

COTE : BKI 03-3.13

CHAPITRE VI  
ESPACES UNIFORMISABLES. ESPACES  
NORMAUX. ESPACES METRISABLES

Rédaction n° 027

Nombre de pages : 38

Nombre de feuilles : 38

Université Henri Poincaré - Nancy I  
INSTITUT ÉLIE CARTAN - UMR 7502  
Bibliothèque de mathématiques  
B.P. 239  
54506 Vandoeuvre-Lès-Nancy

livre III. Cop. générale  
Chap VI. Espaces uniformisables  
Espaces normaux - Espaces  
métrisables

27

(Ancien CHAPITRE VI.)

ESPACES UNIFORMISABLES. ESPACES NORMAUX. ESPACES MÉTRISABLES.

## § 1. Définition d'une structure uniforme par des pseudo-métriques.

Pour définir une structure uniforme (séparée ou non) sur un ensemble fondamental donné  $E$ , on peut se proposer de prendre, comme filtre des entourages  $\mathcal{U}$  sur  $E \times E$ , le filtre engendré par l'image inverse d'un filtre donné  $\mathcal{B}$  sur un ensemble  $F$ , par une application  $f(x,y)$  convenablement choisie de  $E \times E$  dans  $F$ .

Comme, d'après U-Ia, l'intersection des ensembles de  $\mathcal{B}$  ne doit pas être vide, on peut supposer d'emblée que  $F$  est un espace topologique, et  $\mathcal{B}$  le filtre des voisinages d'un point  $o$  de cet espace. Les axiomes des structures uniformes (non séparées) se traduisent alors dans les propriétés suivantes de  $f(x,y)$ :

- I. Quels que soient  $x \in E$  et  $w \in \mathcal{B}$ ,  $f(x,x) \in w$ .
- II. A tout  $w \in \mathcal{B}$  correspond un  $w' \in \mathcal{B}$  tel que, si  $f(x,y) \in w'$ ,  $f(y,x) \in w$ .
- III. A tout  $w \in \mathcal{B}$  correspond un  $w_1 \in \mathcal{B}$  tel que, si  $f(x,z) \in w_1$  et  $f(z,y) \in w_1$ ,  $f(x,y) \in w$ .

Si on veut de plus que la structure uniforme soit séparée,  $f$  doit satisfaire à la condition supplémentaire :

- IV. Si  $x \neq y$ , il existe un  $w \in \mathcal{B}$  tel que  $f(x,y) \notin w$ .

Nous allons appliquer ce procédé au cas où  $F$  est la demi-droite numérique positive  $P$ , et  $\mathcal{B}$  le filtre des voisinages de 0 sur  $P$ ; de plus, nous nous restreindrons aux fonctions  $f(x,y)$  symétriques, c'est-à-dire telles que  $f(x,y) = f(y,x)$  identiquement,

de sorte que la condition II est vérifiée ipso facto. Les conditions I, III et IV deviennent alors respectivement :

I'. Quel que soit  $x$  ,  $f(x, x) = 0$ .

III'. A tout nombre  $a > 0$  correspond un nombre  $b > 0$  tel que,  
si  $f(x, z) < b$  et  $f(z, y) < b$  ,  $f(x, y) < a$  .

IV'. Si  $x \neq y$  ,  $f(x, y) \neq 0$ .

Il est clair que III' est vérifiée si  $f$  vérifie une inégalité de la forme  $f(x, y) \leq \varphi [f(x, z), f(z, y)]$  , où  $\varphi(u, v)$  est une application de  $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}$  , continue et égale à 0 au point (0,0).

Nous allons considérer plus particulièrement le cas où  $f$  satisfait à l'inégalité dite du triangle

$$(1) \quad f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y)$$

qui rentre dans le type précédent, et qu'on peut mettre sous la forme équivalente

$$(2) \quad |f(x, z) - f(y, z)| \leq f(x, y)$$

Le lecteur constatera que c'est cette dernière propriété qui joue un rôle essentiel dans la suite, et justifie l'importance accordée aux fonctions qui vérifient (1) ; déjà, pour les fonctions vérifiant l'inégalité à peine plus générale

$$f(x, y) \leq k [f(x, z) + f(z, y)] \quad \text{avec } k > 1$$

la proposition 1 ci-dessous n'est plus valable, l'inégalité (2) n'ayant plus lieu.

Nous appellerons pseudo-métrique sur  $E$  une application  $f$  de  $E \times E$  dans  $\mathcal{P}$  , symétrique, telle que  $f(x, x) = 0$  quel que soit  $x$ , et satisfaisant à l'inégalité (1).

Il est facile de former des pseudo-métriques sur un ensemble quelconque  $E$  :  $f$  étant une fonction numérique définie dans  $E$  et non constante, il suffit de prendre  $g(x,y) = |f(x)-f(y)|$ .

Ce qui précède montre que, si  $f$  est une pseudo-métrique, les parties  $\overset{-1}{f}(t < a)$  de  $E \times E$  ( $a$  parcourant l'ensemble des nombres strictement positifs) forment la base d'un filtre d'entourages, et définissent sur  $E$  une structure uniforme (en général non séparée).

Plus généralement, considérons une famille  $\Phi$  de pseudo-métriques  $f_\lambda(x,y)$  sur  $E$  ( $\lambda \in I$ , ensemble d'indices quelconque). La famille des ensembles  $\overset{-1}{f}_\lambda(t < a)$ , où  $\lambda \in I$  et  $a > 0$  sont arbitraires, engendre sur  $E \times E$  un filtre d'entourages  $\mathcal{U}$  définissant une structure uniforme (qu'on appelle structure uniforme attachée à la famille  $\Phi$ ) : ce n'est autre en effet que la structure uniforme la moins fine de toutes celles qui sont plus fines que les structures attachées à chacune des pseudo-métriques  $f_\lambda$  (ch. II, § 1).

Remarquons maintenant que la structure uniforme sur  $E$  attachée à une pseudo-métrique  $f(x,y)$  rend cette fonction uniformément continues dans  $E \times E$ , car, en vertu de (2)

$$|f(x,y)-f(x',y')| \leq f(x,x') + f(y,y')$$

Toute structure uniforme plus fine possède donc la même propriété.

Mais inversement, si une structure uniforme sur  $E$  rend  $f(x,y)$  uniformément continue, à tout  $a > 0$  correspond un entourage  $V$  de cette structure tel que, pour tout couple  $(x,y) \in V$ ,  $|f(x,y)-f(x,x)| < a$ , et comme  $f(x,x)=0$ , cela montre que  $\overset{-1}{f}(t < a)$  est un entourage de la structure uniforme envisagée, ou encore que celle-ci est plus fine que la structure uniforme attachée à  $f$ .

Ainsi :

Proposition 1. La structure uniforme attachée à une famille de pseudo-métriques est la moins fine de celles qui rendent ces pseudo-métriques uniformément continues dans  $E \times E$ .

L'intérêt du mode de définition précédent est qu'il permet d'obtenir toutes les structures uniformes. Autrement dit :

Théorème 1. Etant donnée une structure uniforme quelconque, il existe une famille de pseudo-métriques telle que la structure uniforme attachée à cette famille soit identique à la structure uniforme donnée.

Ce théorème résulte immédiatement de la proposition suivante :  
A chaque entourage  $U$  on peut associer une pseudo-métrique

$f(x,y)$  telle que :

1° quel que soit  $a > 0$ ,  $f^{-1}(t < a)$  est un entourage ;

2° il existe  $a > 0$  tel que  $f^{-1}(t < a)$  soit contenu dans  $U$ .

Cela montrera en effet que la famille des ensembles  $f^{-1}(t < a)$ , pour  $a > 0$  arbitraire, et  $f$  parcourant la famille des pseudo-métriques associées à chaque entourage de la structure uniforme donnée, est un système fondamental d'entourages de cette structure.

Pour démontrer la proposition précédente, définissons par récurrence une suite d'entourages symétriques  $(U_n)$  telle que  $U_1 \subset U$ , et

$$U_{n+1}^3 \subset U_n \text{ quel que soit } n > 1.$$

Posons :  $g(x,y) = 0$  si  $(x,y) \in U_n$  quel que soit  $n$

$$g(x,y) = 2^{-k} \text{ si } (x,y) \in U_n \text{ pour } 1 \leq n \leq k, \text{ et}$$

$$(x,y) \notin U_{k+1}.$$

$g(x,y)$  est donc une fonction symétrique, positive et telle que  $g(x,x)=0$  quel que soit  $x$ . Nous allons en déduire une pseudo-métrique  $f(x,y)$  en posant

$$f(x,y) = \text{Borne} \sum_{i=1}^p g(z_i, z_{i+1})$$

pour toutes les suites finies  $(z_1, z_2, \dots, z_{p+1})$  telles que  $z_1 = x$ ,  $z_{p+1} = y$ . Il résulte en effet de cette définition que  $f(x,y)$  vérifie l'inégalité du triangle ; d'autre part, on voit immédiatement que  $f$  est symétrique et que  $f(x,x)=0$  quel que soit  $x$ .

