l'ensemble C des fonctions continues qui sont des ensembles <u>relativement compacts</u> dans un espace $F_{\mathfrak{S}}$. A cet effet, nous introduirons la définition suivante :

<u>A étant une partie de E , H une famille de fonctions définies sur A, à valeurs dans K , on dit que H est une famille de fonctions également continues sur A si, à tout entourage $V \in \mathfrak{U}$ et à tout point $x \in A$, on peut faire correspondre un voisinage $U(V,x)$ de x tel que, quel que soit $y \in U(V,x) \cap A$, et quel que soit $X \in H$</u>

$$(X(x),X(y)) \in V .$$

Il est clair que si cette condition est vérifiée, les fonctions de H sont <u>continues</u> sur A ; par ailleurs, toute partie d'une famille de fonctions également continues sur A est encore une famille de fonctions également continues sur A . Lorsque $A = \mathsf{E}$, on parlera simplement de famille de fonctions <u>également continues</u> (au lieu de "également continues sur E ").

<u>Théorème 1</u>. <u>Si H est une partie relativement compacte de $F_{\mathfrak{S}}$, formée de fonctions continues sur un ensemble $S \in \mathfrak{S}$, H est une famille de fonctions également continues sur S</u> .

En effet, soit x un point quelconque de S , et V un entourage quelconque de $\mathfrak{U}$. H étant relativement compacte dans $F_{\mathfrak{S}}$, on peut trouver un nombre <u>fini</u> de fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de H telles que, pour tout $X \in H$, il existe un indice i tel que $(X(y),X_i(y)) \in V$ quel que soit $y \in S$. Comme X_i est continue sur E, il existe, pour chaque i, un voisinage U_i de x tel que, pour tout $y \in U_i \cap A$, $(X_i(x),X_i(y)) \in V$. Soit $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$; c'est un voisinage de x, et on a $(X_i(x),X_i(y)) \in V$ quel que soit $y \in U \cap A$, et quelque soit l'indice i ; il en résulte que, quel que soit $X \in H$ et quel que soit $y \in U \cap A$, $(X(x),X(y)) \in V^3$, ce qui démontre le théorème.

Corollaire. Si la famille $\mathfrak{S}$ vérifie la condition IV, toute partie H de C relativement compacte dans $F_{\mathfrak{S}}$ est une famille de fonctions également continues.

Il suffit de montrer que si H est une famille de fonctions également continues sur tout $S \in \mathfrak{S}$, c'est une famille de fonctions également continues. Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi ; il existerait alors un point $x \in E$ et un entourage $V \in \mathfrak{U}$ possédant les propriétés suivantes : quel que soit le voisinage U de x, il existerait un point y_U de U et une fonction $X_U \in H$ tels que $(X_U(x),X_U(y_U)) \notin V$. Soit A l'ensemble des y_U lorsque U parcourt le filtre des voisinages de x ; on a $x \in \bar{A}$, donc, d'après IV, il existe un ensemble S de $\mathfrak{S}$, contenu dans A et tel que $x \in \bar{S}$. Or, comme $S \cup \{x\}$ appartient à $\mathfrak{S}$, H est une famille de fonctions également continues sur cet ensemble ; par suite, il existe un voisinage U_0 de x tel que, pour tout $y \in U_0 \cap S$ et tout $X \in H$, $(X(x),X(y)) \in V$; et comme il existe un $y_U \in U_0 \cap S$, nous arrivons à une contradiction.

Le théorème 1 énonce une condition nécessaire pour qu'une partie H de C soit relativement compacte dans $F_{\mathfrak{S}}$; une autre condition nécessaire est que l'ensemble $H(x)$ soit relativement compact quel que soit $x \in E$, $H(x)$ désignant l'ensemble des points $X(x)$ lorsque X parcourt H.

Mais il est facile de voir que ces deux conditions <u>ne sont pas suffisantes en général</u>.

> Par exemple, si on prend pour E et K la droite numérique R, la famille H des fonctions ax (a réel compris entre 0 et 1) satisfait à ces conditions et n'est pas relativement compacte dans l'espace F_∞ correspondant.

Dans le cas particulier de l'espace $F_{comp.}$, nous allons voir par contre que ces deux conditions <u>caractérisent</u> les parties de C relativement compactes ; autrement dit :

<u>Théorème 2 (Arzela).</u> <u>Pour qu'une partie H de C soit relativement compacte dans $F_{comp.}$, il faut et il suffit que H(x) soit relativement compact quel que soit x, et que H soit une famille de fonctions également continues sur tout ensemble compact de E.</u>

Considérons en effet un entourage quelconque $V \in \mathcal{U}$ et un ensemble compact quelconque $S \subset E$; par hypothèse, à tout $x \in S$ correspond un voisinage U de x tel que, pour tout $y \in U \cap S$ et pour tout $X \in H$, $(X(x),X(y)) \in V$. S étant compact, on peut trouver un nombre fini de points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de S tels que les voisinages U_i correspondants forment un <u>recouvrement</u> de S. D'autre part, chacun des ensembles $H(x_i)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ est relativement compact, donc aussi leur réunion ; soit $\bigcup_{j=1}^{p} A_j$ un recouvrement fini de cet ensemble tel que $A_j \times A_j \subset V$ $(j = 1,2,\ldots,p)$. Désignons par λ_k $(k = 1,2,\ldots,p^n)$ les applications de l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$ dans l'ensemble $\{1,2,\ldots,p\}$; quel que soit $X \in H$, il existe un indice k tel que $X(x_i) \in A_{\lambda_k(i)}$ pour $i = 1,2,\ldots,n$; autrement dit, si on désigne par H_k la partie de H pour laquelle ces n relations sont vérifiées, les H_k ($k = 1,2,\ldots,p^n$) forment un recouvrement fini de H. Or, soit X et Y deux fonctions du <u>même</u> ensemble H_k, et soit x un point quelconque de S ; x appartient à un U_i au moins, donc $(X(x),X(x_i)) \in V$ et $(Y(x),Y(x_i)) \in V$. D'autre part $X(x_i) \in A_{\lambda_k(i)}$ et $Y(x_i) \in A_{\lambda_k(i)}$ donc $(X(x_i), Y(x_i)) \in V$; par suite, quel que soit $x \in S$,

$$(X(x), Y(x)) \in \overset{3}{V}$$

Il suffit donc d'appliquer le critère de compacité des espaces uniformes pour déduire de là que H est compact dans $\mathcal{F}_{comp.}$.

<u>Corollaire 1</u>. <u>Lorsque $\mathcal{K}$ est compact, pour que H soit relativement compacte dans $\mathcal{F}_{comp.}$, il faut et il suffit que H soit une famille de fonctions également continues sur tout compact de $\mathcal{E}$</u>.

En effet, H(x) est toujours relativement compact dans ce cas, quelle que soit la famille H.

<u>Corollaire 2</u>. <u>Si $\mathcal{E}$ vérifie la condition P, pour qu'une partie H de C soit relativement compacte dans $\mathcal{F}_{comp.}$, il faut et il suffit que H(x) soit relativement compact quel que soit x, et que H soit une famille de fonctions également continues</u>.

C'est une conséquence immédiate du corollaire du th. 1.

<u>Exercices</u>. 1) Si H est une famille de fonctions également continues, l'adhérence de H est la même dans les espaces $\mathcal{F}_o$ et $\mathcal{F}_{comp.}$, et les topologies induites sur cet ensemble par $\mathcal{F}_o$ et $\mathcal{F}_{comp.}$ sont identiques. En déduire une nouvelle démonstration du fait que, lorsque $\mathcal{K}$ est compact, toute famille de fonctions également continues est relativement compacte dans $\mathcal{F}_{comp.}$.

2) Montrer par un exemple qu'en général $\mathcal{F}_{comp.}$ n'est pas localement compact.

§ 4. Convergence uniforme en un point. Application aux fonctions de deux arguments.

Reprenons la méthode générale du § 1, et appliquons-la au cas où E est un espace topologique, et où Φ est formée <u>d'un filtre</u> $\mathfrak{F}$ <u>convergent vers un point</u> x_0, ainsi que des filtres plus fins que $\mathfrak{F}$. G_Φ se compose ici des fonctions définies sur un ensemble au moins de $\mathfrak{F}$; on dira qu'un filtre $\mathfrak{G}$ sur G_Φ <u>converge uniformément au point</u> x_0, <u>par rapport au filtre</u> $\mathfrak{F}$, si $\mathfrak{G}$ est un filtre de Cauchy dans la structure uniforme (non séparée) définie par Φ : il en sera donc ainsi lorsque, à tout entourage $V \in \mathfrak{U}$ correspondent un ensemble S de $\mathfrak{F}$ et un ensemble H de $\mathfrak{G}$ tels que, pour tout couple (X, Y) de fonctions de H, et pour tout $x \in S$, $(X(x), Y(x)) \in V$.

