CHAPITRE III
APPENDICE
PRODUITS INFINIS DANS LES GROUPES TOPOLOGIQUES NON COMMUTATIFS

Rédaction n° 030

Nombre de pages : 13

Nombre de feuilles : 13

Top générale
Chap. III. appendice
Produits infinis dans les gr. topologiques non commutatifs

Chapitre IX A 30 2

(Ancien CHAPITRE III)

APPENDICE

Produits infinis dans les groupes topologiques non commutatifs.

1. Familles multipliables dans un groupe topologique.

Soit G un groupe topologique séparé (noté multiplicativement), $(x_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de points de G, dont l'ensemble d'indices I est totalement ordonné. Toute partie finie J de I, totalement ordonné par l'ordre induit par celui de I, définit une séquence $(x_\iota)_{\iota \in J}$ de points de G ; on a défini en Algèbre (Alg., chap.I) le produit $p_J = \prod_{\iota \in J} x_\iota$ de cette séquence, que nous appellerons produit partiel fini de la famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$, correspondant à la partie J (on rappelle que, pour $J=\emptyset$, on pose $\prod_{\iota \in \emptyset} x_\iota = e$ par convention, e étant l'élément neutre de G).

DEFINITION 1. On dit que la famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$ est multipliable si l'application $J \to p_J$ a une limite suivant le filtre des sections de l'ensemble $\mathfrak{F}(I)$ des parties finies de I, ordonné par la relation $\subset$; cette limite est alors appelée le produit de la famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$ et se note $\prod_{\iota \in I} x_\iota$ (ou simplement $\prod_\iota x_\iota$).

Lorsque G est abélien, cette définition est identique à celle qui a été donnée au § 4 ; mais ici, la notion de famille multipliable et la valeur du produit d'une telle famille dépendent essentiellement de la structure d'ordre de l'ensemble I.

La définition 1 équivaut à la suivante : la famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$ est multipliable et a pour produit p si, pour tout voisinage V de l'élément neutre de G, il existe une partie finie J_0 de J telle que, pour toute partie finie $J \supset J_0$ de I, on ait $p_J \in V.p$ (ou $p_J \in p.V$).

2. Le critère de Cauchy.

D'après la déf.1, si $(x_\iota)_{\iota\in I}$ est une famille multipliable, l'image, par l'application $J \to p_J$, du filtre des sections de l'ordonné filtrant $\mathfrak{F}(I)$, est une base de filtre de Cauchy pour l'une ou l'autre des structures uniformes de G ; réciproquement, s'il en est ainsi et si G est complet, la famille (x_ι) est multipliable. Autrement dit :

PROPOSITION 1. Dans un groupe séparé G, pour qu'une famille $(x_\iota)_{\iota\in I}$ soit multipliable, il faut que, pour tout voisinage V de l'élément neutre de G, il existe une partie finie J_0 de I, telle que, pour toute partie finie J contenant J_0, on ait $p_J(p_{J_0})^{-1} \in V$ (ou $(p_{J_0})^{-1}p_J \in V$). Cette condition nécessaire est aussi suffisante lorsque G est complet.

Dans l'ensemble totalement ordonné I, nous dirons qu'une partie non vide J est un tronçon de I si, quels que soient les éléments α, β de J tels que $\alpha < \beta$, la relation $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$ entraîne $\gamma \in J$ (autrement dit, si $[\alpha, \beta] \subset J$).

PROPOSITION 2. Soit $(x_\iota)_{\iota\in I}$ une famille multipliable dans un groupe complet G. Pour tout tronçon $J \subset I$, la famille $(x_\iota)_{\iota\in J}$ est multipliable.

Remarquons d'abord que l'ensemble J_1 des minorants de J n'appartenant pas à J est un tronçon ; de même, l'ensemble J_2 des majorants de J n'appartenant pas à J est un tronçon, et ceux des trois ensembles J, J_1, J_2 qui ne sont pas vides forment une partition de I. Supposons en premier lieu que $J_1 = \emptyset$; alors $J_2 = \complement J$. Pour tout voisinage V de l'élément neutre de G, il existe une partie finie H_0 de I telle que, pour toute partie finie $H \supset H_0$, on ait $p_H(p_{H_0})^{-1} \in V$. Posons $K = H_0 \cap J$, $K_2 = H_0 \cap J_2$;

pour toute partie finie H de I telle que $K \subset H \subset J$, posons $L = H \cup K_2$; on a $p_L(p_{H_0})^{-1} = p_H p_{K_2}(p_K p_{K_2})^{-1} = p_H(p_K)^{-1} \in V$, d'où la proposition dans ce cas, en vertu de la prop. 1 .

