CHAPITRE VII
ESPACES UNIFORMISABLES. ESPACES METRIQUES. ESPACES NORMAUX

Rédaction n° 028

Nombre de pages : 68

Nombre de feuilles : 68

Livre III . Top. générale
Chap VII - Espaces uniformisables
Espaces métriques - Espaces normaux

$\boxed{28}$

Chapitre IX

JD

Etat 2

A 28

(Ancien CHAPITRE VII)

ESPACES UNIFORMISABLES. ESPACES METRIQUES. ESPACES NORMAUX.

§ 1. Génération d'une structure uniforme par une famille d'écarts. Espaces uniformisables.

La <u>distance euclidienne</u> $d(x, y)$ définie dans l'espace numérique R^n (ch.V, § 3) peut servir à définir la <u>structure uniforme</u> de cet espace ; en effet, les propriétés de cette fonction (ch.V, § 3, formule (7)) montrent que les ensembles $\overset{-1}{d}([0,a])$ constituent <u>un système fondamental d'entourages</u> de la structure uniforme de R^n lorsque a parcourt l'ensemble des nombres > 0 (ou simplement une suite de nombres > 0 tendant vers 0).

D'une façon générale, considérons un ensemble E et une <u>fonction numérique</u> f , à valeurs <u>positives</u>, définie sur $E \times E$; proposons-nous de chercher <u>à quelle condition la famille des ensembles</u> $\overset{-1}{f}([0,a])$ <u>constitue, lorsque a parcourt l'ensemble des nombres</u> > 0, <u>un système fondamental d'entourages d'une structure uniforme sur E</u>.

Il nous suffira pour cela de traduire, pour cette famille d'ensembles, les axiomes (U') des systèmes fondamentaux d'entourages (ch.II, § 1), ce qui donne les trois conditions correspondantes :

1) <u>Quel que soit</u> $x \in E$, $f(x,x)=0$.

2) <u>Quel que soit</u> $a>0$, <u>il existe</u> $b > 0$ <u>tel que la relation</u> $f(x,y) \leqslant b$ <u>entraîne</u> $f(y,x) \leqslant a$.

3) <u>Quel que soit</u> $a > 0$, <u>il existe</u> $c > 0$ <u>tel que la relation</u> "$f(x,z) \leqslant c$ <u>et</u> $f(z,y) \leqslant c$ " <u>entraîne</u> $f(x,y) \leqslant a$.

Pour que la structure uniforme ainsi définie soit <u>séparée</u>, il faut et il suffit que la condition supplémentaire suivante (traduction de (U'_{Ia})) soit vérifiée :

4) <u>La relation</u> $f(x,y)=0$ <u>entraîne</u> $x = y$.

La distance euclidienne $d(x,y)$ dans R^n satisfait donc à toutes ces conditions ; mais 2) et 3) sont entraînées par des propriétés beaucoup plus précises, à savoir l'identité $d(x,y)=d(y,x)$, et l'inégalité du triangle (ch.V, § 3, formule (5)), respectivement.

D'une façon générale, nous poserons la définition suivante :

<u>Définition 1</u>. <u>Une fonction numérique positive f , définie sur le produit</u> $E \times E$ <u>d'un ensemble E par lui-même, est appelée un écart sur E lorsque les conditions suivantes sont remplies</u> :

a) $f(x,x)=0$ <u>quel que soit</u> $x \in E$;

b) $f(x,y)=f(y,x)$ <u>quels que soient x et y dans E</u> ;

c) $f(x,y) \leqslant f(x,z)+f(z,y)$ <u>quels que soient</u> x,y,z <u>dans E</u> (inégalité du triangle).

<u>Si f est un écart sur E, on dit que la structure uniforme sur E ayant pour système fondamental d'entourages la famille des ensembles</u> $\overset{-1}{f}([0,a])$ <u>où a parcourt l'ensemble</u> P^* <u>des nombres réels</u> >0 <u>, est définie par l'écart f</u> .

<u>Exemples</u>. La distance euclidienne sur R^n est un écart d'après ce qui précède. Sur un ensemble quelconque E , la fonction numérique f définie sur $E \times E$, telle que $f(x,x)=0$ et $f(x,y)=1$ si $x \neq y$, est un écart. De même, si f est une fonction numérique finie quelconque définie sur E , la fonction g définie par la relation $g(x,y)=|f(x)-f(y)|$ est un écart sur E .

<u>Remarque</u>. Lorsque la condition a) est remplie, les conditions b) et c) sont équivalentes à la condition :

c') $f(x,y) \leqslant f(x,z)+f(y,z)$ quels que soient x,y,z dans E .

Il est immédiat que b) et c) entraînent c'). Réciproquement de c'), on tire $f(x,y) \leqslant f(x,x)+f(y,x)=f(y,x)$, puis, en permutant x et y dans cette inégalité, $f(y,x) \leqslant f(x,y)$, d'où $f(x,y)=f(y,x)$, c'est-à-dire b), et il est clair que b) et c') entraînent c).

De l'inégalité du triangle, on déduit aussitôt l'inégalité

$$(1) \qquad \left| f(x,z)-f(y,z) \right| \leqslant f(x,y)$$

quels que soient x,y,z dans E .

Si f est un écart sur E , il en est de même de kf , quel que soit le nombre $k>0$. Si $(f_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille quelconque d'écarts sur E , la somme $\sum_{\iota \in I} f_\iota$ est encore un écart sur E , comme il résulte immédiatement de la définition 1 . De même, l'<u>enveloppe supérieure</u> f de cette famille est encore un écart sur E ; car, des relations $f_\iota(x,y) \leqslant f_\iota(x,z)+f_\iota(y,z)$, on déduit

$$\sup_{\iota \in I} f_\iota(x,y) \leqslant \sup_{\iota \in I} (f_\iota(x,z)+f_\iota(y,z)) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\iota \in I} f_\iota(x,z)+\sup_{\iota \in I} f_\iota(y,z)$$

(ch. IV, § 5, formule (4)).

<u>Remarques</u>. 1) Si f est une fonction numérique positive définie dans $E \times E$, et satisfaisant aux conditions a) et c), mais non à b), il est facile d'en déduire un <u>écart</u> g sur E ; il suffit de prendre $g(x,y) = f(x,y)+f(y,x)$.

2) Il est clair que les conditions imposées à un écart ne sont nullement équivalentes aux conditions 1), 2) et 3) énoncées ci-dessus ;

elles sont beaucoup plus restrictives que ces dernières. Une fonction positive f définie sur $E \times E$ satisferait déjà aux conditions 2) et 3) s'il existait une application φ de $P = [0, +\infty[$ dans P , continue et nulle au point 0 , et une application ψ de $P \times P$ dans P , continue et nulle au point (0,0), telles que l'on ait les inégalités

$$f(y,x) \leqslant \varphi(f(x,y))$$

$$f(x,y) \leqslant \psi(f(x,z), f(z,y))$$

quels que soient x,y,z dans E .

Mais il résulte du th.1 démontré un peu plus loin que la considération de ces fonctions plus générales est <u>inutile</u> dans l'étude des structures uniformes. C'est là un premier fait important qui justifie l'introduction de la notion d'écart. Une seconde raison est l'inégalité (1) vérifiée par ces fonctions, et qui ne serait déjà plus exacte pour une fonction positive et symétrique f , satisfaisant à l'inégalité

$$f(x,y) \leqslant k(f(x,z) + f(z,y)) \qquad (k > 1)$$

pourtant à peine plus générale que l'inégalité du triangle. Or, l'inégalité (1) joue un rôle important dans les développements qui suivent (voir en particulier la prop. 1 ci-dessous)

3) La définition d'une structure uniforme par un écart f sur un ensemble E revient à prendre comme système fondamental d'entourages de cette structure, l'<u>image réciproque</u>, par la fonction f , du filtre des voisinages du point 0 dans l'ensemble P des nombres $\geqslant 0$. On notera que ce procédé est tout à fait analogue à celui qui nous a permis de définir les structures uniformes d'un groupe topologique (ch.III, § 2).

Génération d'une structure uniforme par une famille d'écarts. Définition 2. Etant donnée une famille $(f_\iota)_{\iota\in I}$ d'écarts sur un ensemble E, on appelle structure uniforme définie par la famille (f_ι) sur l'ensemble E, la borne supérieure de l'ensemble des structures uniformes définies sur E par les écarts f_ι.

Deux familles d'écarts sur E sont dites équivalentes si elles définissent la même structure uniforme sur E.

D'après la définition de la borne supérieure d'un ensemble de structures uniformes (ch. II, § 1), le filtre d'entourages de la structure uniforme définie sur E par une famille (f_ι) d'écarts, est engendré par la famille des ensembles $\overset{-1}{f_\iota}([0,a])$, où ι parcourt I, et a l'ensemble des nombres >0. On en tire la condition pour qu'une structure $\mathcal{U}$ définie par une famille $(f_\iota)_{\iota\in I}$ d'écarts soit moins fine qu'une structure $\mathcal{U}'$ définie par une seconde famille $(g_\varkappa)_{\varkappa\in K}$ d'écarts ; il faut et il suffit que, quels que soient les indices en nombre fini $\iota_1, \iota_2, \dots, \iota_n$ de I, et les nombres >0, $a_1, a_2, \dots, a_n$, il existe des indices en nombre fini $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_m$ de K, et m nombres >0, $b_1, b_2, \dots, b_m$ tels que les relations $g_{\varkappa_k}(x,y) \leq b_k$ $(k=1,2,\dots,m)$ entraînent les relations $f_{\iota_h}(x,y) \leq a_h$ $(h=1,2,\dots,n)$. En particulier, si $(f_\iota)_{\iota\in I}$ est une sous-famille de $(g_\varkappa)_{\varkappa\in K}$, la structure $\mathcal{U}$ est moins fine que $\mathcal{U}'$.

On déduit de là que, si une structure uniforme $\mathcal{U}$ est définie par une famille $(f_\iota)_{\iota\in I}$ d'écarts, on peut toujours trouver une famille d'écarts $(g_\varkappa)_{\varkappa\in K}$ équivalente à la famille $(f_\iota)_{\iota\in I}$, et telle que la famille des ensembles $\overset{-1}{g_\varkappa}([0,a])$, où $\varkappa$ parcourt K et a l'ensemble des nombres >0, forme un système fondamental d'entourages de la structure $\mathcal{U}$; il suffit de prendre la famille des fonctions $\text{Max}(f_\iota)_{\iota\in H}$, H parcourant l'ensemble des parties finies de I. En effet, ces fonctions sont des écarts sur E ; elles forment une famille contenant la famille (f_ι) ; et les relations $f_{\iota_h}(x,y) \leqslant a_h$ $(1 \leqslant h \leqslant n)$ entraînent $\text{Max}\,(f_{\iota_h}(x,y)) \leqslant \text{Max}(a_h)$ $(1 \leqslant h \leqslant n)$, d'où la proposition.

La définition du filtre d'entourages de la structure $\mathcal{U}$ définie par une famille d'écarts (f_ι) sur E , fournit aussi la condition pour que $\mathcal{U}$ soit une structure séparée : il faut et il suffit que, pour tout couple de points distincts x,y de E , il existe un indice ι tel que $f_\iota(x,y) \neq 0$.

Remarquons maintenant que la structure uniforme $\mathcal{U}$ sur E définie par un écart f est telle que f(x,y) soit uniformément continue dans $E \times E$ (muni de la structure uniforme produit de $\mathcal{U}$ par elle-même) ; on a en effet, d'après (1)

$$|f(x,y)-f(x',y')| \leqslant f(x,x')+f(y,y')$$

A fortiori, f est encore uniformément continue dans $E \times E$, quand on munit cet ensemble d'une structure uniforme plus fine que la structure produit de $\mathcal{U}$ par elle-même.

Inversement, si, en munissant E d'une structure uniforme $\mathcal{U}'$, f est uniformément continue dans l'espace produit $E \times E$, à tout $a > 0$ correspond un entourage V de la structure $\mathcal{U}'$ tel que, pour tout couple $(x,y) \in V$, on ait $|f(x,y)-f(x,x)| \leqslant a$, et comme $f(x,x)=0$, cela montre que $\overset{-1}{f}([0,a])$ est un entourage de la structure $\mathcal{U}'$, ou encore que $\mathcal{U}'$ est plus fine que $\mathcal{U}$.

Par suite :

Proposition 1. La structure uniforme sur un ensemble E , définie par une famille (f_ι) d'écarts sur E , est la moins fine des structures

<u>uniformes sur E telles que toutes les fonctions</u> f_ι <u>soient uniformément continues dans l'espace produit</u> $E \times E$.

Si f est un écart sur un ensemble E , il est clair que, pour toute partie non vide A de E , la restriction de f à $A \times A$ est un écart sur A ; on voit aussitôt que, si une structure uniforme $\mathcal{U}$ sur E est définie par une famille (f_ι) d'écarts sur E , la structure uniforme <u>induite</u> par $\mathcal{U}$ sur A est définie par la famille des restrictions des f_ι à $A \times A$.

Etant donné un espace uniforme séparé E , défini par la donnée d'une famille d'écarts (f_ι) sur E , considérons le <u>complété</u> $\hat{E}$ de E , et désignons par $\mathcal{U}$ et $\mathcal{C}$ respectivement la structure uniforme de $\hat{E}$ obtenue par complétion, et la topologie sur $\hat{E}$ déduite de $\mathcal{U}$. Les fonctions f_ι étant uniformément continues dans $E \times E$, on peut les <u>prolonger par continuité</u> dans $\hat{E} \times \hat{E}$, et les fonctions prolongées $\bar{f}_\iota$ sont uniformément continues dans $\hat{E} \times \hat{E}$ (ch.II, §3,th.1) ; en outre, ce sont des <u>écarts</u> sur $\hat{E}$, comme il résulte du principe de prolongement des inégalités (ch.IV, §5). Soient alors $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{C}'$ la structure uniforme définie sur $\hat{E}$ par la famille d'écarts $(\bar{f}_\iota)$, et la topologie déduite de la structure uniforme $\mathcal{U}'$; nous allons voir que $\mathcal{U}'$ <u>est identique à</u> $\mathcal{U}$ (et par suite que $\mathcal{C}'$ est identique à $\mathcal{C}$).

Tout d'abord, d'après la prop.1 , $\mathcal{U}'$ est <u>moins fine</u> que $\mathcal{U}$, et par suite $\mathcal{C}'$ <u>moins fine</u> que $\mathcal{C}$. D'autre part, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ induisent sur E la même structure uniforme (donnée). Considérons alors sur E un filtre de Cauchy ; il converge, dans $\hat{E}$, muni de la topologie $\mathcal{C}$, donc aussi dans $\hat{E}$, muni de la topologie moins fine $\mathcal{C}'$.

D'autre part, E est partout dense dans $\widehat{E}$, muni de la topologie $\mathcal{T}$, donc aussi dans $\widehat{E}$, muni de la topologie moins fine $\mathcal{T}'$. Mais alors, le lemme de la démonstration du théorème de complétion (ch.II, § 3, th.2) montre que la structure uniforme $\mathcal{U}'$ est une structure d'espace <u>complet</u> ; comme $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ induisent sur E la même structure uniforme, elles sont nécessairement identiques (ch.II, § 3, prop.8).

L'intérêt du mode de définition d'une structure uniforme par une famille d'écarts réside dans le fait qu'il permet d'obtenir <u>toutes les structures uniformes</u>. De façon précise :

<u>Théorème 1.</u> <u>Etant donnée une structure uniforme</u> $\mathcal{U}$ <u>sur un ensemble E, il existe une famille d'écarts sur E telle que la structure uniforme définie par cette famille soit identique à</u> $\mathcal{U}$.

Ce théorème résulte immédiatement de la proposition suivante :

<u>A chaque entourage U de la structure</u> $\mathcal{U}$ <u>on peut associer un écart f sur E possédant les propriétés suivantes</u> :

1° <u>quel que soit</u> $a > 0$, $\overset{-1}{f}([0,a])$ <u>est un entourage de la structure</u> $\mathcal{U}$;

2° <u>il existe</u> $a > 0$ <u>tel que</u> $\overset{-1}{f}([0,a])$ <u>soit contenu dans U</u>.