On a de plus  $f(x,y) \leq g(x,y)$ , et nous allons montrer que

$$(3) \quad f(x,y) \geq \frac{1}{2} g(x,y)$$

ce qui entraînera la proposition à démontrer : car, quel que soit  $a > 0$ , si on prend  $n$  tel que  $2^{-n} < a$ ,  $f^{-1}(t < a)$  contiendra  $f^{-1}(t \leq 2^{-n})$ , c'est-à-dire l'entourage  $U_n$  ; et d'autre part,  $f^{-1}(t < \frac{1}{2})$  sera contenu dans  $f^{-1}(t \leq 1) = U_1$ , donc dans  $U$ .

Pour démontrer (3), il suffit d'établir que, pour toute suite de  $p+1$  points  $(z_1, z_2, \dots, z_{p+1})$  telle que  $z_1 = x$ ,  $z_{p+1} = y$ , on a

$$(4) \quad \sum_{i=1}^p g(z_i, z_{i+1}) \geq \frac{1}{2} g(x,y)$$

C'est vrai pour  $p = 1$  ; démontrons-le par récurrence sur  $p$ .

Posons  $\sum_{i=1}^p g(z_i, z_{i+1}) = A$  ; comme  $g(x,y) < 1$ , il suffit de faire la démonstration lorsque  $A < \frac{1}{2}$ . Or, il existe deux

termes consécutifs  $z_h, z_{h+1}$  de la suite, tels que

$$\sum_{i=1}^{h-1} g(z_i, z_{i+1}) \leq A/2 \quad \text{et} \quad \sum_{i=h+2}^p g(z_i, z_{i+1}) \leq A/2$$

donc, l'inégalité (4), supposée vraie pour des suites de  $p$  points au plus, donne  $g(x, z_h) \leq A$ ,  $g(z_{h+1}, y) \leq A$ .

D'autre part, on a évidemment  $g(z_n, z_{n+1}) \leq A$  ; si  $k$  est le plus petit entier tel que  $2^{-k} \leq A$  , on a  $k \geq 2$  , et  $(x, z_n) \in U_k$  ,  $(z_n, z_{n+1}) \in U_k$  ,  $(z_{n+1}, y) \in U_k$  donc  $(x, y) \in U_k^3 \subset U_{k-1}$  , et par suite  $g(x, y) \leq 2^{-k+1} \leq 2A$  .

C. Q. F. D.

On notera que, si la structure uniforme donnée est séparée, quels que soient les points  $x, y$  tels que  $x \neq y$  , il existe une pseudo-métrique  $f$  de la famille à laquelle est attachée la structure donnée, telle que  $f(x, y) \neq 0$  ; et inversement, si cette condition est vérifiée pour une famille de pseudo-métriques, la structure uniforme qui lui est attachée est séparée.

§ 2. Les espaces uniformisables .

Nous sommes maintenant en mesure de caractériser les espaces topologiques uniformisables, c'est-à-dire susceptibles d'être munis d'une structure uniforme séparée compatible avec leur topologie (ch. II, § ). Exprimons en effet que, sur un espace topologique  $E$  , une structure uniforme attachée à une famille  $\Phi$  de pseudo-métriques est compatible avec la topologie de  $E$  : dans la topologie déduite de cette structure uniforme, un système fondamental de voisinages d'un point  $x_0$  est formé des ensembles  $g^{-1}(t < a)$  , où  $g(x) = f(x_0, x)$   $f$  étant une fonction quelconque de  $\Phi$  et  $a$  un nombre  $> 0$  quelconque.

D'où (en vertu de la prop. 1 du § 1) les deux conditions nécessaires et suffisantes :

- 1° quels que soient  $x_0 \in E$  et  $f \in \Phi$  ,  $f(x_0, x)$  est continue dans  $E$  (pour abréger, on dira qu'une pseudo-métrique  $f$  vérifiant cette condition est une pseudo-métrique continue) ;

2° quels que soient le point  $x_0 \in E$  et le voisinage  $V$  de ce point, il existe une pseudo-métrique  $f \in E$  et un nombre  $a > 0$  tels que  $f(x_0, x) \geq a$  en tout point  $x \in \int V$ .

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 1. Pour qu'un espace de Hausdorff  $E$  soit uniformisable il faut et il suffit qu'il vérifie l'axiome suivant :

0-V. Quels que soient le point  $x_0 \in E$  et le voisinage  $V$  de  $x_0$ , il existe une fonction  $h_{x_0, V}(x)$  continue sur  $E$ , prenant ses valeurs dans  $[0, 1]$ , égale à 0 au point  $x_0$  et à 1 en tout point de  $\int V$ .

La condition est nécessaire d'après ce qui précède, car si  $f$  est une pseudo-métrique et  $a$  un nombre  $> 0$  tels que  $f(x_0, x) \geq a$  dans  $\int V$  la fonction  $h_{x_0, V}(x) = \text{Min}(1, \frac{1}{a} f(x_0, x))$  remplit bien toutes les conditions énoncées dans 0-V.

La condition est suffisante : considérons en effet sur  $E$  la famille  $\Phi$  de toutes les pseudo-métriques continues, et prenons sur  $E$  la structure uniforme attachée à  $\Phi$  ; si  $x_0$  est un point quelconque de  $E$ ,  $V$  un voisinage quelconque de  $x_0$ , la pseudo-métrique  $f(x, y) = |h_{x_0, V}(x) - h_{x_0, V}(y)|$  appartient à  $\Phi$ , et on a  $f(x_0, x) \geq 1$  en tout point de  $\int V$ , ce qui montre que les deux conditions données ci-dessus sont vérifiées, et que la structure uniforme attachée à  $\Phi$  est compatible avec la topologie de  $E$ .

Remarque. L'axiome 0-V entraîne évidemment 0-IV ; nous retrouvons ainsi le fait que tout espace uniformisable est régulier. Mais cette condition n'est pas suffisante :



on peut en effet former des exemples d'espaces réguliers ne vérifiant pas O-V ; en d'autres termes, O-IV et O-V ne sont pas équivalents.

Nous appellerons structure uniforme universelle sur  $E$  celle que nous venons de définir ; c'est évidemment la plus fine de toutes les structures uniformes compatibles avec la topologie de  $E$  ; de plus, elle jouit de la propriété suivante :

Proposition 1. La structure uniforme universelle est la seule rendant uniformément continue toute application continue de  $E$  dans un espace uniforme quelconque.

En effet, soit  $F$  un espace uniforme, attaché à une famille de pseudo-métriques  $f_{\alpha}(u,v)$  sur  $F$ , et soit  $g$  une application continue de  $E$  dans  $F$  ;  $f_{\alpha}(g(x), g(y))$  est, sur  $E$ , une pseudo-métrique continue, d'où résulte immédiatement, d'après les définitions des structures uniformes de  $E$  et  $F$ , que  $g$  est uniformément continue dans  $E$ .

D'autre part, s'il existait deux structures uniformes compatibles avec la topologie de  $E$  et possédant la propriété de l'énoncé, l'application identique de  $E$  sur lui-même serait uniformément continue par rapport à chacune d'elles, donc ces structures seraient identiques.

Lorsque  $E$  est compact, on retrouve naturellement de cette manière la propriété fondamentale des fonctions continues sur un espace compact, prenant leurs valeurs dans un espace uniforme (ch. II, § , th. ). Lorsque  $E$  est uniformisable, une autre structure uniforme compatible avec sa topologie est la structure la moins fine rendant uniformément continues les fonctions  $h_{x_0, \gamma}$  :

car 0-V exprime précisément la condition nécessaire et suffisante pour que cette structure soit compatible avec la topologie de (ch. II, § , th. ).

De plus, comme  $[0,1]$  est compact,  $E$ , muni de cette structure uniforme, est précompact (ch. II, § , th. ); donc,  $E$ , en tant qu'espace topologique, est homéomorphe à un sous-espace d'un espace compact; nous avons déjà démontré la réciproque de cette proposition (ch. II, § ).

On peut préciser l'espace compact où on "plonge" un espace uniformisable; la méthode développée au ch. II, § montre en effet que  $E$  est homéomorphe à une partie de l'espace produit  $C = \prod S_\nu$  où  $\nu$  parcourt un ensemble d'indices  $I$  équipotent à l'ensemble des  $h_{x_0, \nu}$ , et  $S_\nu$  désigne l'intervalle  $[0,1]$  quel que soit  $\nu$  ( $C$  est appelé un "cube à une infinité de dimensions"); ainsi:

Proposition 2. Pour qu'un espace topologique soit uniformisable, il faut et il suffit qu'il soit homéomorphe à un sous-espace d'un cube à une infinité de dimensions.

Remarques. 1) La même méthode montre que, chaque fois qu'on connaît une famille d'applications continues  $X_\nu(x)$  de  $E$  sur  $[0,1]$  telle que la famille des ensembles  $X_\nu^{-1}(t < a)$  (où  $a$  parcourt  $(0,1]$ ) forme une base de la topologie de  $E$ , on pourra prendre comme ensemble d'indices  $I$  l'ensemble des indices de ces fonctions.

2) Si on munit  $E$  d'une structure uniforme compatible avec sa topologie, l'espace uniforme obtenu ne sera

pas en général isomorphe à un sous-espace d'un cube à une infinité de dimensions, puisqu'un tel sous-espace est précompact.

