

COTE : BKI 03-3.4

ELEMENTS DE MATHEMATIQUES
PAR N. BOURBAKI
V
PREMIERE PARTIE
LES STRUCTURES FONDAMENTALES
DE L'ANALYSE
LIVRE III
TOPOLOGIE GENERALE
CHAPITRES V ET VI

Rédaction n° 026

Nombre de pages : 144

Nombre de feuilles : 144

Université Henri Poincaré - Nancy I
INSTITUT ÉLIE CARTAN - UMR 7502
Bibliothèque de mathématiques
B.P. 239
54506 Vandoeuvre-Lès-Nancy

Livre III . Top. générale
Chap. V - Espaces numériques
et projectifs
Chap. VI les s/groupes de \mathbb{R}^n

ELEMENTS DE MATHEMATIQUE
PAR
N. BOURBAKI

A 26 2

V
PREMIERE PARTIE
LES STRUCTURES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE

LIVRE III
TOPOLOGIE GENERALE

Etat 3

~~Chapitres V - VI - VII - VIII~~

(Ancien CHAPITRE V
ESPACES NUMERIQUES ET ESPACES PROJECTIFS)

(Ancien CHAPITRE VI
LES GROUPES ADDITIFS R^n)

TOPOLOGIE GÉNÉRALE

CHAPITRE V

ESPACES NUMÉRIQUES ET ESPACES PROJECTIFS

§ 1. L'espace numérique \mathbb{R}^n et ses variétés linéaires.

1. L'espace numérique \mathbb{R}^n .

DÉFINITION 1. On appelle espace numérique à n dimensions (plan numérique lorsque $n=2$), et on note \mathbb{R}^n , l'espace topologique produit de n espaces identiques à la droite numérique.

DÉFINITION 2. On appelle pavé ouvert (resp. pavé fermé) de \mathbb{R}^n , toute partie de \mathbb{R}^n qui est le produit de n intervalles ouverts (resp. de n intervalles fermés) de \mathbb{R} .

Les pavés ouverts de \mathbb{R}^n forment une base de la topologie de \mathbb{R}^n (chap. I, § 8) ; les pavés ouverts contenant un point $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de \mathbb{R}^n forment un système fondamental de voisinages de X ; il en est de même des pavés fermés de \mathbb{R}^n dont X est un point intérieur. Tout pavé ouvert de \mathbb{R}^n est homéomorphe à \mathbb{R}^n (chap. IV, § 4, prop. 1).

On appelle cube ouvert (resp. fermé) de \mathbb{R}^n un pavé ouvert (resp. fermé) de \mathbb{R}^n un pavé ouvert (resp. fermé) de \mathbb{R}^n , qui est le produit de n intervalles bornés et de longueurs égales (pour $n=2$, on dit carré au lieu de "cube de \mathbb{R}^{2n} "); la longueur commune de ces intervalles est appelée le côté du cube. Les cubes ouverts $K_m = \prod_{1 \leq i \leq n}]x_i - \frac{1}{m}, x_i + \frac{1}{m}[$ forment (lorsque m parcourt l'ensemble des entiers > 0) un système fondamental dénombrable de voisinages du point $X = (x_i)$.

Tout pavé ouvert (ou fermé) est connexe (chap. I, § 11, prop. 6) ; en particulier, \mathbb{R}^n est un espace connexe et localement connexe.

Si A est un ensemble ouvert dans \mathbb{R}^n , ses composantes connexes sont donc des domaines (chap.I, § 11, prop.10) ; en outre, l'ensemble de ces composantes est dénombrable, car \mathbb{R}^n contient une partie dénombrable partout dense (par exemple \mathbb{Q}^n).

Cherchons la condition pour qu'une partie A de \mathbb{R}^n soit relativement compacte ; d'après le th. de Tychonoff (chap.I, § 10, th.2), il faut et il suffit pour cela que les projections de A sur les espaces facteurs de \mathbb{R}^n soient relativement compactes ; d'après le th. de Borel-Lebesgue (chap.IV, § 2, th.2), cela équivaut à dire que ces projections sont des parties bornées de \mathbb{R} ; lorsqu'il en est ainsi, on dit que A est une partie bornée de \mathbb{R}^n ; donc

PROPOSITION 1. Pour qu'une partie A de \mathbb{R}^n soit relativement compacte, il faut et il suffit qu'elle soit bornée.

COROLLAIRE. L'espace \mathbb{R}^n est localement compact et non compact.

L'ensemble \mathbb{R}^n est non seulement le support de la structure topologique que nous venons d'étudier, mais encore d'autres structures non moins importantes :

Tout d'abord, la structure de groupe additif, produit des structures de groupe additif des n facteurs de \mathbb{R}^n ; muni de cette structure, \mathbb{R}^n est un groupe abélien, dans lequel la somme de $X = (x_i)$ et de $Y = (y_i)$ est $X + Y = (x_i + y_i)$. La topologie de l'espace numérique est compatible avec cette structure de groupe, et \mathbb{R}^n , muni de ces deux structures, est un groupe topologique qu'on appelle groupe additif de l'espace numérique à n dimensions.

La structure uniforme de ce groupe, dite structure uniforme additive de \mathbb{R}^n , est le produit des structures uniformes des groupes facteurs de \mathbb{R}^n (chap.III, § 3, n°2) ; lorsqu'on considère \mathbb{R}^n comme un espace uniforme, c'est toujours, sauf mention expresse du contraire, de cette

- 3 -

structure uniforme qu'il est question. Muni de cette structure, \mathbb{R}^n est un espace uniforme complet (chap.II, § 5, prop.4).

Enfin, comme \mathbb{R} est un corps, on peut définir sur \mathbb{R}^n une structure d'espace vectoriel par rapport au corps \mathbb{R} (Alg., chap.II), le produit aX d'un scalaire $a \in \mathbb{R}$ et d'un point (ou vecteur) $X = (x_i)$ de \mathbb{R}^n étant le point (ax_i) ; on notera que l'homothétie $(a, X) \rightarrow aX$ est continue dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (chap.I, § 8, cor.2 du th.1). Si e_i désigne le point de \mathbb{R}^n dont toutes les coordonnées sont nulles à l'exception de celle d'indice i , qui est égale à 1, les e_i forment une base de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n , dite base canonique de cet espace (Alg., ch.II); tout point $X = (x_i) \in \mathbb{R}^n$ s'écrit $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, et la relation $\sum_{i=1}^n a_i e_i = 0$ entraîne $a_i = 0$ pour $1 \leq i \leq n$.

L'espace vectoriel \mathbb{R}^n est donc de dimension n par rapport au corps \mathbb{R} , au sens défini en Algèbre (Alg. chap.II), d'où son nom d'espace numérique à n dimensions.

2. Applications affines de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m .

Soit f une application affine de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^m (m et n entiers ≥ 1). Si on pose $g(X) = f(X) - f(0)$, g est une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m . Soient a_{ij} ($1 \leq j \leq m$) les coordonnées de $g(e_i)$ dans \mathbb{R}^m ; si x_i ($1 \leq i \leq n$) est la coordonnée d'indice i de $X \in \mathbb{R}^n$, y_j ($1 \leq j \leq m$) la coordonnée d'indice j de $Y = g(X)$, on a

$$y_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \quad (1 \leq j \leq m).$$

Donc (chap.I, § 8, cor.2 du th.1), toute application affine de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m est continue (et même uniformément continue) dans \mathbb{R}^n .

En particulier, on sait que toute application affine de \mathbb{R}^n sur lui-même est biunivoque, et son application réciproque est encore une application affine; donc, toute application affine de \mathbb{R}^n sur lui-même est un homéomorphisme.

Soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système libre de n points de \mathbb{R}^n (ou, ce qui revient au même, une base de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n) ; si b est un point quelconque de \mathbb{R}^n , l'ensemble P des points $x = b + \sum_{i=1}^n u_i a_i$ tels que $-1 \leq u_i \leq +1$ pour $1 \leq i \leq n$, est un voisinage compact de b , qu'on appelle parallélotope fermé de centre b , construit sur les vecteurs de base a_i . En effet, il existe une application affine biunivoque f de \mathbb{R}^n sur lui-même telle que $f(b) = 0$, $f(b + a_i) = e_i$ pour $1 \leq i \leq n$, et $f(P)$ est le cube produit des n intervalles $[-1, +1]$ dans les espaces facteurs de \mathbb{R}^n . L'intérieur de P est formé des points $b + \sum_{i=1}^n u_i a_i$ tels que $-1 < u_i < 1$; on l'appelle parallélotope ouvert de centre b , construit sur les a_i .