En effet, définissons par récurrence une suite d'entourages <u>symétriques</u> $(U_n)_{1 \leq n}$ telle que $U_1 \subset U$, et $\overset{3}{U}_{n+1} \subset U_n$ quel que soit $n \geqslant 1$. Posons $g(x,y)=0$ si $(x,y) \in U_n$ quel que soit n ; $g(x,y)=2^{-k}$ si $(x,y) \in U_n$ pour $1 \leq n \leq k$, et $(x,y) \notin U_{k+1}$; $g(x,y) = 1$ si $(x,y) \notin U_1$. La fonction g, définie ainsi sur $E \times E$ est symétrique, positive, et telle que $g(x,x)= 0$ quel que soit $x \in E$. Nous allons en déduire un <u>écart</u> f sur E, en posant

$$f(x,y) = \inf \sum_{i=1}^{p} g(z_i,z_{i+1})$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble de toutes les suites finies $(z_i)_{1 \leq i \leq p+1}$ (p arbitraire) telles que $z_1 = x$, $z_{p+1} = y$. Il résulte en effet de cette définition que f satisfait à l'inégalité du triangle et est symétrique et positive ; en outre, on a $f(x,y) \leq g(x,y)$ ce qui montre que $f(x,x)=0$, donc que f est un écart sur E , et qu'il vérifie la condition 1° de l'énoncé. Pour démontrer le 2° , nous allons établir que

$$f(x,y) \geqslant \frac{1}{2} g(x,y) \tag{2}$$

quels que soient x et y dans E .

Il suffit d'établir que, pour toute suite $(z_i)_{1 \leq i \leq p+1}$ de p+1 points de E , telle que $z_1 = x$, $z_{p+1} = y$, on a

$$\sum_{i=1}^{p} g(z_i, z_{i+1}) \geqslant \frac{1}{2} g(x,y) \tag{3}$$

C'est vrai pour $p=1$; montrons que, si c'est vrai pour $p < m$, c'est encore vrai pour $p=m$. Posons $\sum_{i=1}^{m} g(z_i, z_{i+1}) = A$; comme $g(x,y) \leq 1$, il suffit de faire la démonstration lorsque $A < \frac{1}{2}$. Or, il existe deux termes consécutifs z_h , z_{h+1} de la suite tels que

$$\sum_{i<h} g(z_i, z_{i+1}) \leq A/2 \quad , \quad \text{et} \quad \sum_{i>h} g(z_i, z_{i+1}) \leq A/2$$

donc, l'inégalité (3), supposée vraie pour les suites de m-1 points au plus, donne $g(x, z_h) \leq A$, $g(z_{h+1}, y) \leq A$. D'autre part, on a évidemment $g(z_h, z_{h+1}) \leq A$; si k est le plus petit entier > 0 tel que $2^{-k} \leq A$, on a $k \geqslant 2$ et $(x, z_h) \in U_k$, $(z_h, z_{h+1}) \in U_k$, $(z_{h+1}, y) \in U_k$, donc $(x,y) \in \overset{3}{U}_k \subset U_{k-1}$, ce qui entraîne $g(x,y) \leq 2^{1-k} \leq 2A$.

C.Q.F.D.

Espaces uniformisables. Considérons un espace topologique E , dont nous désignerons par $\mathcal{T}$ la topologie, et une famille (f_ι) d'écarts sur E ; proposons-nous de rechercher si la topologie $\mathcal{T}'$ déduite de la structure uniforme définie par la famille (f_ι) est comparable à la topologie $\mathcal{T}$.

Remarquons d'abord que, d'après la prop.1, les f_ι sont continues dans $E \times E$, lorsque E est muni de la topologie $\mathcal{T}'$; donc, si $\mathcal{T}'$ est moins fine que $\mathcal{T}$, les f_ι sont encore continues dans $E \times E$, lorsque E est muni de la topologie $\mathcal{T}$. Réciproquement, supposons les f_ι continues dans $E \times E$ (E étant muni de la topologie $\mathcal{T}$) ; tout voisinage d'un point $x_0 \in E$, dans la topologie $\mathcal{T}'$, contient l'intersection d'un nombre fini d'ensembles de la forme $\overset{-1}{g_\iota}([0,a_\iota])$, où $g_\iota(x)=f_\iota(x_0,x)$, et $a_\iota > 0$; or, chacun de ces ensembles est par hypothèse un voisinage de x_0 , donc il en est de même de leur intersection, ce qui prouve que $\mathcal{T}'$ est moins fine que $\mathcal{T}$.

Cette caractérisation des voisinages d'un point dans la topologie $\mathcal{T}'$ nous donne aussi une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{T}'$ soit plus fine que $\mathcal{T}$: il faut et il suffit que, pour tout point $x_0 \in E$ et tout voisinage V de x_0 dans la topologie $\mathcal{T}$, il existe un nombre fini d'indices $\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_n$ et un nombre $a > 0$ tels que, pour tout point $x \in \complement V$, il existe un indice ι_k $(1 \leq k \leq n)$ pour lequel $f_{\iota_k}(x_0,x) \geqslant a$.

Rassemblant ces résultats, on en déduit la proposition suivante :

Proposition 2. Pour que la structure uniforme définie, sur un ensemble E , par une famille $(f_\iota)_{\iota \in I}$ d'écarts sur E , soit compatible avec une topologie $\mathcal{T}$ sur E , il faut et il suffit que :

1° les fonctions f_ι soient continues dans l'espace produit $E \times E$ (E étant muni de la topologie $\mathcal{T}$) ;

2° <u>quel que soit</u> $x_0 \in E$, <u>et quel que soit le voisinage V de</u> x_0 <u>dans la topologie</u> $\mathcal{C}$, <u>il existe une partie finie H de l'ensemble d'indices I telle que, si on pose</u> $g = \mathrm{Max}\,(f_\iota)_{\iota \in H}$, <u>la borne inférieure dans</u> $\complement V$ <u>de</u> $g(x_0,x)$ <u>soit strictement positive</u>.

Cette proposition et le th. 1 vont nous permettre de répondre à une question soulevée au ch.II (§ 4), la <u>caractérisation des espaces topologiques uniformisables</u> :

<u>Théorème 2.</u> <u>Pour qu'un espace topologique E soit uniformisable, il faut et il suffit qu'il vérifie l'axiome suivant</u> :

(O_{IV}). <u>Quels que soient le point</u> $x_0 \in E$ <u>et le voisinage V de</u> x_0 , <u>il existe une fonction numérique continue dans E , prenant ses valeurs dans</u> $[0,1]$, <u>égale à 0 au point</u> x_0 <u>et à 1 dans</u> $\complement V$.

La condition est <u>nécessaire</u>. En effet, si E est uniformisable, il existe une structure uniforme compatible avec la topologie de E ; d'après le th.1 , cette structure peut être définie par une famille (f_ι) d'écarts sur E , et on peut supposer que le maximum d'un nombre fini d'écarts de cette famille appartient encore à la famille . D'après la prop. 2, il existe donc un écart f_ι de cette famille et un nombre $a > 0$ tels que $f(x_0,x) \geqslant a$ en tout point de $\complement V$; par suite, la fonction $\mathrm{Min}(1,f(x_0,x)/a)$ remplit bien toutes les conditions énoncées dans (O_{IV}).

La condition est <u>suffisante</u> ; soit en effet Φ l'ensemble des <u>applications continues de E dans</u> $[0,1]$. L'axiome (O_{IV}) montre que <u>la structure uniforme la moins fine rendant uniformément continues les fonctions de</u> Φ est compatible avec la topologie de E (ch. II, § 5).

13

On notera que, si E est un espace <u>séparé</u>, la structure uniforme précédente est une structure d'espace <u>précompact</u> (ch.II, § 5, prop.5). Donc :

<u>Proposition 3</u>. <u>Tout espace uniformisable séparé est homéomorphe à un sous-espace d'un espace compact</u> (on dit encore, par une identification, que tout espace uniformisable séparé pour être <u>plongé</u> dans un espace compact).

Cette proposition est donc la réciproque d'une proposition démontrée au ch.II (§ 4).

Les espaces uniformisables séparés sont encore appelés parfois <u>espaces complètement réguliers</u>.

<u>Remarques</u>. 1) Il est immédiat que l'axiome (O_{IV}) entraîne (O_{III}), car si V est un voisinage de x_o, et f une fonction numérique continue, à valeurs dans $[0,1]$, et telle que $f(x_o)=0$, $f(x)=1$ pour tout $x \in \complement V$, l'ensemble $\overset{-1}{f}([0, \frac{1}{2}])$ est un voisinage <u>fermé</u> de x_o contenu dans V. En particulier, tout espace <u>complètement régulier</u> est <u>régulier</u>. Mais on peut former des espaces réguliers, mais non complètement réguliers (*), ce qui montre que (O_{III}) n'entraîne pas (O_{IV}).

2) Soit E un espace <u>uniformisable non séparé</u>, et considérons dans E la relation " $y \in \overline{\{x\}}$ ", que nous désignerons par R. C'est une <u>relation d'équivalence</u> dans E ; en effet, elle est évidemment réflexive et transitive ; pour voir qu'elle est symétrique, remarquons que $y \in \overline{\{x\}}$ entraîne que toute fonction numérique continue dans E prend au point y la même valeur qu'au point x ; si on avait $x \notin \overline{\{y\}}$, il existerait, d'après (O_{IV}), une fonction numérique continue dans E, égale à 0 au point y, et à 1 au point x, contrairement à l'hypothèse.

Considérons l'espace quotient E/R ; toute fonction numérique continue dans E étant constante sur toute classe d'équivalence suivant R , elle donne, par passage au quotient, une fonction numérique continue dans E/R . Soient alors $\dot{x}$ et $\dot{y}$ deux points distincts de E/R , x et y deux points de E appartenant respectivement aux classes d'équivalence $\dot{x}$ et $\dot{y}$; on a $y \notin \overline{\{x\}}$, donc il existe un voisinage V de x ne contenant pas y , et par suite une fonction numérique continue f , égale à 0 en x , à 1 en y . La fonction numérique $\dot{f}$ qu'on en déduit par passage au quotient est continue dans E/R , égale à 0 en $\dot{x}$, à 1 en $\dot{y}$, ce qui prouve que E/R est <u>séparé</u> . Si maintenant $\dot{W}$ est un voisinage quelconque d'un point $\dot{x}$ dans E/R , W son image réciproque dans E par l'application canonique de E sur E/R , x un point quelconque de E appartenant à la classe d'équivalence $\dot{x}$, W est un voisinage de x , donc il existe une fonction numérique continue g , à valeurs dans $[0,1]$, égale à 0 en x et à 1 dans $\complement W$; par passage au quotient, elle donne une fonction $\dot{g}$ à valeurs dans $[0,1]$, continue dans E/R , égale à 0 en x et à 1 dans $\complement W$; par passage au quotient, elle donne une fonction $\dot{g}$ à valeurs dans $[0,1]$, continue dans E/R , égale à 0 en $\dot{x}$, et à 1 dans $\complement \dot{W}$; par suite, E/R est <u>complètement régulier</u>.

Considérons une structure uniforme $\mathcal{U}$ sur E , compatible avec la topologie de E , et soit C l'intersection des entourages de cette structure. $C(x)$ est identique à l'intersection des voisinages de x dans E , donc à la classe d'équivalence de x suivant R ; par suite C n'est autre que la partie de $E \times E$ définie par la relation R . On en conclut que la structure uniforme séparée associée à la structure $\mathcal{U}$ (ch.II, § 1) est définie sur l'ensemble E/R et est compatible avec la topologie quotient de celle de E par la relation R . Aussi l'espace topologique E/R est-il appelé l'espace complètement régulier associé à l'espace uniformisable E .

Fonctions semi-continues dans un espace uniformisable. Au ch.IV (§ 5, corollaire du th.5), on a vu que, dans un espace topologique quelconque E , l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions numériques continues est une fonction semi-continue inférieurement. Dans un espace uniformisable, on a en outre une réciproque de cette proposition :

Proposition 4. Toute fonction f semi-continue inférieurement dans un espace uniformisable E est l'enveloppe supérieure des fonctions numériques continues dans E et inférieures à f .

Examinons d'abord le cas où f prend ses valeurs dans $[-1,+1]$. Il faut montrer que, si x_0 est un point quelconque de E , et a un nombre $< f(x_0)$, il existe une fonction numérique g , continue dans E , telle que $g \leqslant f$ et $g(x_0) \geqslant a$. Si $f(x_0)=-1$, il suffit de prendre pour g la constante -1 . Si $f(x_0) > -1$, on peut se borner au cas où on a $-1 \leqslant a < f(x_0)$. D'après l'hypothèse, il existe un voisinage V de x_0 tel que $f(x) \geqslant a$ en tout point de V . Or, E étant uniformisable, il existe une fonction numérique h , continue dans E , à valeurs dans $[0,1]$, et telle que $h(x_0)=0$, et $h(x)=1$ dans $\complement V$. Il suffit donc de prendre $g(x)=a-(a+1)h(x)$ pour avoir une fonction continue répondant aux conditions posées.

Passons maintenant au cas général. Si f est une fonction semi-continue inférieurement dans E , il en est de même de la fonction

$h = f/(1+|f|)$, et cette dernière prend ses valeurs dans $[-1,+1]$. Soit x_0 un point quelconque de E ; si $f(x_0)=-\infty$, la fonction g égale à la constante $-\infty$ est continue dans E et telle que $g \leqslant f$, et $g(x_0)=f(x_0)$. Si $f(x_0) > -\infty$, soit a un nombre réel quelconque $< f(x_0)$; il existe une fonction continue numérique k prenant ses valeurs dans $[-1,+1]$, telle que $k \leqslant h$ et $k(x_0) \geqslant a/(1+|a|)$; par suite, la fonction $g=k/(1-|k|)$ (prolongée de sorte que $g(x)=-\infty$ si $k(x)=-1$, $g(x)=+\infty$ si $k(x)=+1$), est continue dans E, et telle que $g \leqslant f$, et $g(x_0) \geqslant a$, d'où la proposition.

Exercices. 1) Soit E un espace uniformisable ; montrer que la famille (f_ι) de tous les écarts sur E continus dans $E \times E$ définit sur E une structure uniforme compatible avec la topologie de E. Cette structure uniforme (dite structure universelle) est la plus fine de toutes les structures uniformes compatibles avec la topologie de E ; si F est un espace uniforme quelconque, f une application continue de E dans F, f est uniformément continue quand on munit E de sa structure uniforme universelle ; cette dernière proposition est inexacte pour toute autre structure uniforme compatible avec la topologie de E.

2) Soit $(f_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de fonctions numériques continues dans un espace uniformisable E, et prenant leurs valeurs dans l'intervalle $A = [0,1]$. Montrer que, si la famille des ensembles $\overset{-1}{f_\iota}([0,a[)$, où ι parcourt I et a l'intervalle $]0,1]$, constitue un système de générateurs de la topologie de E, la structure uniforme la moins fine rendant uniformément continues les f_ι est compatible avec la topologie de E.

En déduire que si E est séparé, il est homéomorphe à un sous-espace de l'espace produit A^I (voir ch.II, § 5,exerc.2 ; le produit A^I est un cube à n dimensions si I est un ensemble de n éléments ; par extension, on dit que c'est un "cube à une infinité de dimensions" lorsque I est infini).

3) Déduire de l'exerc.2 et de l'axiome (O_{IV}) que tout espace complètement régulier est homéomorphe à un sous-espace d'un cube (à un nombre fini ou à une infinité de dimensions).

4) Soit E un espace localement compact, et (f_ι) la famille des fonctions numériques continues dans E , et <u>nulles dans le complémentaire d'un ensemble compact</u>. Montrer que la structure uniforme la moins fine rendant continues les f_ι est compatible avec la topologie de E . Montrer en outre que le complété $\hat{E}$ de E , muni de cette structure uniforme, est compact, et que le complémentaire de E dans $\hat{E}$ se compose d'un seul point (on établira que les seuls filtres de Cauchy sur E , non convergents dans E , sont les filtres plus fins que le filtre des complémentaires des ensembles relativement compacts).

5) Tout espace dénombrable complètement régulier est totalement discontinu (montrer que tout voisinage d'un point quelconque x contient un voisinage de x à la fois ouvert et fermé).

6) Montrer que toute fonction numérique continue dans l'espace non séparé défini dans l'exerc. 3 du § 6 du ch.I , est constante.

§ 2. Espaces métriques ; espaces métrisables.

Le dénombrable en Topologie.

<u>Métriques et espaces métriques</u>. <u>Définition 1</u>. <u>On appelle métrique sur un ensemble E un écart d sur E tel que la relation</u> d(x,y)=0 <u>entraîne</u> x = y.