Lorsque $\mathfrak{F}$ est engendré par la trace sur un ensemble A du filtre des voisinages d'un point $x_0 \in \bar{A}$, on dira que $\mathfrak{G}$ <u>converge uniformément au point</u> x_0, <u>par rapport à A</u> ; on supprimera cette dernière précision lorsque A est un voisinage de x_0. Dans ce dernier cas, $\mathfrak{G}(x_0)$ est évidemment un filtre de Cauchy, donc convergent si on suppose K complet.

Il est clair que si un filtre $\mathfrak{G}$ sur l'ensemble $F(A)$ des fonctions définies sur un ensemble A, converge uniformément sur A, il converge uniformément par rapport à A en chaque point de $\bar{A}$. Inversement, on a la proposition suivante :

<u>Proposition 1.</u> <u>Si A est relativement compact dans E, tout filtre $\mathfrak{G}$ sur $F(A)$ qui converge uniformément par rapport à A en tout point de $\bar{A}$, converge uniformément sur A</u>.

En effet, soit V un entourage de $\mathcal{U}$; à chaque $x \in \bar{A}$, correspondent un voisinage U de x et un ensemble H de $\mathfrak{G}$ tels que $(X(y),Y(y)) \in V$ quels que soient X et Y dans H, et y dans $U \cap A$. Comme $\bar{A}$ est compact, on peut trouver un nombre fini de points $x_1,x_2,\dots,x_n$ de $\bar{A}$ tels que les voisinages U_i correspondants forment un recouvrement de $\bar{A}$; si on pose $H_0 = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$, $H_0 \in \mathfrak{G}$ et, quels que soient X et Y dans H_0, on a, pour tout $x \in A$, $(X(x), Y(x)) \in V$, d'où la proposition.

On en déduit en particulier que

<u>Proposition 2</u>. <u>Si E est localement compact, pour qu'un filtre soit convergent dans</u> $F_{comp.}$, <u>il faut et il suffit qu'il converge uniformément en tout point de</u> E.

Il est évident que la condition est nécessaire, puisque tout point de E possède un voisinage compact ; et la prop. 1 montre inversement qu'un filtre qui converge uniformément en tout point de E converge uniformément sur tout ensemble compact, donc converge dans $F_{comp.}$.

<u>Application aux fonctions de deux arguments</u>. Considérons une fonction $f(x,y)$, définie sur une partie $A = B \times B'$ du produit $E \times E'$ de deux espaces topologiques, et prenant ses valeurs dans un espace uniforme complet K. Soit (x_0,y_0) un point de $\bar{A}$, et supposons que $\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in A}} f(x,y)$ existe ; il faut et il suffit pour cela qu'à tout entourage $V \in \mathcal{U}$ corresponde un voisinage U de x_0 et un voisinage U' de y_0 tels que, quels que soient les points (x,y), (x',y') dans $A \cap (U \times U')$, on ait $(f(x,y),f(x',y')) \in V$. Désignons par f_y la fonction partielle

engendrée par f en un point quelconque $y \in B'$ (c'est-à-dire la fonction définie sur B et telle que $f_y(x) = f(x,y)$ quel que soit $x \in B$) ; aux points y de $U' \cap B'$ correspondent des fonctions f_y dont nous désignerons l'ensemble par $H_{U'}$; lorsque U' parcourt le filtre des voisinages de y_0, les ensembles $H_{U'}$ forment la base d'un filtre $\mathfrak{F}_{y_0}$ sur l'ensemble des fonctions définies dans A, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On exprime alors l'hypothèse faite sur f sous la forme équivalente suivante : on dit, par définition, que le filtre $\mathfrak{F}_{y_0}$ *converge continument au point* x_0, *par rapport à B*.

Il résulte immédiatement de cette définition que, dans ces conditions, le filtre $\mathfrak{F}_{y_0}$ *converge uniformément au point* x_0, *par rapport à B* ; mais inversement, cette condition *n'est pas suffisante* pour assurer la convergence continue de $\mathfrak{F}_{y_0}$.

> Par exemple, si, dans le plan numérique, $f(0,y)=1$ quel que soit y, et $f(x,y)=0$ quel que soit $x \neq 0$ et quel que soit y, le filtre $\mathfrak{F}_{y_0}$ des fonctions f_y, correspondant au filtre des voisinages du point $y_0=0$, converge uniformément au point $x = 0$, mais $f(x,y)$ n'est pas continue au point (0,0).

On a, par contre, la proposition suivante, qui constitue un critère fréquemment employé pour établir l'existence de la limite d'une fonction de deux arguments :

Proposition 3. Si, quel que soit $y \in B'$, $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B^0}} f_y(x)$ *existe, et si le filtre* $\mathfrak{F}_{y_0}$ *converge uniformément au point* x_0 *par rapport à B, il converge aussi continument au point* x_0 *par rapport à B.*

20

En effet, quel que soit $V \in \mathfrak{U}$, il existe un voisinage U de x_0 et un voisinage U' de y_0 tels que, quels que soient $x \in U \cap B$ et y et y' dans $U' \cap B'$, on ait $(f_y(x), f_{y'}(x)) \in V$. Soit y_1 un point quelconque de $U' \cap B'$; comme $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B}} f_{y_1}(x)$ existe, on peut trouver un voisinage W de x_0 tel que, quels que soient x et x' dans $W \cap B$, $(f_{y_1}(x), f_{y_1}(x')) \in V$. Mais alors, quels que soient x et x' dans $U \cap W \cap B$, et y et y' dans $U' \cap B'$, on a $(f_y(x), f_{y'}(x')) \in V^3$, ce qui démontre la proposition.

Ce critère permet, en particulier, de formuler de la manière suivante le théorème d'<u>interversion des limites</u> (ch. I, § 8, th. 4)

<u>Proposition 4.</u> <u>Soit</u> $f(x,y)$ <u>une fonction définie sur</u> $B \times B'$, <u>et jouissant des propriétés suivantes</u> :

a) <u>quel que soit</u> $y \in B'$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B}} f(x,y)$ <u>existe</u> ;

b) <u>quel que soit</u> $x \in B$, $\lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ y \in B'}} f(x,y)$ <u>existe</u> ;

c) <u>le filtre</u> $\mathfrak{F}_{y_0}$ <u>converge uniformément au point</u> x_0 <u>par rapport à</u> B. <u>Dans ces conditions</u>, $\lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ y \in B'}} (\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B}} f(x,y))$ <u>et</u> $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B}} (\lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ y \in B'}} f(x,y))$ <u>existent et sont égales</u>.

§ 5. Application aux suites dénombrables de fonctions.

Toutes les propriétés établies ci-dessus, relatives aux filtres sur un espace fonctionnel, se traduisent, en particulier, en propriétés des <u>suites dénombrables</u> de fonctions (f_n) : il suffit de les appliquer à la base de filtre engendrée par les ensembles H_n $(n=1,2,\ldots)$, H_n étant formé des fonctions f_m de la suite telles que $m \geqslant n$.

Lorsque cette base de filtre convergera suivant l'un des modes décrits plus haut, on emploiera la même locution pour désigner la convergence de la suite (f_n) correspondante. On a donc les définitions suivantes :

1) La suite (f_n) <u>converge simplement</u> (ou <u>faiblement</u>, ou encore <u>converge dans</u> $\mathcal{F}_0$) si la suite $(f_n(x))$ est convergente quel que soit $x \in E$. Définition analogue pour la <u>convergence simple sur une partie de</u> E .

2) La suite (f_n) <u>converge uniformément sur une partie A de</u> E si, tout entourage $V \in \mathfrak{U}$ correspond un entier n_0 tel que, <u>pour tout</u> $x \in A$, $(f_m(x), f_n(x)) \in V$ quels que soient $m \geqslant n_0$, $n \geqslant n_0$.
La suite (f_n) converge dans $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}$ si elle converge uniformément sur tout ensemble de $\mathfrak{S}$.

3) La suite (f_n) <u>converge uniformément en un point</u> x_0 , <u>par rapport à A</u> $(x_0 \in \bar{A})$ si, à tout entourage $V \in \mathfrak{U}$ correspondent un entier n_0 et un voisinage U de x_0 tels que, pour tout $x \in U \cap A$, $(f_m(x), f_n(x)) \in V$ quels que soient $m \geqslant n_0$, $n \geqslant n_0$.

4) Enfin, la suite (f_n) <u>converge continument au point</u> x_0 <u>par rapport à A</u> $(x_0 \in \bar{A})$ si, à tout entourage $V \in \mathfrak{U}$ correspondent un entier n_0 et un voisinage U de x_0 tels que, quels que soient x et y dans $U \cap A$, on ait $(f_m(x), f_n(y)) \in V$ quels que soient $m \geqslant n_0$, $n \geqslant n_0$.