3. Variétés linéaires de \mathbb{R}^n .

Etant donnée une variété linéaire à p dimensions V de \mathbb{R}^n , on sait (Alg., chap. IX) qu'il existe une application affine f de \mathbb{R}^n sur lui-même, transformant V en une variété coordonnée à p dimensions, c'est-à-dire (Alg., chap. IX) un sous-espace vectoriel V' engendré par p des vecteurs de la base canonique (e_i) de \mathbb{R}^n . Il est immédiat qu'il existe une application de V' sur \mathbb{R}^p qui est un isomorphisme de la structure d'espace vectoriel et de la topologie de V' sur les structures correspondantes de \mathbb{R}^p (il est d'ailleurs souvent commode d'identifier \mathbb{R}^p à une telle variété coordonnée V' , par exemple au sous-espace vectoriel engendré par e_1, e_2, \dots, e_p). En outre, V' est un ensemble fermé dans \mathbb{R}^n (chap. I, § 8, cor. de la prop. 5). Donc :

PROPOSITION 2. Toute variété linéaire à p dimensions de \mathbb{R}^n est un ensemble fermé dans \mathbb{R}^n , homéomorphe à \mathbb{R}^p .

On peut ajouter (chap. I, § 8, prop. 4) que, si $p < n$, V ne contient aucun ensemble ouvert dans \mathbb{R}^n .

En raison de l'homéomorphie précédente, on appelle droite toute variété linéaire à une dimension de \mathbb{R}^n (ne pas confondre avec la droite numérique \mathbb{R}) ; on appelle de même plan toute variété linéaire à deux dimensions. Pour $n > 3$, les variétés linéaires à $n-1$ dimensions de \mathbb{R}^n sont appelées hyperplans.

Les n variétés coordonnées à 1 dimension, c'est-à-dire les droites passant par 0 et les n points e_i , sont encore appelées axes de coordonnées ou axes coordonnées de \mathbb{R}^n (cf. Alg., chap. IX). Pour $n=2$, l'axe passant par e_1 s'appelle axe des abscisses, l'axe passant par e_2 axe des ordonnées ; la première coordonnée d'un point $X \in \mathbb{R}^2$ s'appelle son abscisse, la seconde son ordonnée.

Toute droite D passant par un point a admet une représentation paramétrique $t \rightarrow a + tb$, où t parcourt \mathbb{R} et $b \neq 0$; le vecteur b est appelé paramètre vectoriel de D , ses composantes b_i ($1 \leq i \leq n$) paramètres scalaires (ou simplement paramètres) de D ; si b' est un autre paramètre vectoriel de D , il existe $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $b' = hb$.

L'ensemble des points $a + tb$, où t parcourt l'ensemble des nombres réels ≥ 0 , est appelé demi-droite fermée (ou simplement demi-droite) d'origine a et de paramètre vectoriel b (ou de paramètres b_i) ; c'est un ensemble fermé dans \mathbb{R}^n , homéomorphe à l'intervalle $[0, +\infty[$ de \mathbb{R} , donc connexe. La droite D est réunion des deux demi-droites d'origine a et de paramètres b et $-b$ respectivement, qui sont dites opposées.

Par abus de langage, on appelle demi-droite ouverte d'origine a et de paramètre vectoriel b l'ensemble des points $a + tb$, où t parcourt l'ensemble des nombres > 0 ; c'est un ensemble homéomorphe à l'intervalle $]0, +\infty[$ (donc à \mathbb{R} lui-même),

qui n'est pas ouvert dans \mathbb{R}^n si $n > 1$, mais est ouvert par rapport à la droite qui le contient.

Une droite passant par deux points distincts X, Y , admet aussi la représentation paramétrique $(u, v) \rightarrow uX + vY$, où (u, v) parcourt l'ensemble des couples de nombres réels tels que $u+v=1$. Etant donnés deux points quelconques X, Y (distincts ou non), on appelle segment fermé (ou simplement segment) d'extrémités X, Y , l'ensemble des points $uX + vY$, où (u, v) parcourt l'ensemble des couples de nombres réels tels que $u \geq 0, v \geq 0$ et $u+v=1$; si X et Y sont distincts, le segment d'extrémités X, Y est homéomorphe à l'intervalle $[0, 1]$ de \mathbb{R} , donc est compact et connexe.

Si $X \neq Y$, on appelle de même (par abus de langage) segment ouvert d'extrémités X, Y l'ensemble des points $uX + vY$ tels que $u > 0, v > 0, u+v=1$; c'est un ensemble homéomorphe à l'intervalle $]0, 1[$ (donc à \mathbb{R} lui-même). Enfin, on appelle parfois segment ouvert en X , fermé en Y , la réunion de $\{Y\}$ et du segment ouvert d'extrémités X, Y ; c'est un ensemble homéomorphe à l'intervalle $[0, 1[$. Tous les segments d'extrémités X, Y sont connexes et ont pour adhérence le segment fermé de mêmes extrémités.

Rappelons que deux variétés linéaires sont dites parallèles lorsqu'il existe une translation transformant l'une en une variété contenue dans l'autre (Alg., chap. IX). Deux demi-droites D, D' sont dites parallèles si les droites qui les contiennent sont parallèles; si b, b' sont des paramètres vectoriels de D et D' respectivement, on a $b' = h b$, où $h \in \mathbb{R}^*$; si $h > 0$, on dit que D et D' sont parallèles et de même sens, sinon qu'elles sont de sens opposés; dans ce dernier cas, l'une d'elles et l'opposée de l'autre sont parallèles et de même sens. Enfin, on dit

on dit que deux segments sont parallèles s'ils sont contenus dans des droites parallèles ; si x, y sont les extrémités de l'un, x', y' celles de l'autre, on a $y' - x' = h(y - x)$, où $h \in \mathbb{R}^*$.

4. Puissance de \mathbb{R}^n .

PROPOSITION 3. L'espace numérique \mathbb{R}^n a la puissance du continu.

Comme \mathbb{R} est infini, cette proposition est un cas particulier de l'équipotence de E et de E^n lorsque E est infini (Eng., chap. IV).

Il est facile d'ailleurs d'en donner une démonstration directe, ne faisant pas appel à l'axiome de choix ; on peut se borner au cas où $n=2$, le cas général s'en déduisant par récurrence sur n .

\mathbb{R}^2 est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ d'après le th. de Cantor (chap. IV, § 8, th. 1). Soit H l'ensemble des entiers positifs pairs, K l'ensemble des entiers positifs impairs : H et K sont équipotents à \mathbb{N} , donc $\mathcal{P}(H)$ et $\mathcal{P}(K)$ sont équipotents à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Comme H et K forment une partition de \mathbb{N} , on a, pour toute partie X de \mathbb{N} , $X = (X \cap H) \cup (X \cap K)$; donc l'application $X \rightarrow (X \cap H, X \cap K)$ de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathcal{P}(H) \times \mathcal{P}(K)$ est une application biunivoque de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sur $\mathcal{P}(H) \times \mathcal{P}(K)$, ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE. Toute partie ouverte non vide de \mathbb{R}^n a la puissance du continu.

En effet, un tel ensemble contenant un pavé ouvert, qui est homéomorphe à \mathbb{R}^n .

5. Caractérisation des parties connexes de \mathbb{R}^n .

Etant donnée une suite finie $(X_i)_{0 \leq i \leq p}$ de points de \mathbb{R}^n , désignons par S_i le segment fermé d'extrémités X_i et X_{i+1} pour $0 \leq i \leq p-1$; on appelle ligne brisée définie par la suite (X_i) la réunion L des segments S_i ; les points X_i sont appelés les sommets de cette ligne brisée,

les segments S_i ses cotés. Il existe une application affine f_i de l'intervalle $[i, i+1]$ de \mathbb{R} sur le segment S_i , telle que $f_i(i) = X_i$, $f_i(i+1) = X_{i+1}$ ($0 \leq i \leq p-1$); l'application f de $[0, p]$ sur L , égale à f_i dans $[i, i+1]$, est continue; L est donc un ensemble compact et connexe.

On notera que deux segments consécutifs S_i, S_{i+1} peuvent être contenus dans la même droite; la réunion de ces deux segments est alors un segment, et on peut remplacer les trois sommets X_i, X_{i+1} et X_{i+2} par les deux extrémités de $S_i \cup S_{i+1}$, prises dans un ordre convenable, sans changer la ligne brisée L ; une même ligne brisée peut donc être définie par plusieurs suites distinctes de sommets.

Etant donnée une partie non vide A de \mathbb{R}^n , nous dirons que deux points a, b de A peuvent être joints par une ligne brisée dans A s'il existe une telle ligne L , contenue dans A , et définie par une suite $(X_i)_{0 \leq i \leq p}$ telle que $a = X_0$ et $b = X_p$.

PROPOSITION 4. Si deux points quelconques d'une partie A de \mathbb{R}^n peuvent être joints par une ligne brisée dans A , A est connexe. Inversement, deux points quelconques d'un domaine A peuvent être joints par une ligne brisée dans A .