Exercice. Montrer directement, (sans utiliser le théorème d'Alexandroff) que tout espace localement compact est uniformisable. Si  $E$  est localement compact, la structure uniforme la moins fine sur  $E$  rendant uniformément continues toutes les fonctions réelles continues dans  $E$  et nulles en dehors d'un compact, est compatible avec la topologie de  $E$ . Montrer qu'avec cette structure uniforme, l'espace  $\bar{E}$  (complété de  $E$ ) est compact et n'est autre que l'espace obtenu par adjonction d'un seul point à  $E$  (th. d'Alexandroff). [Pour établir ce dernier point, on montrera que les seuls filtres de Cauchy non convergents sur  $E$  sont le filtre engendré par les complémentaires des ensembles compacts, et tous les filtres plus fins].

§ 3. Les espaces normaux.

L'axiome O-V des espaces uniformisables peut encore s'énoncer de la manière suivante : quels que soient l'ensemble fermé  $A$  et le point  $x \in A$ , il existe une application continue de  $E$  sur  $[0,1]$  égale à 0 au point  $x$ , et à 1 en tout point de  $A$  ; on peut dire encore que, dans un espace uniformisable, on peut séparer un point et un ensemble fermé par une fonction continue numérique.

Nous dirons qu'un espace de Hausdorff  $E$  est normal lorsqu'on peut y séparer de la même manière deux ensembles fermés sans point commun, autrement dit, lorsque l'axiome suivant est vérifié :

O-VI. Quels que soient les ensembles fermés sans point commun  $A$ ,  $B$  dans  $E$ , il existe une application continue de  $E$  sur  $[0,1]$  égale à 0 en tout point de  $A$ , et à 1 en tout point de  $B$ .

Il est clair que tout espace normal est uniformisable; mais inversement, on peut définir des espaces uniformisables non normaux (voir ).

Théorème 1 (Urysohn). L'axiome O-VI est équivalent au suivant :

O-VI'. Quels que soient les ensembles fermés sans point commun A , B , dans E , il existe deux ensembles ouverts  $\Omega$  ,  $\Omega'$  sans point commun tels que  $A \subset \Omega$  ,  $B \subset \Omega'$  .

Il est immédiat que O-VI entraîne O-VI' , car si f est une application continue de E sur  $[0,1]$  égale à 0 dans A , à 1 dans B , les ensembles ouverts  $f^{-1}(t < 1/3)$  et  $f^{-1}(t > 2/3)$  contiennent respectivement A et B et sont sans point commun.

Pour démontrer la réciproque, remarquons d'abord que O-VI' est évidemment équivalent à l'axiome suivant

O-VI''. Quels que soient l'ensemble fermé A , et l'ensemble ouvert V contenant A , il existe un ensemble ouvert W contenant A et tel que  $\bar{W} \subset V$  .

Définissons alors par récurrence une famille dénombrable d'ensembles ouverts de la manière suivante : posons  $U_1 = \bar{B}$  ; comme  $A \subset U_1$  , déterminons l'ensemble ouvert  $U_0$  tel que  $A \subset U_0$  et  $\bar{U}_0 \subset U_1$  , ce qui est possible d'après O-VI''. Supposons ensuite que, pour chaque nombre dyadique de la forme  $k/2^n$  ( $k=0,1,\dots,2^n$ ) , on ait défini un ensemble ouvert  $U_{k/2^n}$  , de sorte que  $\bar{U}_{k/2^n} \subset U_{(k+1)/2^n}$  ( $k=0,1,\dots,2^n-1$ )  $U_0$  et  $U_1$  ayant le même sens que ci-dessus. Pour chaque nombre  $(2k+1)/2^{n+1}$  ( $k=0,1,\dots,2^n-1$ ) déterminons alors, en vertu de O-VI'' un ensemble ouvert  $U_{(2k+1)/2^{n+1}}$  de sorte que  $\bar{U}_{k/2^n} \subset U_{(2k+1)/2^{n+1}}$  et

$\bar{U}_{(2k+1)/2^{n+1}} \subset U_{(k+1)/2^n}$ . On définit ainsi, pour chaque nombre dyadique  $r$  un ensemble ouvert  $U_r$  de sorte que  $U_0 \supset A, B \subset U_1$  et de plus, quels que soient  $r$  et  $r'$  dyadiques, si  $r < r'$

$$(1) \quad U_r \subset U_{r'}$$

Soit maintenant  $t$  un nombre réel quelconque ; posons  $U_t = \emptyset$  si  $t < 0$ ,  $U_t = E$  si  $t > 1$ , et enfin  $U_t = \bigcup_{r \leq t} U_r$  si  $0 < t < 1$ . Si  $t=r$ , on a bien  $U_t = U_r$  d'après (1) ; d'autre part, si  $0 \leq t \leq t' \leq 1$ , il existe deux nombres dyadiques  $r, r'$  tels que  $t < r < r' < t'$  ; comme  $U_t \subset U_r$ , on a, d'après (1)  $\bar{U}_t \subset \bar{U}_r \subset U_{r'} \subset U_{t'}$ .

Soit alors, pour tout point  $x \in E$ ,  $f(x)$  la borne inférieure des nombres  $t$  tels que  $x \in U_t$ . On a évidemment  $0 \leq f(x) \leq 1$  quel que soit  $x$ , et  $f(x)=0$  dans  $A$ ,  $f(x)=1$  dans  $B$  ; montrons enfin que  $f(x)$  est continue dans  $E$  : en effet, quels que soient  $x \in E$  et  $\varepsilon > 0$ , on a  $|f(y)-f(x)| < \varepsilon$  pour tout point  $y \in U_{f(x)+\varepsilon} \cap \bar{U}_{f(x)-\varepsilon}$ , et ce dernier ensemble est un voisinage de  $x$ .

G.Q.F.D.

Nous allons voir que, pour les fonctions numériques définies dans un espace normal, on peut résoudre par l'affirmative le problème général du prolongement d'une fonction continue posé au ch. I, § 6 :

Théorème 2 (Urysohn). A étant un ensemble fermé dans un espace normal E, f une fonction numérique définie et continue dans A, on peut former une fonction numérique prolongeant f, définie et continue dans tout l'espace E.

Supposons d'abord f bornée, et soit  $m_0 = \overline{\text{Borne}} |f(x)|$  ; posons

- 13 -

$H_0 = \overset{-1}{f}(t \leq -m_0/3)$ ,  $K_0 = \overset{-1}{f}(t \geq m_0/3)$ ;  $H_0$  et  $K_0$  sont fermés dans  $A$ , donc dans  $E$ . D'après 0-VI, il existe une fonction numérique  $g_0(x)$  définie et continue dans  $E$ , telle que  $|g_0(x)| \leq m_0/3$  quel que soit  $x$ , et  $g_0(x) = -m_0/3$  dans  $H_0$ ,  $g_0(x) = m_0/3$  dans  $K_0$ ; donc, si on pose  $f_1(x) = f(x) - g_0(x)$ ,  $f_1$  est continue dans  $A$ , et  $m_1 = \overline{\text{Borne}} |f_1(x)| \leq 2m_0/3$ .

Procédons par récurrence, et supposons définies  $g_0, g_1, \dots, g_n$  continues sur  $E$ , telles que  $|g_n(x)| \leq (2/3)^n m_0/3$ , et, si on pose  $f_n = f - (g_0 + g_1 + \dots + g_n)$ ,  $|f_n(x)| \leq (2/3)^n m_0$ ; on en déduira comme ci-dessus une fonction  $g_{n+1}$  définie et continue dans  $E$ , telle que  $|g_{n+1}(x)| \leq (2/3)^{n+1} m_0/3$  et que, si on pose  $f_{n+1} = f_n - g_{n+1}$ , on ait, en tout point de  $A$ ,

$$|f_{n+1}(x)| \leq (2/3)^{n+1} m_0.$$

Il en résulte que, si on pose  $h_n = g_0 + g_1 + \dots + g_n$ , la suite  $(h_n(x))$  est une suite de Cauchy, donc convergente, quel que soit  $x$ ; soit  $g(x)$  sa limite. Quel que soit  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver  $n_0$  tel que, quels que soient  $p \geq n_0$  et  $q \geq n_0$ ,

$$|h_p(x) - h_q(x)| \leq \varepsilon, \text{ d'où aussi } |g(x) - h_p(x)| \leq \varepsilon \text{ quel que soit } x \in E;$$

$V$  étant un voisinage de  $x$  tel que  $|h_p(y) - h_p(x)| \leq \varepsilon$  quel que soit  $y \in V$ , on aura donc aussi  $|g(x) - g(y)| \leq 3\varepsilon$  quel que soit  $y \in V$ , ce qui montre que  $g(x)$  est continue dans  $E$  (cf. ch. VII, § ). D'autre part, on a en tout point de  $A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ , donc  $f(x) = g(x)$ , ce qui démontre le théorème dans le cas où  $f$  est bornée; on a de plus dans ce cas

$$|g(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |h_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} (2/3)^n m_0/3 = m_0.$$

On passe de là au cas général en remarquant que  $f(x)/1 + |f(x)|$  est une fonction continue bornée ; si  $h(x)$  est son prolongement continu à  $E$ ,  $h(x)/1 - |h(x)|$  sera un prolongement continu de  $f(x)$ . C.Q.F.D.