D'après la prop. 1 du § 1, si K est complet, une suite (f_n) convergente dans $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}$ a pour limite, au sens de la topologie de cet espace, la fonction f_0 dont la valeur en chaque point x est la limite de la suite $(f_n(x))$. Si (f_n) converge dans $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}$, elle converge aussi dans tout espace $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}'}$, lorsque $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$.

Si (f_n) converge continument au point x_0, par rapport à A , la fonction $f_n(x)$ du couple (n,x) dans l'espace topologique $\widehat{N} \times E$, a une limite p par rapport à $N \times A$, au point (∞, x_0) (K étant toujours supposé complet) ; comme conséquence, on voit que, si (x_n) est une suite de points de A qui converge vers x_0 , la suite $(f_n(x_n))$ converge vers p. La suite (f_n) sera continument convergente au point x_0 par rapport à A si, quel que soit n , $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f_n(x)$ existe, et si (f_n) converge uniformément au point x_0 par rapport à A . De même, si E est localement compact, pour que (f_n) soit uniformément convergente sur tout ensemble compact, il faut et il suffit qu'elle converge uniformément en tout point de E .

Lorsque les f_n sont continues sur $\overline{A}$, et que (f_n) converge uniformément sur A , cette suite converge aussi uniformément sur $\overline{A}$, et la fonction limite est continue sur $\overline{A}$ (§ 2 , th. 1).

Les théorèmes du § 3 ne donnent de résultats concernant les suites dénombrables que lorsque C, considéré comme sous-espace de $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}$, possède une <u>base dénombrable</u> ; il est donc intéressant de savoir quand ce fait se produit. Pour $\mathcal{F}_{\text{comp.}}$, on a la proposition suivante :

<u>Proposition 1. Dans</u> $\mathcal{F}_{\text{comp.}}$, <u>le sous-espace C des fonctions continues possède une base dénombrable lorsque les conditions suivantes sont réalisées</u> :

a) K <u>possède une base dénombrable</u> ;

b) E <u>est localement compact et possède une base dénombrable</u>.

Démontrons d'abord la proposition dans le cas particulier où E est <u>compact</u> ; K et E étant <u>métrisables</u> (ch. VI, §), nous supposerons pour alléger l'écriture, que les structures uniformes de ces espaces sont définies respectivement par deux métriques $\Delta(y,y')$ et $\delta(x,x')$. Soit (y_m) une suite dénombrable <u>partout dense</u> dans K, et S_{mn} la sphère $\Delta(y,y_m) < 1/n$.
E étant compact, on peut trouver, pour tout entier p, un recouvrement <u>fini</u> $\mathfrak{A}_p$ de E, dont les ensembles ont un diamètre inférieur à $1/p$; soient $A_1^p, A_2^p, \ldots, A_{k_p}^p$ les ensembles de ce recouvrement. Pour chaque couple d'applications $m = \mu(h)$, $n = \nu(h)$ de l'ensemble $\{1,2,\ldots,k_p\}$ dans l'ensemble des entiers, désignons par $P_{\mu\nu}^p$ la famille des applications continues X de E dans K telles que $X(A_h^p) \subset S_{\mu(h),\nu(h)}$ pour $h = 1,2,\ldots,k_p$; si cette famille n'est pas vide, nous y choisissons une fonction $X_{\mu\nu}^p$. Pour une valeur donnée de p, l'ensemble Q_p des fonctions $X_{\mu\nu}^p$ est <u>dénombrable</u>, puisqu'il en est ainsi de l'ensemble des couples d'applications (μ, ν) ; l'ensemble $Q = \bigcup_p Q_p$ est donc aussi dénombrable. Montrons que Q est <u>partout dense</u> dans le sous-espace C de $F_{comp.}$; comme ici $F_{comp.}$ (identique à F_∞) est métrisable, la proposition sera démontrée dans le cas que nous envisageons.

Or, soit X une application continue de E dans K ; comme E est <u>compact</u>, X est <u>uniformément continue</u> ; donc, quel que soit n, il existe un recouvrement $\mathfrak{A}_p$ de E tel que le diamètre de chacun des ensembles $X(A_h^p)$ $(h = 1,2,\ldots,k_p)$ soit inférieur à $1/2n$; il existe donc une application $\mu(h)$ telle que $X(A_h^p) \subset S_{\mu(h),n}$ quel que soit h , et par suite une fonction $Y \in Q_p$ telle que $\Delta(X(x),Y(x)) < 2/n$ quel que soit $x \in \mathcal{E}$, ce qui montre bien que Q est partout dense. Pour passer de là au cas général, remarquons que si $\mathcal{E}$ est localement compact et possède une base dénombrable $\mathcal{B}$, tout point possède un voisinage appartenant à $\mathcal{B}$ et <u>relativement compact</u> ; tout ensemble compact peut donc être recouvert par un nombre <u>fini</u> de voisinages de cette nature ; et il en résulte qu'il existe une famille <u>dénombrable</u> $\mathcal{K}$ d'ensembles compacts tels que tout ensemble compact soit contenu dans un ensemble de la famille $\mathcal{K}$. Il est clair alors que les entourages $W(V,S)$, lorsque V parcourt un système fondamental dénombrable d'entourages de $\mathcal{U}$, et que S parcourt $\mathcal{K}$, forment un système fondamental <u>dénombrable</u> d'entourages de la structure uniforme de $\mathcal{F}_{comp.}$, ce qui montre que ce dernier espace est <u>métrisable</u>. Il suffit alors, pour chaque ensemble S de $\mathcal{K}$, de former comme ci-dessus un ensemble dénombrable Q(S) de fonctions continues, pour voir de la même manière que la réunion des ensembles Q(S) est partout dense dans C , et par suite que C possède une base dénombrable. C.Q.F.D.

Si les conditions a) et b) sont remplies, le théorème d'Arzela montre alors que, <u>pour que de toute suite extraite d'une suite (f_n) de fonctions continues dans $\mathcal{E}$ on puisse extraire une suite uniformément convergente sur tout ensemble compact, il faut et il suffit que, pour tout $x \in \mathcal{E}$ on puisse extraire une suite convergente de toute suite extraite de la suite $(f_n(x))$, et que les fonctions f_n soient également continues sur tout ensemble compact</u>.

Cas où E et K sont des espaces métrisables complets. Lorsque E et K sont des espaces métriques complet les suites dénombrables de fonctions continues dans E, à valeurs dans K, jouissent de propriétés en rapport avec la notion des catégories de Baire (ch. VI, §), auxquelles on ne connait pas jusqu'ici d'analogues dans des cas plus généraux.

Théorème 1 (Baire). Si une suite (f_n) de fonctions continues dans E converge simplement, l'ensemble des points de discontinuité de sa fonction limite f est de 1^{re} catégorie.

Il suffira de montrer que l'ensemble des points où l'oscillation de f est $> 1/p$, est non dense, quel que soit l'entier p. Or, soit S une sphère fermée quelconque dans E, et soit H_{mn} l'ensemble des points de S où $\Delta(f_m(x), f_n(x)) \leqslant 1/2p$, et G_n l'ensemble $\bigcap\limits_{m=n}^{\infty} H_{mn}$; chacun des ensembles H_{mn} est fermé, il en est donc de même des ensembles G_n, et on a $S = \bigcup\limits_{n} G_n$; comme E est complet, S est de $II^{è}$ catégorie, donc un au moins des ensembles G_n est de $II^{è}$ catégorie, et comme il est fermé, il contient une sphère S'. Autrement dit, il existe n_0 tel qu'en tout point de S', $\Delta(f_n(x), f_{n_0}(x)) \leqslant 1/2p$ quel que soit $n \geqslant n_0$, ce qui entraîne $\Delta(f(x), f_{n_0}(x)) \leqslant 1/2p$ quel que soit $x \in S'$; comme f_{n_0} est continue, l'oscillation de f en tout point de S' est donc $\leqslant 1$ p, ce qui démontre le théorème.

Théorème 2. Si une suite (f_n) de fonctions continues numériques non négatives est telle qu'en tout point $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)$ est finie, il existe une sphère dans laquelle les fonctions f_n sont uniformément bornées.

En effet, soit $G_p = \bigcap \overset{-1}{f_n}(y \leqslant p)$; G_p est fermé, et on a par hypothèse $E = \bigcup\limits_{p} G_p$; comme E est de $II^{è}$ catégorie, un au moins des G_p est de $II^{è}$ catégorie, et, étant fermé, contient une sphère, ce qui démontre le théorème.

Chapitre X

A 31

26

(Ancien CHAPITRE VIII.) Etat 2

ESPACES FONCTIONNELS.

§ 1. Structures uniformes sur les ensembles de fonctions continues.