La première partie résulte immédiatement de ce que toute ligne brisée est un ensemble connexe. Pour démontrer la seconde partie, remarquons d'abord que la relation " x et y peuvent être joints par une ligne brisée dans A " est une relation d'équivalence R entre points d'un ensemble quelconque A : il suffit de prouver que cette relation est transitive; or, si x et y sont joints par une ligne brisée définie par la suite $(U_i)_{0 \leq i \leq p}$, y et z par une ligne brisée définie par la suite $(V_j)_{0 \leq j \leq q}$, x et z sont joints par la ligne brisée définie

par la suite $(w_k)_{0 \leq k \leq p+q}$, avec $w_k = v_k$ pour $0 \leq k \leq p$, $w_k = v_{k-p}$ pour $p \leq k \leq p+q$. Montrons ensuite que, si A est ouvert les classes d'équivalence suivant R sont des ensembles ouverts : en effet, si $a \in A$, il existe un pavé ouvert P de centre a contenu dans A , et tout point $x \in P$ peut être joint à a par la ligne brisée formée du segment d'extrémités a et x , qui est contenu dans P , donc dans A . Si maintenant A est un domaine, le complémentaire par rapport à A d'une classe quelconque suivant R est réunion d'ensembles ouverts, donc ouvert ; mais il n'existe pas de partition de A en deux ensembles ouverts non vides, donc tous les points de A appartiennent à une même classe suivant R .

COROLLAIRE. La composante connexe d'un point a dans un ensemble ouvert $A \subset \mathbb{R}^n$ est l'ensemble des points de A qui peuvent être joints à a par une ligne brisée contenue dans A .

En effet, on sait que les composantes connexes de A sont des domaines.

PROPOSITION 5. Soit A un domaine non vide dans \mathbb{R}^n ($n > 1$), $(V_p)_{p \in \mathcal{N}}$ une suite de variétés linéaires de \mathbb{R}^n ayant chacune au plus $n-2$ dimensions ; si B désigne le complémentaire de la réunion des V_p , $A \cap B$ est connexe.

Soient a et b deux points quelconques de $A \cap B$; on va montrer que ces points peuvent être joints par une ligne brisée dans $A \cap B$. D'après la prop.4, ils peuvent être joints par une ligne brisée L dans A , définie par une suite $(x_i)_{0 \leq i \leq q}$; nous allons voir d'abord qu'il existe un nombre $h > 0$ tel que, si K_i désigne le cube ouvert de centre x_i et de côté h , y_i un point quelconque de K_i , la ligne brisée définie par la suite $(y_i)_{0 \leq i \leq q}$ soit contenue dans A . En effet, pour tout $\epsilon > 0$, désignons par U_ϵ l'entourage de la structure uniforme de \mathbb{R}^n

formé des couples de points $x = (x_j)_{1 \leq j \leq n}$, $y = (y_j)_{1 \leq j \leq n}$ tels que $|x_j - y_j| < a$ pour $1 \leq j \leq n$. Comme L est un ensemble compact, il existe $h > 0$ tel que $U_h(L) \subset A$ (chap. II, § 4, prop. 1) ; il suffit donc de voir que la ligne brisée définie par la suite (γ_i) est contenue dans $U_h(L)$: or, pour $0 \leq t \leq 1$, le point $\gamma_i + t(\gamma_{i+1} - \gamma_i)$ est contenu dans le cube de côté $2h$ et de centre le point $x_i + t(x_{i+1} - x_i)$, cube qui est contenu dans $U_h(L)$.

Cela étant, considérons les variétés linéaires à $n-1$ dimensions au plus engendrées par $a = x_0$ et les V_p , et soit H_1 l'ensemble des points de K_1 qui n'appartiennent à aucune de ces variétés. Si H_1 n'est pas vide, soit γ_1 un point de H_1 ; le segment d'extrémités $\gamma_0 = a$ et γ_1 est contenu dans $A \cap B$. Pour $1 \leq i \leq q-1$, supposons γ_k défini pour $0 \leq k \leq i$ de sorte que $\gamma_k \in K_k$, et que la ligne brisée définie par $(\gamma_k)_{0 \leq k \leq i}$ soit contenue dans $A \cap B$; désignons par H_{i+1} l'ensemble des points de K_{i+1} n'appartenant à aucune des variétés linéaires engendrées par γ_1 et les V_p ; si H_{i+1} n'est pas vide, on prend $\gamma_{i+1} \in H_{i+1}$, et le segment d'extrémités γ_i et γ_{i+1} est contenu dans $A \cap B$. Enfin, soit H_{q-1} l'ensemble des points de K_{q-1} n'appartenant à aucune des variétés engendrées par γ_{q-2} et les V_p , ni à aucune de celles engendrées par $x_q = b$ et les V_p ; si H_{q-1} n'est pas vide, on prend pour γ_{q-1} un point de H_{q-1} , on pose $\gamma_q = b$, et la ligne brisée définie par la suite $(\gamma_i)_{0 \leq i \leq q}$ est bien contenue dans $A \cap B$ et joint a et b .

La proposition sera donc démontrée si on établit le lemme suivant :

Lemme. soit $(W_p)_{p \in N}$ une suite d'hyperplans de R^n , C le complémentaire de la réunion des W_p . Pour tout pavé ouvert P de R^n , $P \cap C$ n'est pas vide (autrement dit, C est partout dense).

- 11 -

Le lemme est vrai pour $n=1$, puisque tout intervalle ouvert de \mathbb{R} a la puissance du continu. Démontrons-le par récurrence sur n ; Soit $\sum_{j=1}^n a_{pj} x_j = b_p$ une équation de \mathbb{W}_p , c_j un nombre réel distinct de tous les a_{pj} $1 \leq j \leq n$ et $p \in \mathcal{N}$; un hyperplan \mathbb{E} parallèle à $\sum_{j=1}^n c_j x_j = 0$ et passant par un point de P n'est confondu avec aucun des hyperplans \mathbb{W}_p , et $P \cap \mathbb{E}$ est ouvert dans \mathbb{E} ; comme il existe une application affine de \mathbb{E} sur \mathbb{R}^{n-1} , $C \cap \mathbb{E}$ est partout dense dans \mathbb{E} , donc $C \cap C \cap \mathbb{E}$ n'est pas vide.

COROLLAIRE 1. Dans \mathbb{R}^n ($n > 1$), le complémentaire d'une variété linéaire à $p \leq n-2$ dimensions est connexe.

COROLLAIRE 2. Si A est un domaine non vide de \mathbb{R}^n ($n > 1$), D une partie dénombrable de \mathbb{R}^n , $A \setminus D$ est connexe.

COROLLAIRE 3. Pour $n > 1$, l'espace \mathbb{R}^n n'est pas homéomorphe à la droite numérique \mathbb{R} .

En effet, dans \mathbb{R} , le complémentaire d'un point n'est pas connexe, alors que dans \mathbb{R}^n ($n > 1$) le complémentaire d'un point est connexe.

Dans la partie de ce traité consacrée à la Topologie combinatoire, nous montrerons, plus généralement, que pour $m \neq n$, \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n ne sont pas homéomorphes.

PROPOSITION 6. Dans \mathbb{R}^n ($n \geq 1$), le complémentaire d'un hyperplan a deux composantes connexes.

En effet, soit $g(x) = 0$ une équation d'un hyperplan \mathbb{H} dans \mathbb{R}^n , g étant une application affine non nulle de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . L'ensemble \mathbb{H} est réunion de l'ensemble E_1 des points x tels que $g(x) > 0$ et de l'ensemble E_2 des points x tels que $g(x) < 0$. E_1 et E_2 sont connexes, car si $g(x) > 0$, $g(y) > 0$, on a $g(ux + vy) = ug(x) + vg(y) > 0$ pour $u+v=1$, $u \geq 0, v \geq 0$, autrement dit, le segment d'extrémités x et y

est contenu dans E_1 ; démonstration analogue pour E_2 . D'autre part, $\complement H$ n'est pas connexe, car son image dans \mathbb{R} par g est la réunion des intervalles $[0, +\infty[$ et $] -\infty, 0]$.

Les composantes connexes E_1 et E_2 du complémentaire $\complement H$ d'un hyperplan sont appelées les demi-espaces ouverts déterminés par H .

Les adhérences de E_1 et E_2 , qui sont respectivement les ensembles $E_1 \cup H$ et $E_2 \cup H$, sont appelés les demi-espaces fermés déterminés par H .

On notera qu'une application affine de \mathbb{R}^n sur lui-même transformant H en un hyperplan "coordonné", par exemple l'hyperplan d'équation $x_n = 0$, transforme les demi-espaces ouverts définis par H en les demi-espaces définis respectivement par les relations $x_n > 0$ et $x_n < 0$; ces derniers sont des pavés ouverts, donc homéomorphes à \mathbb{R}^n .

Exercices. 1) Deux points quelconques d'un domaine A de \mathbb{R}^n peuvent être joints par une ligne brisée contenue dans A et dont les cotés sont parallèles aux axes de coordonnées.