Cette définition pourrait encore se formuler en disant qu'une métrique est un écart tel que la structure uniforme qu'il définit soit séparée.

Définition 2. On dit qu'une métrique sur un ensemble E , la structure uniforme définie par cette métrique, et la topologie déduite de cette structure, définissent sur E une structure d'espace métrique. L'ensemble E , muni de cette structure, est appelé espace métrique.

Exemples. La distance euclidienne $d(x,y)$ est une métrique sur l'espace numérique R^n ; il en est de même des fonctions $\max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|$, et $\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$. Toutes ces métriques définissent sur R^n la structure uniforme produit définie au ch.V .

Sur un ensemble quelconque E , l'écart f tel que $f(x,x)=0$, $f(x,y)=1$ si $x\neq y$, est une métrique ; la structure uniforme qu'elle définit sur E est la structure uniforme discrète.

Soient E et E' deux espaces métriques, d la métrique de E , d' celle de E'. Conformément aux définitions générales (Ens. R, § 8) une application biunivoque f de E sur E' est un isomorphisme de l'espace métrique E sur l'espace métrique E' , si, quels que soient x et y dans E , on a

$$d(x,y)= d'(f(x),f(y)) \tag{1}$$

On remarquera que, si f est une application de E sur E' satisfaisant à l'identité (1), elle est nécessairement biunivoque (et par suite est un isomorphisme de E sur E') ; on dit encore qu'une telle application est isométrique.

Avant d'étudier les structures d'espace métrique, montrons comment on peut y rattacher les structures définies par un seul écart f sur un ensemble E , lorsque cet écart n'est pas une métrique.

La structure uniforme $\mathcal{U}$ qu'elle définit est alors non séparée, et l'intersection des entourages de cette structure est la partie de $E \times E$ définie par la relation d'équivalence $f(x,y)=0$, relation que nous désignerons par R. Si $x \equiv x'$ (mod. R), on a, d'après l'inégalité du triangle, $f(x,y) \leqslant f(x,x')+f(x',y)=f(x',y)$, et de même $f(x',y) \leqslant f(x,x')+f(x,y)=f(x,y)$, ce qui montre que f est une fonction <u>compatible</u> (en x et y) avec la relation d'équivalence R. Soit $\overline{f}$ la fonction numérique obtenue par passage au quotient (pour x et y) à partir de f ; elle est définie sur $(E/R)\times(E/R)$, et, si x et y sont deux points de E, $\dot{x}$ et $\dot{y}$ les classes d'équivalence de x et y suivant R, on a $\overline{f}(\dot{x},\dot{y})=f(x,y)$. Il en résulte aussitôt que $\overline{f}$ est une <u>métrique</u> sur E/R ; en outre, la structure uniforme qu'elle définit sur E/R n'est autre que la structure séparée <u>associée</u> à $\mathcal{U}$, d'après la définition de cette structure (ch. II, §1). En passant à un espace quotient, la structure uniforme définie par un seul écart se ramène donc à une structure d'espace métrique.

<u>Structure uniforme et topologie d'un espace métrique</u>. <u>Boules, sphères. Distance de deux ensembles</u>. Soit E un espace métrique, f la métrique qui le définit. La valeur $f(x,y)$ de cette fonction pour un couple (x,y) de points de E est encore appelée <u>distance</u> des points x,y. On désignera par V_a la partie de $E\times E$ formée des couples (x,y) dont la distance est $< a$, par W_a la partie formée des couples dont la distance est $\leqslant a$; lorsque a parcourt l'ensemble des nombres >0, ou seulement une suite de nombres >0 tendant vers 0, les ensembles V_a (resp. W_a) constituent, d'après la définition de la structure uniforme de E, un <u>système fondamental d'entourages ouverts</u> (resp. <u>fermés</u>) de cette structure ; on a d'ailleurs $\overline{V}_a \subset W_a$, mais ces deux ensembles ne sont pas nécessairement identiques.

L'ensemble $V_a(x)$ (resp. $W_a(x)$) est appelé (par analogie avec le cas de la distance euclidienne) <u>boule ouverte</u> (resp. <u>boule fermée</u>) de <u>centre</u> x et de <u>rayon</u> a ; c'est évidemment un ensemble <u>ouvert</u> (resp. <u>fermé</u>) ; de même, on appelle <u>sphère</u> de centre x et de rayon a l'ensemble des points y tels que $f(x,y)=a$ $(a>0)$; c'est un ensemble <u>fermé</u>. D'après ce qui précède, les boules ouvertes (resp. fermées) de centre x et de rayon a forment un système fondamental de voisinages de x , lorsque a parcourt l'ensemble des nombres >0 , ou une suite de nombres >0 tendant vers 0 .

Il ne faut pas se laisser abuser par la terminologie précédente, et croire que, dans un espace métrique quelconque, les boules et sphères jouissent des mêmes propriétés topologiques que les boules et sphères euclidiennes étudiées au ch.V (§ 3). C'est ainsi que l'adhérence d'une boule ouverte peut être distincte de la boule fermée de même centre et même rayon, que la frontière d'une boule fermée peut être distincte de la sphère de même centre et même rayon qu'une boule ouverte ou fermée peut n'être pas connexe (*).

Soient A et B deux parties quelconques de l'espace métrique E . On appelle <u>distance des ensembles A et B</u> le nombre $d(A,B)=\inf_{x\in A,\ y\in B} f(x,y)$. En particulier, on note $d(x,A)$ la distance de l'ensemble $\{x\}$ réduit au point x , et de l'ensemble A ; on l'appelle <u>distance du point x à l'ensemble A</u> . D'après cette définition, on a $d(x,A)=\inf_{y\in B} f(x,y)$ d'où $d(A,B)=\inf_{x\in A} d(x,B)$ (ch.IV, § 5).

<u>Proposition 1. Les propriétés</u> $x\in\bar{A}$ <u>et</u> $d(x,A)=0$ <u>sont équivalentes</u>.

En effet, la relation $d(x,A)=0$ exprime que la boule $V_a(x)$ rencontre A quel que soit $a>0$, ce qui est équivalent à $x \in \overline{A}$.

Il est essentiel de remarquer qu'on peut avoir $d(A,B)=0$ pour deux parties A,B de E telles que $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, lorsque ces deux parties ne sont pas réduites à un point. Par exemple, sur la droite numérique $\mathbb{R}$, l'ensemble des entiers >0 et l'ensemble des points de la suite $(n+1/2n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont fermés, sans point commun, et ont une distance nulle.

Proposition 2. La fonction $d(x,A)$ est uniformément continue dans E .

Soient en effet x,y deux points quelconques de E ; quel que soit $\varepsilon>0$, il existe $z \in A$ tel que $f(y,z) \leq d(y,A)+\varepsilon$, d'où , d'après l'inégalité du triangle,

$$f(x,z) \leq f(x,y)+f(y,z) \leq f(x,y)+d(y,A)+\varepsilon$$

A fortioti $d(x,A) \leq f(x,y)+d(y,A)+\varepsilon$

et comme ε est arbitraire $d(x,A) \leq f(x,y)+d(y,A)$. De la même manière, on a $d(y,A) \leq f(x,y)+d(x,A)$, c'est-à-dire

$$|d(x,A)-d(y,A)| \leq f(x,y) \tag{2}$$

ce qui démontre la proposition.

D'après la définition de $d(x,A)$, il est immédiat que l'ensemble des points x de E tels que $d(x,A) < a$ est identique à l'ensemble $V_a(A)$; la continuité de $d(x,A)$ nous montre à nouveau que cet ensemble est un voisinage ouvert de A . De même, l'ensemble des points tels que $d(x,A) \leq a$ est un voisinage fermé de A , qui contient $W_a(A)$, mais n'est pas nécessairement identique à cet ensemble.

Il peut en effet exister des points x dont la distance à A soit égale à a , sans qu'il existe de points de A dont la distance à x soit égale à a .

On appelle __diamètre__ d'une partie A d'un espace métrique E le nombre $\delta(A) = \sup\limits_{\substack{x\in A\\ y\in A}} f(x,y)$; un ensemble est dit __borné__ lorsque son diamètre est __fini__ ; l'espace tout entier est lui-même borné si f(x,y) est une fonction bornée dans $E \times E$. La notion d'ensemble "petit d'ordre W_a" est identique à celle d'ensemble de diamètre $\leq a$. Pour qu'un ensemble A non vide soit réduit à un point, il faut et il suffit que $\delta(A) = 0$.

A la notion de diamètre se rattache celle __d'oscillation__ d'une fonction g définie dans un ensemble quelconque E , et prenant ses valeurs dans un __espace métrique__ E' ; si A est une partie quelconque de E , on appelle __oscillation de g dans A__ le diamètre $\delta(g(A))$. Si en outre E est une partie d'un __espace topologique__ F , on appelle __oscillation de__ g __en un point__ $x \in \overline{E}$ le nombre $\omega(x;g)=\inf \delta(g(V \cap E))$, V parcourant le filtre des voisinages de x dans F . Pour que $\omega(x;g)=0$, il faut et il suffit que, pour tout $a > 0$, il existe un voisinage V de x tel que $g(V \cap E)$ soit contenu dans une boule de rayon a ; si $x \in E$, cette condition exprime que g est __continue__ au point x , par rapport à E ; si $x \in \overline{E} \cap \complement E$, que l'image par g de la trace sur E du filtre des voisinages de x dans F est un __filtre de Cauchy__ sur E' ; lorsque E' est __complet__, on voit donc que, __pour que__ g __ait une limite au point x , relativement à E , il faut et il suffit que son oscillation au point x soit nulle__.

Notons enfin que, si A est une partie d'un espace métrique E , la restriction de la métrique f de E à l'ensemble $A \times A$ est une métrique sur A ; on a vu (§ 1) qu'elle définit sur A la structure uniforme induite par celle de E ; l'ensemble A , muni de cette métrique, de la structure uniforme et de la topologie qu'elle définit, est dit un <u>sous-espace métrique</u> de E .

On voit ainsi en particulier que, sur toute partie A de $\mathbb{R}^n$, la distance euclidienne, restreinte à $A \times A$, est une métrique définissant la structure uniforme et la topologie induites par celles de $\mathbb{R}^n$.

<u>Structures uniformes métrisables</u>. <u>Définition 3</u>. <u>On dit qu'une métrique sur un ensemble E est compatible avec une structure uniforme $\mathcal{U}$ sur E si la structure uniforme définie par cette métrique est identique à $\mathcal{U}$</u>.

<u>On dit qu'une structure uniforme sur un ensemble E est métrisable s'il existe une métrique sur E compatible avec cette structure</u>. <u>Un espace uniforme est dit métrisable si sa structure uniforme est métrisable</u>.

Des métriques distinctes peuvent être compatibles avec une même structure uniforme ; elles sont alors <u>équivalentes</u> (§ 1, déf. 2).

D'après la condition donnée au § 1 pour que deux familles d'écarts soient équivalentes, deux métriques f , g sur un même ensemble E seront équivalentes si, quel que soit $a > 0$, il existe $b > 0$ tel que $g(x,y) \leqslant b$ entraîne $f(x,y) \leqslant a$, et que $f(x,y) \leqslant b$ entraîne $g(x,y) \leqslant a$.

Cette condition montre en particulier que, si f est une métrique donnée sur E , la fonction composée $g = \varphi \circ f$ est une métrique sur E équivalente à f , lorsque la fonction positive φ , définie sur l'ensemble P des nombres $\geqslant 0$, vérifie les conditions suivantes : 1° $\varphi(0)=0$ et $\varphi(u) \neq 0$ si $u \neq 0$; 2° φ est continue au point 0 ; 3° φ est strictement croissante dans un voisinage de 0 ; 4° $\varphi(u+v) \leqslant \varphi(u)+\varphi(v)$ quels que soient u et v positifs.

Par exemple, les fonctions

$\sqrt{u}$, $\log_a(1+u)$ (a base quelconque), $u/(1+u)$

possèdent ces propriétés, comme le lecteur le vérifiera aisément. Le dernier de ces exemples montre qu'il existe toujours des métriques <u>bornées</u> équivalentes à une métrique donnée.

<u>Théorème 1</u>. <u>Pour qu'une structure uniforme soit métrisable, il faut et il suffit qu'elle soit séparée et que le filtre des entourages de cette structure ait une base dénombrable</u>.

La condition est évidemment <u>nécessaire</u>, car (avec les notations de ce paragraphe) les entourages $V_{1/n}$ $(n=1,2,\ldots)$ forment une base du filtre d'entourages de la structure uniforme d'un espace métrique.

Pour voir que la condition est <u>suffisante</u>, remarquons d'abord que si (X_n) est une base du filtre d'entourages d'une structure uniforme $\mathcal{U}$ sur un ensemble E , on peut trouver une base équivalente (U_n) formée d'entourages symétriques tels que $\overset{3}{U}_{n+1} \subset U_n$ quel que soit n ; il suffit de définir par récurrence U_{n+1} comme un entourage symétrique tel que $\overset{3}{U}_{n+1} \subset U_n \cap \bigcap_{p=1}^{n} X_p$. A partir de cette suite d'entourages, on peut alors, par le procédé employé au cours de la démonstration du th.1 du § 1 , définir un écart f sur E tel que la famille des ensembles $\overset{-1}{f}([0,a])$, où a parcourt l'ensemble des nombres > 0 , soit un système fondamental d'entourages équivalent à (U_n). Comme $\mathcal{U}$ est séparée, f est une <u>métrique</u> sur E compatible avec $\mathcal{U}$, d'où le théorème.

Ce raisonnement montre plus généralement que, pour qu'une structure uniforme puisse être définie par <u>un seul écart</u>, il faut et il suffit que le filtre des entourages de cette structure ait une base dénombrable.

<u>Corollaire 1</u>. <u>Une structure uniforme séparée définie par une famille dénombrable d'écarts est métrisable</u>.

En effet, si (f_n) est la suite d'écarts définissant une telle structure, le filtre des entourages est engendré par la famille dénombrable des ensembles $\overset{-1}{f_n}([0,1/m])$, où m et n parcourent $\mathbb{N}$.

<u>Corollaire 2</u>. <u>La structure uniforme produit d'une famille dénombrable de structures métrisables est métrisable</u>.

En effet, soit (E_n) une suite dénombrable d'espaces métriques, f_n la métrique sur E_n ; $x=(x_n)$ et $y=(y_n)$ étant deux points quelconques du produit $E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$, posons $\overline{f}_n(x,y) = f_n(x_n,y_n)$; $\overline{f}_n$ est un écart sur E , et la structure uniforme de l'espace produit E est évidemment identique à la structure définie par la famille d'écarts $(\overline{f}_n)$, d'où la proposition.

Lorsqu'il s'agit du produit E d'un nombre <u>fini</u> d'espaces métriques $E_1,E_2,\ldots,E_n$, on peut prendre, entre autres, comme métriques compatibles avec la structure uniforme de ce produit, l'une quelconque des trois fonctions

$$\operatorname*{Max}_{1\leq i\leq n} f_i(x_i,y_i)\ ,\qquad \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i,y_i)\qquad \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(f_i(x_i,y_i))^2}$$

On voit en effet sans peine que ces trois fonctions sont des métriques sur E , et que la première définit la structure uniforme de E ; pour voir qu'elles sont équivalentes, il suffit de remarquer qu'on a

$$\operatorname*{Max}_{1\leq i\leq n} f_i(x_i,y_i) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(f_i(x_i,y_i))^2} \leq \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i,y_i) \leq$$

$$\leq n.\operatorname*{Max}_{1\leq i\leq n} f_i(x_i,y_i)$$

Corollaire 3. Pour que les structures uniformes d'un groupe topologique soient métrisables, il faut et il suffit qu'il existe un système fondamental dénombrable de voisinages de l'unité.

C'est une conséquence immédiate de la définition des entourages dans les structures uniformes d'un groupe topologique (ch.III, § 2).

Espaces topologiques métrisables. Définition 4. On dit qu'une métrique f sur un ensemble E est compatible avec une topologie $\mathcal{C}$ sur E si la topologie déduite de la structure uniforme définie par f est identique à $\mathcal{C}$. On dit qu'un espace topologique E est métrisable s'il existe une métrique sur E compatible avec la topologie de E.

Il peut exister des métriques non équivalentes compatibles avec la topologie d'un espace métrisable E ; en outre, il peut exister des structures uniformes non métrisables compatibles avec la topologie d'un espace topologique métrisable.