Soient E un espace topologique, F un espace uniforme, $\mathcal{C}(E,F)$ l'ensemble des applications continues de E dans F . Considérons une partie quelconque A de E , et un entourage V de la structure uniforme de F ; nous désignerons par W(V,A) l'ensemble des couples (X,Y) d'applications continues de E dans F tels que l'on ait $(X(x),Y(x)) \in V$ quel que soit $x \in A$. Lorsque V parcourt le filtre des entourages de F , les ensembles W(V,A) forment un système fondamental d'entourages d'une structure uniforme sur $\mathcal{C}(E,F)$; en effet ils satisfont évidemment à (U'_{I}) ; on a $\overset{-1}{\widehat{W(V,A)}} = W(\overset{-1}{V},A)$ d'où (U'_{II}) ; si V et V' sont deux entourages de la structure de F tels que $V \subset V'$, on a $W(V,A) \subset W(V',A)$; enfin, les relations "$(X(x),Y(x)) \in V$ quel que soit $x \in A$" , et "$(Y(x),Z(x)) \in V$ quel que soit $x \in A$" entraînent "$(X(x),Z(x)) \in \overset{2}{V}$ quel que soit $x \in A$", autrement dit, on a $\overset{2}{\widehat{W(V,A)}} \subset W(\overset{2}{V},A)$, ce qui démontre (U'_{III}).

Définition 1. On dit que la structure uniforme définie sur $\mathcal{C}(E,F)$ par les ensembles W(V,A), où V parcourt le filtre des entourages de F , est la structure de la convergence uniforme sur A . Si un filtre $\mathfrak{F}$ sur $\mathcal{C}(E,F)$ converge vers X_0 , dans la topologie déduite de cette structure uniforme, on dit qu'il converge uniformément vers X_0 sur A .

Considérons maintenant un ensemble non vide $\mathfrak{S}$ de parties de E .

Définition 2. Si on désigne par $\mathcal{U}_A$ la structure de la convergence uniforme sur un ensemble $A \in \mathfrak{S}$, on appelle structure de la convergence uniforme sur les ensembles de $\mathfrak{S}$ la borne supérieure $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$

des structures uniformes $\mathcal{U}_A$, lorsque A parcourt $\mathfrak{S}$; on note $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ l'espace uniforme obtenu en munissant $\mathcal{C}(E,F)$ de cette structure.

D'après la définition des entourages d'une structure uniforme borne supérieure d'un ensemble de structures uniformes (ch.II, § 1), pour qu'un filtre $\mathfrak{F}$ sur $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ converge vers X_0, il faut et il suffit qu'il converge uniformément vers X_0 sur tout ensemble $A \in \mathfrak{S}$; autrement dit, quels que soient l'entourage V de F et l'ensemble $A \in \mathfrak{S}$, il doit exister un ensemble $H \in \mathfrak{F}$ tel que, quels que soient $X \in H$ et $x \in A$, on ait $(X_0(x), X(x)) \in V$.

Si f est une application, dans $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$, d'un ensemble G filtré par un filtre $\mathfrak{G}$, et si f admet une limite X_0 suivant le filtre $\mathfrak{G}$, on dit encore que f converge uniformément vers X_0 suivant le filtre $\mathfrak{G}$, sur tout ensemble de $\mathfrak{S}$. En particulier, si une suite (X_n) de points de $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ converge vers un point Y , on dit que la suite de fonctions (X_n) converge uniformément vers Y sur tout ensemble de $\mathfrak{S}$.

Remarquons maintenant que, si A et B sont deux parties quelconques de E , on a $W(V,A) \cap W(V,B) = W(V,A \cup B)$; si $B \subset A$, on a donc $W(V,A) \subset W(V,B)$. La définition des entourages de $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$ montre alors qu'on ne change pas cette structure lorsqu'on remplace $\mathfrak{S}$ tout d'abord par l'ensemble $\mathfrak{S}'$ des réunions finies d'ensembles de $\mathfrak{S}$, puis par l'ensemble $\mathfrak{S}''$ des parties des ensembles de $\mathfrak{S}'$; autrement dit, on peut toujours supposer que l'ensemble $\mathfrak{S}$ satisfait aux deux conditions

(F'_I) Toute partie d'un ensemble de $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}$.

(F'_{II}) Toute réunion finie d'ensembles de $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}$.

Dans ces conditions, les ensembles $W(V,A)$, où V parcourt le filtre des entourages de la structure uniforme de F , et A l'ensemble $\mathfrak{S}$, forment un <u>système fondamental d'entourages</u> de la structure $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$.

On remarquera que les conditions (F'_I) et (F'_{II}) signifient que l'ensemble des <u>complémentaires</u> des ensembles de $\mathfrak{S}$ satisfait aux axiomes (F_I) et (F_{II}) (ch.I, § 5) ; donc, ou bien $\mathfrak{S}$ est identique à $\mathfrak{P}(E)$, ou bien l'ensemble des complémentaires des ensembles de $\mathfrak{S}$ est un <u>filtre</u> sur E .

Si $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ sont deux ensembles de parties de E , satisfaisant à (F'_I) et (F'_{II}), et tels que $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2$, la structure uniforme de $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}_2}(E,F)$ est <u>plus fine</u> que celle de $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}_1}(E,F)$.

Il se peut d'ailleurs que ces deux structures soient identiques, bien que $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ soient distincts ; on en verra un exemple un peu plus loin.

Soit E' un espace topologique ayant même support que E , mais dont la topologie soit <u>plus fine</u> que celle de E . Toute application continue de E dans F est aussi une application continue de E' dans F . Il en résulte que $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est un <u>sous-espace uniforme</u> de l'espace $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E',F)$.

En particulier, si E_0 désigne l'espace <u>discret</u> de même support que E , $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est toujours un sous-espace de $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E_0,F)$; on remarquera que $\mathcal{C}(E_0,F)$ n'est autre que l'ensemble de <u>toutes</u> les applications de E dans F . Lorsqu'on étudie la convergence uniforme sur les ensembles de $\mathfrak{S}$ d'un filtre $\mathfrak{F}$ sur un ensemble d'applications <u>non continues</u> de E dans F , il faut toujours considérer cet ensemble d'applications comme une partie de $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E_0,F)$.

Notons encore que, si F_1 est un <u>sous-espace uniforme</u> de F , $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F_1)$ est aussi un <u>sous-espace uniforme</u> de $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$. Enfin, si F' est un espace uniforme de même support que F, et de structure uniforme <u>plus fine</u> que celle de F , $\mathcal{C}(E,F')$ est contenu dans $\mathcal{C}(E,F)$, mais la structure uniforme de $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F')$ est <u>plus fine</u> que la structure induite sur $\mathcal{C}(E,F')$ par celle de $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$.

<u>Théorème 1</u>. <u>Soit</u> $\mathfrak{S}$ <u>un ensemble de parties de E satisfaisant à la condition</u>

(K) <u>Tout point de E est intérieur à un ensemble de</u> $\mathfrak{S}$ <u>au moins</u>.

<u>Si F est un espace séparé</u>, $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ <u>est alors un espace séparé</u> ; <u>si en outre F est complet</u>, $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ <u>est complet</u>.

Montrons d'abord que $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est séparé s'il en est de même de F. Soient X,Y deux points distincts de $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$; il existe donc un point $x \in E$ tel que $X(x) \neq Y(x)$. Soit A un ensemble de $\mathfrak{S}$ contenant x ; comme F est séparé, il existe un entourage V tel que $(X(x),Y(x)) \notin V$; on a donc $(X,Y) \notin W(V,A)$, d'où la proposition.

Supposons maintenant F complet, et soit $\mathfrak{F}$ un filtre de Cauchy sur $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$. Pour tout $x \in E$, et tout ensemble $H \in \mathfrak{F}$ nous désignerons par H(x) l'ensemble des points X(x), où X parcourt H ; lorsque H parcourt $\mathfrak{F}$, les ensembles H(x) forment évidemment un filtre, que nous désignerons par $\mathfrak{F}(x)$. $\mathfrak{F}(x)$ est un filtre de Cauchy sur F ; en effet, soit A un ensemble de $\mathfrak{S}$ auquel x soit intérieur ; quel que soit l'entourage V , il existe $H \in \mathfrak{F}$ tel que, pour tout couple (X,Y) de points de H , on ait $(X,Y) \in W(V,A)$; on a donc en particulier $(X(x),Y(x)) \in V$, ce qui montre que H(x) est petit d'ordre V . Désignons par $X_0(x)$ le point limite du filtre $\mathfrak{F}(x)$; on définit ainsi une application X_0 de E dans F ; nous allons voir que X_0 est continue et que le filtre $\mathfrak{F}$ converge vers X_o. En effet, si H est déterminé comme ci-dessus, $X_o(y)$ est adhérent au filtre $\mathfrak{F}(y)$ quel que soit $y \in A$, donc on a $(X_o(y),X(y)) \in \overset{2}{V}$ quel que soit $y \in A$ et quel que soit $X \in H$. Prenons un point quelconque $X_1 \in H$; comme X_1 est continue dans E, il existe un voisinage U de x contenu dans A et tel que $(X_1(x),X_1(y)) \in V$ quel que soit $y \in U$; il en résulte qu'on a aussi $(X_o(x),X_o(y)) \in \overset{5}{V}$ quel que soit $y \in U$; ceci montre la continuité de X_o au point x, donc dans E. Comme en outre on a vu que $(X_o,X) \in W(\overset{2}{V},A)$ quel que soit $X \in H$, X_o est bien la limite de $\mathfrak{F}$ dans $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Proposition 1. Si $\mathfrak{S}$ satisfait à la condition (K), l'application $(x,X) \to X(x)$ de $E \times \mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ dans F est continue.