2) Dans \mathbb{R}^n ($n > 1$), le complémentaire d'un pavé fermé est connexe.

3) Dans \mathbb{R}^n ($n > 1$), soit A une partie quelconque d'un hyperplan H , distincte de H ; montrer que le complémentaire de A dans \mathbb{R}^n est connexe.

4) Dans \mathbb{R}^n ($n > 1$), soit A un pavé ouvert, S un segment parallèle à un des axes de coordonnées, contenu dans \bar{A} , et dont une extrémité au moins appartient à A . Montrer que $A \cap S$ est connexe.

2) On dit qu'une ligne brisée L définie dans \mathbb{R}^n ($n > 1$) par une suite $(x_i)_{0 \leq i \leq p}$ est ouverte et sans point multiple si les sommets x_i sont tous distincts, et si les segments ouverts d'extrémités x_i et x_{i+1} ($0 \leq i \leq p-1$) sont sans point commun deux à deux. Montrer que, s'il en est ainsi, le complémentaire de L est connexe (raisonner par récurrence sur p , en utilisant l'exerc. 4).

¶ 6) Il existe une application continue de l'intervalle $I = [0, 1]$ de \mathbb{R} sur le carré $I \times I$ de \mathbb{R}^2 ("courbe de Peano"). (Montrer d'abord, à l'aide de l'exerc. 11 du chap. IV, § 8, qu'il existe une application continue f de l'ensemble triadique de Cantor K sur $I \times I$, puis prolonger f à I).

¶ 7) Soit H l'ensemble des nombres irrationnels dans \mathbb{R} . Montrer que les espaces H et $H \times H$ sont homéomorphes (si on pose $J = H \cap [0, 1]$, se ramener à prouver que J et $J \times J$ sont homéomorphes. A tout point $(x, y) \in J \times J$, tel que les développements dyadiques de x et y soient $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{2^n}$, $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{2^n}$ faire correspondre le point $z \in J$ de développement $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{2^n}$, où $w_{2n-1} = u_n$, $w_{2n} = v_n$; montrer que l'application ainsi définie est un homéomorphisme de $J \times J$ sur J).

¶ 8) Soient A et B deux parties dénombrables partout denses de \mathbb{R}^2 . Montrer qu'il existe un homéomorphisme de \mathbb{R}^2 sur lui-même, qui applique A sur B (montrer d'abord que, par une rotation, on peut se ramener au cas où les projections pr_1 et pr_2 sont des applications biunivoques de A et B dans \mathbb{R} ; définir ensuite, par une récurrence convenable, une application biunivoque de A sur B , qui détermine une application monotone de $pr_1 A$ sur $pr_1 B$, et aussi une application monotone de $pr_2 A$ sur $pr_2 B$; enfin, utilisant l'exerc. 9 du chap. IV § 2, montrer que cette application est un homéomorphisme qu'on peut prolonger en un homéomorphisme de \mathbb{R}^2 sur lui-même).

En déduire que, si U est une partie de \mathbb{R}^2 dont le complémentaire est partout dense, U est homéomorphe à une partie du complémentaire de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

¶ 9) Toute partie A de \mathbb{R}^2 , dénombrable et sans point isolé, est homéomorphe à la droite rationnelle \mathbb{Q} (appliquer l'exerc. 13 du chap. IV, § 8, ou se ramener au cas où toutes les coordonnées des points de A sont irrationnelles, et appliquer l'exerc. 7 ci-dessus).

¶ 10) Toute partie compacte et totalement discontinue de \mathbb{R}^n est homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor K (voir les exerc. 11 et 12 du chap. IV, § 8 et la prop. 4 du chap. II, § 4).

11) Identifiant \mathbb{R}^{n-1} avec la variété coordonnée d'équation $x_n = 0$ dans \mathbb{R}^n , soit f une fonction numérique continue définie dans un ensemble ouvert A de \mathbb{R}^{n-1} , B la partie de \mathbb{R}^n dont les points $X = (x_i)$ satisfont à la relation $x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in A$. Montrer que le sous-espace B de \mathbb{R}^n est homéomorphe à A .

§ 2. Distance euclidienne ; boules et sphères.

1. Structure euclidienne de \mathbb{R}^n .

Rappelons qu'on a défini en Algèbre (Alg., chap. IX), la notion de déplacement euclidien (ou simplement déplacement) dans l'espace vectoriel à n dimensions K^n sur un corps commutatif K de caractéristique $\neq 2$: c'est par définition une transformation affine qui laisse invariante la fonction $((x_i), (y_i)) \rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$, et dont le déterminant est égal à ± 1 . Ces transformations forment un groupe, dit groupe des déplacements de K^n ; ce groupe opère transitivement dans K^n ; la structure d'espace homogène qu'il définit sur K^n est dite structure euclidienne, et K^n , muni de cette structure, est appelé espace euclidien à n dimensions sur le corps K .

Toutes ces notions s'appliquent en particulier à l'espace \mathbb{R}^n ; lorsqu'on parle d'espace euclidien à n dimensions, sans préciser par rapport à quel corps, c'est toujours, sauf indication contraire, de l'espace \mathbb{R}^n qu'il s'agit. Conformément aux définitions données en algèbre (Alg., chap. VIII et IX), on appelle produit scalaire de deux vecteurs $x = (x_i)$ et $y = (y_i)$ de \mathbb{R}^n , et on note $\langle x, y \rangle$, la valeur $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ de la forme polaire de la forme quadratique $\sum_{i=1}^n x_i^2$. Deux vecteurs x, y sont dits orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$; deux sous-espaces vectoriels V, V' de \mathbb{R}^n sont dits orthogonaux si tout $x \in V$ est orthogonal à tout $y \in V'$.

Le corps \mathbb{R} étant ordonné et pythagoricien ^(*), on définit dans \mathbb{R}^n la distance euclidienne $d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ de deux points x, y ; $d(0, x)$ se note encore $\|x\|$ et s'appelle norme euclidienne de x (ou simplement norme de x , quand aucune confusion n'en résulte).

Pour $n=1$, la distance euclidienne des points x, y se réduit à la longueur $|x-y|$ des intervalles d'extrémités x, y ; pour n quelconque, on dit encore que $d(x, y) = \|y - x\|$ est la longueur des segments d'extrémités x, y .

On a $d(x, y) \geq 0$ et la relation $d(x, y) = 0$ équivaut à $x = y$. On a $d(y, x) = d(x, y)$, et, pour tout élément $t \in \mathbb{R}$, $d(tx, ty) = |t| \cdot d(x, y)$. En outre, la distance euclidienne satisfait à l'inégalité dite inégalité du triangle :

(*) On rappelle (Alg., chap. VIII) qu'un corps commutatif K est dit pythagorien si, quels que soient $x \in K, y \in K$, il existe $z \in K$ tel que $x^2 + y^2 = z^2$. Dans un corps pythagorien, toute somme de carrés est donc un carré.

$$(1) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

quels que soient x, y, z dans R^n .

Rappelons que la démonstration de la relation (1) se ramène à celle de l'inégalité $(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{i=1}^n y_i^2)^{\frac{1}{2}}$; cette dernière est équivalente à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$(\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2)$$

et cette inégalité est elle-même une conséquence immédiate de l'identité de Lagrange

$$(\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2 = \sum_{i < j} (x_i y_j - x_j y_i)^2$$

Cette démonstration montre en même temps que les deux membres de (1) ne peuvent être égaux que si z est un point du segment d'extrémités x et y .

De (1), on déduit l'inégalité

$$(2) \quad d(x, y) \geq |d(x, z) - d(y, z)|$$

Si $x = (x_i), y = (y_i)$, on a

$$(3) \quad \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \leq d(x, y) \leq \sqrt{n} \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

On en conclut que, pour qu'une partie A de R^n soit bornée (§1) il faut et il suffit que $\sup_{x \in A} \|x\| < +\infty$.

Rappelons enfin (Alg., chap. IX) que la structure induite sur une variété linéaire quelconque de R^n par la structure euclidienne de R^n est une structure euclidienne; en outre, si V et V' sont deux variétés linéaires de R^n ayant même nombre de dimensions, il existe toujours un déplacement euclidien de R^n transformant V en V' .

2. Boules et sphères euclidiennes.

Les inégalités (2) et (3) entraînent en particulier

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \leq \sqrt{n} \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

Il en résulte que la norme euclidienne $\|x\|$ est uniformément continue dans \mathbb{R}^n , la distance $d(x, y)$ uniformément continue dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
 En outre, si, pour tout entier $p > 0$, on désigne par U_p l'ensemble des couples (x, y) tels que $d(x, y) < 1/p$, les inégalités (3) montrent que les U_p forment un système fondamental d'entourages de la structure uniforme de \mathbb{R}^n (cf. chap. VII).