Remarques. 1) Le théorème 2 s'étend immédiatement aux fonctions prenant leurs valeurs dans un produit de droites numériques ; il suffit de l'appliquer aux fonctions coordonnées.

2) L'axiome 0-VI étant évidemment un cas particulier du théorème 2 (car la fonction égale à 0 sur  $A$ , à 1 sur  $B$ , est continue dans  $A \cup B$  lorsque  $A$  et  $B$  sont des ensembles fermés sans point commun), on voit que 0-VI et le théorème 2 sont équivalents ; on peut encore dire que, pour que le prolongement continu à tout l'espace  $E$  d'une fonction numérique continue sur un ensemble fermé soit possible, il faut et il suffit que  $E$  soit normal.

La forme 0-VI'' de l'axiome des espaces normaux entraîne la proposition suivante :

Proposition 1. De tout recouvrement ouvert fini  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  d'un espace normal  $E$ , on peut en déduire un autre  $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$  tel que  $\bar{B}_i \subset A_i$  quel que soit l'indice  $i$ .

Il suffit de montrer qu'on peut remplacer un quelconque des  $A_i$ , par exemple  $A_1$ , par un ensemble ouvert  $B_1$  tel que  $\bar{B}_1 \subset A_1$ , et que  $B_1$  et les  $A_i$  ( $2 \leq i \leq n$ ) forment un recouvrement de  $E$ . Or, si on pose  $C_1 = \bigcup_{i=2}^n A_i$ ,  $C_1$  est ouvert, et on <sup>peut</sup> par hypothèse  $A_1 \subset C_1$  ; donc il existe un ensemble ouvert  $V_1$  tel que  $A_1 \subset V_1$ , et  $V_1 \subset C_1$ . Si on pose  $B_1 = \bar{V}_1$ , on a  $\bar{B}_1 \subset V_1 \subset A_1$ , et  $B_1 \cup C_1 = E$ , ce qui démontre la proposition.

Nous dirons qu'une famille finie  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$  de fonctions numériques positives sur un espace  $E$  forme une partition continue de l'unité si les  $f_i$  sont continues, et si  $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$  quel que soit  $x \in E$ . On déduit alors de la proposition 1 et de la forme 0-VI de l'axiome des espaces normaux que :

Proposition 2. A tout recouvrement ouvert fini  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  d'un espace normal  $E$ , on peut faire correspondre une partition continue de l'unité  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$  telle que  $f_i(x) = 0$  en tout point de  $\bigcup A_i$  quel que soit l'indice  $i$ .

Formons d'abord, en appliquant la prop. 1, un recouvrement ouvert fini  $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$  tel que  $\bar{B}_i \subset A_i$  quel que soit  $i$ ; d'après 0-VI, il existe pour chaque indice  $i$ , une fonction numérique  $g_i$ , positive et continue dans  $E$ , égale à 0 dans  $\bigcup A_i$  et à 1 dans  $\bar{B}_i$ ; les  $B_i$  formant un recouvrement de  $E$ , on a donc  $\sum_{i=1}^n g_i(x) > 0$  en tout point de  $E$ ; si on pose  $f_i = g_i / \sum_{i=1}^n g_i$ , il est clair alors que la famille  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une partition continue de l'unité telle que  $f_i(x) = 0$  dans  $\bigcup A_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

Application aux espaces compacts. Proposition 3. Tout espace compact est normal.

En effet, soit  $A$  un ensemble fermé dans un espace compact  $E$ , et  $V$  un ensemble ouvert contenant  $A$ . Comme  $E$  est régulier, pour tout point  $x \in A$  on peut trouver un voisinage ouvert  $U_x$  de  $x$  tel que  $\bar{U}_x \subset V$ . Lorsque  $x$  parcourt  $A$ , les  $U_x$  forment un recouvrement ouvert de  $A$ ; on peut donc trouver un nombre fini de points  $x_1 \in A$  ( $1 \leq i \leq n$ ) tels que  $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} = W$ ; de plus  $\bar{W} = \bigcup_{i=1}^n \bar{U}_{x_i} \subset V$ , ce qui établit 0-VI".



Exercices. 1) Montrer que tout espace réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles compacts est normal.

[ On peut par contre former des espaces localement compacts mais non normaux ; un tel exemple montre aussi qu'un sous-espace d'un espace normal n'est pas nécessairement normal (voir Tychonoff, Math. Ann. t. 102, p. 555) ] .

2) Démontrer la proposition 3 en utilisant la forme C de l'axiome des espaces compacts.

3) Si  $E$  est un espace régulier,  $A$  un ensemble fermé dans  $E$ ,  $B$  un ensemble compact dans  $E$ , tel que  $A \cap B = \emptyset$ , montrer qu'on peut trouver deux ensembles ouverts sans point commun  $V, W$  tels que  $A \subset V, B \subset W$ .

§ 4. Les espaces métrisables et le dénombrable en Topologie.

Structures uniformes métrisables.

Une structure uniforme (séparée ou non) sur un fondamental quelconque  $E$  est dite métrisable lorsqu'il existe une famille composée d'une seule pseudo-métrique à laquelle

est attachée cette structure ; autrement dit, il existe alors une pseudo-métrique  $\delta(x,y)$  sur  $E$  telle que le filtre des entourages de la structure considérée ait pour base la famille des ensembles  $\delta(t < a)$ ,  $a$  parcourant l'ensemble des nombres strictement positifs.

Les structures uniformes métrisables sont caractérisées par le critère suivant :

Théorème 1. Pour qu'une structure uniforme soit métrisable, il faut et il suffit que le filtre de ses entourages ait une base dénombrable.

La condition est évidemment nécessaire, car si la structure est définie par la pseudo-métrique  $\delta(x,y)$ , les ensembles  $\delta(t < 1/n)$  forment une base du filtre des entourages ( $n$  entier

positif quelconque). Inversement, elle est suffisante : on peut en effet supposer, en procédant par récurrence, que la base dénombrable  $(U_n)$  du filtre  $\mathcal{U}$  des entourages est telle que les  $U_n$  soient symétriques et vérifient la relation  $U_{n+1}^3 \subset U_n$  quel que soit  $n$ . Si on définit alors, à partir de cette suite d'entourages, une pseudo-métrique  $f(x,y)$  par le procédé employé dans la démonstration du th. 1 du § 1, cette pseudo-métrique définira la structure uniforme.

Corollaire. Une structure uniforme attachée à une famille dénombrable de pseudo-métriques est métrisable.

En effet, si  $(f_n)$  est la suite de pseudo-métriques définissant une telle structure, le filtre des entourages est engendré par la famille dénombrable des ensembles  $f_n^{-1}(t < 1/n)$  ( $n$  et  $t$  entiers arbitraires).

Une même structure uniforme métrisable peut être définie par des pseudo-métriques différentes : pour que deux pseudo-métriques  $f(x,y)$ ,  $g(x,y)$  définissent la même structure uniforme, il faut et il suffit qu'à tout nombre  $a > 0$  corresponde un nombre  $b > 0$  tel que, pour tout couple  $(x,y)$  tel que  $g(x,y) < b$ , on ait  $f(x,y) < a$ , et que, pour tout couple  $(x,y)$  tel que  $f(x,y) < b$ , on ait  $g(x,y) < a$ ; on dit alors que  $f$  et  $g$  sont deux pseudo-métriques équivalentes.

Il en sera ainsi en particulier lorsque  $g(x,y) = \varphi(f(x,y))$ , où  $\varphi(u)$  est une fonction définie et positive pour  $u \geq 0$ , strictement croissante et continue au point  $u = 0$ , telle enfin que  $\varphi(0) = 0$  et que  $\varphi(u+v) \leq \varphi(u) + \varphi(v)$  quels que soient  $u$  et  $v$  positifs.

Par exemple, les fonctions

$$\sqrt{u} \text{ , } \log_2(1+u) \text{ (a base quelconque), } u/(1+u)$$

possèdent ces propriétés, comme le lecteur le vérifiera aisément. Le dernier de ces exemples montre qu'on peut toujours trouver une pseudo-métrique bornée équivalente à une pseudo-métrique quelconque ; c'est d'ailleurs ce qui résulte aussi de la démonstration du th. 1 du § 1 .

Remarquons enfin que, si  $\delta(x,y)$  est une pseudo-métrique définissant une structure métrisable non séparée sur un ensemble  $E$  , la structure uniforme séparée associée est définie sur l'ensemble quotient  $E/P$  , où  $P$  est la relation d'équivalence  $\delta(x,y)=0$  ; cette structure est aussi métrisable, et on peut la définir par la pseudo-métrique  $\bar{\delta}(\bar{x},\bar{y})$  définie sur chaque couple  $(\bar{x},\bar{y})$  de points de  $E/P$  par la condition  $\bar{\delta}(\bar{x},\bar{y})=\delta(x,y)$ , où  $x$  et  $y$  appartiennent respectivement aux classes d'équivalence de  $E$  correspondant à  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  (définition qui a bien un sens, car elle ne dépend pas des points  $x$  et  $y$  choisis dans ces classes d'équivalence, comme il résulte de l'inégalité du triangle).