En effet, soit (x_o,X_o) un point quelconque de $E \times \mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$, et soit V un entourage quelconque de F. Considérons un ensemble $A \in \mathfrak{S}$ auquel x_o soit intérieur ; comme X_o est continue dans E, il existe un voisinage U de x_o, contenu dans A, et tel que $(X_o(x_o),X_o(x)) \in V$ quel que soit $x \in U$. D'autre part, l'ensemble H des points X de $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ tels que $(X_o,X) \in W(V,A)$ est un voisinage de X_o. Soit alors (x,X) un point quelconque de $U \times H$; on a $(X_o(x_o),X_o(x)) \in V$ et $(X_o(x),X(x)) \in V$ d'après ce qui précède, d'où $(X_o(x_o),X(x)) \in \overset{2}{V}$, ce qui démontre la proposition.

Remarque. La proposition suivante est une sorte de réciproque de la prop. 1 :

Proposition 2. Soient E,E',F trois espaces uniformes, f une application uniformément continue de $E \times E'$ dans F, et pour tout $y \in E'$, f_y l'application partielle $x \to f(x,y)$ de E dans F. Soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur E', H_f l'ensemble des fonctions

f_y <u>correspondant aux points</u> y <u>d'un ensemble</u> $H \in \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_f$ <u>le filtre formé par les ensembles</u> H_f <u>lorsque</u> H <u>parcourt</u> $\mathfrak{F}$. <u>Si</u> $\mathfrak{F}$ <u>converge vers un point</u> y_o , $\mathfrak{F}_f$ <u>converge, dans</u> $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ <u>vers</u> f_{y_o} .

En effet, soit V un entourage quelconque de F ; il existe un entourage U de E et un entourage U' de E' tels que, pour tout couple $((x,y),(x',y'))$ de points de $E \times E'$ tels que $(x,x') \in U$ et $(y,y') \in U'$, on ait $(f(x,y),f(x',y')) \in V$. Soit H un ensemble de $\mathfrak{F}$ contenu dans $U'(y_o)$; on a donc pour tout $y \in H$, $(f(x,y),f(x,y_o)) \in V$ quel que soit $x \in E$; par suite, pour tout $y \in H$, $(f_y,f_{y_o}) \in W(V,A)$ quel que soit $A \in \mathfrak{S}$.

On remarquera que, dans cette proposition, on ne fait aucune hypothèse sur $\mathfrak{S}$; par ailleurs, la proposition est encore valable si on suppose seulement que, quels que soient l'entourage V de F et l'ensemble $A \in \mathfrak{S}$, il existe un voisinage G de y_o tel que, pour tout $y \in G$, on ait $(f(x,y),f(x,y_o)) \in V$ quel que soit $x \in A$.

<u>Cas particuliers</u> : <u>convergence uniforme</u>, <u>convergence compacte</u>, <u>convergence simple</u>.

L'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ est évidemment <u>le plus grand</u> ensemble de parties de E satisfaisant à (F'_I), (F'_{II}) ; la structure uniforme correspondante est donc <u>la plus fine</u> de toutes les structures $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$ sur $\mathcal{C}(E,F)$; lorsqu'il n'y a pas de confusion à craindre, on dit simplement que c'est <u>la structure de la convergence uniforme</u> ; l'espace uniforme obtenu en munissant $\mathcal{C}(E,F)$ de cette structure se note $\mathcal{C}_u(E,F)$; et si un filtre $\mathfrak{F}$ sur cet espace converge vers X_o , on dira qu'il <u>converge uniformément vers</u> X_o. Convention analogue pour la convergence d'une application d'un ensemble filtré dans $\mathcal{C}_u(E,F)$, et en particulier pour la convergence d'une suite de points de $\mathcal{C}_u(E,F)$.

L'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ satisfaisant à la condition (K), l'espace $\mathcal{C}_u(E,F)$ est séparé et complet s'il en est de même de F. Dans ce cas, pour démontrer qu'un filtre sur $\mathcal{C}_u(E,F)$ converge uniformément vers une application continue de E dans F, il suffira d'établir que c'est un filtre de Cauchy.

Dans les mêmes conditions, la proposition suivante peut aussi servir à démontrer la convergence d'un filtre sur $\mathcal{C}_u(E,F)$:

<u>Proposition 3</u>. <u>Si un filtre</u> $\mathfrak{F}$ <u>sur</u> $\mathcal{C}_u(E,F)$ <u>converge uniformément sur une partie partout dense A de E, vers une application continue de A dans F, il converge uniformément</u> (sur E) <u>vers une application continue de E dans F</u>.

Soit X_o l'application continue de A dans F, vers laquelle $\mathfrak{F}$ converge uniformément sur A. Considérons un point quelconque $x \in E$, et soit V un entourage quelconque de F ; il existe un ensemble $H \in \mathfrak{F}$ tel que, pour tout $X \in H$ et pour tout $y \in A$, on ait $(X_o(y), X(y)) \in V$. Choisissons un X_1 dans H ; comme X_1 est continue dans E, il existe un voisinage U de x tel que, quels que soient y, y' dans $U \cap A$, on ait $(X_1(y), X_1(y')) \in V$; il en résulte qu'on a aussi $(X_o(y), X_o(y')) \in \overset{3}{V}$. Autrement dit, si $\mathfrak{V}_A$ est la trace sur A du filtre des voisinages de x, $X_o(\mathfrak{V}_A)$ est une base de filtre de Cauchy sur F ; donc (ch.II, §3, prop.7), on peut prolonger X_o en une fonction $\overline{X}_o$ <u>continue dans</u> E. Cela étant, quels que soient $x \in E$ et $X \in H$, on a $(\overline{X}_o(x), X(x)) \in \overset{3}{V}$; car cette relation est évidemment vérifiée si $x \in A$; et dans le cas contraire, on peut trouver $y \in A$ tel que $(\overline{X}_o(x), X_o(y)) \in V$ et $(X(x), X(y)) \in V$. $\mathfrak{F}$ converge donc uniformément vers $\overline{X}_o$.

On voit donc que, dans le cas envisagé, la structure de la convergence uniforme est identique à la structure $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$, où $\mathfrak{S}$ désigne l'ensemble des parties de A , bien que $\mathfrak{S}$ soit distinct de $\mathfrak{P}(E)$.

Bornons-nous désormais au cas où E est un espace topologique <u>séparé</u> ; si E est <u>compact</u>, il n'existe pas d'ensemble de parties de E distinct de $\mathfrak{P}(E)$ et satisfaisant aux conditions (F'_I), (F'_{II}) et (K) ; car l'ensemble des complémentaires de ces parties serait un filtre sur E <u>sans point adhérent</u>, contrairement à l'axiome (C). Si E est non compact, la démonstration du théorème d'Alexandroff (ch. I, § 10, th. 3) montre que tout ensemble $\mathfrak{S}$ de parties de E , satisfaisant aux conditions (F'_I), (F'_{II}) et (K) contient l'ensemble $\mathfrak{S}_c$ des parties <u>relativement compactes</u> de E . L'ensemble $\mathfrak{S}_c$ satisfait à (F'_I) et (F'_{II}) ; pour qu'il vérifie aussi (K), il faut et il suffit que E soit <u>localement compact</u>. Lorsqu'il en est ainsi, la structure $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}_c}$ s'appelle encore <u>structure de la convergence compacte</u>, et on note $\mathcal{C}_c(E,F)$ l'espace obtenu en munissant $\mathcal{C}(E,F)$ de cette structure ; si F est séparé et complet, $\mathcal{C}_c(E,F)$ est aussi séparé et complet.

Plus généralement, s'il existe une topologie d'espace localement compact <u>moins fine</u> que la topologie de E , l'ensemble $\mathfrak{S}$ des parties relativement compactes dans cette topologie, satisfait aux conditions (F'_I), (F'_{II}) et (K) ; l'espace $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est donc encore séparé et complet en même temps que F.