Un exemple du premier de ces faits est fourni par le sous-espace P^* de $\mathbb{R}$ formé des nombres réels > 0 ; la structure uniforme induite par celle de $\mathbb{R}$ et la structure uniforme du groupe multiplicatif P^* sont toutes deux métrisables, et compatibles avec la topologie de P^*, mais ne sont pas comparables.

Pour avoir un exemple d'espace métrisable sur lequel on peut définir une structure uniforme non métrisable, considérons un espace discret E, non dénombrable. La structure uniforme discrète est compatible avec sa topologie, et est métrisable. Mais la structure uniforme des partitions finies (ch.II, § 1) est aussi compatible avec la topologie discrète, et elle n'est pas métrisable. Sinon, il existerait une suite ($\mathfrak{F}_n$) de partitions finies de E telle que toute partition finie de E soit formée d'ensembles dont chacun serait réunion d'ensembles de l'une des partitions de la suite ($\mathfrak{F}_n$) (en vertu du th.1, comme on le voit immédiatement). Il en résulterait que l'ensemble des partitions finies de E serait dénombrable ; or, la puissance de cet ensemble est supérieure à celle de E , ce qui entraîne contradiction avec l'hypothèse.

Il est évidemment facile de vérifier qu'une métrique f <u>donnée</u> sur un ensemble E est compatible avec une topologie $\mathcal{C}$ <u>donnée</u> sur E ; il suffit de voir si, en tout point x , les boules ouvertes (ou fermées) de centre x forment un système fondamental de voisinages de x . Par contre, on ne connaît pas de condition <u>nécessaire et suffisante</u> simple pour qu'une topologie donnée soit <u>métrisable</u>. Pour le moment, nous nous contenterons d'indiquer des propriétés d'une telle topologie, qui sont donc des conditions <u>nécessaires</u> de métrisabilité ; mais ces conditions ne sont nullement suffisantes.

En premier lieu, <u>tout point d'un espace métrisable possède un système fondamental dénombrable de voisinages</u> (à savoir, les boules ouvertes, ou fermées, de rayon 1/n (n=1,2,...), relatives à une métrique compatible avec la topologie de l'espace considéré).

Plus généralement, on a la proposition suivante :

<u>Proposition 3</u>. <u>Dans un espace métrisable, tout ensemble fermé est intersection d'une famille dénombrable d'ensembles ouverts</u> ; <u>tout ensemble ouvert est réunion d'une famille dénombrable d'énsembles fermés</u>.

En effet, si A est un ensemble fermé dans un espace métrisable E , d(x,A) la distance d'un point x à A , relative à une métrique compatible avec la topologie de E , on a $d(x,A)\neq 0$ pour tout point $x \notin A$;

donc A est l'intersection des ensembles ouverts $V_{1/n}(A)$ (ensemble des points x tels que $d(x,A) < 1/n$). La seconde partie de la proposition résulte de la première par passage aux complémentaires.

Il ne faudrait pas croire que la proposition 3 soit une conséquence de l'existence, en tout point de l'espace, d'un système fondamental dénombrable de voisinages. On peut donner des exemples d'espaces où tout point a un système fondamental dénombrable de voisinages, mais où il existe des ensembles fermés qui ne sont pas des intersections dénombrables d'ensembles ouverts (voir exerc. 11).

Notons encore que tout espace métrisable est évidemment <u>complètement régulier</u> ; nous verrons au § 3 que cette propriété est entraînée par une propriété beaucoup plus précise, appartenant aussi aux espaces métrisables.

Enfin, il est clair que tout sous-espace d'un espace métrisable est métrisable, et que le produit d'une famille dénombrable d'espaces métrisables est métrisable.

Au contraire, le produit d'une famille <u>non dénombrable</u> d'espaces séparés contenant chacun plus d'un point, ne peut être métrisable ; car tout voisinage d'un point dans un espace produit contient un ensemble élémentaire (ch.I, § 8), et l'intersection d'une famille dénombrable d'ensembles élémentaires ne se réduit jamais à un seul point, dans le cas considéré.

<u>Emploi des suites dénombrables</u>. Le fait que tout point d'un espace métrisable a un système fondamental <u>dénombrable</u> de voisinages est à l'origine du rôle qu'on peut faire jouer aux <u>suites dénombrables de points</u>

d'un tel espace : dans beaucoup de questions, leur emploi peut se substituer à celui des filtres. En effet, tout filtre convergent est alors plus fin qu'un filtre convergent à base dénombrable (celui des voisinages du point limite) ; comme d'autre part, tout filtre à base dénombrable est le filtre intersection des filtres élémentaires plus fins que lui (ch.I, § 5,prop.10), l'ensemble des filtres convergents sur un espace métrisable, est déterminé par l'ensemble des suites convergentes de points de cet espace.

Ce fait, comme toutes les conséquences que nous en tirerons, est encore valable pour les espaces où tout point a un système fondamental dénombrable de voisinages, mais est inexact pour tout autre espace. C'est pourquoi la notion de suite est tout à fait inadaptée à l'étude des espaces topologiques généraux. On peut former en particulier des espaces topologiques non discrets où, en chaque point, l'intersection d'une famille dénombrable de voisinages est encore un voisinage(*); dans un tel espace, il n'y a pas d'autres suites convergentes que celles dont tous les termes sont égaux à partir d'un certain rang.

Nous laissons au lecteur la démonstration des propositions suivantes, qui peut se faire, soit directement, soit en appliquant les propositions générales sur les limites (ch.I, § 6) et les remarques qui précèdent.

Proposition 4. Une condition nécessaire pour qu'un point x soit adhérent à une partie A d'un espace métrisable E , est qu'il existe une suite de points de A , qui converge vers x .

Proposition 5. Une condition nécessaire pour qu'un point a d'un espace métrisable E soit valeur d'adhérence d'une suite (x_n) de points de E , est qu'il existe une suite extraite de (x_n), et qui converge vers a .

Proposition 6. Soient E un espace métrisable, E' un espace topologique séparé, A une partie de E , x_o un point de $\bar{A}$, f une application de A dans E' :

1° Une condition suffisante pour qu'un point $a \in E'$ soit limite de f au point x_o , relativement à A , est que, pour toute suite (x_n) de points de A qui converge vers x_o , la suite $(f(x_n))$ converge vers a

2° Si en outre E' est métrisable, une condition nécessaire pour qu'un point $a \in E'$ soit valeur d'adhérence de f au point x_o , relativement à A , est qu'il existe une suite (x_n) de points de A , qui converge vers x_o , et soit telle que la suite $(f(x_n))$ converge vers a.

Toutes les conditions énoncées dans ces propositions sont en réalité nécessaires et suffisantes ; mais on n'a énoncé, dans chaque cas, que la proposition dans laquelle l'hypothèse de l'existence, en tout point de E (ou E') d'un système fondamental dénombrable de voisinages, est essentielle ; la réciproque de chacune des propositions énoncées est vraie sans aucune hypothèse sur les espaces topologiques E et E'.

Espaces métriques compacts ; espaces métrisables compacts. Le critère de précompacité des espaces uniformes (ch.II, § 4, th.4), donne, pour les espaces métriques, la proposition suivante :

Proposition 7. Pour qu'un espace métrique E soit précompact, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E dont tous les ensembles aient un diamètre inférieur à ε .

Si on ajoute l'hypothèse que E est complet, on obtient un critère de compacité pour les espaces métriques.

Il résulte en particulier de ces propositions que, dans un espace métrique, tout ensemble relativement compact est borné ; mais il faut se garder, en général, d'identifier les notions d'ensemble borné et d'ensemble relativement compact ; nous avons vu, en effet, que sur un espace métrisable quelconque, il existe des métriques compatibles avec la topologie de l'espace et bornées.

De la prop. 7, on déduit un critère topologique de compacité, particulier aux espaces métrisables :

Proposition 8. Pour qu'une partie A d'un espace topologique métrisable E soit relativement compacte, il faut et il suffit que toute suite de points de A ait une valeur d'adhérence dans E .

Il est immédiat, d'après l'axiome (C), que la condition est nécessaire ; pour voir qu'elle est suffisante, considérons une partie A non relativement compacte d'un espace métrisable E . Soit f une métrique compatible avec la topologie de E ; d'après la prop.7, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel qu'il n'y ait aucun recouvrement fini de A par des parties de E de diamètre $\leq \alpha$. On peut alors définir par récurrence une suite (x_n) de points de A par la condition que $f(x_p, x_n) \geq \alpha$ pour tout $p < n$; or, une telle suite ne peut avoir de valeur d'adhérence, puisque toute boule de rayon $< \alpha/2$ contient au plus un point de la suite.

Il faut remarquer que cette proposition n'est pas une conséquence de l'existence, en tout point de E , d'un système fondamental dénombrable de voisinages ; on peut donner des exemples d'espaces non métrisables et non compacts, dans lesquels tout point a un système fondamental dénombrable de voisinages, et toute suite de points une valeur d'adhérence (voir exerc. 11).

Démontrons encore la proposition suivante :

<u>Proposition 9</u>. <u>Si l'espace quotient d'un espace compact métrisable E par une relation d'équivalence R est séparé, il est métrisable</u>.

Soit f l'application canonique de E sur E/R , g=(f,f) son extension au point $E \times E$; la partie C de $E \times E$ définie par la relation R est l'image réciproque par g de la diagonale Δ de $(E/R) \times (E/R)$; comme Δ est fermée, il en est de même de C . Comme E/R est compact, les entourages de sa structure uniforme sont les images par g des voisinages de C dans $E \times E$, <u>saturés</u> pour la relation d'équivalence $R \times R$. Or, <u>tout</u> voisinage de C contient un voisinage saturé pour $R \times R$; en effet, si A est un ensemble ouvert contenant C , $\complement A$ est fermé, donc l'ensemble obtenu en saturant $\complement A$ est encore un ensemble <u>fermé</u> B , saturé pour $R \times R$ (ch.I, § 10, th.1), et ne rencontrant pas C (qui est saturé pour $R \times R$) ; donc $\complement B$ est un voisinage ouvert de C , contenu dans A , et saturé pour $R \times R$. On peut donc dire que les entourages de la structure uniforme de E/R sont les images par g de <u>tous</u> les voisinages de C dans $E \times E$. Or, comme E est compact et métrisable, il en est de même de $E \times E$; le filtre des voisinages de l'ensemble fermé C a donc une <u>base dénombrable</u> (ch.II, § 4, prop.1 , et ce § , th.1) ; le filtre des entourages de la structure uniforme de E/R a donc aussi une base dénombrable, d'où la proposition (th.1).

Comme les espaces $P^n(\mathbb{R})$, $P^n(\mathbb{C})$, $P^{n,p}(\mathbb{R})$, $P^{n,p}(\mathbb{C})$ peuvent être considérés comme espaces quotients d'espaces compacts métrisables (parties d'espaces numériques, voir ch.V, § 4 et ch.VI, § 3), on voit que ces espaces sont aussi métrisables.

Corollaire. Si f est une application continue d'un espace compact métrisable E dans un espace séparé E' , $f(E)$ est un sous-espace compact métrisable de E' .

On sait en effet (ch.I, § 10) que $f(E)$ est homéomorphe à l'espace quotient de E par la relation d'équivalence $f(x)=f(y)$.

Espaces métriques complets. On a vu au § 1 que, si un espace uniforme séparé E a sa structure définie par une famille d'écarts (f_ι), la structure uniforme de son complété $\hat{E}$ est définie par la famille $(\overline{f}_\iota)$ des écarts f_ι prolongés à $\hat{E}\times\hat{E}$ par continuité. Cela montre en particulier que la structure uniforme du complété d'un espace métrique E est définie par un seul écart, et comme cette structure est séparée, c'est une structure uniforme métrisable ; en outre, si f est la métrique de E , son prolongement $\overline{f}$ à $\hat{E}\times\hat{E}$ est une métrique sur $\hat{E}$ compatible avec la structure uniforme de cet espace ; quand on parle de $\hat{E}$ comme d'un espace métrique, on sous-entend toujours, sauf mention expresse du contraire, qu'il s'agit de $\hat{E}$ muni de la structure d'espace métrique définie par $\overline{f}$.

D'après la prop.4, appliquée au sous-espace E de $\hat{E}$, si E n'est pas complet, il existe une suite de Cauchy, formée de points de E , et ne convergeant pas dans E , Par suite, pour qu'un espace métrique E soit complet, il faut et il suffit que toute suite de Cauchy dans E soit convergente.

Les espaces métriques complets se rapprochent, dans une certaine mesure, des espaces compacts, par la propriété suivante, dont nous verrons ci-dessous les importantes applications :

<u>Proposition 10</u> (<u>lemme de Baire</u>). <u>Dans un espace métrique complet, l'intersection d'une suite dénombrable décroissante</u> (F_n) <u>d'ensembles fermés non vides, dont le diamètre tend vers 0, se compose d'un seul point</u>.

En effet, cette suite engendre un filtre de Cauchy, dont le point limite est le seul point adhérent, donc appartient à tous les ensembles de la suite.

La restriction relative au diamètre de F_n est essentielle : si on prend par exemple, sur la droite numérique, la suite décroissante des ensembles fermés $F_n = [n,+\infty[$, leur intersection est vide.

<u>Ensembles épars. Ensembles épuisables et ensembles inépuisables.</u>

<u>Définition 5</u>. <u>Dans un espace topologique E , un ensemble A est dit épars</u> (ou <u>partout non dense</u>) <u>si l'extérieur de A est partout dense dans E</u> .

<u>Exemples</u>. L'ensemble vide est toujours un ensemble épars. Un ensemble réduit à un point est épars lorsque ce point n'est pas isolé dans l'espace. La <u>frontière</u> d'un ensemble <u>ouvert</u> non vide est un ensemble épars. Un ensemble partout dense n'est jamais épars.

On a une définition équivalente en disant qu'un ensemble est épars dans E si <u>son adhérence ne contient aucun ensemble ouvert non vide</u>, ou encore si <u>l'intérieur de son adhérence est vide</u>.

Tout point d'un ensemble épars A est donc <u>point frontière</u> de A . Réciproquement, si un ensemble <u>fermé</u> est <u>contenu dans sa frontière</u>, il est épars, car il ne peut avoir de point intérieur. Mais un ensemble <u>non fermé</u> peut être contenu dans sa frontière sans être épars, comme le montre l'exemple de l'ensemble Q des nombres rationnels, sur la droite numérique R .

D'après la définition 5 , pour qu'un ensemble soit épars, il faut et il suffit que son adhérence soit un ensemble épars ; tout ensemble contenu dans un ensemble épars est un ensemble épars.

Si A est une partie non vide d'un espace topologique E , un sous-ensemble B de A est dit <u>épars par rapport à A</u> (ou "relativement à A ", ou "dans A") s'il est épars lorsqu'on le considère comme partie du <u>sous-espace</u> A de E . Tout ensemble B épars relativement à une partie A de E est aussi épars dans E : car si l'adhérence de B dans E contenait un ensemble ouvert U , $A \cap U$ serait un ensemble ouvert par rapport à A , non vide et contenu dans l'adhérence de B par rapport à A .

<u>La réunion d'un nombre fini d'ensembles épars dans un espace</u> E <u>est un ensemble épars dans</u> E . Il suffit de le démontrer pour <u>deux</u> ensembles épars A,B ; on peut évidemment se borner au cas où ils sont <u>fermés</u>. Soit U un ensemble ouvert non vide : $U \cap \complement A$ est un ensemble ouvert non vide, donc aussi $(U \cap \complement A) \cap \complement B = U \cap \complement (A \cup B)$, ce qui montre que U ne peut être contenu dans $A \cup B$.

<u>Définition 6</u>. <u>Dans un espace topologique E , un ensemble A est dit épuisable s'il est la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles épars dans E , inépuisable dans le cas contraire</u>.

Tout ensemble épars est évidemment épuisable ; mais un ensemble <u>épuisable</u> dans E peut être <u>partout dense</u> dans E ; l'espace E lui-même peut être <u>épuisable</u>.

Un exemple de ce dernier fait est fourni par la droite rationnelle $\mathbb{Q}$, et plus généralement, par tout espace dénombrable sans point isolé. Mais inversement, un espace épuisable n'est pas nécessairement dénombrable (voir exerc. 17 bis).

Toute partie d'un ensemble épuisable dans un espace E est encore épuisable dans E ; la réunion d'une famille <u>dénombrable</u> d'ensembles épuisables dans E est encore épuisable dans E .

Si A est une partie non vide d'un espace E , une partie B de A est dite <u>épuisable par rapport à A</u> (ou "relativement à A"), si elle est la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles <u>épars par rapport à A</u> ; dans le cas contraire, B est dite <u>inépuisable par rapport à A</u> .