Espaces métrisables. Un espace uniforme  $E$  est dit espace uniforme métrisable lorsque sa structure uniforme est séparée et métrisable; si  $\delta(x,y)$  est une pseudo-métrique qui la définit, on a donc  $\delta(x,y) \neq 0$  si  $x \neq y$  : on donne alors à  $\delta(x,y)$  le nom de métrique (ou de distance) définissant la structure uniforme de  $E$  , et on dit aussi que  $E$  est métrisé par  $\delta(x,y)$ .

Toute structure métrisable non séparée définit donc un espace uniforme métrisable sur l'ensemble quotient associé.

Exercice. Montrer que tout espace uniforme est isomorphe à un sous-espace d'un produit d'espaces uniformes métrisables. [ Si la structure uniforme de l'espace  $E$  est définie par des pseudo-métriques  $f_\alpha(x,y)$ , on considérera pour chaque  $\alpha$ , l'espace uniforme métrisable  $E_\alpha$  défini par la pseudo-métrique  $f_\alpha(x,y)$  sur l'ensemble quotient  $E/P_\alpha$  (où  $P_\alpha$  est la relation  $f_\alpha(x,y)=0$ ) ; et si  $x_\alpha$  désigne le point de  $E_\alpha$  image de  $x$  par l'application canonique de  $E$  sur  $E/P_\alpha$ , on montrera que l'application  $\bar{x} = (x_\alpha)$  de  $E$  dans le produit  $\prod_\alpha E_\alpha$  est biunivoque et uniformément continue dans les deux sens. ]

Un espace topologique  $E$  est dit espace métrisable lorsqu'il est possible de le munir d'une structure uniforme compatible avec sa topologie, et qui en fait un espace uniforme métrisable ; il peut naturellement exister plus d'une structure uniforme ayant cette propriété (voir ch. II, § 3, où les structures uniformes données en exemple sont évidemment métrisables).

On ne connaît pas de condition topologique simple (de forme analogue à 0-VI', par exemple) nécessaire et suffisante pour qu'un espace topologique donné soit métrisable ; nous revenons plus loin sur cette question. Pour vérifier qu'une métrique  $\delta(x,y)$  donnée est compatible avec la structure topologique d'un espace donné  $E$  il suffira évidemment de vérifier qu'en chaque point  $x$ , si on désigne par  $V_\alpha(x)$  l'ensemble des points  $y$  tels que  $\delta(x,y) < \alpha$ , la famille des  $V_\alpha(x)$  forme un système fondamental de voisinages.

Il est clair que tout sous-espace d'un espace métrisable  $E$  est métrisable :  $A$  étant une partie quelconque de  $E$ ,  $\delta(x,y)$  une

distance métrisant  $E$ , la restriction de cette fonction à  $A \times A$  définit sur  $A$  la structure uniforme induite par celle de  $E$ .

De même, le produit d'une infinité d'espaces métrisables est métrisable, car le produit d'une infinité dénombrable de structures uniformes métrisables est une structure uniforme dont le filtre des entourages admet encore une base dénombrable.

Au contraire, un produit non dénombrable d'espaces métrisables n'est pas métrisable, car en aucun de ses points le filtre des voisinages n'a une base dénombrable (voir ci-dessous, prop. 5)

Lorsque  $E$  est le produit d'un nombre fini d'espaces uniformes métrisables  $E_1, E_2, \dots, E_p$ , dont les métriques sont respectivement  $\delta_1(x_1, y_1), \dots, \delta_p(x_p, y_p)$ , on peut prendre par exemple comme métrique définissant la structure uniforme de  $E$  une des expressions (où  $x = (x_k)_{1 \leq k \leq p}, y = (y_k)_{1 \leq k \leq p}$ )

$$\Delta_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq p} \delta_k(x_k, y_k)$$

$$\Delta_1(x, y) = \sum_{k=1}^p \delta_k(x_k, y_k)$$

$$\Delta_r(x, y) = \left\{ \sum_{k=1}^p \left[ \delta_k(x_k, y_k) \right]^r \right\}^{1/r} \quad (1 < r)$$

Exercices. 1) Montrer que ces fonctions sont bien des métriques définissant la structure uniforme de  $E$ . [ Pour la troisième on utilisera l'inégalité dite de Minkowski (voir ) pour montrer qu'elle satisfait à l'inégalité du triangle ; on établira l'équivalence de ces métriques en montrant que

$$\Delta_\infty(x, y) \leq \Delta_r(x, y) \leq p^{1/r} \Delta_\infty(x, y)$$

2) Si  $E$  est le produit d'une infinité dénombrable d'espaces métrisables  $E_n$ , montrer que, en supposant  $E_n$  métrisé par une distance  $\delta_n(x_n, y_n) \leq 1$ , l'espace  $E$  est métrisé par  $\delta(x, y) = \sum_{n=1}^\infty \delta_n(x_n, y_n) / 2^n$ .

Distance de deux ensembles. Diamètre. Les notions que nous introdui-

Ensembles bornés. Sphères. sons maintenant sont relatives à une métrique déterminée  $\delta(x,y)$  sur un espace uniforme métrisable  $E$  : elles ne sont pas définies uniquement par la donnée de la structure uniforme (métrisable) de  $E$ .

A et B étant deux parties quelconques de  $E$ , on appelle distance des ensembles A et B le nombre  $\delta(A,B) = \text{Borne}_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \delta(x,y)$  ;

en particulier, la distance d'un point x à un ensemble A est le nombre  $\delta(x,A) = \text{Borne}_{y \in A} \delta(x,y)$  ; on a donc  $\delta(A,B) = \text{Borne}_{x \in A} \delta(x,B)$ .

Proposition 1. Pour que  $x \in \bar{A}$ , il faut et il suffit que  $\delta(x,A)=0$

En effet la relation  $\delta(x,A)=0$  exprime qu'il existe des points de A arbitrairement voisins de x, c'est-à-dire que  $x \in \bar{A}$ .

Soient maintenant x,y, deux points quelconques ; quel que soit  $\epsilon > 0$ , il existe un point  $z \in A$  tel que

$$\delta(y,z) \leq \delta(y,A) + \epsilon, \text{ d'où } \delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,A) + \epsilon ; \text{ à fortiori } \delta(x,A) \leq \delta(x,y) + \delta(y,A) + \epsilon,$$

et comme  $\epsilon$  est arbitraire  $\delta(x,A) \leq \delta(y,A) + \delta(x,y)$ . De même

$$\delta(y,A) \leq \delta(x,A) + \delta(x,y), \text{ autrement dit}$$

$$(1) \quad |\delta(x,A) - \delta(y,A)| \leq \delta(x,y)$$

On en déduit immédiatement que

Proposition 2.  $\delta(x,A)$  est fonction uniformément continue de x dans E.

De là résulte que l'ensemble des points x tels que  $\delta(x,A) < a$  est un ensemble ouvert contenant A, quel que soit  $a > 0$  ; de même l'ensemble des points x tels que  $\delta(x,A) \leq a$  est un ensemble fermé contenant A.

La proposition 1 ne s'étend pas au cas de deux ensembles quelconques : on peut avoir  $\delta(A,B)=0$  , et  $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$  .

Exemple. Il suffit de considérer, sur la droite numérique  $\mathbb{R}$  , les ensembles fermés formés des deux suites  $(n)$  et  $(n + 1/2n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Deux ensembles fermés sans point commun peuvent donc avoir une distance nulle ; mais ils peuvent toujours être séparés par des ensembles ouverts sans point commun , autrement dit

Proposition 3. Tout espace métrisable est normal.

C'est ce qui résulte de la proposition plus précise suivante :

Proposition 4. Si deux ensembles A et B sont tels que  $A \cap \bar{B} = B \cap \bar{A} = \emptyset$  on peut trouver des ensembles ouverts sans point commun V, W , tel que  $A \subset V$  ,  $B \subset W$  .

Il suffit de prendre pour V l'ensemble des points où  $\delta(x,A) - \delta(x,B) < 0$  , et pour W celui où  $\delta(x,A) - \delta(x,B) > 0$  ; ce sont des ensembles ouverts d'après la prop. 2 , et, d'après la prop. 1, en tout point de A ,  $\delta(x,A)=0$  et  $\delta(x,B) > 0$  , donc  $A \subset V$  , et on voit de même que  $B \subset W$  .

On rencontre ainsi une seconde catégorie fort importante d'espaces normaux, la première étant formée des espaces compacts ( § 3 ) ; il existe d'ailleurs des espaces normaux qui ne sont ni compacts, ni métrisables (voir )

On appelle diamètre d'un ensemble A le nombre  $d(A) = \sup_{\substack{x \in A \\ y \in A}} \delta(x,y)$  ;

un ensemble est dit borné si son diamètre est fini ; l'espace tout entier est borné si  $\delta(x,y)$  est bornée. On ne peut avoir évidemment  $d(A)=0$  que si A contient au plus un point.

$r$  étant un nombre strictement positif, on appelle sphère ouverte de centre  $x$  et de rayon  $r$  (toujours pour une métrique déterminée  $\delta(x,y)$ ) l'ensemble des points  $y$  tels que  $\delta(x,y) < r$ ; sphère fermée de centre  $x$  et rayon  $r$  l'ensemble des points  $y$  tels que  $\delta(x,y) \leq r$ ; périsphère de centre  $x$  et de rayon  $r$  l'ensemble des points  $y$  tels que  $\delta(x,y) = r$ .