<u>Proposition 4</u>. <u>Soit E un espace localement compact ; pour qu'un filtre $\mathfrak{F}$ sur $\mathcal{C}_c(E,F)$ soit un filtre de Cauchy, il faut et il suffit que, quels que soient l'entourage V de F et le point</u> $x \in E$, <u>il existe un voisinage U de x et un ensemble</u> $H \in \mathfrak{F}$ <u>tels que</u> $(X(y), Y(y)) \in V$

quels que soient X et Y dans H et y dans U .

La condition est évidemment nécessaire. Inversement, si elle est remplie, considérons un ensemble compact quelconque A dans E ; on peut trouver un nombre fini de points x_i $(i=1,2,\ldots,n)$ de E tels que les voisinages U_i correspondants forment un recouvrement de A ; si H_i désigne l'ensemble de $\mathfrak{F}$ correspondant à x_i , et si on pose $H_o = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$, H_o appartient à $\mathfrak{F}$, et on a $(X(y),Y(y)) \in V$ quels que soient X et Y dans H_o et y dans A , d'où la proposition.

D'après la démonstration de la prop.2 , on voit, avec les mêmes notations, que le filtre $\mathfrak{F}_f$ converge vers f_{y_o} dans $\mathcal{C}_c(E,F)$ en supposant seulement que E et E' sont deux espaces topologiques localement compacts, et f une application continue de $E \times E'$ dans F ; en effet, si G est un voisinage compact de y_o , et A un ensemble compact dans E , f est uniformément continue dans $A \times G$.

Si E est un espace discret, l'ensemble des parties de E relativement compactes n'est autre que l'ensemble des parties finies de E . La structure uniforme correspondante sur $\mathcal{C}(E,F)$ est encore appelée structure de la convergence simple, et l'espace uniforme obtenu en munissant $\mathcal{C}(E,F)$ de cette structure se note aussi $\mathcal{C}_s(E,F)$; on voit d'ailleurs aussitôt que cet espace n'est autre que l'espace uniforme produit F^E , et on retrouve ainsi que ce dernier espace est séparé et complet en même temps que F (ch.II, § 5). Si un filtre $\mathfrak{F}$ sur $\mathcal{C}_s(E,F)$ converge vers X_o , on dit qu'il converge simplement vers X_o sur E ; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le filtre $\mathfrak{F}(x)$ (notations de la démonstration du th.1) converge vers $X_o(x)$, quel que soit $x \in E$.

Lorsque E n'est pas discret, on désigne encore par $\mathcal{C}_s(E,F)$ l'espace obtenu en munissant $\mathcal{C}(E,F)$ de la structure induite par celle de $\mathcal{C}_s(E_o,F)$, où E_o désigne l'espace discret de même support que E . Mais alors le th.1 ne s'applique plus, et il se peut que $\mathcal{C}_s(E,F)$ ne soit pas complet, même lorsque F est complet.

C'est le cas par exemple lorsque $F = \mathbf{R}$, et que E est complètement régulier (ch.VII, § 1). En effet, soit x un point non isolé de E ; à tout voisinage V de x correspond une fonction numérique f_V continue dans E , égale à 0 au point x , à 1 en tout point de $\complement V$. Soit H_V l'ensemble des fonctions f_U pour tous les voisinages $U \subset V$. Lorsque V parcourt le filtre des voisinages de x les ensembles H_V forment une base d'un filtre $\mathfrak{F}$ sur $\mathcal{C}_s(E, \mathbf{R})$, et $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy, car $\mathfrak{F}(y)$ est convergent quel que soit $y \in E$. Cependant $\mathfrak{F}$ n'est pas convergent dans $\mathcal{C}_s(E, \mathbf{R})$, car s'il l'était, sa limite X_o serait égale à 0 au point x , et à 1 en tout point $y \neq x$; or, la fonction prenant ces valeurs n'est pas continue.

On peut encore exprimer ce résultat en disant que $\mathcal{C}_s(E, \mathbf{R})$ n'est pas fermé dans $\mathcal{C}_s(E_o, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^E$.

Exercices. 1) Soient E un espace discret infini, F un espace uniforme séparé comprenant plus d'un point. Montrer que la structure de la convergence uniforme sur $\mathcal{C}(E,F)$ est strictement plus fine que celle de la convergence simple.

2) Montrer que, lorsque F est un espace uniforme séparé et complet, l'espace $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est séparé et complet, si $\mathfrak{S}$ vérifie la condition suivante (qui est entraînée par (K), mais ne l'entraîne pas) :

36

(K^*) Quels que soient la partie non vide A de E , et le point $x \in \bar{A}$, il existe un ensemble $B \subset A$, appartenant à $\mathfrak{S}$ et tel que $x \in \bar{B}$.

(Utiliser la prop.3 et montrer que (K^*) entraîne que toute application de E dans F , continue relativement a l'adhérence de tout ensemble de $\mathfrak{S}$, est continue dans E).

3) Soit E un espace localement compact ; montrer que la topologie de $\mathcal{C}_c(E,F)$ est __la moins fine__ des topologies sur $\mathcal{C}(E,F)$ telles que, si on munit $\mathcal{C}(E,F)$ d'une de ces topologies, l'application $(x,X) \to X(x)$ de $E \times \mathcal{C}(E,F)$ dans F soit continue (montrer que tout voisinage d'un point X_0 dans $\mathcal{C}_c(E,F)$ est aussi un voisinage de ce point dans une quelconque des topologies considérées).

4) Soit E un espace normal (ch.VII, § 3), E_0 l'espace discret de même support que E ; montrer que l'ensemble $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ est partout dense dans $\mathcal{C}_s(E_0, \mathbb{R})$.

5) Soient E_1, E_2 deux ensembles quelconques, $\mathfrak{F}_1$ un filtre sur E_1, $\mathfrak{F}_2$ un filtre sur E_2, f une application de $E_1 \times E_2$ dans un espace uniforme séparé et complet F . On suppose que :

a) quel que soit $x_2 \in E_2$, $\lim_{\mathfrak{F}_1} f(x_1,x_2)$ existe ;

b) quel que soit l'entourage V de F , il existe un ensemble $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ et un ensemble $A_2 \in \mathfrak{F}_2$ tels que, quel que soit $x_1 \in A_1$, et quels que soient x_2, x_2' dans A_2 , on ait $(f(x_1,x_2), f(x_1,x_2')) \in V$.

Montrer que, dans ces conditions, f a une limite suivant le filtre produit $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$.

6) Les notations étant les mêmes que dans l'exerc.5 , on suppose que :

a) quel que soit $x_1 \in E_1$, $\lim_{\mathfrak{F}_2} f(x_1,x_2)=g(x_1)$ existe ;

b) quel que soit $x_2 \in E$, $\lim_{\mathfrak{F}_1} f(x_1,x_2)=h(x_2)$ existe ;

c) quel que soit l'entourage V de F, il existe $x_2 \in E_2$ et $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ tel que, quel que soit $x_1 \in A_1$, on ait $(f(x_1,x_2),g(x_1)) \in V$.

Montrer que, dans ces conditions, g a une limite suivant le filtre $\mathfrak{F}_1$.

7) On suppose que les hypothèses a) et b) de l'exerc.6 sont satisfaites, et en outre que g a une limite a suivant le filtre $\mathfrak{F}_1$. Pour que h ait une limite égale à a suivant le filtre $\mathfrak{F}_2$, il faut et il suffit que la condition suivante soit remplie :

d) quels que soient l'entourage V de F et l'ensemble $A_1 \in \mathfrak{F}_1$, il existe $x_1 \in A_1$ et $A_2 \in \mathfrak{F}_2$ tels que, quel que soit $x_2 \in A_2$, on ait $(f(x_1,x_2),h(x_2)) \in V$.

8) Soient E un espace topologique, E' un ensemble filtré par un filtre $\mathfrak{F}$, f une application de $E \times E'$ dans un espace uniforme F séparé et complet. On suppose que, pour tout $y \in E'$, l'application $x \to f(x,y)$ est continue dans E ; on suppose en outre que, pour tout $x \in E$, $\lim_{\mathfrak{F}} f(x,y)=g(x)$ existe. Montrer que la condition suivante est suffisante pour que g soit continue dans E :

Quels que soient l'entourage V de F et l'ensemble $A \in \mathfrak{F}$, il existe une application $\varphi_{A,V}$ de E dans A telle que, pour tout $x \in E$, $(f(x,\varphi_{A,V}(x)),g(x)) \in V$, et que, lorsque y parcourt A, les ensembles $\overset{-1}{\varphi}_{A,V}(\{y\})$ non vides forment un recouvrement localement fini de E (ch.VII, §3, exerc.12).

Cette condition est aussi nécessaire lorsque E est un espace paracompact (ch.VII, §3, exerc. 12).

(Utiliser l'exerc. 7).