La démonstration est analogue lorsque $J_2 = \emptyset$, en utilisant alors la relation $(p_{H_0})^{-1} p_H \in V$. Enfin, le cas général où J_1 et J_2 ne sont pas vides se ramène à ces deux cas particuliers, car $J' = J_1 \cup J$ est un tronçon pour lequel on est dans le premier de ces deux cas, donc la famille $(x_\iota)_{\iota \in J'}$ est multipliable ; d'autre part, <u>dans</u> J', J est un tronçon pour lequel on est dans le second cas particulier, donc $(x_\iota)_{\iota \in J}$ est multipliable.

On observera que nous n'avons pas énoncé le critère de Cauchy sous la même forme que pour le cas des groupes abéliens (§4, th. 1) <u>on ignore</u> si l'analogue de ce théorème est vrai en général, ce qui ne permet pas d'affirmer, par exemple, que pour <u>toute</u> partie $J \subset I$, la famille $(x_\iota)_{\iota \in J}$ soit multipliable lorsque $(x_\iota)_{\iota \in I}$ l'est (en supposant G complet). On ignore de même si, lorsque la famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$ est multipliable on a $\lim x_\iota = e$ suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I . Toutefois, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 3. <u>Soit G un groupe topologique séparé tel qu'il existe un voisinage V_0 de l'élément neutre dans lequel x^{-1} soit uniformément continue (comme application de G_d sur G_d) . Soit $(x_\iota)_{\iota \in I}$ une famille multipliable de points de G ; quel que soit le voisinage U de l'élément neutre de G , il existe une partie finie J_0 de I telle que, pour toute partie finie K contenue dans un tronçon ne rencontrant pas J_0 , on ait</u> $\prod_{\iota \in K} x_\iota \in U$.

Etablissons d'abord le lemme suivant :

<u>Lemme</u>. <u>Si la fonction</u> x^{-1} <u>est uniformément continue dans un voisinage</u> V <u>de l'élément neutre</u> e <u>de</u> G , <u>et si</u> V' <u>est un voisinage de</u> e <u>tel que</u> $V'V' \subset V$, <u>pour tout voisinage</u> U <u>de</u> e , <u>il existe un voisinage symétrique</u> $W \subset V'$ <u>de</u> e <u>tel que</u> $y^{-1}Wy \subset U$ <u>pour tout</u> $y \in V'$.

En effet, dire que x^{-1} est uniformément continue dans V signifie que, pour tout voisinage U de e , il existe un voisinage symétrique $W \subset V'$ tel que $yx^{-1} \in W$ entraîne $y^{-1}x \in U$ pour $x \in V$ et $y \in V$; si on pose $yx^{-1} = z^{-1}$, on voit donc que la relation $z \in W$ entraîne $y^{-1}zy \in U$ pour tout $y \in V$ tel que $zy \in V$; si on prend $y \in V'$, on a $zy \in WV' \subset V'V' \subset V$ pour tout $z \in W$, donc $y^{-1}Wy \subset U$, pour tout $y \in V'$.

Ce lemme étant démontré, soit V'_o un voisinage tel que $V'_oV'_o \subset V_o$. D'après la prop.1, il existe une partie finie H_o de I telle que, pour toute partie finie $H \supset H_o$ de I , on ait (1) $p_H(p_{H_o})^{-1} \in V'_o$. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ les indices de H_o , rangés par ordre croissant, et posons $M_o =]\leftarrow, \alpha_1[$, $M_k =]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ pour $1 \leqslant k \leqslant p-1$, $M_p =]\alpha_p, \rightarrow[$; soit L une partie finie de M_k ; appliquons (1) à l'ensemble fini $H = H_o \cup L$; si H_k désigne l'ensemble des α_i pour $i \leqslant k$, il vient $p_{H_k}p_L(p_{H_k})^{-1} \in V'_o$, ou encore $p_L \in (p_{H_k})^{-1}V'_op_{H_k} = V'_k$. D'après le raisonnement de la prop.2, pour tout voisinage $W \subset V'_k$, il existe une partie finie L_o de M_k telle que, pour toute partie finie $L \supset L_o$ de M_k , on ait $p_L(p_{L_o})^{-1} \in W$. On en conclut, comme ci-dessus, que, si K est une partie finie de M_k , contenue dans un tronçon ne rencontrant pas L_o , il existe une partie L_1 de L_o telle que $p_K \in (p_{L_1})^{-1}Wp_{L_1}$. Or, x^{-1} , étant uniformément continue dans V_o , l'est aussi dans $V_k = (p_{H_k})^{-1}V_op_{H_k}$; on a $V'_kV'_k \subset V_k$, donc (d'après le lemme) on peut choisir le voisinage W de sorte que, pour <u>tout</u> $y \in V'_k$, on ait