Si B est une partie de A , <u>épuisable par rapport à A</u> , elle est aussi <u>épuisable par rapport à E</u> .

Lorsque A est épuisable (resp. inépuisable) <u>par rapport à lui-même</u> on dit que c'est un <u>sous-espace épuisable</u> (resp. <u>inépuisable</u>) de E.

Un <u>sous-espace inépuisable</u> de E peut naturellement être un <u>ensemble épuisable</u>, et même un <u>ensemble épars</u>, <u>par rapport à E</u> . Un exemple de ce dernier fait est fourni par les variétés linéaires à p dimensions ($p < n$) dans $\mathbb{R}^n$, comme il résulte du th. 2 ci-dessous.

Pour les applications de la notion d'ensemble épuisable, les espaces topologiques les plus intéressants sont ceux dans lesquels <u>tout ensemble ouvert non vide</u> (et en particulier <u>l'espace lui-même</u>) <u>est inépuisable)</u>. Cette condition peut se transformer de la manière suivante :

<u>Proposition 11. Pour que, dans un espace E , tout ensemble ouvert non vide soit inépuisable, il faut et il suffit que l'intersection de toute famille dénombrable d'ensembles ouverts partout denses dans E soit un ensemble partout dense.</u>

La condition est <u>nécessaire</u> ; en effet, si (A_n) est une famille dénombrable d'ensembles ouverts partout denses, les ensembles $B_n = \complement A_n$ sont épars, et leur réunion, étant épuisable, ne peut contenir d'ensemble ouvert non vide, un tel ensemble étant inépuisable par hypothèse ; cela signifie que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ est partout dense.

La condition est <u>suffisante</u> ; en effet, si un ensemble ouvert non vide A est réunion d'une suite (B_n) d'ensembles épars, l'intersection des ensembles ouverts partout denses $\complement \overline{B}_n$ ne rencontre pas A , donc n'est pas partout dense.

La condition énoncée dans la prop.11 peut encore s'exprimer en disant que <u>tout ensemble épuisable dans E a un intérieur vide</u>, ou que <u>le complémentaire d'un ensemble épuisable est partout dense</u>.

<u>Corollaire. Soit E un espace tel que tout ensemble non vide ouvert dans E soit inépuisable ; si A est le complémentaire d'un ensemble épuisable dans E , A est un sous-espace tel que toute partie non vide de A , ouverte par rapport à A , soit inépuisable par rapport à A</u> .

En effet, soit B un ensemble épuisable par rapport à A ; B est aussi épuisable par rapport à E , donc $B \cup \complement A$ est épuisable par rapport à E ; mais alors son complémentaire par rapport à E , qui est aussi le complémentaire de B par rapport à A , est partout dense dans E , donc aussi partout dense dans A , d'où la proposition.

On ne connaît pas de condition topologique <u>nécessaire et suffisante</u> pour qu'un espace topologique E soit tel que tout ensemble ouvert dans E soit inépuisable. Mais les espaces les plus importants parmi ceux qu'on rencontre en Analyse appartiennent à cette catégorie, comme il résulte du théorème suivant :

Théorème 2. Tout ensemble ouvert non vide dans un espace topologique E est inépuisable dans E , dans chacun des deux cas suivants :

1° E est localement compact ;

2° il existe une métrique sur E , compatible avec la topologie de E et définissant sur E une structure d'espace métrique complet.

D'après la prop. 11, on va montrer que l'intersection d'une suite d'ensembles ouverts partout denses dans E est partout dense, dans chacun des deux cas de l'énoncé.

Soit (A_n) une suite d'ensembles ouverts partout denses dans E , G un ensemble ouvert non vide quelconque. Montrons qu'on peut définir par récurrence une suite (G_n) d'ensembles ouverts non vides tels que $G_1=G$, et $\overline{G}_{n+1} \subset G_n \cap A_n$; en effet, G_n étant non vide par hypothèse, $G_n \cap A_n$ est un ensemble ouvert non vide ; comme E est régulier par hypothèse, il existe bien un ensemble ouvert non vide G_{n+1} tel que $\overline{G}_{n+1} \subset G_n \cap A_n$. Cela étant, l'ensemble $G \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ contient l'intersection des G_n , et cette dernière est identique à l'intersection des $\overline{G}_n$; tout revient à montrer que les ensembles $\overline{G}_n$ ont une intersection non vide. Or, lorsque E est localement compact, on peut supposer $\overline{G}_2$ compact ; la proposition résulte alors de l'axiome (C''), les $\overline{G}_n$ $(n \geqslant 2)$ formant une suite décroissante d'ensembles fermés dans l'espace compact $\overline{G}_2$. Lorsque E est un espace métrique complet (pour une métrique compatible avec sa topologie), on peut choisir $\overline{G}_n$ de sorte que son diamètre (relativement à cette métrique) tende vers 0 avec $1/n$; et la proposition résulte alors du lemme de Baire.

<u>Corollaire</u>. <u>Si E est un espace localement compact, ou un espace métrique complet, et A une partie non vide de E , intersection d'une suite dénombrable</u> (A_n) <u>d'ensembles ouverts dans E , A est un sous-espace tel que tout ensemble non vide ouvert par rapport à A soit inépuisable par rapport à A</u> .

En effet, si E est localement compact (resp. métrique complet), $\overline{A}$ est un sous-espace localement compact (resp. métrique complet). Or A est égal à l'intersection des ensembles $A_n \cap \overline{A}$, qui sont ouverts par rapport à $\overline{A}$ et denses par rapport à $\overline{A}$; autrement dit, A est, par rapport à $\overline{A}$, le complémentaire d'un ensemble épuisable d'où la proposition, d'après le th. 2 et le corollaire de la prop. 11.

<u>Remarque</u>. On voit en particulier que, si E est un espace localement compact, ou un espace métrique complet, le <u>complémentaire A d'une partie dénombrable de E est un sous-espace tel que tout ensemble non vide ouvert par rapport à A soit inépuisable par rapport à A</u> . Ceci montre déjà que les deux cas examinés dans le th.2 ne sont pas les seuls dans lesquels un espace E est tel que tout ensemble non vide dans E soit inépuisable ; on peut en effet donner des exemples d'espaces compacts dans lesquels le complémentaire d'un ensemble dénombrable partout dense est un sous-espace qui n'est ni métrisable, ni localement compact (voir exerc. 13).

De même, on voit aisément que la démonstration du th.2 subsiste lorsqu'on suppose seulement que tout point de E possède un voisinage V tel qu'on puisse définir sur le sous-espace V de E une structure d'espace métrique complet compatible avec sa topologie. Or, on peut former des espaces de cette nature qui ne sont, ni métrisables, ni localement compacts (voir 3, exerc. 10).

La notion d'ensemble épuisable intervient principalement dans des propositions relatives aux fonctions continues définies dans un espace topologique, et prenant leurs valeurs dans un *espace métri~~sab~~que* (en particulier les fonctions continues *numériques*), ou aux suites de fonctions de cette nature.

Proposition 12. *Soit f une application continue d'une partie partout dense A d'un espace topologique E dans un espace métrique complet E'* ; *on peut prolonger f par continuité dans le complémentaire d'un ensemble épuisable dans E* .

Il faut montrer que les points de E où f n'a pas de limite relativement à A forment un ensemble épuisable ; or ces points sont les points x où $\omega(x;f)\neq 0$; il nous suffira de montrer que, pour tout entier $n > 0$, l'ensemble des points $x \in E$ où $\omega(x;f) \geqslant 1/n$ est un ensemble *épars*. Or, si on a $\omega(x;f) < 1/n$, il existe un voisinage ouvert V de x tel que le diamètre de l'ensemble $f(V \cap A)$ soit $< 1/n$; pour tout $y \in V$, V est un voisinage de y , et on a donc $\omega(y;f) < 1/n$ ce qui montre que l'ensemble des points où $\omega(x;f) < 1/n$ est *ouvert* ; comme cet ensemble contient A , il est *partout dense*, d'où la proposition.

On en déduit que, lorsque E est un espace *inépuisable*, on peut prolonger f par continuité dans un ensemble *inépuisable* dans E .

Proposition 13. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions, continues dans un espace E tel que tout ensemble non vide ouvert dans E soit inépuisable, et prenant leurs valeurs dans un espace métrique E'* ;

<u>si la suite</u> $(f_n(x))$ <u>converge quel que soit</u> $x \in E$, <u>et si on désigne sa limite par</u> ~~(fx(x))~~ $f(x)$, <u>l'ensemble des points de</u> E <u>où</u> f <u>est discontinue est épuisable dans</u> E .

Il suffit de voir que l'ensemble des points $x \in E$ tels que $\omega(x;f) > 1/n$ est <u>épars</u> dans E , quel que soit l'entier $n > 0$. Or, soit A un ensemble ouvert non vide dans E , et soit H_{mn} l'ensemble des points de $\overline{A}$ tels que la distance de $f_m(x)$ et $f_n(x)$ soit $\leqslant 1/2n$, et G_n l'ensemble $\bigcap_{m \geqslant n} H_{mn}$; d'après la continuité de la métrique sur E' et des fonctions f_n , H_{mn} est fermé, donc aussi G_n.

D'autre part, la suite $(f_n(x))$ étant convergente pour tout $x \in E$, on a $\overline{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$; or $\overline{A}$, comme A , est inépuisable dans E ; donc, il existe un entier $n > 0$ tel que G_n soit <u>inépuisable</u>, et comme G_n est fermé, il contient un ensemble ouvert non vide B . En tout point de B , on a donc $d(f_m(x),f_n(x)) \leqslant 1/2n$ (d métrique sur E') quel que soit $m \geqslant n$, ce qui, en vertu du principe de prolongement des inégalités entraîne $d(f(x), f_n(x)) \leqslant 1/2n$ en tout point $x \in B$; comme f_n est continue, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V \subset B$ de x tel que l'oscillation de f_n dans V soit $\leqslant \varepsilon$. On a donc, pour tout couple (y,z) de points de V

$$\begin{aligned} d(f(y),f(z)) &\leqslant d(f(y),f_n(y))+d(f_n(y),f_n(z))+d(f(z),f_n(z)) \\ &\leqslant 1/n + \varepsilon \end{aligned}$$

et comme ε est arbitraire, on voit qu'on a $\omega(x;f) \leqslant 1/n$, ce qui montre que l'ensemble des points où cette inégalité a lieu contient un ensemble ouvert partout dense, d'où la proposition.

<u>Proposition 14</u>. <u>Soit</u> (f_n) <u>une suite de fonctions continues numériques, définies dans un espace inépuisable</u> E . <u>Si on a , en tout point</u> $x \in E$, $\limsup_{n \to \infty} f_n(x) < +\infty$, <u>il existe un nombre fini</u> k <u>et un ensemble</u>

<u>non vide A , ouvert dans E , tel que</u> $f_n(x) < k$ <u>quel que soit n et quel que soit</u> $x \in A$.

En effet, soit $G_p = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overset{-1}{f_n}(\left[-\infty, p\right])$, pour tout entier p ; G_p est fermé, et on a par hypothèse $E = \bigcup_{p=-\infty}^{+\infty} G_p$; comme E est inépuisable , il existe un entier p tel que G_p soit inépuisable, et comme G_p est fermé, il contient un ensemble ouvert non vide, d'où la proposition.

<u>Exercices</u>. 1) Montrer que tout espace uniforme séparé E est isomorphe à un sous-espace d'un produit d'espaces métriques. Soit (f_ι) une famille d'écarts définissant la structure uniforme de E , R_ι la relation d'équivalence $f_\iota(x,y)=0$; considérer la structure métrique définie sur E/R_ι par la métrique correspondant à f_ι par passage au quotient ; si x_ι est l'image d'un point $x \in E$ par l'application canonique de E sur E/R_ι , et $\bar{x}$ le point de l'espace produit F des espaces métriques E/R_ι , qui a pour coordonnées les points x_ι , montrer que l'application $x \rightarrow \bar{x}$ est un isomorphisme de E sur un sous-espace de F.)

2) Dans un espace métrique connexe E , dont la métrique n'est pas bornée, une sphère quelconque n'est jamais vide.

2^{bis}) Si, dans un espace métrique compact E , l'adhérence de toute boule ouverte est la boule fermée de même centre et même rayon, toute boule dans E est un ensemble connexe (si x et y sont deux points de E , montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble A_{y,V_ε} (notations de ce § et du § 4 du ch.II) des points pouvant être joints à y par une V_ε-chaîne, contient des points z tels que $d(x,z) < d(x,y)$, puis en déduire que $x \in A_{y,V_\varepsilon}$ quel que soit $\varepsilon > 0$, en raisonnant par l'absurde et utilisant le 2^{e} théorème de Weierstrass (ch.IV, § 5, th.2)) .

3) Soit (E_n) une suite d'espaces uniformes métrisables, f_n une métrique de borne supérieure ≤ 1 , compatible avec la structure uniforme de E_n. Montrer que la fonction f , définie sur le produit $(\prod_n E_n) \times (\prod_n E_n)$ par la relation

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n,y_n)/2^n \quad \text{avec} \quad x=(x_n) \ , \quad y=(y_n)$$

est une métrique compatible avec la structure uniforme produit des structures des E_n .

4) Soit E un espace métrique, $d(x,A)$ la distance d'un point x à un ensemble A dans cet espace. Si A et B sont deux parties quelconques de E , on pose $\rho(A,B)= \sup_{x \in A} d(x,B)$, puis $\sigma(A,B)=\mathrm{Max}(\rho(A,B),\rho(B,A))$. Montrer que, sur l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties de E , σ est un écart, et que la structure uniforme qu'il définit n'est autre que la structure uniforme déduite, par le procédé exposé dans l'exerc. 7 du § 2 du ch.II, de celle de l'espace E .

5) Pour qu'un espace compact soit métrisable, il faut et il suffit que sa topologie admette une <u>base</u> (ch.I, § 2) dénombrable (Utiliser la prop.7 pour montrer que la condition est nécessaire, le th.1 et la définition des entourages de la structure uniforme d'un espace compact pour montrer qu'elle est suffisante).

6) On dit qu'un espace localement compact est dénombrable à <u>l'infini</u> s'il est la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles compacts. Montrer que tout espace localement compact E dénombrable à l'infini et métrisable admet une base topologique dénombrable (on établira que E peut être considéré comme la réunion d'une suite croissante d'ensembles ouverts relativement compacts (U_n), tels que $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$, puis on appliquera aux sous-espaces $\overline{U}_n$ la proposition démontrée dans l'exercice précédent)

En déduire que l'espace compact obtenu par adjonction à E d'un "point à l'infini" est aussi métrisable.

7) Pour que la topologie d'un espace métrisable E admette une base dénombrable, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble dénombrable partout dense dans E .

8) Soit E un espace métrique complet dont la métrique f satisfait à l'inégalité

$$(2) \qquad f(x,y) \leqslant \mathrm{Max}(f(x,z),f(y,z))$$

quels que soient x,y,z. Montrer que, pour qu'une suite (x_n) soit convergente dans E , il faut et il suffit que $f(x_n,x_{n+1})$ tende vers 0 avec 1/n. Application à l'espace $\hat{Q}_p$ des nombres p-adiques (on montrera que $|x-y|_p$ est une métrique compatible avec la structure uniforme de $\hat{Q}_p$).

9) On considère l'ensemble produit E d'une famille dénombrable (F_n) d'ensembles quelconques. Pour tout couple d'éléments $x=(x_n)$, $y=(y_n)$ de E , on désigne par k(x,y) le plus petit entier $\geqslant 1$ tel que $x_n \neq y_n$, et on pose $f(x,y)=1/k(x,y)$. Montrer que f est une <u>métrique</u> sur E , satisfaisant à l'inégalité (2), et définissant sur E une structure d'espace métrique complet. En déduire en particulier qu'on peut définir, sur le sous-espace I de $\mathbb{R}$ formé des nombres irrationnels, une métrique compatible avec la topologie de I et définissant sur I une structure d'espace métrique complet (utiliser le développement en fraction continuelle des nombres de I).

10) Soit E un espace métrique complet, A l'intersection non vide d'une suite (A_n) d'ensembles ouverts dans E . Montrer qu'il existe une métrique sur le sous-espace A , compatible avec la topologie de cet espace, et définissant sur A une structure d'espace métrique

<u>complet</u> (Définir sur A une structure uniforme par la famille d'écarts formés de la métrique $d(x,y)$ de l'espace E , et des écarts

$$f_n(x,y) = \left|1/d(x,B_n)-1/d(y,B_n)\right|$$

B_n désignant le complémentaire de A_n.)