DÉFINITION 1. Etant donné un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$, et un nombre $r > 0$, on appelle boule euclidienne ouverte (resp. fermée) à n dimensions, de centre x_0 et de rayon r, l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $d(x_0, x) < r$ (resp. $d(x_0, x) \leq r$); on appelle sphère euclidienne à n-1 dimensions, de centre x_0 et de rayon r, l'ensemble des points x tels que $d(x_0, x) = r$ (cf. Alg., chap. IX).

Pour $n=2$, on dit "disque" au lieu de "boule à deux dimensions", et "cercle" au lieu de "sphère à 1 dimension".

Pour $n=1$, la boule ouverte (resp. fermée) de centre x et de rayon r est l'intervalle $]x-r, x+r[$ (resp. $[x-r, x+r]$); la sphère de centre x et de rayon r est l'ensemble des deux extrémités $x-r, x+r$ de ces intervalles.

D'après ce qui précède, les boules (ouvertes ou fermées) de centre x_0 (ou seulement celles de rayon $1/p$, p parcourant l'ensemble des entiers > 0) forment un système fondamental de voisinages du point x_0 .

La fonction $d(x_0, x)$ étant continue dans \mathbb{R}^n , toute boule ouverte est un ensemble ouvert dans \mathbb{R}^n , toute boule fermée et toute sphère un ensemble fermé et borné, donc compact. La frontière d'une boule fermée de centre x_0 et de rayon r , est la sphère de même centre et de même rayon : en effet, si $d(x_0, x) = r$, et si $y = x_0 + t(x - x_0)$, avec $t > 0$, on a $d(x_0, y) = (1+t)r > r$, et $d(x, y) = tr$ est aussi

petit qu'on veut, ce qui prouve qu'il existe des points n'appartenant pas à la boule et aussi voisins qu'on veut de x . On en conclut que l'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte de même centre et de même rayon ; de même l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et même rayon, sa frontière la sphère de même centre et même rayon.

La transformation $x \rightarrow \frac{1}{r} (x - x_0)$ transforme la sphère (resp. boule ouverte, boule fermée) de centre x_0 et de rayon r en la sphère (resp. boule ouverte, boule fermée) de centre 0 et de rayon 1 ; on désigne cette sphère par la notation S_{n-1} et on l'appelle sphère unité dans R^n ; de même, on désigne par B_n , et on appelle boule unité dans R^n , la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 . L'étude topologique d'une sphère à $n-1$ dimensions (resp. d'une boule fermée à n dimensions) est donc ramenée à celle de S_{n-1} (resp. B_n).

S_{n-1} et B_n sont invariantes par toute transformation du groupe orthogonal à n variables. Si V est un sous-espace vectoriel à p dimensions de R^n , il existe une rotation transformant V en une variété coordonnée à p dimensions ; on en conclut que $V \cap S_{n-1}$ (resp. $V \cap B_n$) est homéomorphe à S_{p-1} (resp. B_p).

PROPOSITION 1. Toute boule ouverte à n dimensions est homéomorphe à R^n .

En effet, l'application $x \rightarrow \frac{x}{1 + \|x\|}$ est continue dans R^n , et applique R^n sur la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 ; en outre, de $y = \frac{x}{1 + \|x\|}$, on tire $x = \frac{y}{1 - \|y\|}$, donc l'application précédente est biunivoque et bicontinue.

Désignons par R_n^* le complémentaire de 0 dans R^n .

PROPOSITION 2. L'espace R_n^* est homéomorphe au produit de S_{n-1} et de l'ensemble R_+^* des nombres > 0 .

En effet, tout point $x \in R_n^*$ peut se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme tz , avec $t > 0$ et $\|z\| = 1$, car de la relation $x = tz$ on tire $t = \|x\|$ et $z = \frac{x}{\|x\|}$. Comme tz est continue dans $R \times R^n$, donc à fortiori dans $R_+^* \times S_{n-1}$, et que $\|x\|$ et $\frac{1}{\|x\|}$ sont continues dans R_n^* , la proposition est démontrée.

L'application $x \rightarrow \frac{x}{\|x\|}$ est appelée projection centrale de R_n^* sur S_{n-1} .

COROLLAIRE. L'espace R_n^* est homéomorphe à $R \times S_{n-1}$.

En effet, $R_+^* =]0, +\infty[$ est homéomorphe à R (chap. IV, § 4, prop. 1).

3. Projection stéréographique.

Considérons le point $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ de S_{n-1} , et l'hyperplan H d'équation $x_n = 0$, orthogonal au vecteur e_n . A tout point $x \neq e_n$ de S_{n-1} , faisons correspondre le point y où la droite passant par e_n et x rencontre l'hyperplan H (fig. 1); nous allons voir qu'on définit ainsi un homéomorphisme du complémentaire A de $\{e_n\}$ par rapport à S_{n-1} , sur l'hyperplan H . En effet, on a $y = ue_n + vx$, avec $u+v=1$, et la condition $y_n = 0$, ce qui donne $utvx_n = 0$, d'où $u = -\frac{x_n}{1-x_n}$ et $v = \frac{1}{1-x_n}$; y est bien fonction continue de x dans A . Inversement, de $x = pe_n + qy$, avec $p+q=1$ et $\|x\| = 1$, on tire $p = \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}$ et $q = \frac{2}{\|y\|^2 + 1}$, ce qui prouve que x est fonction continue de y .

L'homéomorphisme ainsi défini s'appelle projection stéréographique de A sur H (ou, par abus de langage, de la sphère S_{n-1} sur H); e_n est le centre de la projection, H l'hyperplan de projection. Plus généralement, si H' est un hyperplan quelconque passant par O (hyperplan diamétral de B_n), et a un des points d'intersection de S_{n-1} et de la droite orthogonale à H' et passant par O , on définirait de la

même manière la projection stéréographique de centre a , sur l'hyperplan de projection H' ; on ramène d'ailleurs cette projection à la précédente, par un déplacement transformant H' en H et a en e_n .

PROPOSITION 3. Pour $n > 1$, la sphère euclidienne S_{n-1} est homéomorphe à l'espace numérique \mathbb{R}^{n-1} , rendu compact par adjonction d'un "point à l'infini" (chap. I, § 10, th. 3).

En effet, la projection stéréographique montre que le complémentaire d'un point, dans S_{n-1} , est homéomorphe à un grand hyperplan de \mathbb{R}^n , donc à \mathbb{R}^{n-1} .

PROPOSITION 4. Pour $n > 1$, la sphère euclidienne S_{n-1} est un espace connexe et localement connexe, dont tout point admet un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^{n-1} .

En effet, le complémentaire d'un point, dans S_{n-1} , est un ensemble connexe partout dense, donc (chap. I, § 11, prop. 1) S_{n-1} est connexe. Pour voir que tout point admet un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^{n-1} , il suffit de faire une projection stéréographique dont ce point n'est pas le centre.

On appelle hémisphère fermé (resp. ouvert) de S_{n-1} l'intersection de S_{n-1} et d'un demi-espace fermé (resp. ouvert) déterminé par un hyperplan diamétral de S_{n-1} ; par projection stéréographique sur un tel hyperplan, l'hémisphère fermé (resp. ouvert) ne contenant pas le centre de projection est appliqué sur une boule fermée (resp. ouverte) à $n-1$ dimensions, à laquelle il est donc homéomorphe.

Pour $n=2$, on dit demi-cercle au lieu d'"hémisphère".

Exercices. *1) Soit I un cube fermé de \mathbb{R}^n , de côté 2π . A tout point $x = (x_i)$ de I , on fait correspondre le point $y = (y_j)$ de \mathbb{R}^{n+1} tel que

$$y_1 = \sin x_1$$

$$y_p = \cos x_1 \cos x_2 \dots \cos x_{p-1} \sin x_p \quad (2 \leq p \leq n)$$

$$y_{n+1} = \cos x_1 \cos x_2 \dots \cos x_n$$

montrer que l'image de I par cette application est la sphère S_n . *

2) Définir un homéomorphisme de $S_p \times S_q$ sur une partie de S_{p+q+1} (remarquer que l'équation de S_{p+q+1} s'écrit

$$(x_1^2 + \dots + x_{p+1}^2) + (x_{p+2}^2 + \dots + x_{p+q+2}^2) = 1 . .)$$

3) a) Montrer que, si f est une application continue de S_1 dans \mathbb{R}^n , f peut se prolonger en une application continue de B_2 dans \mathbb{R}^n (au point $tx \in B_2$ ($t \geq 0$, $x \in S_1$), faire correspondre $tf(x)$).

b) En déduire que, si f est une application continue de S_1 dans S_n , telle que $f(S_1) \neq S_n$, f peut se prolonger en une application continue de B_2 dans S_n (utiliser une projection stéréographique dont le centre n'appartienne pas à $f(S_1)$).

4) Montrer qu'il n'existe aucun homéomorphisme de S_1 dans \mathbb{R} (remarquer que le complémentaire d'un point quelconque de S_1 par rapport à S_1 est connexe, et que toute partie compacte et connexe de \mathbb{R} est un intervalle).