$y^{-1}Wy \subset U$; si on remarque que $p_{L_1} \in V'_k$, on voit que, pour toute partie finie K de M_k , contenue dans un tronçon ne rencontrant pas L_0 , on a $p_K \in U$; il suffit de raisonner ainsi pour chacune des p+1 valeurs de k pour obtenir la proposition.

COROLLAIRE. Soit G un groupe topologique séparé tel qu'il existe un voisinage V_0 de l'élément neutre e dans lequel x^{-1} soit uniformément continue (comme application de G_d sur G_d). Si $(x_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille multipliable de points de G , on a $\lim x_\iota = e$ suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I .

Il suffit (avec les notations de la prop.3) d'appliquer ce qui précède aux troncons formés d'un seul élément du complémentaire de J_0 .

3. Associativité.

Soit I un ensemble totalement ordonné, $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ une partition de I , dont l'ensemble d'indices L est également totalement ordonné ; nous dirons pour abréger que cette partition est une partition ordonnée si les relations $\lambda < \mu$, $\alpha \in J_\lambda$, $\beta \in J_\mu$ entraînent $\alpha < \beta$; on en conclut immédiatement que les J_λ sont des tronçons de I .

Si maintenant $(x_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille multipliable dans un groupe complet G , chacune des familles $(x_\iota)_{\iota \in J_\lambda}$ est multipliable d'après la prop.2 . En outre, on a le théorème suivant :

THEOREME 1 (associativité du produit). Soit $(x_\iota)_{\iota \in I}$ une famille multipliable dans un groupe complet G , et soit $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ une partition ordonnée de l'ensemble I ; si on pose $p_\lambda = \prod_{\iota \in J_\lambda} x_\iota$, la famille $(p_\lambda)_{\lambda \in L}$ est multipliable, et a même produit que $(x_\iota)_{\iota \in I}$.

Posons $p = \prod_{\iota \in I} x_\iota$, et soit V un voisinage symétrique quelconque de e dans G . Il existe une partie finie H_0 de I telle que, pour toute partie finie $H \supset H_0$ de I, on ait $\prod_{\iota \in H} x_\iota \in V.p$. Soit K_0 la partie de L formée des indices λ tels que $J_\lambda \cap H_0$ <u>ne soit pas vide</u> ; K_0 est <u>finie</u>. Soit K une partie finie quelconque de L, contenant K_0 ; on va montrer que $\prod_{\lambda \in K} p_\lambda \in V^2.p$, ce qui établira le théorème.

Soit n le nombre d'éléments de K ; l'application $(x_1, x_2, .., x_n) \rightarrow x_1 x_2 .. x_n$ est continue dans G^n. D'après la définition de p_λ, on peut donc, pour chaque $\lambda \in K$, trouver une partie finie H_λ de J_λ, contenant $J_\lambda \cap H_0$, et telle que

$$(2) \qquad (\prod_{\lambda \in K} p_\lambda)(\prod_{\lambda \in K} p_{H_\lambda})^{-1} \in V$$

Or, si on pose $H = \bigcup_{\lambda \in K} H_\lambda$, H est une partie finie de I, contenant H_0, et on a

$$\prod_{\iota \in H} x_\iota = \prod_{\lambda \in K} (\prod_{\iota \in H_\lambda} x_\iota) = \prod_{\lambda \in K} p_{H_\lambda}$$

d'après l'associativité du produit fini dans le groupe G (K étant totalement ordonné par l'ordre induit par celui de L). On a donc d'après le choix de H_0, $\prod_{\lambda \in K} p_{H_\lambda} \in V.p$, d'où, en vertu de (1) résulte $\prod_{\lambda \in K} p_\lambda \in V^2.p$, ce qui démontre le théorème.