11) Soit E un ensemble <u>bien ordonné</u>, non dénombrable mais tel que tout intervalle $[a,x]$ (a plus petit élément de E , x élément quelconque) soit dénombrable ; on considère l'espace topologique obtenu en munissant E de la topologie $\mathcal{C}_-(E)$; il est localement compact (ch.I, § 10,exerc.20), et non compact.

a) Montrer que tout point de E admet un voisinage métrisable, et par suite un système fondamental dénombrable de voisinages (utiliser l'exerc. 5).

b) Toute suite croissante dans E admet une limite ; toute suite admet une valeur d'adhérence ; en déduire que E n'est pas métrisable. Pour qu'une partie de E soit relativement compacte, il faut et il suffit qu'elle soit majorée.

c) Si A et B sont deux ensembles fermés dans E , et non compacts, ils ont une intersection non vide (former une suite croissante dont les termes de rang pair appartiennent à A , ceux de rang impair à B). En déduire que l'intersection d'une suite de voisinages d'un ensemble fermé non compact est le complémentaire d'un ensemble relativement compact ; montrer qu'il existe des ensembles fermés dans E qui ne sont pas des intersections de suites d'ensembles ouverts.

12) On considère l'espace topologique R_- obtenu en munissant l'ensemble R des nombres réels de la topologie $\mathcal{C}_-(R)$ (ch.I, § 1, exerc.3).

a) Montrer que tout ensemble ouvert dans R_- est la réunion d'une famille dénombrable d'intervalles semi-ouverts à gauche ou ouverts, et non empiétants. En déduire que tout ensemble ouvert est la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés, et que tout ensemble ouvert non vide est inépuisable dans R_- .

b) Montrer que la topologie induite sur une partie non dénombrable A de R par $\mathcal{C}_-(R)$, n'admet pas de base dénombrable (on montrera que, pour tout $x \in A$, il existe un ensemble d'une base de la topologie du sous-espace A qui admet x pour borne supérieure dans R). En déduire que toute partie relativement compacte de R_- est dénombrable.

c) Montrer que R_- n'est pas métrisable : on supposera qu'il existe une métrique $d(x,y)$ compatible avec la topologie $\mathcal{C}_-(R)$; on montrera que, si S_x désigne l'intervalle $]x,+\infty[$, on a en tout point x , $d(x,S_x) > 0$, et que l'ensemble A_n des points x tels que $d(x,S_x) < 1/n$ est ouvert et partout dense ; d'après les résultats de a), on en tirera une contradiction. On montrera de même que tout sous-espace de R_- contenant un ensemble ouvert (ou une intersection dénombrable d'ensembles ouverts) n'est pas métrisable.

13) On considère, sur l'ensemble R des nombres réels, la topologie $\mathcal{C}$ définie de la manière suivante : pour tout $y > 0$, $U_y(x)$ désignera la réunion des intervalles $[x,x+y[$ et $]-x-y,-x[$; $\mathcal{C}$ est la topologie dans laquelle un système fondamental de voisinages d'un point quelconque x est formé des ensembles $U_y(x)$, lorsque y parcourt l'ensemble des nombres > 0 .

Soit E l'espace obtenu en munissant l'intervalle $[-1,+1]$ de la topologie induite par $\mathcal{C}$.

Montrer que E est compact, mais non métrisable (utiliser l'exerc.12 pour montrer qu'il existe des sous-espaces non métrisables de E). Montrer que tout ensemble compact non dénombrable contenu dans E est non métrisable ; en déduire que le complémentaire d'une partie dénombrable A de E est un sous-espace non métrisable (établir que ce complémentaire contient un ensemble compact non dénombrable).

14) Soit X une partie d'un espace topologique E ; on désigne par D(X) la partie de E formée des points x tels que, pour tout voisinage V de x , $V \cap X$ soit un ensemble inépuisable dans E . On a $D(X) \subset \overline{X}$. Montrer que, si Y est un ensemble tel que $D(Y)=\emptyset$, on a $D(X \cup Y) = D(X)$.

15) Pour que $D(X)=\emptyset$, il faut et il suffit que X soit un ensemble épuisable dans E . (On commencera par montrer que, si $\mathfrak{F}$ est un ensemble d'ensembles ouverts dans E , sans point commun deux à deux, et si, pour chaque ensemble A_ι de $\mathfrak{F}$, B_ι est épars dans E et contenu dans A_ι , $\bigcup_\iota B_\iota$ est épars dans E . On considérera ensuite un ensemble <u>maximal</u> $\mathfrak{M}$ d'ensembles ouverts dans E , deux à deux sans point commun, et tels que, pour tout ensemble $A \in \mathfrak{M}$, $X \cap A$ soit épuisable ; l'existence d'un tel ensemble maximal s'établira par le théorème de Zorn. On montrera enfin que l'hypothèse entraîne que, si G est la réunion des ensembles de $\mathfrak{M}$, l'ensemble $X \cap \complement G$ est épars dans E , et on en déduira la proposition).

16) Montrer que l'ensemble D(X) est fermé et identique à l'adhérence de son intérieur, et par suite que la frontière de D(X) est un ensemble épars. (Désignant par D'(X) l'adhérence de l'intérieur de D(X), on montrera, en s'appuyant que le résultat de l'exerc.15,

que l'ensemble $X \cap \complement D'(X)$ est épuisable dans E , et on en déduira que $\complement D'(X)$ ne contient pas de point de $D(X)$). En déduire que $X \cap \complement D(X)$ est épuisable dans E .

17) Donner un exemple d'espace métrique complet dans lequel il existe un exemple épuisable ayant la puissance du continu, et dont le complémentaire soit dénombrable.

17^bis) On considère sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, la topologie engendrée par l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Montrer que l'espace topologique ainsi défini est épuisable.

18) Dans un espace localement compact, ou un espace métrique complet, un ensemble fermé dénombrable a au moins un point isolé.

19) Si, dans un espace E , tout ensemble fermé non vide est un sous-espace inépuisable, tout ensemble non vide ouvert dans E est inépuisable (Montrer que tout ensemble ouvert non vide est inépuisable par rapport à son adhérence). Donner un exemple d'espace où tout ensemble ouvert non vide soit inépuisable, mais où il existe un ensemble fermé non vide qui soit un sous-espace épuisable (utiliser le corollaire du th.2).

20) Si, dans un espace E , tout ensemble fermé non vide est un sous-espace inépuisable, tout sous-espace A de E , intersection dénombrable d'ensembles ouverts, est tel que tout ensemble non vide, fermé par rapport à A , soit un sous-espace inépuisable (F étant un sous-ensemble de A , fermé par rapport à A , et $\overline{F}$ son adhérence dans $\overline{A}$, montrer que $\overline{F} \cap \complement F$ est réunion d'une famille dénombrable d'ensembles fermés et épars par rapport à $\overline{F}$).

21) **Soit E un espace connexe, localement connexe et tel que tout ensemble fermé non vide dans E soit un sous-espace inépuisable. Montrer que E ne peut être la réunion d'une suite** (F_n) d'ensembles fermés non vides, deux à deux sans point commun. (On montrera que la réunion H des frontières H_n des F_n est un ensemble fermé, puis que chacun des ensembles H_n est un ensemble épars par rapport à H (utiliser l'exerc.1 du § 11 du ch. I).

22) Si un sous-groupe H d'un groupe topologique G est inépuisable dans G , son adhérence $\overline{H}$ est un sous-groupe ouvert et fermé (Montrer que l'intérieur de D(H) contient H , puis que $\overline{H}$ est contenu dans l'intérieur de D(H) ; utiliser les exerc. 15 et 16)

23) Soit f un homéomorphisme d'une partie A d'un espace métrique complet E , sur une partie A' d'un espace métrique complet E' ; montrer qu'il existe un prolongement $\overline{f}$ de f à un ensemble B , intersection dénombrable d'ensembles ouverts dans E , qui soit un homéomorphisme de B sur un ensemble B' , intersection dénombrable d'ensembles ouverts dans E' (utiliser la prop.12).

§ 3. Espaces normaux.

L'axiome (O_{IV}) des espaces uniformisables peut s'énoncer de la façon suivante : quels que soient l'ensemble fermé A et le point $x \in \complement A$, il existe une application continue de E dans $[0,1]$, égale à 0 au point x , et à 1 en tout point de A ; on exprime encore cette propriété en disant que, dans un espace uniformisable, on peut séparer un point et un ensemble fermé par une fonction continue numérique.

Nous allons maintenant étudier les espaces séparés dans lesquels on peut séparer de la même manière deux ensembles fermés sans point commun;

de façon précise, nous poserons la définition suivante :

Définition 1. On dit qu'un espace topologique séparé E est normal s'il vérifie l'axiome suivant :

(O_V). Quels que soient les ensembles fermés sans point commun A et B dans E , il existe une application continue de E dans $[0,1]$, égale à 0 en tout point de A , et à 1 en tout point de B .

Il est clair que tout espace normal est complètement régulier ; mais on peut définir des espaces complètement réguliers et non normaux (voir exerc. 10).

Pour un espace non séparé, l'axiome (O_V) n'entraîne pas (O_{III}), ni a fortiori (O_{IV}) (voir exerc. 1) ; mais les axiomes (O_{III}) et (O_V) entraînent (O_{IV}), comme il résulte de leur énoncé.

L'énoncé de l'axiome (O_V), comme celui de (O_{IV}), fait intervenir la droite numérique $\mathbb{R}$ comme ensemble auxiliaire ; mais il est remarquable qu'on puisse donner un énoncé équivalent à (O_V), et dans lequel n'intervient plus que la structure topologique de E :

Théorème 1 (Urysohn). L'axiome (O_V) est équivalent au suivant :

(O'_V) Quels que soient les ensembles fermés sans point commun A et B dans E , il existe deux ensembles ouverts sans point commun, U et V , tels que $A \subset U$, $B \subset V$.

Il est immédiat que (O_V) entraîne (O'_V), car si f est une application continue de E dans $[0,1]$, égale à 0 dans A , à 1 dans B , les ensembles ouverts $\overset{-1}{f}([0,1/3[)$ et $\overset{-1}{f}(]2/3\ ,\ 1])$ contiennent respectivement A et B et sont sans point commun.

Pour démontrer la réciproque, remarquons d'abord que (O'_V) est équivalent à l'axiome suivant :

(O''_V). <u>Quel que soit l'ensemble fermé A, et le voisinage ouvert V de A, il existe un voisinage ouvert W de A tel que</u> $\overline{W} \subset V$.

Définissons par récurrence une famille dénombrable d'ensembles ouverts, de la manière suivante : posons $U_1 = \complement B$; comme $A \subset U_1$, déterminons l'ensemble ouvert U_0 tel que $A \subset U_0$ et $\overline{U}_0 \subset U_1$, ce qui est possible d'après (O''_V). Supposons ensuite que, pour chaque nombre dyadique de la forme $k/2^n$ $(k=0,1,\dots,2^n)$, on ait défini un ensemble ouvert $U_{k/2^n}$, de sorte que $\overline{U}_{k/2^n} \subset U_{(k+1)/2^n}$ $(k=0,1,\dots,2^n-1)$. Posons $U_{2k/2^{n+1}} = U_{k/2^n}$ $(k=0,1,\dots,2^n)$; et d'autre part, pour chaque nombre $(2k+1)/2^{n+1}$ $(k=0,1,\dots,2^n-1)$, déterminons, en vertu de (O''_V), un ensemble ouvert $U_{(2k+1)/2^{n+1}}$, de sorte que $\overline{U}_{k/2^n} \subset U_{(2k+1)/2^{n+1}}$ et $\overline{U}_{(2k+1)/2^{n+1}} \subset U_{(k+1)/2^n}$. On définit ainsi, pour tout nombre dyadique r tel que $0 \leqslant r \leqslant 1$, un ensemble ouvert U_r, de sorte que $U_0 \subset A$, $B \subset \complement U_1$, et que, si r et r' sont deux nombres dyadiques tels que $0 \leqslant r < r' \leqslant 1$, on ait

$$(1) \qquad \overline{U}_r \subset U_{r'}$$

Soit maintenant t un nombre réel quelconque ; posons $U_t = \emptyset$ si $t < 0$, $U_t = E$ si $t > 1$, et enfin $U_t = \bigcup_{r \leqslant t} U_r$ (r dyadique) si $0 \leqslant t \leqslant 1$. Si t est tel que $0 \leqslant t \leqslant 1$ un nombre dyadique, cette définition coïncide bien avec la précédente, d'après (1) ; d'autre part, si $0 \leqslant t < t' \leqslant 1$, il existe deux nombres dyadiques r, r' tels que $t \leqslant r < r' \leqslant t'$; comme $U_t \subset U_r$, on a, d'après (1), $\overline{U}_t \subset \overline{U}_r \subset U_{r'} \subset U_{t'}$, autrement dit, la relation (1) subsiste quand on y remplace r et r' par deux nombres réels quelconques t, t' tels que $t < t'$.

Soit alors, pour tout $x \in E$, $f(x)$ la borne inférieure des nombres t tels que $x \in U_t$. On a évidemment $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ quel que soit x, et $f(x)=0$ pour $x \in A$, $f(x)=1$ pour $x \in B$; montrons enfin que f est <u>continue dans E</u>:

en effet, quels que soient $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, on a $|f(y)-f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout point $y \in U_{f(x)+\varepsilon} \cap \complement(\overline{U}_{f(x)-\varepsilon})$, et ce dernier ensemble est un voisinage de x.

C.Q.F.D.

Le théorème 1 va nous permettre de démontrer que deux catégories importantes d'espaces topologiques sont des espaces normaux. En premier lieu :

<u>Proposition 1</u>. <u>Un espace compact est normal</u>.

En effet, tout espace compact vérifie l'axiome (O'_V), d'après la prop.2 du § 4 du ch.II.

En ce qui concerne les espaces <u>localement compacts</u>, tout point d'un tel espace possède donc un voisinage qui est un sous-espace normal, mais on peut former des espaces localement compacts, et <u>non normaux</u> (voir exerc. 20)

<u>Proposition 2</u>. <u>Un espace métrisable est normal</u>.

Soit E un espace métrisable, $d(x,y)$ une métrique compatible avec sa topologie, A et B deux ensembles fermés sans point commun dans E ; la fonction $f(x)=d(x,A)-d(x,B)$ est continue dans E ; l'ensemble $\overset{-1}{f}(]-\infty,0[)$ est donc ouvert, et contient A ; de même, l'ensemble $\overset{-1}{f}(]0,+\infty[)$ est ouvert et contient B, et ces deux ensembles ouverts ne se rencontrent pas, donc (O'_V) est bien vérifié.

<u>Remarques</u>. 1) La proposition 2 donne une nouvelle condition <u>nécessaire</u> pour qu'un espace E soit métrisable, à savoir, qu'il soit normal ; mais cette condition, même jointe à toutes les conditions nécessaires trouvées au § 2, ne donne pas un système de conditions nécessaires et suffisantes de métrisabilité (voir exerc. 7 et 9 de ce §, et exerc.12 et 13 du § 2).

2) On peut former des espaces normaux qui ne sont ni métrisables, ni compacts (ni même localement compacts ; voir exerc. 7 de ce § et exerc. 12 du § 2).

Notons encore que, d'après (O'_V), tout ensemble fermé dans un espace normal est un sous-espace normal ; mais cette propriété n'est plus exacte pour une partie quelconque d'un espace normal.

Par exemple, un espace localement compact et non normal peut d'après le théorème d'Alexandroff, être considéré comme un sous-espace ouvert d'un espace compact, donc normal.

Enfin, le produit de deux espaces normaux peut n'être pas normal (voir exerc. 20).

Le prolongement d'une fonction numérique continue. Au ch. I (§ 6) nous avons examiné le problème suivant : étant donnée une application f d'une partie A d'un espace topologique E dans un espace topologique E', continue par rapport à A, existe-t-il un prolongement $\overline{f}$ de f à l'adhérence $\overline{A}$ de A, qui soit une fonction continue par rapport à $\overline{A}$? Ce problème n'a plus d'objet lorsque A est un ensemble fermé ; mais on peut alors, dans le cas où $A \neq E$, se proposer de chercher s'il existe un prolongement continu de f à tout l'espace E.