En déduire que tout homéomorphisme de S_1 dans S_1 est nécessairement un homéomorphisme de S_1 sur S_1 (utiliser la prop.4).

5) Montrer que la sphère S_n est homéomorphe à l'espace quotient de la boule fermée B_n obtenu en identifiant tous les points de la sphère S_{n-1} . En particulier, S_1 est homéomorphe à l'espace quotient de l'intervalle $[0,1]$ obtenu en identifiant ses extrémités 0 et 1. En déduire que S_1 est aussi homéomorphe à l'espace quotient de la droite numérique par la relation d'équivalence $y-x \in \mathbb{Z}$, qu'on note $x \equiv y \pmod{1}$ (cf. chap.VI).

- 22 -

¶ 6) Identifiant S_1 et l'espace quotient de \mathbb{R} par la relation $x \equiv y \pmod{1}$ (exerc. 5), on désigne par φ l'application canonique de \mathbb{R} sur S_1 . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un voisinage V de x tel que φ , restreint à V , soit un homéomorphisme de V sur $\varphi(V)$.

On considère une application continue f de S_1 dans S_1 , telle que l'image par f de tout ensemble ouvert dans S_1 soit un ensemble ouvert dans S_1 . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un intervalle ouvert V contenant x , tel que $f(\varphi(V))$ soit contenu dans l'image par φ d'un intervalle ouvert W tel que φ soit un homéomorphisme de W sur $\varphi(W)$; si γ est l'homéomorphisme réciproque de $\varphi(W)$ sur W , $g = \gamma \circ f \circ \varphi$ est une application continue de V dans W , transformant tout ensemble ouvert dans V en un ensemble ouvert dans W . Montrer que g est une application strictement monotone dans V (pour tout intervalle compact contenu dans V , considérer un point où g atteint sa borne supérieure). En déduire qu'il existe une application strictement monotone et continue h de $[0, 1]$ sur un intervalle $[a, a+p]$ (p entier > 0) tel que $f \circ \varphi = \varphi \circ h$ (couvrir l'intervalle $[0, 1]$ par un nombre fini d'intervalles ouverts dans lesquels $f \circ \varphi$ ait la propriété précédente).

En particulier, si f est un homéomorphisme de S_1 sur lui-même, il existe une application strictement monotone et continue h de $[0, 1]$ sur un intervalle $[a, a+1]$ telle que $f \circ \varphi = \varphi \circ h$.

7) Avec les notations de l'exerc. 6, on dit qu'une application continue f d'un espace topologique E dans S_1 est inessentielle s'il existe une application continue g de E dans \mathbb{R} telle que $f = \varphi \circ g$; une application non inessentielle est dite essentielle.

Montrer que l'application identique de S_1 sur S_1 est essentielle (utiliser l'exerc.4).

8) Montrer qu'il existe un entourage U de la structure uniforme de S_1 tel que, si f est une application inessentielle d'un espace topologique E dans S_1 , toute application continue f' de E dans S_1 telle que $(f(x), f'(x)) \in U$ pour tout $x \in E$, soit aussi inessentielle

9) Montrer qu'il n'existe pas d'application continue f de B_2 sur S_1 qui coïncide sur S_1 avec l'application identique (utilisant l'exerc.8, montrer que f , restreinte au cercle de centre O et de rayon $r \leq 1$, serait toujours une application inessentielle de ce cercle dans S_1 , et en conclure une contradiction pour $r=1$).

10) Soit E un espace topologique contenant plus d'un point. Montrer qu'il existe une application continue f de S_1 dans $F = E \times S_1$, telle que $f(S_1) \neq F$ et qui ne se laisse pas prolonger en une application continue de B_2 dans S_1 (utiliser l'exerc.9). En déduire que, pour $n > 1$, S_n, R^n et B_n ne sont homéomorphes à aucun espace de la forme $E \times S_1$, E étant un espace topologique quelconque (voir exerc.5). En particulier, pour $n > 1$, S_n n'est pas homéomorphe à $(S_1)^n$, et quel que soit n , B_n n'est pas homéomorphe à $(S_1)^n$. Montrer de même que R^2 n'est pas homéomorphe au complémentaire d'un point dans R^2 , et que S_2 n'est pas homéomorphe à B_2 (dans le cas contraire, R^2 serait homéomorphe au produit de S_1 et de l'intervalle $]0,1[$).

11) On désigne par $H_{n,p,q}$ la "quadrique", définie dans R^n par l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2 = 1$$

($p+q \leq n$). Montrer que $H_{n,p,q}$ est homéomorphe à $S_{p-1} \times R^{n-p}$.

12) Soit $C_{n,p}$ le "cône du second degré" défini dans R^n par l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2 = 0 \quad (1 \leq p \leq n-1)$$

Montrer que le complémentaire du point 0 par rapport à $C_{n,p}$ est homéomorphe à $S_{p-1} \times S_{n-p} \times R$.

¶ 13) On dit qu'une partie E de R^n , contenant l'origine 0, est un ensemble étoilé par rapport à 0 si, quels que soient $x \in E$ et $t \in [0,1]$, $tx \in E$. L'intersection de E et d'une demi-droite fermée d'origine 0 est cette demi-droite tout entière, ou un segment dont 0 est une extrémité; on appelle coque de E l'ensemble K formé des extrémités $\neq 0$ des segments précédents, et de 0 lorsque l'intersection d'une demi-droite et de E se réduit à 0. On suppose dans ce qui suit que $0 \notin K$.

a) Montrer que la coque de E est contenue dans la frontière de E ; donner un exemple où ces deux ensembles sont différents.

b) Montrer que si la coque K de E est compacte, il existe, un homéomorphisme de R^n sur lui-même, qui applique K sur S_{n-1} , E sur B_n , et l'intérieur de E sur l'intérieur de B_n (faire correspondre à tout point $x \in K$ le point où la demi-droite d'origine 0 passant par x rencontre S_{n-1} , puis prolonger cette application à R^n tout entier). En déduire que la frontière de E est identique à sa coque K , et que l'intérieur de E est l'ensemble des tx , où x parcourt K , et t l'intervalle $[0,1[$ de R .

c) Si E est non borné, et si sa frontière de E est identique à sa coque, l'intérieur de E est homéomorphe à une boule ouverte de R^n , sa coque K à une partie ouverte de S_{n-1} (montrer que l'image de E par l'homéomorphisme $x \rightarrow \frac{x}{1 + \|x\|}$ de R^n sur lui-même satisfait aux conditions de b)).

d) Donner un exemple d'ensemble étoilé non borné, dont la coque est fermée, mais non identique à la frontière de E .

§ 3. Nombres complexes ; quaternions.

1. Définition des nombres complexes.

On a vu (chap.IV, § 3) que le corps \mathbb{R} des nombres réels est un corps ordonné (Alg., chap.VI) ; comme dans tout corps ordonné, le polynome x^2+1 est irréductible dans \mathbb{R} .

DÉFINITION 1. On appelle corps des nombres complexes, et on désigne par \mathbb{C} , le corps (commutatif) obtenu par adjonction algébrique au corps \mathbb{R} des nombres réels, d'une racine i du polynome x^2+1 ; les éléments de \mathbb{C} sont appelés nombres complexes.

Du point de vue algébrique, l'intérêt du corps \mathbb{C} provient du théorème fondamental suivant :

THÉORÈME 1 (théorème de D'Alembert-Gauss). Le corps \mathbb{C} des nombres complexes est algèbriquement stable.

Pour le démontrer, il suffit (Alg., chap.VI) d'établir que : 1° tout élément ≥ 0 a une racine carrée dans \mathbb{R} ; 2° tout polynome de degré impair à coefficients dans \mathbb{R} possède au moins une racine dans \mathbb{R} .

Nous avons déjà démontré la première de ces propositions (chap.IV, § 3).

D'autre part, si $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$ est un polynome de degré impair n ($a_0 \neq 0$) à coefficients réels, on peut l'écrire $f(x)=a_0x^n g(x)$,

où $g(x) = 1 + \frac{a_1}{a_0x} + \dots + \frac{a_n}{a_0x^n}$ tend vers $+1$ lorsque x tend vers $+\infty$

ou $-\infty$. Il existe donc un nombre $a > 0$ tel que $f(a)$ ait le signe de a_0 et $f(-a)$ le signe de $-a_0$; d'après le th. de Bolzano (chap.IV, § 6,

th.2) f a au moins une racine dans $[-a, a]$.

Remarque. On peut démontrer le th.1 sans utiliser la théorie des corps ordonnés, en se servant des propriétés de la topologie du corps \mathbb{C} , qui va être définie ci-dessous (n^02) : voir chap.VI, § 5, exerc.2, et aussi la partie de cet ouvrage consacrée à la topologie combinatoire, où le théorème de D'Alembert-Gauss sera démontré comme conséquence de résultats sur le degré d'application.