On a donc, comme pour le cas des groupes abéliens, la formule d'associativité

$$(3) \qquad \prod_{\lambda \in L} (\prod_{\iota \in J_\lambda} x_\iota) = \prod_{\iota \in \bigcup_{\lambda \in L} J_\lambda} x_\iota$$

valable lorsque (J_λ) est une partition ordonnée de sa réunion, et que le <u>second</u> membre est défini.

Comme nous l'avons vu pour le cas des groupes abéliens, le <u>premier</u> membre de (3) peut être défini sans que le second le soit : autrement dit, on ne peut en général "dissocier" en leurs facteurs ceux des facteurs d'un produit qui sont eux-mêmes des produits.

Toutefois, on a, ici encore le résultat suivant :

8

PROPOSITION 4. <u>Soit</u> $(x_\iota)_{\iota \in I}$ <u>une famille de points d'un groupe</u> G , $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ <u>une partition ordonnée finie de</u> I ; <u>si chacune des sous-familles</u> $(x_\iota)_{\iota \in J_\lambda}$ <u>est multipliable, la famille</u> $(x_\iota)_{\iota \in I}$ <u>est multipliable, et on a la formule</u> (2).

Il suffit de le démontrer lorsque $I=\{1,2\}$. Posons $p_1=\prod_{\iota \in J_1} x_\iota$, $p_2=\prod_{\iota \in J_2} x_\iota$; soit V un voisinage quelconque de e dans G , W un voisinage tel que $p_1 W p_1^{-1} \subset V$; il existe une partie finie H_1 (resp. H_2) de J_1 (resp. J_2) telle que, pour toute partie finie K_1 (resp. K_2) de J_1 (resp. J_2) contenant H_1 (resp. H_2) , on ait $\prod_{\iota \in K_1} x_\iota \in V.p_1$, et $\prod_{\iota \in K_2} x_\iota \in W.p_2$; si on pose $H=H_1 \cup H_2$, on aura donc, pour toute partie finie K de I contenant H , $\prod_{\iota \in K} x_\iota \in Vp_1Wp_2=V(p_1Wp_1^{-1})p_1p_2 \subset V^2p_1p_2$, d'où la proposition .

On en conclut aussitôt que, si $(x_\iota)_{\iota \in I}$ et $(y_\iota)_{\iota \in I}$ sont deux familles de points de G ayant même ensemble (totalement ordonné) d'indices et telles que $x_\iota = y_\iota$ sauf pour un nombre <u>fini</u> d'indices et si l'une de ces familles est multipliable dans G , il en est de même de l'autre.

4. Image d'une famille multipliable par une représentation continue.

PROPOSITION 5. <u>Soit f une représentation d'un groupe topologique</u> G <u>dans un groupe topologique</u> G' . <u>Si</u> $(x_\iota)_{\iota \in I}$ <u>est une famille multipliable dans</u> G , $(f(x_\iota))$ <u>est une famille multipliable dans</u> G' , <u>et on a</u> $\prod_\iota f(x_\iota) = f(\prod_\iota x_\iota)$.

La démonstration est la même que celle donnée pour le cas des groupes abéliens (§ 4, prop.5).

PROPOSITION 6. <u>Soit</u> $(x_\iota)_{\iota \in I}$ <u>une famille multipliable dans un groupe topologique</u> G ; <u>si</u> I' <u>désigne l'ensemble totalement ordonné obtenu en munissant</u> I <u>de la structure d'ordre opposée, la famille</u> $(x_\iota^{-1})_{\iota \in I'}$ <u>est multipliable dans</u> G <u>, et on a</u>

(3) $$\prod_{\iota\in I'} x_\iota^{-1} = \left(\prod_{\iota\in I} x_\iota\right)^{-1}.$$

C'est une conséquence dela prop.5, $x \to x^{-1}$ étant une représentation continue de G sur le groupe opposé G^o .

Enfin, comme dans le cas des groupes abéliens, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 7. Soit $G = \prod_{\lambda\in L} G_\lambda$ un produit d'une famille de groupes topologiques séparés. Pour qu'une famille $(x_\iota)_{\iota\in I}$ de points de G soit multipliable, il faut et il suffit que, pour tout $\lambda\in L$, la famille $(pr_\lambda x_\iota)_{\iota\in I}$ soit multipliable ; si p_λ est son produit, $p=(p_\lambda)$ est le produit de la famille (x_ι) .

Même démonstration que dans le cas des groupes abéliens.