Si E est compact, la condition suivante est nécessaire et suffisante pour que g soit continue dans E :

Quels que soient l'entourage V de F et l'ensemble $A \in \mathfrak{F}$, il existe une application $\varphi_{A,V}$ de E dans A telle que, pour tout $x \in E$, $(f(x,\varphi_{A,V}(x)),g(x)) \in V$, et que l'ensemble $\varphi_{A,V}(E)$ soit <u>fini</u>.

9) Soient E un espace topologique, E' un ensemble ordonné filtrant à droite (<u>Ens</u>.R, § 6), $\mathfrak{F}$ le filtre des sections à droite (ch.I, § 5) sur E', f une application de $E \times E'$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $y \in E'$, l'application $x \to f(x,y)$ est continue dans E, que, pour tout $x \in E$, l'application $y \to f(x,y)$ est décroissante et bornée inférieurement, enfin que $\lim_{\mathfrak{F}} f(x,y) = g(x)$ est continue en tout point $x \in E$. Si on désigne par f_y l'application $x \to f(x,y)$ de E dans $\mathbb{R}$, montrer que l'application $y \to f_y$ de E' dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$, converge uniformément vers g sur toute partie compacte de E.

§ 2. Ensembles compacts de fonctions continues.

Proposons-nous de chercher à quelle condition une partie H de l'espace $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est <u>relativement compacte</u> dans cet espace ; nous supposerons que $\mathfrak{S}$ satisfait aux conditions (F'_I), (F'_{II}) et (K), et que l'espace uniforme F est séparé et complet ; on a vu qu'alors $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est aussi séparé et complet.

Soit x un point quelconque de E, $H(x)$ l'ensemble des points $X(x)$, où X parcourt H. Une première condition nécessaire pour que H soit relativement compacte est que, <u>pour tout</u> $x \in E$, $H(x)$ <u>soit relativement compact dans F</u>. En effet, soit A un ensemble de $\mathfrak{S}$ contenant x ; quel que soit l'entourage V, il existe un nombre fini $X_1, X_2, \ldots, X_n$

de points de H tels que les voisinages d'ordre $W(V,A)$ de ces points forment un recouvrement de H ; quel que soit $X \in H$, on a donc, pour un indice i au moins, $(X(x),X_i(x)) \in V$, autrement dit, les voisinages d'ordre V des points $X_i(x)$ forment un recouvrement de $H(x)$; comme F est complet, $H(x)$ est relativement compact (ch.II, § 4, th.4).

Pour donner une seconde condition nécessaire, nous poserons la définition suivante :

<u>Définition 1</u>. <u>Les fonctions appartenant à une partie H de</u> $\mathcal{C}(E,F)$ <u>sont dites également continues si, quels que soient</u> $x \in E$ <u>et l'entoura- V de F , il existe un voisinage U de x tel que quels que soient</u> $y \in U$ <u>et</u> $X \in H$, <u>on ait</u> $(X(x),X(y)) \in V$.

La notion d'égale continuité est donc relative à la <u>topologie</u> de E et à la <u>structure uniforme</u> de F ; si on remplace la topologie de E par une topologie <u>plus fine</u>, et la structure uniforme de F par une structure uniforme <u>moins fine</u>, une partie H de $\mathcal{C}(E,F)$ formée de fonctions également continues reste encore un ensemble de fonctions également continues dans ces nouvelles conditions.

<u>Proposition 1</u>. <u>Si H est une partie relativement compacte de</u> $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$, <u>les fonctions de H sont également continues</u>.

En effet, soient x un point quelconque de E , V un entourage quelconque de F , A un ensemble appartenant à $\mathfrak{S}$ et auquel x est intérieur. Par hypothèse, on peut trouver un nombre fini $X_1,X_2,\dots X_n$ de fonctions de H de sorte que, pour tout $X \in H$ il existe un indice i au moins tel que, pour tout $y \in A$, on ait $(X(y),X_i(y)) \in V$.
Comme X_i est continue au point x , il existe un voisinage U_i de x , contenu dans A , et tel que, pour tout $y \in U_i$, $(X_i(x),X_i(y)) \in V$.

Soit $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$; c'est un voisinage de x contenu dans A , et on a $(X_i(x), X_i(y)) \in V$ quel que soit $y \in U$, et quel que soit l'indice i ; par suite, quels que soient $X \in H$ et $y \in U$, on a $(X(x), X(y)) \in \overset{3}{V}$, ce qui démontre la proposition.

Les deux conditions nécessaires que nous venons de trouver <u>ne sont pas suffisantes en général</u> pour que H soit relativement compacte.

Par exemple, si $E = F = \mathbf{R}$, l'ensemble H des fonctions ax , où a prend toutes les valeurs de l'intervalle $[0,1]$, satisfait bien à ces deux conditions, mais n'est pas relativement compact dans $\mathcal{C}_u(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

On a toutefois l'important théorème suivant :

<u>Théorème 1</u> (Arzela). <u>Soit E un espace localement compact</u>. <u>Pour qu'une partie</u> H <u>de</u> $\mathcal{C}_c(E,F)$ <u>soit relativement compacte dans cet espace, il faut et il suffit que</u> $H(x)$ <u>soit relativement compact dans F</u> , <u>quel que soit</u> $x \in E$, <u>et que les fonctions de H soient également continues</u>.

Supposons ces deux conditions remplies, et soient V un entourage quelconque de F , A un ensemble compact dans E ; nous allons montrer qu'il existe un recouvrement fini de H dont tous les ensembles sont petits d'ordre $W(\overset{3}{V}, A)$, ce qui établira le théorème puisque $\mathcal{C}_c(E,F)$ est séparé et complet (ch.II, § 4, th.4). Par hypothèse, quel que soit $x \in E$, il existe un voisinage U de x tel que, pour tout $y \in U$ et tout $X \in H$, $(X(x), X(y)) \in V$. Comme A est compact, on peut trouver un nombre fini de points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de A tels que les voisinages U_i correspondants forment un recouvrement de A . D'autre part, chacun des ensembles $H(x_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ est relativement compact, donc aussi leur réunion M ; soit $(A_j)_{1 \leq j \leq p}$

un recouvrement fini de M par des ensembles <u>petits d'ordre V.</u> Désignons par λ_k $(k=1,2,\ldots,p^n)$ les applications de l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$ dans l'ensemble $\{1,2,\ldots,p\}$; quel que soit $X \in H$, il existe un indice k tel que $X(x_i) \in A_{\lambda_k(i)}$ pour $i=1,2,\ldots,n$; autrement dit, si on désigne par H_k l'ensemble des fonctions X de H pour lesquelles ces n relations sont simultanément vérifiées, les H_k $(k=1,2,\ldots,p^n)$ forment un recouvrement fini de H . Or, soient X et Y deux fonctions appartenant à un même ensemble H_k , et soit x un point quelconque de A ; x appartient à un U_i au moins, donc $(X(x),X(x_i)) \in V$ et $(Y(x),Y(x_i)) \in V$. D'autre part $X(x_i) \in A_{\lambda_k(i)}$ et $Y(x_i) \in A_{\lambda_k(i)}$, donc $(X(x_i),Y(x_i)) \in V$; il en résulte bien que, pour tout $x \in A$, $(X(x),Y(x)) \in \overset{3}{V}$, autrement dit H_k est petit d'ordre $W(\overset{3}{V},A)$ quel que soit k .

C.Q.F.D.

<u>Corollaire</u>. <u>Soient E un espace localement compact, F un espace compact</u>. <u>Pour qu'une partie H de $\mathcal{C}_c(E,F)$ soit relativement compacte, il faut et il suffit que les fonctions de H soient également continues</u>.

<u>Remarque</u>. Si H est relativement compacte dans $\mathcal{C}_c(E,F)$, où E est localement compact, l'ensemble $H(A) = \bigcup_{x \in A} H(x)$ est <u>relativement compact</u> dans F si A est <u>relativement compact</u> dans E . En effet, en reprenant les notations de la démonstration du théorème d'Arzela, tout $x \in A$ appartient à un voisinage U_i ; on a donc $H(x) \subset V(H(x_i))$, d'où $H(A) = \bigcup_{x \in A} H(x) \subset V(\bigcup_{i=1}^{n} H(x_i)) \subset \bigcup_{j=1}^{r} V(A_j)$; or les ensembles $V(A_j)$ sont petits d'ordre $\overset{3}{V}$, d'où la proposition.

Nous indiquerons encore une propriété importante des ensembles de fonctions également continues.

Proposition 2. Soient E un espace topologique quelconque, H une partie de $\mathcal{C}(E,F)$ formée de fonctions également continues, $\mathfrak{F}$ un filtre sur H. Si $\mathfrak{F}$ converge simplement dans E vers une application X_0 de E dans F, X_0 est continue dans E et $\mathfrak{F}$ converge uniformément vers X_0 sur toute partie compacte de E.