On sait (Alg., chap.VI) que \mathbb{R} peut être identifié à un sous-corps de \mathbb{C} et que tout élément $z \in \mathbb{C}$ peut se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme $x+iy$, où x et y sont réels ; x est appelé partie réelle de z et se note $\Re(z)$, y partie imaginaire de z et se note $\Im(z)$; les nombres complexes de la forme iy (y réel) sont dits imaginaires purs. La relation $x+iy=0$ (x et y réels) est équivalente à " $x=0$ et $y=0$ ".

Comme $i^2=-1$, les éléments de \mathbb{C} , donnés par leurs parties réelles et imaginaires, satisfont aux règles de calcul suivantes :

$$(1) \quad (x+iy)+(x'+iy') = (x+x')+i(y+y')$$

$$(2) \quad (x+iy)(x'+iy') = (xx'-yy')+i(xy'+x'y)$$

En particulier, $(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2 \in \mathbb{R}$; d'où, si $x+iy \neq 0$

$$(3) \quad \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$$

On a donc, pour tout entier n

$$i^{4n} = +1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

La seconde racine du polynôme x^2+1 dans \mathbb{C} est $-i$; par suite (Alg., chap.VI) le seul automorphisme de \mathbb{C} , distinct de l'application identique, et qui laisse invariants les nombres réels, est l'application faisant correspondre à tout nombre complexe $z=x+iy$ le nombre complexe $x-iy$, qu'on note \bar{z} , et qu'on appelle (conformément aux définitions générales) le nombre complexe conjugué de z ; on a

on a $\mathcal{R}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $\mathcal{I}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$. En vertu de cet automorphisme, si $f(z)$ est un polynome à coefficients réels, $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Conformément aux définitions générales (Alg., chap. VI), le nombre $z\bar{z} = x^2 + y^2$ s'appelle la norme algébrique (ou simplement la norme lorsqu'aucune confusion n'est possible) de z ; c'est un nombre ≥ 0 , qui n'est nul que si $z=0$. Le nombre positif $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ se réduit à la valeur absolue de z lorsque z est réel; on l'appelle encore valeur absolue de z et on le note $|z|$ dans le cas où z est un nombre complexe quelconque. La relation $|z| = 0$ équivaut à $z=0$. Si z et z' sont deux nombres complexes, le conjugué de zz' est $\bar{z}.\bar{z}'$, donc $|zz'|^2 = zz'\bar{z}\bar{z}' = |z|^2 |z'|^2$ et $|zz'| = |z| \cdot |z'|$: la valeur absolue d'un produit est le produit des valeurs absolues des facteurs (cf. Alg., chap. VI, pour la propriété générale correspondante des normes). En particulier, si $z \neq 0$ et $z' = 1/z$, on a $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$.

Enfin, quels que soient les nombres complexes z, z' , on a l'inégalité du triangle

$$(*) \quad |z+z'| \leq |z| + |z'|$$

2. Topologie de \mathbb{C} .

L'application $(x,y) \rightarrow x+iy$ du plan numérique $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sur \mathbb{C} est biunivoque; au moyen de cette application, on peut transporter à \mathbb{C} (Ens. R, § 8) la topologie de \mathbb{R}^2 . La topologie ainsi définie sur \mathbb{C} est compatible avec la structure de corps de \mathbb{C} (chap. III, § 5, n° 5); en effet, d'après (1) et (2), les fonctions $z+z'$ et zz' sont continues dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ (chap. I, § 8, cor. 2 du th. 1); et de même, d'après (3), $1/z$ est continue dans le complémentaire \mathbb{C}^* du point $z=0$ dans \mathbb{C} .

En munissant l'ensemble \mathbb{C} de cette topologie et de la structure de corps définie plus haut (déf. 1), on définit donc sur \mathbb{C} une structure

de corps topologique (chap.III, § 5) ; quand nous parlerons de la topologie de \mathbb{C} , c'est toujours de la topologie précédente qu'il sera question.

Dans la suite, on identifiera très souvent les ensembles \mathbb{C} et \mathbb{R}^2 , considérés comme espaces topologiques . Le sous-corps \mathbb{R} de \mathbb{C} se trouve alors identifié avec l'axe des abscisses de \mathbb{R}^2 , qu'on appelle pour cette raison axe réel ; on appelle de même axe imaginaire l'axe des ordonnées de \mathbb{R}^2 (on notera que ce n'est pas un sous-corps de \mathbb{C}). La demi-droite de paramètres $(1,0)$ (identifiée à \mathbb{R}_+) est dite demi-axe réel positif, la demi-droite de paramètres $(-1,0)$ demi-axe réel négatif.

Pour illustrer par des figures ce qui sera dit de \mathbb{C} ou de \mathbb{R}^2 , on utilisera la représentation (bien connue en géométrie analytique élémentaire) de \mathbb{R}^2 par les points d'un plan où l'on a tracé deux axes de coordonnées rectangulaires, qui représentent respectivement l'axe réel et l'axe imaginaire de \mathbb{R}^2 (fig.2).

Comme dans tout corps topologique (chap.III, § 5, n°5), toute fonction rationnelle de n variables complexes, à coefficients complexes, est continue en tout point de \mathbb{C}^n où son dénominateur n'est pas nul.

La permutation $z \rightarrow \bar{z}$ de \mathbb{C} est continue ; c'est donc un automorphisme du corps topologique \mathbb{C} .

On peut d'ailleurs montrer que c'est le seul automorphisme du corps topologique \mathbb{C} , distinct de l'automorphisme identique (voir exerc.5) .

Les fonctions $\Re(z)$, $\Im(z)$ ne sont autres que les fonctions projections dans \mathbb{R}^2 ; elles sont donc continues ; il en est de même de la valeur absolue $|z|$, qui n'est autre que la norme euclidienne (§ 2) du point (x,y) dans \mathbb{R}^2 . Les disques B_a de centre 0 et de rayon $a > 0$ forment un système fondamental de voisinages de 0 lorsque a parcourt l'ensemble des nombres > 0 , ou seulement une suite (ϵ_n) de nombres > 0 , ayant pour limite 0 .

Les propriétés de la valeur absolue permettent de donner une autre démonstration du fait que la topologie de \mathbb{C} est compatible avec la structure de corps de \mathbb{C} . En effet, la continuité de $z+z'$ résulte de l'inégalité du triangle $|z+z'| \leq |z| + |z'|$; la continuité de zz' résulte de la relation

$$|zz' - z_0 z'_0| = |z_0(z' - z'_0) + (z - z_0)z'_0 + (z - z_0)(z'_0 - z'_0)| \leq |z_0| \cdot |z' - z'_0| + |z'_0| \cdot |z - z_0| + |z - z_0| \cdot |z'_0 - z'_0|$$

Enfin, la continuité de $1/z$ résulte de la relation

$$|z^{-1} - z_0^{-1}| = |z^{-1}| \cdot |z_0 - z| \cdot |z_0^{-1}| = |z|^{-1} \cdot |z - z_0| \cdot |z_0|^{-1}$$

3. Le groupe multiplicatif \mathbb{C}^* .

On sait (chap.III, §5) que la topologie induite sur le groupe multiplicatif \mathbb{C}^* des nombres complexes $\neq 0$ est compatible avec la structure de groupe de \mathbb{C}^* ; comme \mathbb{C}^* est ouvert dans \mathbb{C} , \mathbb{C}^* est un groupe topologique localement compact (chap.I, §10, prop.10), donc complet (pour la structure uniforme multiplicative, bien entendu; cf. chap.III, §5, prop.4). Le groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* des nombres réels > 0 est un sous-groupe fermé de \mathbb{C}^* . Un autre sous-groupe est formé de l'ensemble U des nombres complexes de valeur absolue égale à 1, qui est identifié avec le cercle unité S_1 de \mathbb{R}^2 , et est par suite un groupe compact. m outre :

PROPOSITION 1. Le groupe topologique \mathbb{C}^* est isomorphe au produit des groupes topologiques \mathbb{R}_+^* et U .

En effet, l'application $z \rightarrow (|z|, \frac{z}{|z|})$ est un homéomorphisme de \mathbb{C}^* sur $\mathbb{R}_+^* \times U$ (§2, prop.2); il est immédiat d'autre part que c'est un isomorphisme de la structure de groupe de \mathbb{C}^* sur celle du groupe produit $\mathbb{R}_+^* \times U$.

L'étude du groupe topologique \mathbb{C}^* est donc ramenée à celle des groupes \mathbb{R}_+^* et U , que nous ferons au chap.VI (§§ 4 et 5).