Exercices. 1) Que sont ces ensembles dans l'espace numérique  $\mathbb{R}^n$  lorsqu'on y prend respectivement les métriques

$$\begin{aligned} \delta_\infty(x,y) &= \max_{1 \leq p \leq n} |x_p - y_p| \\ \delta_1(x,y) &= \sum_{p=1}^n |x_p - y_p| \\ \delta_2(x,y) &= \left[ \sum_{p=1}^n |x_p - y_p|^2 \right]^{1/2} \text{ (métrique euclidienne)} \end{aligned}$$

2) Montrer que dans un espace métrisable connexe  $E$ , les périsphères relatives à une métrique non bornée ne sont pas vides.

Il résulte de la continuité de  $\delta(x,y)$  que les sphères ouvertes sont des ensembles ouverts, les sphères fermées et les périsphères des ensembles fermés. Mais il ne faut pas se laisser abuser par la terminologie adoptée, et croire que, dans un espace métrisable quelconque, les sphères et périsphères jouissent des mêmes propriétés topologiques ou métriques que dans les espaces numériques.

C'est ainsi que l'adhérence d'une sphère ouverte peut être distincte de la sphère fermée de même rayon, que la frontière d'une sphère fermée peut être distincte de la périsphère de même rayon, qu'une sphère peut n'être pas connexe, que son diamètre peut être inférieur au double de son rayon. On trouvera des exemples de toutes ces singularités (et d'autres singularités analogues) dans la thèse de E. Blanc (Annales de l'École Normale, 1938, t. , p. )



Emploi des suites dénombrables. Proposition 5. Dans un espace métrisable, tout point possède un système fondamental dénombrable de voisinages.

Les sphères de centre  $x$  et de rayon  $1/n$  ( $n=1,2,\dots$ ) forment en effet un système fondamental de voisinages de  $x$ .

Cette proposition est à l'origine du rôle que jouent les suites dénombrables de points dans les espaces métrisables, où, dans beaucoup de questions, leur emploi peut se substituer à celui des filtres. En effet, tout filtre convergent est alors plus fin qu'un filtre convergent à base dénombrable (à savoir le filtre des voisinages de son point limite) ; comme d'autre part, tout filtre à base dénombrable est le filtre intersection des filtres élémentaires (c'est-à-dire associés à une suite dénombrable, voir ch. I, § 5) plus fins que lui, on peut considérer qu'on connaîtra l'ensemble des filtres convergents sur un espace métrisable, lorsqu'on connaîtra l'ensemble des suites dénombrables convergentes.

Bien entendu, il n'en est pas de même pour un espace où la proposition 5 n'est pas vraie, et c'est ce qui explique pourquoi la notion de suite dénombrable est tout à fait inadaptée à l'étude des espaces topologiques généraux. On peut former en particulier des espaces topologiques où, en chaque point, l'intersection d'une famille dénombrable de voisinages est encore un voisinage : dans un tel espace, il n'y a pas d'autres suites convergentes que les suites dont tous les termes sont égaux à partir de l'un d'entre eux.

Aux propositions démontrées au ch. I ( § 6) sur les filtres correspondent alors pour les suites dans un espace métrisable  $E$  les propositions suivantes :

Proposition 6. Pour qu'un point soit adhérent à un ensemble  $A$  , il faut et il suffit qu'il existe une suite dénombrable de points de  $A$  qui converge vers ce point.

Proposition 7. Pour qu'un point  $p$  soit valeur d'adhérence d'une suite  $(x_n)$  , il faut et il suffit qu'on puisse extraire de cette suite une suite partielle qui converge vers  $p$ .

Nous laissons au lecteur la démonstration de ces deux propositions qui peut se faire, soit directement, soit en appliquant les propositions générales sur les filtres (ch. I, § 6) et les remarques qui précèdent. Seule, la nécessité des conditions énoncées dans ces deux propositions est d'ailleurs spéciale aux espaces métrisables (plus généralement, à ceux où la proposition 5 est vraie) ; elles sont suffisantes dans tout espace topologique.

On a de même les propositions suivantes, relatives aux fonctions définies et prenant leurs valeurs dans des espaces métrisables :

Proposition 8.  $E$  et  $E'$  étant deux espaces métrisables,  $A$  une partie de  $E$  ,  $x_0$  un point de  $\bar{A}$  ,  $f$  une fonction définie dans  $A$  , à valeurs dans  $E'$  :

1° Pour qu'un point  $p \in E'$  soit valeur d'adhérence de  $f$  au point  $x_0$  relativement à  $A$  , il faut et il suffit qu'il existe une suite  $(x_n)$  de points de  $A$  , qui converge vers  $x_0$  , et soit telle que la suite  $(f(x_n))$  converge vers  $p$ .

2° Pour qu'un point  $p$  soit limite de  $f$  au point  $x_0$  , relativement à  $A$  , il faut et il suffit que, pour toute suite  $(x_n)$  de points de  $A$  qui converge vers  $x_0$  , la suite  $(f(x_n))$  converge vers  $p$ .

1° La condition est suffisante lorsque  $E$  et  $E'$  sont des espaces topologiques quelconques. Elle est nécessaire, car, si  $\mathcal{B}_A$  est la trace sur  $A$  du filtre des voisinages de  $x_0$ , et  $\mathcal{B}'$  le filtre des voisinages de  $p$ , les filtres  $\mathcal{B}_A$  et  $\mathcal{B}'$  ont chacun une base dénombrable, donc, s'il existe un filtre plus fin que  $\mathcal{B}'$  et que le filtre engendré par  $f(\mathcal{B}_A)$ , on peut trouver un filtre élémentaire qui soit aussi plus fin que ces deux filtres.

2° La condition est nécessaire lorsque  $E$  et  $E'$  sont des espaces quelconques. Elle est suffisante dès que  $E$  est métrisable ( $E'$  étant quelconque) car le filtre engendré par  $f(\mathcal{B}_A)$  est le filtre intersection des filtres associés aux suites  $(f(x_n))$  images des suites  $(x_n)$  de points de  $A$  qui convergent vers  $x_0$ .

Oscillation d'une fonction. La proposition 8 donne en particulier un critère de continuité d'une fonction en un point. On en a un autre pour les fonctions définies dans un espace quelconque  $E$ , et prenant leurs valeurs dans un espace métrisable  $E'$ , en introduisant la notion d'oscillation, par laquelle on mesure en quelque sorte la discontinuité d'une fonction en un point.

Soit  $\delta(y,z)$  une distance métrisant  $E'$ ;  $A$  étant une partie de  $E$ , on appelle oscillation dans  $A$  (relative à  $\delta$ ) d'une fonction  $f$ , définie dans  $E$ , à valeurs dans  $E'$ , le diamètre (relatif à  $\delta$ ) de l'ensemble  $f(A)$ ;  $x_0$  étant un point quelconque de  $E$ , on appelle oscillation de  $f$  au point  $x_0$  (relative à  $\delta$ ) le nombre  $\omega(x_0; f) = \text{Borne } d(f(V))$  lorsque  $V$  parcourt tous les voisinages de  $x_0$ .

Proposition 9. Pour qu'une fonction soit continue en un point, il faut et il suffit que son oscillation en ce point soit nulle.

En effet, dire que l'oscillation de  $f$  au point  $x_0$  est nulle équivaut à dire qu'il existe un ensemble  $f(V)$  contenu dans une sphère arbitrairement petite de centre  $f(x_0)$ .

Les espaces métrisables complets. Il suffit de se reporter à la démonstration du théorème de complétion des espaces uniformes (ch. II, § , th. ) pour constater que si le filtre des entourages d'un espace uniforme  $E$  a une base dénombrable, il en est de même du filtre des entourages de l'espace complété  $\tilde{E}$  ; autrement dit, l'espace complété d'un espace uniforme métrisable est métrisable. Il y a plus : si  $E$  est métrisé par une distance  $\delta(x,y)$ ,  $\tilde{E}$  est métrisé par le prolongement continu de  $\delta(x,y)$  à  $\tilde{E} \times \tilde{E}$ . En effet, ce prolongement est possible puisque  $\delta(x,y)$  est uniformément continue dans  $E \times E$  ; la fonction prolongée  $\tilde{\delta}(x,y)$  est évidemment positive, symétrique, et satisfait à l'inégalité du triangle (ch. IV, § ). Pour montrer que c'est une distance métrisant  $\tilde{E}$ , remarquons (prop. 6) que tout point de  $\tilde{E}$  est limite d'une suite de points de  $E$  (suites de Cauchy sur  $E$ ) ; si  $x$  et  $y$  sont deux points distincts de  $\tilde{E}$ , on a  $\tilde{\delta}(x,y) \neq 0$ , car sinon, il existerait deux suites de Cauchy  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  de points de  $E$  tendant respectivement vers  $x$  et  $y$ , et telles que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(x_n, y_n) = 0$  ; les filtres de Cauchy qui leur sont associés seraient donc équivalents contrairement à l'hypothèse. Le même procédé montre que, si  $\tilde{\delta}(x,y) \leq a$ , on a  $\delta(x_n, y_n) \leq 2a$  à partir d'une certaine valeur de  $n$  et qu'inversement, si  $\delta(x_n, y_n) \leq a$  à partir d'une certaine valeur de  $n$ ,  $\tilde{\delta}(x,y) \leq a$ , d'où on conclut, d'après la définition de la structure uniforme de  $\tilde{E}$ , que cette structure est définie par la métrique  $\tilde{\delta}$ .