En effet, soient x un point quelconque de E, V un entourage de F, U un voisinage de x tel que, pour tout $X \in H$ et tout $y \in U$ on ait $(X(x),X(y)) \in V$. $\mathfrak{F}(x)$ converge vers $X_0(x)$, donc il existe un ensemble $M \in \mathfrak{F}$ tel que, pour tout $X \in M$, $(X_0(x),X(x))$ V. On aura aussi, pour tout y U et tout X M, $(X_0(x),X(y)) \in \overset{2}{V}$; mais, pour tout $y \in U$, il existe $X \in M$ tel que $(X_0(y),X(y)) \in V$; on aura donc, pour tout $y \in U$

$$(1) \qquad (X_0(x),X_0(y)) \in \overset{3}{V}$$

ce qui montre la continuité de X_0.

Soit maintenant A un ensemble compact dans E ; on peut trouver un nombre fini de points $x_1,x_2,\dots,x_n$ de E tels que les voisinages U_i correspondants forment un recouvrement de A ; soient M_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ les ensembles de $\mathfrak{F}$ correspondants, et posons $M_0 = \bigcap_{i=1}^{n} M_i$. Quel que soit $x \in A$, on aura, pour toute fonction X de M_0, $(X_0(x),X(x)) \in \overset{5}{V}$ d'après ce qui précède, ce qui montre la convergence uniforme de $\mathfrak{F}$ sur A.

Corollaire. Si E_0 désigne l'espace discret de même support que E, l'adhérence $\overline{H}$ de H dans $\mathcal{C}_s(E_0,F)$ est contenue dans $\mathcal{C}(E,F)$ et est formée de fonctions également continues. Si en outre E est localement compact, $\overline{H}$ est aussi l'adhérence de H dans l'espace $\mathcal{C}_c(E,F)$.

L'égale continuité des fonctions de $\overline{H}$ résulte de la relation (1) valable pour toute fonction de $\overline{H}$, d'après la démonstration précédente.

<u>Cas des fonctions à valeurs réelles ou complexes</u>. Considérons d'abord l'ensemble $\mathcal{C}(E, R)$ des fonctions numériques <u>finies</u>, continues dans l'espace topologique E. Si les fonctions d'une partie H de $\mathcal{C}(E, R)$ sont également continues, elles sont encore également continues quand on considère H comme une partie de $\mathcal{C}(E, \overline{R})$, puisque la structure uniforme induite sur R par celle de $\overline{R}$ est moins fine que la structure uniforme additive de R. Le corollaire de la prop. 2 montre alors que l'adhérence $\overline{H}$ de H dans l'espace $\mathcal{C}_s(E_0, \overline{R})$ (espace de toutes les fonctions numériques définies sur E, muni de la structure de la convergence simple) est contenue dans $\mathcal{C}(E, \overline{R})$, et est encore un ensemble de fonctions <u>également continues</u> (relativement à la structure uniforme de $\overline{R}$).

En outre, si $X_0 \in \overline{H}$, les ensembles $\overset{-1}{X_0}(+\infty)$ et $\overset{-1}{X_0}(-\infty)$ sont <u>à la fois ouverts et fermés dans</u> E. En effet, X_0 est la limite, dans $\mathcal{C}_s(E, \overline{R})$, d'un filtre $\mathfrak{F}$ sur H ; soit x un point de E tel que $X_0(x) = +\infty$; quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de x tel que, pour tout $y \in U$, et tout $X \in H$, on ait $|X(x) - X(y)| < \varepsilon$. Or, quel que soit le nombre $k > 0$, il existe un ensemble $M \in \mathfrak{F}$ tel que, quel que soit $X \in M$, $X(x) > k$; on aura aussi $X(y) > k - \varepsilon$, quel que soit $y \in U$; et, comme k est arbitraire, cela entraîne $X_0(y) = +\infty$, et montre que l'ensemble $\overset{-1}{X_0}(+\infty)$ est ouvert ; par ailleurs cet ensemble est fermé, puisque X_0 est continue dans E.

On peut appliquer ces résultats en particulier à l'<u>enveloppe supérieure</u> et l'<u>enveloppe inférieure</u> de H (ch.IV, § 5) qui appartiennent à $\overline{H}$; on voit d'abord que ces fonctions sont <u>continues</u>. En second lieu, posons la définition suivante :

<u>Définition 2</u>. <u>Les fonctions appartenant à une partie H de</u> $\mathcal{C}(E, R)$ <u>sont dites également majorées</u> (resp. <u>également minorées, également bornées) sur une partie A de E si</u> $H(A) = \bigcup_{x \in A} H(x)$ <u>est un ensemble majoré</u> (resp. <u>minoré, borné</u>) <u>dans</u> R .

Le fait que l'ensemble où l'enveloppe supérieure de H prend la valeur $+\infty$ est à la fois ouvert et fermé, peut encore s'exprimer en disant que l'ensemble des points de E où les fonctions de H sont <u>également majorées</u> est <u>à la fois ouvert et fermé</u> ; même propriété pour l'ensemble des points où les fonctions de H sont également minorées.

Soit A un ensemble <u>compact</u> et <u>connexe</u> dans E ; si l'enveloppe supérieure de H est $<+\infty$ en un point de A , elle est aussi $<+\infty$ en tout point de A , d'après ce qui précède ; mais comme elle est continue, elle est <u>majorée</u> sur A , d'après le théorème de Weierstrass (ch.IV, § 5, th.2). Autrement dit, si les fonctions de H sont également majorées (resp. également minorées, également bornées) <u>en un point de A</u> , elles sont aussi également majorées (resp. également minorées, également bornées) <u>sur A</u> .

On a des résultats analogues en considérant l'ensemble $\mathcal{C}(E, C)$ des fonctions continues à valeurs complexes <u>finies</u>. Si H est une partie de $\mathcal{C}(E, C)$ formée de fonctions également continues, l'adhérence $\overline{H}$ de H dans $\mathcal{C}_s(E, P^1(C))$ est encore formée de fonctions également continues (au sens de la structure uniforme de $P^1(C)$) .

En outre, si $X_0 \in \overline{H}$, $\overset{-1}{X_0}(\infty)$ est un ensemble à la fois ouvert et fermé dans E.

Si on convient encore de dire que les fonctions de H sont <u>également bornées</u> sur une partie A de E si $H(A)$ est une partie <u>bornée</u> de $\mathcal{C}$, on voit que, si les fonctions de H sont également continues, l'ensemble des points où elles sont également bornées est à la fois ouvert et fermé ; si A est une partie compacte et connexe de E, et si les fonctions de H sont également bornées en <u>un point</u> de A, elles sont également bornées <u>sur A</u>.

<u>Exercices</u>. 1) Soient E un espace topologique, H une partie de $\mathcal{C}(E,F)$ formée de fonctions également continues, V un entourage quelconque de F. Etant donné un point quelconque $x \in E$, l'ensemble des points $y \in E$ pour lesquels il existe un entier $n > 0$ tel que $H(y) \subset \overset{n}{V}(H(x))$ est à la fois ouvert et fermé.

En déduire que, si A est un ensemble compact et connexe dans E, et x un point quelconque de A, il existe un entier $n > 0$ tel que $H(A) \subset \overset{n}{V}(H(x))$.

2) Soient E un espace compact, H un ensemble de fonctions également continues (partie de $\mathcal{C}(E,F)$). Montrer que, si V est un entourage quelconque de F, il existe un entourage U de la structure uniforme de E tel que, pour tout couple $(x,y) \in U$ et tout $X \in H$, on ait $(X(x),X(y)) \in V$.

3) Montrer que l'espace $\mathcal{C}_c(R, R)$ n'est pas localement compact.

4) Montrer que la proposition 1 est encore valable si on suppose seulement que l'ensemble $\mathfrak{S}$ vérifie la condition (K^*)

46

(exerc. 2 du § 1). (Montrer, en raisonnant par l'absurde, que si H est une partie de $\mathcal{C}(E,F)$ telle que les restrictions des fonctions de H à une partie $A \in \mathfrak{S}$ forment un ensemble de fonctions également continues dans $\mathcal{C}(A,F)$, H est un ensemble de fonctions également continues).

5) Soient E un espace localement compact à base dénombrable (donc métrisable, voir ch.VII, § 3, exerc.4 et 5), F un espace métrique à base dénombrable. Montrer que $\mathcal{C}_c(E,F)$ est métrisable et possède une base dénombrable. (Considérer d'abord le cas où E est compact ; montrer alors qu'il existe dans $\mathcal{C}_c(E,F)$ un ensemble dénombrable partout dense, et utiliser l'exerc. 7 du § 2 du chap. VII ; pour définir un tel ensemble partout dense, on utilisera une méthode analogue à celle de la démonstration du théorème d'Arzela. Passer ensuite au cas où E est localement compact, en utilisant le résultat précédent).