5. Suites multipliables.

La théorie des familles multipliables se simplifie lorsque l'ensemble d'indices est l'ensemble des entiers naturels N (pourvu de la structure définie par la relation $m\leqslant n$), autrement dit lorsqu'il s'agit de suites multipliables. On a en effet dans ce cas l'analogue du critère de Cauchy pour les familles sommables dans les groupes abéliens :

THÉORÈME 2. Dans un groupe séparé G , pour qu'une suite $(x_n)_{n\in N}$ soit multipliable, il faut que, pour tout voisinage V de l'élément neutre de G , il existe une partie finie J_o de N telle que, pour toute partie finie K de N ne rencontrant pas J_o , on ait $\prod_{n\in K} x_n \in V$. Cette condition nécessaire est aussi suffisante lorsque G est complet.

En effet, si (x_n) est multipliable, pour tout voisinage V de e, il existe une partie finie H_o de N telle que, pour toute partie finie $H\supset H_o$ de N , on ait $(p_{H_o})^{-1} p_H \in V$. Soit $J_o=[0,m]$ un intervalle contenant H_o ; pour toute partie finie K ne rencontrant pas J_o ;

les nombres de K sont tous supérieurs à ceux de H_o , donc, si on pose $H=H_o \cup K$, on a $p_H = p_{H_o} p_K$, et par suite $p_K \in V$.

Réciproquement, supposons qu'il existe une partie finie J_o de $\mathcal{N}$ telle que, pour toute partie finie K ne rencontrant pas J_o , on ait $p_K \in V$. Soit $H_o = [0,q]$ un intervalle contenant J_o ; toute partie finie H contenant H_o peut s'écrire $H=H_o \cup K$, où les nombres de K sont tous supérieurs à ceux de H_o ; on a donc $p_H = p_{H_o} p_K$, et $p_K \in V$, puisque K ne rencontre pas J_o ; autrement dit, $(p_{H_o})^{-1} p_H \in V$ pour toute partie finie $H \supset H_o$, ce qui, en vertu de la prop.1 , achève la démonstration.

COROLLAIRE 1. <u>Si (x_n) est une suite multipliable dans un groupe séparé G , on a</u> $\lim_{n \to \infty} x_n = e$.

COROLLAIRE 2. <u>Si (x_n) est une suite multipliable dans un groupe complet G , toute suite $(x_n)_{n \in I}$ extraite de cette suite</u> (I étant ordonné par l'ordre induit par celui de $\mathcal{N}$) <u>est multipliable</u>.

En effet, le critère du th.2 s'applique trivialement à une telle suite.

<u>Remarque</u>. Le th.2 est valable également pour une famille multipliable dont l'ensemble d'indices est l'ensemble $\mathcal{N}$, muni de l'ordre défini par la relation $m \geqslant n$, ou, ce qui revient au même, pour une famille dont l'ensemble d'indices est l'intervalle $]\leftarrow, 0]$ de $\mathbb{Z}$. On en conclut que ce th. est encore valable lorsque l'ensemble d'indices est $\mathbb{Z}$ lui-même (ou un intervalle quelconque de $\mathbb{Z}$), en décomposant $\mathbb{Z}$ en la partition ordonnée formée des deux intervalles $[1, \rightarrow[$ et $]\leftarrow, 0]$, et appliquant la prop.4 .

6. Produits infinis.

A toute suite (x_n) de points d'un groupe séparé G , on peut faire correspondre la suite des <u>produits partiels</u> $p_n = \prod_{p=0}^{n} x_p$, de façon biunivoque (car les relations $x_o = p_o$, $x_n = p_{n-1}^{-1} p_n$ déterminent la suite (x_n)

en fonction de(p_n)) . On appelle produit infini de facteur général x_n , le couple des suites (x_n) et (p_n) ainsi associées. Le produit infini de facteur général x_n est dit convergent si la suite (p_n) est convergente ; la limite de cette suite s'appelle alors produit de la suite (x_n) et se note $\displaystyle\mathop{\mathrm{P}}_{n=0}^{\infty} x_n$. Pour qu'un produit infini de facteur général x_n soit convergent, il faut que la suite (p_n) soit une suite de Cauchy, c'est-à-dire que, pour tout voisinage V de l'élément neutre dans G , il existe un entier n_0 tel que, pour tout couple d'entiers $n \geqslant n_0$, $q > 0$, on ait

$$p_n^{-1} p_{n+q} = \prod_{k=n+1}^{n+q} x_k \in V \quad ;$$

si G est complet, cette condition est aussi suffisante (critère de Cauchy pour les produits infinis).