D'après ce qu'on a vu ci-dessus pour les filtres convergents, on voit en se plaçant dans l'espace complété que tout filtre de Cauchy sur un espace uniforme métrisable est plus fin qu'un filtre de Cauchy à base dénombrable, et que tout filtre de Cauchy à base dénombrable est moins fin qu'un filtre associé à une suite de Cauchy. On en déduit que

Proposition 10. Pour qu'un espace uniforme métrisable soit complet il faut et il suffit que toute suite de Cauchy soit convergente.

Pour abrégé, nous appellerons espace métrique complet tout espace uniforme métrisable complet.

La propriété suivante rapproche ces espaces des espaces compacts: Proposition 11 (lemme de Baire). Dans un espace métrique complet, l'intersection d'une suite dénombrable décroissante  $(F_n)$  d'ensembles fermés non vides, dont le diamètre tend vers 0, se compose d'un seul point.

En effet, une telle suite engendre un filtre de Cauchy, dont le point limite est le seul point adhérent, donc appartient à tous les ensembles de la suite.

Remarque. Lorsque le diamètre de  $F_n$  ne tend pas vers 0, l'intersection des  $F_n$  peut être vide, comme le montre, sur la droite numérique, l'exemple des ensembles

$$F_n = [n, +\infty).$$

En général, dans un espace topologique quelconque  $E$ , on dit qu'un ensemble  $A$  est partout non dense, ou encore épars, lorsque le complémentaire de son adhérence (c'est-à-dire l'ensemble de ses points extérieurs) est un ensemble (ouvert) partout dense :

autrement dit, l'intersection de  $\bigcap A$  et d'un ensemble ouvert non vide quelconque contient un ensemble ouvert non vide. La réunion d'une famille dénombrable d'ensembles épars est appelée ensemble de 1<sup>ère</sup> catégorie (de Baire) ; tout ensemble qui n'est pas de 1<sup>ère</sup> catégorie est dit de II<sup>è</sup> catégorie. Tout ensemble fermé de II<sup>è</sup> catégorie contient un ensemble ouvert non vide, car sinon l'intersection du complémentaire d'un tel ensemble  $A$  avec un ensemble ouvert non vide quelconque serait un ensemble ouvert non vide, et  $A$  serait épars.

Théorème 2 (Baire). Dans un espace métrique complet, le complémentaire d'un ensemble de I<sup>ère</sup> catégorie est partout dense.

Il suffit de le démontrer pour la réunion d'une famille dénombrable  $(A_n)$  d'ensembles épars fermés. Soit alors  $G_1$  une sphère ouverte quelconque ;  $G_1 \cap \bigcap A_1$  contient l'adhérence  $\bar{G}_2$  d'une sphère ouverte  $G_2$  de diamètre  $\leq 1/2$  ;  $G_2 \cap \bigcap A_2$  contient l'adhérence d'une sphère ouverte  $G_3$  de diamètre  $\leq 1/3$  ; en procédant ainsi par récurrence, on détermine une suite  $(\bar{G}_n)$  de sphères fermées, de diamètre tendant vers 0, telle que  $\bar{G}_{n+1} \subset G_n$ , et que  $\bar{G}_n \cap A_n = \emptyset$ . Appliquant le lemme de Baire, on voit qu'il existe un point commun à tous les  $G_n$  et n'appartenant à aucun des  $A_n$ , ce qui démontre le théorème.

On peut énoncer ce dernier sous la forme équivalente :

Dans un espace métrique complet, l'intersection d'une famille dénombrable d'ensembles ouverts partout denses est un ensemble partout dense.

Remarques. Il résulte du théorème de Baire que, dans un espace métrique complet, tout ensemble ouvert (en particulier l'espace lui-même) est de II<sup>è</sup> catégorie.

En particulier, si un espace métrique complet est dénombrable, il existe au moins un de ses points qui ne forme pas un ensemble épars, c'est-à-dire qui est isolé. En appliquant cette remarque aux ensembles fermés d'un espace métrique complet, on voit qu'un ensemble fermé dénombrable dans un espace métrique complet contient toujours des points isolés.

Cette dernière propriété est donc une condition nécessaire pour qu'un espace topologique puisse être muni d'une structure d'espace métrique complet (compatible avec sa topologie). Par exemple, la droite rationnelle ne peut recevoir une telle structure (par contre, on peut montrer qu'elle peut être munie d'une structure uniforme non métrisable d'espace complet).

Espaces métrisables compacts. Le critère de compacité des espaces uniformes s'énonce de la manière suivante pour les espaces métrisables :

Pour qu'un espace uniforme métrisable  $E$  soit compact, il faut et il suffit qu'il soit complet et que, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un recouvrement fini de  $E$  dont tous les ensembles aient un diamètre inférieur à  $\epsilon$ .

Si dans cet énoncé on supprime l'hypothèse que  $E$  est complet, on obtient la condition nécessaire et suffisante pour que  $E$  soit précompact ; on en déduit aussi des critères analogues pour qu'un sous-ensemble d'un espace uniforme métrisable soit compact ou relativement compact.

Il en résulte en particulier que tout ensemble relativement compact est borné, quelle que soit la distance métrisant  $E$  ; mais il faut bien se garder d'identifier en général, pour une métrique déterminée, les ensembles bornés et les ensembles relativement compacts.

Tous ces critères supposent connue la structure métrisable de  $E$  ; mais il existe aussi pour les espaces métrisables un critère de compacité purement topologique qui leur est particulier :

Proposition 12. Pour qu'un espace métrisable  $E$  soit compact, il faut et il suffit que toute suite dénombrable de points de  $E$  ait une valeur d'adhérence.

Il résulte en effet de l'axiome C que la condition est nécessaire ; pour voir qu'elle est suffisante, supposons  $E$  métrisé par une distance  $\delta(x,y)$ , et non compact ; il existe alors un  $\alpha > 0$  tel qu'il n'y ait aucun recouvrement fini de  $E$  dont les ensembles aient tous un diamètre  $< \alpha$ . On peut alors définir par récurrence une suite infinie  $(x_n)$  de points de  $E$  telle que  $\delta(x_i, x_j) \geq \alpha$  quels que soient les indices  $i$  et  $j$  ; or une telle suite ne peut avoir de valeur d'adhérence, puisque toute sphère de rayon  $< \alpha/2$  contient au plus un point de la suite.

Le même raisonnement (où on s'appuie sur le critère de précompacité) montre que

Proposition 13. Pour qu'une partie  $A$  d'un espace métrisable  $E$  soit un ensemble relativement compact, il faut et il suffit que toute suite dénombrable de points de  $A$  ait une valeur d'adhérence dans  $E$ .

Corollaire. Dans un espace métrisable, l'ensemble des points d'une suite convergente est relativement compact.



En effet, si  $A$  est l'ensemble des points d'une suite qui converge vers un point  $p$ ,  $p$  est valeur d'adhérence de toute suite de points de  $A$  contenant une infinité de points distincts, et par ailleurs une suite qui ne contient qu'un nombre fini de points distincts admet toujours l'un de ses points comme valeur d'adhérence.

Remarque. D'après la proposition 7, on peut, dans les énoncés des prop. 12 et 13, remplacer la condition "que toute suite dénombrable de points (resp. de points de  $A$ ) ait une valeur d'adhérence" par la condition équivalente "que de toute suite dénombrable de points (resp. de points de  $A$ ) on puisse extraire une suite partielle convergente".

Des propriétés des fonctions numériques continues sur un compact (ch. IV, § ) on déduit les propriétés suivantes :

Proposition 14.  $E$  étant un espace métrisé par une distance  $\delta(x,y)$   $A$  une partie quelconque de  $E$ ,  $F$  un ensemble compact dans  $E$ , il existe un point  $x \in F$  tel que  $\delta(x,A) = \delta(F,A)$ .

Il suffit de remarquer que  $\delta(x,A)$  est continue dans  $F$ , et  $y$  atteint donc sa borne inférieure.

Corollaire. Si  $A$  est fermé et sans point commun avec  $F$ ,  $\delta(F,A) > 0$ .

Proposition 15.  $F$  étant un ensemble compact dans un espace  $E$  métrisé par une distance  $\delta(x,y)$ , il existe deux points  $x,y$ , de  $F$  tels que  $\delta(x,y) = d(F)$ .

Même raisonnement pour la fonction  $\delta(x,y)$  continue sur le produit  $F \times F$ .

Condition de métrisabilité d'un espace compact.

Théorème 3 (Urysohn). Pour qu'un espace compact soit métrisable, il faut et il suffit qu'il ait une base dénombrable.

La condition est nécessaire : car, pour chaque valeur de  $n$ , on peut recouvrir un espace compact métrisable par un nombre fini d'ensembles ouverts de diamètre  $\leq 1/2^n$ , et la famille de tous ces ensembles constitue bien une base dénombrable de  $E$ .