Nous allons résoudre ce problème lorsque l'espace E' est la droite numérique achevée $\overline{R}$; on a alors le théorème suivant :

Théorème 2 (Urysohn). L'axiome (O_V) est équivalent à la propriété suivante :

(O'''_V) Quels que soient l'ensemble A fermé dans E, et la fonction numérique f, définie dans A et continue par rapport à A, il existe un prolongement g de f à l'espace tout entier E, qui est une application continue de E dans $\overline{R}$.

Il est immédiat que (O''_V) entraîne (O_V) ; car, si B et C sont deux ensembles fermés sans point commun, la fonction égale à 0 dans B , à 1 dans C , est continue par rapport à l'ensemble fermé $A = B \cup C$. Si f en est un prolongement continu à E , et si on pose $g = \mathrm{Max}(0,f)$, puis $h = \mathrm{Min}(g,1)$, h est continue dans E , prend ses valeurs dans $[0,1]$, et est égale à 0 dans B , à 1 dans C .

Montrons inversement que (O_V) entraîne (O''_V) ; comme $\overline{R}$ et l'intervalle $[-1,+1]$ sont homéomorphes, on peut évidemment se borner au cas où l'application continue f de A dans $\overline{R}$ prend ses valeurs dans $[-1,+1]$. Nous définirons le prolongement g de f en formant une suite (g_n) de fonctions continues dans E , telle que la suite $(g_n(x))$ soit convergente en tout point ; cette limite sera par définition la valeur de g(x), et il résultera du choix des g_n que la fonction g remplira les conditions voulues.

En premier lieu, posons $H_o = \overset{-1}{f}([-1,-1/3])$, $K_o = \overset{-1}{f}([1/3,1])$; H_o et K_o sont fermés dans A , donc dans E , et sont sans point commun ; d'après (O_V) , il existe une application continue g_o de E dans $[-1/3,+1/3]$, égale à $-1/3$ dans H_o , à $+1/3$ dans K_o ; si on pose $f_1 = f-g_o$, f_1 est continue dans A , et on a $|f_1(x)| \leqslant 2/3$ en tout point de A .

Procédons par récurrence ; supposons définie une application continue g_n de E dans $[-1,+1]$, telle que, si on pose $f_n = f-g_n$, on ait $|f_n(x)| \leqslant (2/3)^n$ en tout point de A ; en raisonnant à partir de f_n comme on vient de le faire sur f , on définit une fonction numérique h_{n+1} , continue dans E et telle que $|h_{n+1}(x)| \leqslant 2^n/3^{n+1}$ en tout point de E ; en outre, si on pose $f_{n+1} = f_n - h_{n+1}$, on a $|f_{n+1}(x)| \leqslant (2/3)^{n+1}$ en tout point de A ; la définition de la suite (g_n) s'achève en posant $g_{n+1} = g_n + h_{n+1}$.

De cette définition, on conclut aussitôt que, pour $m \geqslant p$ et $n \geqslant p$, on a $\left|g_m(x)-g_n(x)\right| \leqslant (2^p/3^{p+1}).\sum_{k=0}^{\infty}(2/3)^k = (2/3)^p$ en tout point $x \in E$; on en déduit d'abord que la suite $(g_n(x))$ est une suite de Cauchy, donc est bien convergente ; comme $f_n(x)$ tend vers 0 avec $1/n$ en tout point de A , on voit que la fonction g est un prolongement de f à E . Reste à voir que g est continue dans E .

Soit donc x un point quelconque de E ; quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$ et $m \geqslant m_0$, on ait $\left|g_m(y)-g_n(y)\right| \leqslant \varepsilon$ en tout point $y \in E$, donc aussi, en faisant tendre m vers $+\infty$, $\left|g(y)-g_n(y)\right| \leqslant \varepsilon$; si V est un voisinage de x tel que $\left|g_n(y)-g_n(x)\right| \leqslant \varepsilon$ en tout point $y \in V$, on aura aussi, pour $y \in V$,

$$\left|g(y)-g(x)\right| \leqslant \left|g(y)-g_n(y)\right| + \left|g_n(y)-g_n(x)\right| + \left|g(x)-g_n(x)\right| \leqslant 3\varepsilon$$

ce qui montre la continuité de g et achève la démonstration (cette dernière partie du raisonnement utilise, dans un cas particulier, la notion de <u>convergence uniforme</u>, que nous définirons d'une manière générale au ch. VIII).

<u>Remarques</u>. 1) On peut encore former un prolongement continu à tout l'espace normal E , d'une fonction f , définie et continue dans une partie fermée A de E , lorsque l'espace des valeurs de f est un <u>produit</u> (fini ou non) d'espaces identiques à $\overline{R}$; on a en effet $f=(f_\iota)$, où les f_ι sont des fonctions numériques continues dans A , et, si g_ι est un prolongement continu de f_ι à E , $g=(g_\iota)$ est un prolongement continu de f.

2) Si la fonction f , continue dans A , est <u>finie</u>, il existe un prolongement g de f à E , qui est continue et <u>finie</u> dans E. Démontrons-le d'abord lorsque $f(x) \geqslant 0$ dans A ; il existe alors un prolongement continu g_1 de f dans E, prenant ses valeurs

dans $[0,+\infty]$. Si on pose $B = \overset{-1}{g_1}(+\infty)$, B est fermé et ne rencontre pas A , par hypothèse ; la fonction h , égale à f dans A , à 0 dans B , est donc continue dans l'ensemble fermé $A \cup B$. Soit g_2 un prolongement continu de h à E , prenant encore ses valeurs dans $[0,+\infty]$; la fonction $g = \mathrm{Min}(g_1,g_2)$ est un prolongement continu de f à E , à valeurs $\geqslant 0$ et finies en tout point de E .

Pour passer de là au cas général, il suffit de remarquer que, si f est finie et continue, il en est de même de f^+ et f^- , et réciproquement ; en prolongeant f^+ et f^- à E par des fonctions continues et finies g_1, g_2, la fonction $g_1 - g_2$ est un prolongement de f , continue et finie dans E .

<u>Recouvrements ouverts finis d'un ensemble fermé dans un espace normal. Applications.</u>

<u>Proposition 3. Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un recouvrement ouvert fini d'un ensemble fermé F dans un espace normal E . Il existe un recouvrement ouvert fini $(B_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de F tel que $\overline{B}_i \subset A_i$ quel que soit i.</u>

Il suffit de montrer qu'on peut remplacer un quelconque des A_i , par exemple A_1, par un ensemble ouvert B_1 tel que $\overline{B}_1 \subset A_1$, et que B_1 et les A_i $(2 \leqslant i \leqslant n)$ constituent un recouvrement de F . Posons $C_1 = (\complement F) \cup (\bigcup_{i=2}^{n} A_i)$; C_1 est ouvert, et on a par hypothèse $\complement A_1 \subset C_1$; donc il existe un ensemble ouvert V_1 tel que $\complement A_1 \subset V_1$ et $\overline{V}_1 \subset C_1$. Si on pose $B_1 = \complement \overline{V}_1$, on a $\overline{B}_1 \subset \complement V_1 \subset A_1$, et $B_1 \cup C_1 = E$, donc $F \subset B_1 \cup (\bigcup_{i=2}^{n} A_i)$, ce qui démontre la proposition.

<u>Définition 2. On dit qu'une famille finie $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de fonctions définies dans un espace E , et prenant leurs valeurs dans $[0,1]$, est une partition continue de l'unité définie sur E , si les f_i sont continues dans E et si $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$ quel que soit $x \in E$.</u>

De la proposition 3 , on déduit la suivante :

<u>Proposition 4</u>. <u>Quel que soit le recouvrement ouvert fini</u> $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ <u>d'un espace normal E , il existe une partition continue de l'unité</u> $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ <u>définie sur E , et telle que, pour tout indice i</u> , $f_i(x)=0$ <u>dans</u> $\complement A_i$.

En appliquant la prop.3, formons un recouvrement ouvert fini $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E , tel que $\overline{B}_i \subset A_i$ pour tout indice i . D'après (O_V) il existe une application continue g_i de E dans $[0,1]$, telle que $g_i(x)=0$ dans $\complement A_i$, et $g_i(x)=1$ dans $\overline{B}_i$; les B_i formant un recouvrement de E , on a $\sum_{i=1}^{n} g_i(x) > 0$; si on pose $f_i=g_i/(\sum_{i=1}^{n} g_i)$ il est clair que les f_i forment une partition continue de l'unité sur E , telle que $f_i(x)=0$ dans $\complement A_i (1 \leq i \leq n)$.

<u>Corollaire</u>. <u>Quel que soit le recouvrement ouvert fini</u> $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ <u>d'un ensemble fermé F dans un espace normal E , il existe une famille finie</u> $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ <u>d'applications continues de E dans</u> $[0,1]$, <u>telle que</u> $\sum_{i=1}^{n} f_i(x)=1$ <u>en tout point de F , et</u> $f_i(x)=0$ <u>en tout point de</u> $\complement A_i$.

En effet, la famille d'ensembles formée des A_i et de $\complement F$ est un recouvrement ouvert fini de E . Une partition continue de l'unité correspondante est formée de n fonctions f_i , telles que $f_i(x)=0$ dans $\complement A_i$, et d'une fonction g telle que $g(x)=0$ dans F . Comme en tout point de F , on a $g(x)+ \sum f_i(x)=1$, les f_i répondent bien à la question.

On notera que l'hypothèse que E est séparé n'intervient pas dans les démonstrations des prop. 3 et 4 , qui sont donc valables pour tout espace satisfaisant à l'axiome (O_V).

Nous donnerons deux applications des propositions précédentes à des questions concernant les fonctions numériques définies dans un espace <u>compact</u> (donc <u>normal</u>).

Proposition 5. <u>Soit E un espace compact, g une fonction numérique semi-continue inférieurement dans E, h une fonction numérique semi-continue supérieurement dans E, telles qu'en tout point $x \in E$, on ait</u> $h(x) < g(x)$. <u>Dans ces conditions, il existe une fonction numérique f, continue dans E et telle que</u> $h(x) < f(x) < g(x)$ <u>en tout point de E</u>.

A tout $x \in E$ faisons correspondre un nombre a_x tel que $h(x) < a_x < g(x)$, puis un ensemble ouvert U_x tel qu'en tout point $y \in U_x$ on ait $h(y) < a_x$ et $g(y) > a_x$, ce qui est possible par hypothèse (voir ch.IV, § 5, prop.2). Comme E est compact, on peut trouver un nombre fini de points x_i $(i=1,2,\ldots,n)$ tels que les ensembles $A_i = U_{x_i}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ forment un recouvrement ouvert de E. Formons, d'après la prop.3, un recouvrement ouvert $(B_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E, tel que $\overline{B}_i \subset A_i$, puis, pour chaque indice i, une fonction numérique continue f_i, à valeurs dans $[-\infty, a_{x_i}]$, égale à $-\infty$ dans $\complement A_i$, à a_{x_i} dans B_i. On aura donc $h(x) < f_i(x)$ pour tout $x \in B_i$, et $f_i(x) < g(x)$ pour tout $x \in A_i$. Posons $f = \operatorname{Max}(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$; f est continue dans E. Quel que soit $x \in E$, il existe un indice i tel que $x \in B_i$, donc $f(x) \geqslant f_i(x) > h(x)$; d'autre part, il existe un indice j tel que $f(x) = f_j(x)$; comme $f(x) > h(x) \geqslant -\infty$, on a nécessairement $x \in A_j$, donc $f_j(x) < g(x)$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire. Si, dans l'énoncé de la proposition 5 , on remplace l'hypothèse "quel que soit x , $h(x) < g(x)$" par "quel que soit x , $h(x) \leqslant g(x)$" , les autres hypothèses n'étant pas modifiées, il existe une fonction numérique f , continue dans E et telle que $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ en tout point de E .

On peut évidemment se borner au cas où h et g prennent leurs valeurs dans $[-1,+1]$. On définit alors par récurrence trois suites (f_n), (g_n), (h_n) de fonctions numériques définies dans E, et telles que $g_o = g+1$, $h_o = h-1$, que $g_n = \mathrm{Min}(g+\frac{1}{2^n}, f_{n-1}+\frac{1}{2^n})$, $h_n = \mathrm{Max}(h-\frac{1}{2^n}, f_{n-1}-\frac{1}{2^n})$, et enfin que f_n soit continue dans E et telle que $h_n(x) < f_n(x) < g_n(x)$ en tout point de E ; on voit aussitôt par récurrence que g_n est semi-continue inférieurement, h_n semi-continue supérieurement, et que $h_n(x) < g_n(x)$ quel que soit x , ce qui montre que la définition peut se poursuivre quel que soit n , d'après la prop.5 . Celà étant, un raisonnement de "convergence uniforme" analogue à celui du th.2 permet de définir la fonction cherchée f de sorte que f(x) soit la limite de la suite $(f_n(x))$, quel que soit $x \in E$, et il est clair qu'on a bien $h \leqslant f \leqslant g$.

Proposition 6. Soient E et F deux espaces compacts, f une fonction numérique finie continue dans le produit $E \times F$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un nombre fini de fonctions continues numériques finies $g_1, g_2, \ldots, g_n$, définies dans E , et un nombre égal de fonctions continues numériques finies $h_1, h_2, \ldots, h_n$, définies dans F , telles que, pour tout point $(x,y) \in E$,

(2) $$\left| f(x,y) - \sum_{i=1}^{n} g_i(x)h_i(y) \right| < \varepsilon$$

Donnons-nous un point $x \in E$; quel que soit $y \in F$, il existe un voisinage $U_{x,y}$ de x dans E et un voisinage $V_{x,y}$ de y dans F tels que, pour tout point $(x',y') \in U_{x,y} \times V_{x,y}$, on ait $|f(x,y)-f(x',y')| < \varepsilon/2$. F étant compact, il existe un nombre fini de points $y_k(x)$ $(k=1,2,\ldots,n(x))$ tels que les $V_{x,y_k(x)}$ forment un recouvrement de F ; soit W_x le voisinage de x , intersection des $U_{x,y_k(x)}$. Comme E est compact, il existe un nombre fini de points x_i $(i=1,2,\ldots,m)$ de E tels que les W_{x_i} forment un recouvrement de E . Posons $A_i = W_{x_i}$, et soient B_j $(j=1,2,\ldots,p)$ les intersections non vides d'un nombre fini d'ensembles $V_{x_i,y_k(x_i)}$; les B_j forment un recouvrement ouvert fini de F , et, quels que soient les indices i et j , l'ensemble $A_i \times B_j$ est tel que, pour tout couple de points $(x,y),(x',y')$ de cet ensemble, on ait $|f(x,y)-f(x',y')| < \varepsilon$. Formons alors, d'après la prop.4 , une partition continue de l'unité (u_i) sur E , telle que $u_i(x)=0$ dans $\complement A_i$, et une partition continue de l'unité (v_j) sur F , telle que $v_j(y)=0$ dans $\complement B_j$. Quel que soit $(x,y) \in E \times F$, on a

(3) $$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} u_i(x)v_j(y) = \left(\sum_{i=1}^{m} u_i(x)\right)\left(\sum_{j=1}^{p} v_j(y)\right) = 1$$

Prenons, pour tout couple d'indices (i,j) , un point (x_{ij},y_{ij}) dans $A_i \times B_j$, et considérons la différence

$$\varphi(x,y) = f(x,y) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} f(x_{ij},y_{ij})u_i(x)v_j(y)$$

On peut l'écrire, d'après (3)

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} (f(x,y)-f(x_{ij},y_{ij}))u_i(x)v_j(y)$$

Or, pour tout couple d'indices (i,j) tel que $(x,y)\in A_i \times B_j$, on a $|f(x,y)-f(x_{ij},y_{ij})| < \varepsilon$; et, pour tout autre couple d'indices, $u_i(x)v_j(y)=0$; donc, les u_i et v_j étant positives,

$$|\varphi(x,y)| < \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p} u_i(x)v_j(y) = \varepsilon$$

C.Q.F.D.

Structure uniforme des recouvrements ouverts finis. Soit E un ensemble quelconque, $\mathcal{R}=(A_\iota)_{\iota\in I}$ un recouvrement quelconque de E ; on peut lui faire correspondre la partie $V_{\mathcal{R}} = \bigcup_{\iota\in I} A_\iota \times A_\iota$ de $E \times E$, qui contient la diagonale Δ de $E \times E$. A toute famille de recouvrements $(\mathcal{R}_\varkappa)_{\varkappa\in K}$ de E correspond ainsi une famille de parties $(V_{\mathcal{R}_\varkappa})_{\varkappa\in K}$ de $E \times E$, contenant toutes Δ. On peut rechercher si les ensembles appartenant à cette famille constituent un système fondamental d'entourages d'une structure uniforme sur E ; nous avons déjà vu (ch.II, § 1) que si $(\mathcal{R}_\varkappa)$ est la famille des partitions finies de E, les $V_{\mathcal{R}_\varkappa}$ forment bien un système fondamental d'entourages.