En particulier, si le produit de facteur général (x_n) est convergent, $\lim_{n \to \infty} x_n = e$.

Il est immédiat que, si le produit infini défini par la suite (x_n) est convergent, il en est de même du produit défini par la suite (y_n) , où $y_n = x_{n+h}$ (h entier fixe > 0) et réciproquement ; le produit de cette nouvelle suite se note $\displaystyle\mathop{\mathrm{P}}_{n=h}^{\infty} x_n$, et s'appelle encore le reste d'indice h du produit défini par la suite (x_n) . On conclut aussitôt de cette remarque que si (x_n) et (y_n) sont deux suites telles que $x_n = y_n$ sauf pour un nombre fini d'indices, et si le produit de facteur général x_n converge, il en est de même du produit de facteur général y_n .

Enfin, nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les analogues des prop.5 et 7 pour les produits infinis, ainsi que la propriété d'associativité restreinte de ces produits (cf. §4, prop.8).

7. Produits commutativement convergents.

Le même raisonnement que pour les groupes abéliens (§ 4, n°7) montre que, si dans un groupe séparé G, une suite (x_n) est multipliable, le produit de facteur général x_n est convergent, et on a $\overset{\infty}{\underset{n=0}{\mathrm{P}}} x_n = \prod_{n \in \mathbb{N}} x_n$ (qu'on écrit aussi $\prod_{n=0}^{\infty} x_n$) ; la réciproque est bien entendu inexacte.

DEFINITION 2. On dit qu'un produit infini défini par une suite (x_n) est commutativement convergent, si, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, le produit infini défini par la suite $(x_{\sigma(n)})$ est convergent.

PROPOSITION 8. Pour que le produit infini défini par la suite (x_n) soit commutativement convergent, il faut et il suffit que, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la suite $(x_{\sigma(n)})$ soit multipliable.

La condition est évidemment suffisante. Pour voir qu'elle est nécessaire, on va montrer que si la suite (x_n) n'est pas multipliable, le produit infini (x_n) n'est pas commutativement convergent. Supposons le contraire ; si, pour toute partie finie H de $\mathbb{N}$, on pose $p_H = \prod_{n \in H} x_n$, l'image, par l'application $H \to p_H$, du filtre des sections Φ de l'ordonné filtrant $\mathfrak{F}(\mathbb{N})$ ne peut être une base de filtre de Cauchy, car cette image admet un point adhérent (le produit $\overset{\infty}{\underset{n=0}{\mathrm{P}}} x_n$) et ne converge pas par hypothèse. D'après le th.2, il existe un voisinage V de e, et une suite infinie $(J_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de tronçons finis de $\mathbb{N}$ satisfaisant aux conditions suivantes : 1° les relations $h < k$, $m \in J_h$, $n \in J_k$ entraînent $m < n$; 2° on a $p_{J_k} \notin V$ pour tout k. Soit alors $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite, rangée par ordre croissant, des entiers qui n'appartiennent à aucun des J_k (en supposant que l'ensemble de ces entiers soit infini). Ordonnons totalement $\mathbb{N}$ en prenant comme premier élément n_0, puis tous les éléments de J_0 rangés, par ordre croissant, puis n_1 , puis les éléments de J_1 rangés par ordre croissant, et ainsi de suite. Si on désigne par $\sigma(n)$ le $(n+1)^{\text{ème}}$ élément de $\mathbb{N}$ dans cet ordre, σ est une permutation de $\mathbb{N}$ telle que le produit infini de facteur général $x_{\sigma(n)}$ ne converge pas, car il ne satisfait pas au critère de Cauchy ; nous aboutissons ainsi à une contradiction, ce qui achève la démonstration.

Bien entendu, si G n'est pas commutatif, les produits $\prod_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ relatifs à des permutations σ distinctes, ont en général des valeurs distinctes.

Exercices. 1) Soit G un groupe localement compact. Si (x_ι) est une famille multipliable de points de G , l'ensemble des produits partiels finis p_J de cette famille, est relativement compact (raisonner comme dans la prop. 3).

2) Soit G un groupe complet, tel que tout voisinage de e contienne un sous-groupe ouvert de G . Pour qu'une suite (x_n) de points de G soit multipliable, il faut et il suffit que $\lim_{n \to \infty} x_n = e$.