La condition est suffisante : car, si, dans  $E \times E$ ,  $\Omega$  est un ensemble ouvert contenant la diagonale  $\Delta$ , il existe, pour chaque point de  $\Delta$ , un ensemble  $A$  de la base dénombrable de  $E$  tel que  $A \times A$  contienne ce point et soit contenu dans  $\Omega$ ; si on recouvre  $\Delta$  par un nombre fini de ces ensembles  $A \times A$ , leur réunion est un ensemble ouvert contenant  $\Delta$  et contenu dans  $\Omega$ . Il en résulte que le filtre engendré par les ensembles ouverts de  $E \times E$  qui contiennent  $\Delta$  a une base dénombrable; or, c'est le filtre des entourages de la structure uniforme de  $E$  (ch. II, § , th. ), donc on peut appliquer le th. 1, et  $E$  est métrisable.

On déduit de ce théorème la proposition suivante :

Proposition 16. Si  $f$  est une application continue d'un espace compact et métrisable  $E$  dans un espace de Hausdorff  $E'$ ,  $f(E)$  est un sous-espace compact et métrisable de  $E'$ .

On peut se borner au cas où  $f(E) = E'$ ; on sait alors que  $E'$  est compact (ch. I, § 9, th. 1) et que la topologie de  $E'$  est la topologie quotient de celle de  $E$  par la relation d'équivalence  $f(x) = f(y)$  (ch. I, § 9, prop. ); autrement dit, tout ensemble ouvert de  $E'$  est l'image par  $f$  d'un ensemble ouvert de  $E$ .

invariant par cette relation d'équivalence. Soit  $\mathcal{B}$  une base dénombrable de  $E$  ; à chaque ensemble  $A \in \mathcal{B}$  , faisons correspondre l'ensemble  $A_f$  des points équivalents aux points de  $A$  par la relation  $f(x) = f(y)$  ; c'est un ensemble ouvert invariant par cette relation d'équivalence. D'autre part, si  $\Omega$  est un ensemble ouvert de  $E$  invariant par cette relation, tout point  $x \in \Omega$  appartient à un ensemble  $A \in \mathcal{B}$  contenu dans  $\Omega$  , donc on a aussi  $x \in A_f \subset \Omega$  . Il résulte de là que la famille des images par  $f$  des ensembles  $A_f$  est une base de la topologie de  $E'$  ; comme cette famille est dénombrable, le th. 3 montre que  $E'$  est métrisable.

Les conditions générales de métrisabilité.

Le théorème 1 donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace

uniforme soit métrisable ; mais pour qu'on puisse

l'appliquer pour savoir si un espace topologique uniformisable donné est métrisable, il faudrait connaître toutes les structures uniformes compatibles avec sa topologie, dont on peut munir cet espace. Il est donc désirable d'avoir des critères de métrisabilité portant uniquement sur des propriétés de la structure topologique de l'espace.

Nous avons rencontré deux conditions nécessaires pour qu'un espace soit métrisable : 1° il doit être normal, 2° chacun de ses points doit avoir un système fondamental dénombrable de voisinages. Mais ces deux conditions ne sont pas suffisantes.

On peut en effet former des exemples d'espaces qui les vérifient et qui ne sont pas métrisables (voir ) .

Le théorème 3 fournit d'autre part des conditions suffisantes pour qu'un espace uniformisable soit métrisable, à savoir qu'il soit compact et possède une base dénombrable. Mais il est remarquable que la première de ces conditions soit superflue, autrement dit Proposition 17. Tout espace uniformisable qui possède une base dénombrable est métrisable.

Nous démontrerons cette proposition en deux étapes.

1° Tout espace normal  $E$  possédant une base dénombrable est métrisable (Urysohn).

Soit  $(A_n)$  la base de  $E$  ; pour chaque couple  $(m, n)$  d'indices tel que  $\bar{A}_m \subset A_n$ , formons une application  $x_{mn}$  de  $E$  sur  $[0, 1]$ , égale à 0 sur  $\bar{A}_m$ , à 1 sur  $A_n$ . Il suffit de montrer que la famille des ensembles  $x_{mn}^{-1}(t < 1)$  forme une base de  $E$ , car il résultera alors de la remarque qui suit la prop. 2 du § 2, que  $E$  est homéomorphe à un sous-espace d'un cube à une infinité dénombrable de dimensions, donc est métrisable. Or, si  $V$  est un voisinage quelconque d'un point arbitraire  $x_0$ , il existe un ensemble  $A_n$  de la base contenu dans  $V$  et contenant  $x_0$  ; comme  $E$  est régulier, il existe un voisinage  $W$  de  $x_0$  tel que  $\bar{W} \subset A_n$  ; enfin,  $W$  contient un ensemble  $A_m$  de la base contenant  $x_0$ , et  $\bar{A}_m \subset \bar{W} \subset A_n$  ; par suite,  $x_{mn}^{-1}(t < 1)$  est un voisinage de  $x_0$  contenu dans  $V$ , d'où la proposition

2° Tout espace régulier  $E$  (et à fortiori tout espace uniformisable) possédant une base dénombrable est normal (Tychonoff).

Nous allons montrer que  $E$  vérifie l'axiome 0-VI'. Soit  $(U_n)$  la base dénombrable de  $E$ ,  $A$  et  $B$  deux ensembles fermés sans point commun. A tout point  $x \in A$  correspond un ensemble  $U_{n_x}$  de la base contenant  $x$ , et tel que  $U_{n_x} \cap B = \emptyset$  ; on peut donc extraire de la base une famille  $(V_n)$  d'ensembles telle que  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ ,

et  $\bar{V}_n \cap B = \emptyset$  quel que soit  $n$  ; de même, on peut en extraire une famille  $(W_n)$  telle que  $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$  et  $\bar{W}_n \cap A = \emptyset$  quel que soit  $n$ .

Définissons maintenant par récurrence deux familles d'ensembles ouverts  $(G_n), (H_n)$  de la façon suivante : on prend  $G_1 = V_1$ ,

$$H_1 = W_1 \cap \left[ \bar{G}_1 \right], \text{ et en général } G_n = V_n \cap \left( \bigcap_{p=1}^{n-1} \left[ \bar{H}_p \right] \right),$$

$$H_n = W_n \cap \left( \bigcap_{p=1}^n \left[ \bar{G}_p \right] \right); \text{ on a donc } G_n \subset V_n \text{ et } H_n \subset W_n \text{ quel que}$$

soit  $n$ . Posons maintenant  $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ ,  $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$  ; ce sont

deux ensembles ouverts sans point commun : car s'il existait  $x \in G \cap H$ , il existerait deux indices  $p, q$  tels que  $G_p \cap H_q \neq \emptyset$ .

Or, si  $p \leq q$ , on a

$$G_p \cap H_q = G_p \cap (W_q \cap \left( \bigcap_{i=1}^q \left[ \bar{G}_i \right] \right)) \subset G_p \cap \left[ \bar{G}_p \right] = \emptyset; \text{ et, si } p > q$$

$$G_p \cap H_q = H_q \cap (W_p \cap \left( \bigcap_{i=1}^p \left[ \bar{H}_i \right] \right)) \subset H_q \cap \left[ \bar{H}_q \right] = \emptyset.$$

Montrons enfin que  $A \subset G$  et  $B \subset H$  ; si  $x \in A$ , on a

$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$  quel que soit  $n$ , donc, comme il existe un indice  $p$  tel que  $x \in V_p$  on a aussi  $x \in G_p \subset G$  ; on montre de même que  $B \subset H$ , ce qui achève de démontrer la proposition.

Mais il existe des espaces métrisables ne possédant pas de base dénombrable : il suffit de considérer un espace discret non dénombrable, où on prend comme distance de deux points distincts la valeur 1 ; la proposition 17 ne donne donc pas une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace soit métrisable.

Signalons enfin la proposition suivante, souvent commode pour vérifier qu'un espace métrisable possède une base dénombrable :

Proposition 18. Pour qu'un espace métrisable  $E$  possède une base dénombrable, il faut et il suffit qu'il existe une partie de  $E$  dénombrable et partout dense.

La condition est nécessaire pour tout espace topologique : car si on prend un point  $x_n$  dans chacun des ensembles  $A_n$  de la base dénombrable, l'ensemble des points  $x_n$  est partout dense.

Réciproquement, si  $E$  est métrisable, la condition est suffisante :  $A$  étant un ensemble dénombrable partout dense, considérons la famille dénombrable  $\mathcal{B}$  des sphères ouvertes de centre un point de  $A$  et de rayon  $1/n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Soit  $x$  un point quelconque de  $E$ ,  $S$  une sphère ouverte de centre  $x$  et de rayon  $r$  ; par hypothèse, il existe un point  $y \in A$  dans la sphère ouverte de centre  $x$  et de rayon  $1/2n$ ,  $n$  étant choisi tel que  $1/2n < r/3$  ; il en résulte que la sphère ouverte  $S'$  de centre  $y$  et de rayon  $1/n$  contient  $x$  et est contenue dans  $S$ , ce qui démontre que  $\mathcal{B}$  est une base de la topologie de  $E$ .

La seconde partie de la proposition est inexacte en général pour les espaces non métrisables : on peut donner des exemples d'espaces normaux où il existe une partie dénombrable partout dense, mais qui ne possèdent pas de base dénombrable.

-----