Nous allons maintenant considérer le cas où E est un espace topologique, et $(\mathcal{R}_\varkappa)$ la famille des recouvrements couverts finis de E ; on a alors le théorème suivant :

Théorème 3 (Wallman). Pour que les parties $V_{\mathcal{R}}$ de $E \times E$, correspondant aux recouvrements ouverts finis $\mathcal{R}$ de l'espace topologique E, constituent un système fondamental d'entourages d'une structure uniforme sur E, il faut et il suffit que E satisfasse à l'axiome (O_V) ; dans ce cas, la structure uniforme ainsi définie (et qu'on appelle structure uniforme des recouvrements ouverts finis) est compatible avec la topologie de E, lorsque E satisfait en outre à l'axiome (O_{III}) ; si de plus E est séparé (donc normal), cette structure uniforme rend E précompact.

1) La condition est nécessaire. Considérons en effet, dans E, deux ensembles fermés sans point commun A,B ; les ensembles $\complement A$ et $\complement B$ forment un recouvrement ouvert fini de E ; soit $V = ((\complement A)\times(\complement A)) \cup ((\complement B)\times(\complement B))$ la partie de $E \times E$ correspondante. Remarquons que si $\mathcal{R}$ est un recouvrement ouvert de E, $V_{\mathcal{R}}$ est un voisinage symétrique de la diagonale Δ dans $E \times E$. Supposons donc qu'il existe un voisinage symétrique W de Δ tel que $\overset{2}{W} \subset V$; pour tout $x \in A$, on aura, d'après la définition de V, $\overset{2}{W}(x) \subset \complement B$; de même pour tout $y \in B$, on aura $\overset{2}{W}(y) \subset \complement A$; comme W est symétrique on en conclut que $W(x) \cap W(y) = \emptyset$, et par suite, que $W(A) \cap W(B) = \emptyset$, ce qui montre que E satisfait à (O'_V).

2) La condition est suffisante. Tout d'abord, lorsque $\mathcal{R}$ parcourt l'ensemble des recouvrements ouverts finis d'un espace topologique E, les ensembles $V_{\mathcal{R}}$ forment une base de filtre sur $E \times E$; car, si $\mathcal{R} = (A_i)$ et $\mathcal{R}' = (B_j)$ sont deux recouvrements ouverts finis de E, $\mathcal{R}'' = (A_i \cap B_j)$ en est un troisième tel que $V_{\mathcal{R}''} \subset V_{\mathcal{R}} \cap V_{\mathcal{R}'}$. Cette base de filtre satisfait évidemment aux axiomes (U'_I) et (U'_{II}) ; reste à voir qu'elle satisfait aussi à (U'_{III}), lorsque l'espace E vérifie (O_V). Soit donc $\mathcal{R} = (U_i)$ un recouvrement ouvert fini de E ; il faut montrer qu'il existe un recouvrement ouvert fini $\mathfrak{S} = (V_i)$ tel que $\overset{2}{V}_{\mathfrak{S}} \subset V_{\mathcal{R}}$. Appliquons deux fois de suite la prop.3, en formant deux recouvrements ouverts finis (U'_i) et (U''_i) tels que

$\overline{U'_i} \subset U_i$ et $\overline{U''_i} \subset U'_i$ quel que soit l'indice i ; puis considérons la famille finie $\mathfrak{F}$ d'ensembles ouverts composée des ensembles U'_i , $U_i \cap \complement \overline{U''_i}$ et $\complement \overline{U_i}$; elle constitue un recouvrement ouvert de E ; pour tout $x \in E$, nous désignerons par W_x l'intersection de <u>tous</u> les ensembles de $\mathfrak{F}$ contenant x ; ces ensembles sont en nombre fini et constituent un recouvrement ouvert de E ; c'est ce recouvrement que nous désignerons par $\mathfrak{G}$, et dont nous allons montrer que, si on pose pour simplifier $A = V_{\mathfrak{K}}$, $B = V_{\mathfrak{G}}$, on a $\overset{2}{B} \subset A$.
Prenons en effet un point z quelconque de E ; il existe un indice i tel que $z \in U''_i$; nous allons voir que $\overset{2}{B}(z) \subset U_i \subset A(z)$, ce qui établira la proposition. Si $u \in B(z)$, il existe x tel que $z \in W_x$ et $u \in W_x$; on a nécessairement $x \in U'_i$, sans quoi, d'après la définition de W_x , cet ensemble serait contenu dans $\complement \overline{U''_i}$, et par suite ne contiendrait pas z (fig.) ; on en conclut qu'on a aussi $u \in U'_i$. Si maintenant $v \in B(u)$, il existe y tel que $u \in W_y$ et $v \in W_y$; on a nécessairement $y \in U_i$, sans quoi W_y serait contenu dans $\complement \overline{U'_i}$, et par suite ne contiendrait pas u ; mais alors on a aussi $v \in U_i$, ce qui montre bien que $\overset{2}{B}(z) \subset U_i$.

3) Pour voir que la structure uniforme des recouvrements ouverts finis est compatible avec la topologie de E lorsque E satisfait aux axiomes (O_{III}) et (O_V), remarquons d'abord que, pour tout recouvrement ouvert $\mathfrak{K}$ de E , $V_{\mathfrak{K}}(x)$ est un voisinage de x ; inversement, soit U un voisinage ouvert quelconque de x , W un voisinage fermé de x contenu dans U ; $\mathfrak{K} = (U, \complement W)$ est un recouvrement ouvert fini de E , et on a $V_{\mathfrak{K}}(x) = U$, d'où la proposition.

4) Enfin, si E est normal, la structure uniforme des recouvrements ouverts finis le rend précompact : en effet, quel que soit

le recouvrement ouvert fini $\mathcal{K}$, il est formé, par définition, d'un nombre fini d'ensembles petits d'ordre $V_{\mathcal{K}}$, et le th.4 du § 4 du ch.II s'applique donc.

Exercices. 1) Former un espace topologique comprenant quatre points, vérifiant l'axiome (O_V), mais non l'axiome (O_{III}).

2) Si un espace topologique vérifie les axiomes (C) et (O_{III}) il vérifie (O_V), et l'espace complètement régulier associé est compact.

3) Soient A et B deux ensembles sans point commun dans un espace topologique E , tels qu'ils existe deux suites (V_n), (W_n) d'ensembles ouverts dans E , jouissant des propriétés uivantes : 1° quel que soit $x \in A$, il existe un V_n tel que $x \in V_n$ et $B \cap \overline{V}_n = \emptyset$; 2° quel que soit $y \in B$, il existe un W_n tel que $y \in W_n$ et $A \cap \overline{W}_n = \emptyset$. Montrer qu'il existe deux ensembles ouverts sans point commun, G et H , tels que $A \subset G$ et $B \subset H$ (Définir G comme réunion d'une suite (G_n) d'ensembles ouverts, H comme réunion d'une autre suite (H_n) d'ensembles ouverts, ces suites étant définies par récurrence de sorte que $G_n \subset V_n$, $H_n \subset W_n$, et $G_p \cap H_q = \emptyset$, quels que soient p et q).

4) Déduire de l'exerc.3 qu'un espace <u>régulier</u> E est aussi <u>normal</u> dans chacun des deux cas suivants :

a) E est réunion dénombrable d'ensembles compacts ;

b) la topologie de E possède une base dénombrable.

5) Tout espace normal à base dénombrable E est homéomorphe à un sous-espace d'un "cube à une infinité dénombrable de dimensions" (produit d'une infinité dénombrable d'espaces identiques à l'intervalle $[0,1]$ de $\mathbf{R}$), et est par suite <u>métrisable</u>. (Considérer une

base dénombrable (A_n) de la topologie de E, et, pour chaque couple (m,n) d'indices tel que $\overline{A}_m \subset A_n$, une application X_{mn} de E dans $[0,1]$, continue, égale à 0 dans $\overline{A}_m$, à 1 dans $\complement A_n$; puis appliquer l'exercice 2 du § 1).

6) On dit qu'un espace E est <u>complètement normal</u> si tout sous-espace de E est normal. Montrer que, pour que E soit complètement normal, il faut et il suffit que, pour tout couple d'ensemble A,B de E tels que $A \cap \overline{B} = B \cap \overline{A} = \emptyset$, il existe deux ensembles ouverts sans point commun U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

7) Tout ensemble totalement ordonné E, muni de l'une des deux topologies $\mathcal{C}_-(E)$, $\mathcal{C}_+(E)$ (ch.I, § 1, exerc.3) est complètement normal. (Si A et B sont deux ensembles tels que $A \cap \overline{B} = B \cap \overline{A} = \emptyset$, définir, pour tout point $x \in A$, un voisinage V_x, et pour tout $y \in B$ un voisinage W_y de sorte que $V_x \cap W_y = \emptyset$, quels que soient $x \in A$ et $y \in B$).

8) Tout ensemble totalement ordonné E, muni de la topologie $\mathcal{C}_o(E)$, est complètement normal. (On le démontrera d'abord dans le cas où E est <u>achevé</u> (ch.IV, Appendice), en établissant au préalable que tout ensemble ouvert dans E est la réunion d'un ensemble d'intervalles ouverts deux à deux sans point commun et en utilisant ce résultat pour préciser la position réciproque de deux ensembles A et B tels que $A \cap \overline{B} = B \cap \overline{A} = \emptyset$).

9) Montrer que l'espace compact non métrisable E défini dans l'exerc.13 du § 2 est complètement normal (même méthode qu'à l'exer.7)

10) On considère la partie E du plan numérique R^2 formée des points (x,y) tels que $y \geqslant 0$; on la munit de la topologie $\mathcal{C}$ définie de la façon suivante : pour tout point (x,y) tel que $y > 0$,

un système fondamental de voisinages est formé des disques fermés de centre (x,y) et de rayon r prenant toutes les valeurs telles que $0 < r \leqslant y$; pour tout point $(x,0)$, un système fondamental de voisinages est formé des disques fermés de centre (x,z) et de rayon z , z parcourant l'ensemble des nombres > 0. Montrer que E , muni de la topologie $\mathcal{C}$, est un espace <u>complètement régulier non normal</u>, dont tout point possède un voisinage homéomorphe à un espace métrique complet. (On établira que, si A est l'ensemble des points $(x,0)$ avec x rationnel, B l'ensemble des points $(x,0)$ avec x irrationnel, A et B sont fermés et tout voisinage de A rencontre tout voisinage de B ; pour démontrer ce dernier point, on utilisera le fait que B , considéré comme partie de la droite numérique $\mathbb{R}$, est un ensemble inépuisable. On montrera ensuite qu'un voisinage d'un point $(x,0)$ formé d'un disque fermé de centre (x,z) et de rayon z $(z > 0)$ est homéomorphe au sous-espace du plan numérique $\mathbb{R}^2$ formé des points (x,y) tels que $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $y > 0$, et du point $(0,0)$; pour voir que cet espace peut être muni d'une structure d'espace métrique complet, on utilisera l'exerc. 10 du § 2).

11) Si on munit un espace normal de sa structure uniforme universelle (§ 1, exerc. 1), son espace complété est encore normal.

12) On dit qu'un recouvrement $(A_\iota) = \mathfrak{R}$ d'un espace topologique E est <u>ponctuellement fini</u> si un point quelconque de E n'appartient qu'à un nombre fini d'ensembles du recouvrement. On dit qu'il est <u>localement fini</u> si, pour tout $x \in E$, il existe un voisinage de x qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ensembles du recouvrement. Un recouvrement $\mathfrak{S} = (B_\kappa)$ est dit <u>subordonné</u> au recouvrement $\mathfrak{R}$

si $V_{\mathfrak{S}} \subset V_{\mathfrak{X}}$ (notations du texte), c'est-à-dire si, pour tout indice $\varkappa$, il existe un indice ι tel que $B_{\varkappa} \subset A_{\iota}$. Un espace E est dit <u>paracompact</u> si, pour <u>tout</u> recouvrement ouvert $\mathfrak{X}$ de E, il existe un recouvrement ouvert <u>localement fini</u> $\mathfrak{S}$ subordonné à $\mathfrak{X}$. Tout espace compact est évidemment paracompact.

Montrer que :

a) tout sous-espace <u>fermé</u> d'un espace paracompact est paracompact ;

b) si tout sous-espace <u>ouvert</u> d'un espace paracompact est paracompact, il en est de même d'un sous-espace <u>quelconque</u> de cet espace.

13) Si $(A_{\iota})_{\iota \in I}$ est un recouvrement ouvert <u>ponctuellement fini</u> d'un espace normal E, il existe un recouvrement ouvert $(B_{\iota})_{\iota \in I}$ de E tel que $\overline{B}_{\iota} \subset A_{\iota}$ quel que soit $\iota \in I$ (Extension de la prop.3 ; on considèrera tous les recouvrements ouverts $\mathfrak{X} = (X_{\iota})_{\iota \in I}$ de E tels que, pour les indices ι d'une partie $H_{\mathfrak{X}}$ de I, on ait $\overline{X}_{\iota} \subset A_{\iota}$, et, pour les autres indices ι ; $X_{\iota} = A_{\iota}$ et $\overline{A}_{\iota} \neq A_{\iota}$; on ordonnera l'ensemble de ces recouvrements, en posant $\mathfrak{X} \leqslant \mathfrak{S}$ si $H_{\mathfrak{X}} \subset H_{\mathfrak{S}}$ et si, pour tout $\iota \in H_{\mathfrak{X}}$, les ensembles d'indices ι sont les mêmes dans $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{S}$; on montrera que cet ensemble ordonné est inductif, et après application du théorème de Zorn, on achèvera comme dans la démonstration de la prop.3).

14) Soit $(A_{\iota})_{\iota \in I}$ un recouvrement ouvert <u>localement fini</u> d'un espace normal E. Montrer qu'il existe une famille $(f_{\iota})_{\iota \in I}$ d'applications continues de E dans $[0,1]$, telle que $f_{\iota}(x)=0$ en tout point de $\complement A_{\iota}$, et $\sum_{\iota \in I} f_{\iota}(x)=1$ quel que soit $x \in E$.

15) Montrer que la proposition 5 et son corollaire s'étendent à tout espace E paracompact et normal.

16) Pour que les parties $V_{\mathcal{K}}$ de $E \times E$, correspondant aux recouvrements ouverts <u>localement finis</u> d'un espace topologique E, constituent un système fondamental d'entourages d'une structure uniforme sur E, compatible avec la topologie de E, il faut et il suffit que E soit normal (extension du th. 3 ; même méthode de démonstration, en utilisant l'exerc. 13).

17) Si E est un espace normal et paracompact, montrer que la structure uniforme universelle sur E a pour filtre d'entourages le filtre des voisinages de la diagonale Δ dans $E \times E$ (utiliser l'exerc. 16).

18) Montrer que tout espace localement compact dénombrable à l'infini (§ 2, exerc. 6) est normal et paracompact. En déduire que tout espace métrisable et possédant une base dénombrable est paracompact (voir exerc. 12 b) et 5).

19) Montrer que l'espace localement compact E défini dans l'exerc. 11 du § 2, n'est pas paracompact (si f est une application de E dans E telle que $f(x) < x$ quel que soit x, on montrera qu'il existe un point $b \in E$ tel que, pour tout $x \in E$, il existe $y \geqslant x$ tel que $f(y) \leqslant b$; on raisonnera par l'absurde en construisant une suite (z_n) de points de E telle que z_{n+1} soit le plus petit point z' de E tel que, pour tout $x \geqslant z'$, on ait $f(x) \geqslant z_n$). Montrer que tout voisinage de la diagonale Δ dans $E \times E$ contient un ensemble de la forme $\left[x, \rightarrow\right[\times \left[x, \rightarrow\right[$.

On considère l'espace compact obtenu en adjoignant à E un plus grand élément Ω, et en munissant l'ensemble E' ainsi défini de la topologie $\mathcal{C}_-(E')$. Montrer que, dans l'espace produit $E \times E'$, tout voisinage de l'ensemble fermé Δ rencontre tout voisinage de l'ensemble fermé $E \times \{\Omega\}$.