4. L'espace \mathbb{C}^n .

L'espace topologique \mathbb{C} pouvant être identifié à \mathbb{R}^2 , l'espace produit \mathbb{C}^n de n espaces identiques à \mathbb{C} peut être identifié à \mathbb{R}^{2n} , en tant qu'espace topologique; de même, la structure de groupe topologique, produit des structures de groupe additif (topologique) des n facteurs de \mathbb{C}^n , peut être identifiée à celle du groupe additif \mathbb{R}^{2n} . Mais, comme \mathbb{C} est un corps, on peut définir sur \mathbb{C}^n une structure d'espace vectoriel de dimension n par rapport à \mathbb{C} , le produit az d'un nombre complexe a et d'un point $z = (z_1)$ de \mathbb{C}^n étant le point (az_1) , il faut avoir soin de ne pas confondre cette structure et celle d'espace vectoriel de dimension 2n par rapport à \mathbb{R} , définie sur \mathbb{R}^{2n} (§ 1); on réservera la notation \mathbb{C}^n à l'espace topologique produit de n espaces identiques à \mathbb{C} , muni en outre de la structure vectorielle par rapport à \mathbb{C} , qui vient d'être définie; on le désignera sous le nom d'espace numérique complexe à n dimensions. On notera que l'homothétie $(a, z) \rightarrow az$ est continue dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$.

Une application affine de \mathbb{C}^n dans \mathbb{C}^m est aussi une application affine de \mathbb{R}^{2n} dans \mathbb{R}^{2m} , mais la réciproque n'est pas vraie.

Par exemple, l'application $z \rightarrow \bar{z}$ est une application linéaire de l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 sur lui-même, mais non une application linéaire de l'espace vectoriel \mathbb{C} sur lui-même.

Toute application affine de \mathbb{C}^n dans \mathbb{C}^m est donc continue (et même uniformément continue); en particulier, toute application affine de \mathbb{C}^n sur lui-même est un homéomorphisme.

Toute variété linéaire à p dimensions ($p \leq n$) de l'espace vectoriel \mathbb{C}^n est aussi une variété linéaire à 2p dimensions de l'espace vectoriel \mathbb{R}^{2n} ; ici encore, la réciproque est inexacte. Pour éviter toute confusion,

on désigne les variétés linéaires à p dimensions de \mathbb{C}^n sous le nom de variétés linéaires complexes à p dimensions (les variétés linéaires de \mathbb{R}^{2n} étant appelées variétés linéaires réelles quand on veut se garder de toute méprise).

En particulier, on appellera droites complexes (resp. plans complexes) les variétés linéaires complexes à 1 dimension (resp. 2 dimensions) de \mathbb{C}^n , hyperplans complexes les variétés linéaires complexes à $n-1$ dimensions, si $n > 3$.

Il est souvent commode de considérer l'espace numérique \mathbb{R}^n comme plongé dans l'espace numérique complexe \mathbb{C}^n , en l'identifiant avec la partie de \mathbb{C}^n définie par les relations $\Im(z_k)=0$ ($k=1,2,\dots,n$), dont la structure de groupe topologique (induite par celle de \mathbb{C}^n) est isomorphe à celle de \mathbb{R}^n .

On notera que \mathbb{R}^n , ainsi plongé dans \mathbb{C}^n , n'est jamais une variété linéaire complexe de \mathbb{C}^n .

Un système de p points de \mathbb{R}^n , libre par rapport au corps \mathbb{R} , est encore un système libre par rapport au corps \mathbb{C} (Alg., chap.II); par suite, toute variété linéaire réelle V à p dimensions de \mathbb{R}^n engendre, dans \mathbb{C}^n , une variété linéaire complexe à p dimensions V' , dont elle est la trace sur \mathbb{R}^n ; si V est définie par un système de $n-p$ équations linéaires $f_k(x)=a_k$, où les f_k sont des formes linéaires dans \mathbb{R}^n (à coefficients réels, et indépendantes), et les a_k des nombres réels, les mêmes équations, mais où on donne aux coordonnées de x des valeurs complexes, définissent V' .

Inversement, lorsqu'une variété linéaire complexe à p dimensions a une intersection non vide avec \mathbb{R}^n , cette intersection est une variété linéaire réelle; mais la dimension de cette variété est en général $\leq p$.

On peut seulement affirmer, d'après cette définition, que cette dimension est $\geq 2p-n$.

5. Topologie des espaces vectoriels et des algèbres sur les corps \mathbb{R} et \mathbb{C} .

Soit E un espace vectoriel à n dimensions sur le corps \mathbb{R} ; si $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de cet espace, tout point $x \in E$ se met d'une seule manière sous la forme $x = \sum_{i=1}^n x_i a_i$, où les x_i sont des nombres réels ; l'application $(x_i) \rightarrow x$ est donc une application linéaire biunivoque de \mathbb{R}^n sur E . Si on transporte à E la topologie de \mathbb{R}^n par cette application, E se trouve muni d'une topologie compatible avec sa structure de groupe additif, et pour laquelle l'application $(t, x) \rightarrow tx$ de $\mathbb{R} \times E$ dans E est continue. Cette topologie est indépendante de la base choisie dans E ; en effet, si (a'_i) est une autre base de E et si $x = \sum_{i=1}^n x'_i a'_i$, l'application $(x_i) \rightarrow (x'_i)$ de \mathbb{R}^n sur lui-même est une application linéaire, donc un homéomorphisme.

Ce fait conduit à penser que la topologie ainsi définie peut être caractérisée sans l'aide d'une base de E . Effectivement, nous verrons au Livre VI, que c'est la seule topologie séparée sur E , pour laquelle les fonctions $x - y$ et tx soient continues (dans $E \times E$ et $\mathbb{R} \times E$ respectivement).

On définit de même une topologie sur un espace vectoriel à n dimensions sur le corps \mathbb{C} .

Si maintenant A est une algèbre de rang fini n sur le corps \mathbb{R} (ou le corps \mathbb{C}), la topologie précédente sur A (considéré comme espace vectoriel à n dimensions sur \mathbb{R} (resp. \mathbb{C})) est non seulement compatible avec la structure de groupe additif de A , mais aussi avec sa structure d'anneau. Cela résulte de ce que, plus généralement, si E, F, G sont trois espaces vectoriels à un nombre fini de dimensions sur \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}),

- 33 -

et f une application bilinéaire (*) de $E \times F$ dans G , f est continue (quand on munit E, F, G des topologies précédentes). En effet, on peut supposer que $E = \mathbb{R}^m$, $F = \mathbb{R}^n$, $G = \mathbb{R}^p$: tout revient à prouver que les coordonnées dans \mathbb{R}^p de $f(x, y)$ sont fonctions continues de $(x, y) \in E \times F$ (chap. I, § 8, cor. 2 du th. 1) ; autrement dit, il suffit de montrer que toute forme bilinéaire g est continue dans $E \times F$, ce qui est immédiat, puisque $g(x, y)$ est un polynôme par rapport aux coordonnées de x et de y .

6. Le corps des quaternions.

Comme (en vertu du th. 1) le corps \mathbb{R} est un corps ordonné maximal (Alg., chap. VI), le seul corps non commutatif de rang fini sur \mathbb{R} est le corps des quaternions sur \mathbb{R} (Alg., chap. VII) ; on le note K et on l'appelle corps des quaternions réels (ou simplement corps des quaternions, quand aucune confusion n'est à craindre).

Comme K est de rang 4 sur le corps \mathbb{R} , on peut, d'après ce qui précède, définir sur K une topologie isomorphe à celle de \mathbb{R}^4 . De façon plus précise, on identifiera d'ordinaire K et \mathbb{R}^4 , les éléments $1, j, k, l$ de la base canonique de K étant respectivement identifiés aux vecteurs e_1, e_2, e_3, e_4 de la base canonique de \mathbb{R}^4 .

Comme nous venons de le voir, la topologie de K est compatible avec sa structure d'anneau ; mais elle est aussi compatible avec sa structure de corps, car si x est un quaternion $\neq 0$, les coordonnées de x^{-1} sont des fonctions rationnelles des coordonnées de x , dont le dénominateur n'est pas nul (cf. exerc. 4). Le corps K , muni de cette topologie, est donc un corps topologique non commutatif.

(*) Rappelons que, si E, F, G sont trois espaces vectoriels par rapport à un corps commutatif K , une application f de $E \times F$ dans G est dite bilinéaire si on a identiquement $f(x+x', y) = f(x, y) + f(x', y)$,

Nous obtenons ainsi un troisième exemple de corps topologique localement compact et connexe, les deux autres étant \mathbb{R} et \mathbb{C} ; on peut montrer que ce sont les seuls corps topologiques ayant ces deux propriétés (**).

Rappelons que la norme algébrique d'un quaternion $x = x_1 + x_2j + x_3k + x_4l$ est le nombre $N(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \|x\|^2$ (c'est donc le carré de la norme euclidienne de x). Comme on a $N(xy) = N(x)N(y)$, on voit que l'ensemble des quaternions de norme 1, identique à la sphère S_3 , forme un sous-groupe du groupe multiplicatif K^* des quaternions $\neq 0$.

PROPOSITION 2. Le groupe multiplicatif K^* des quaternions $\neq 0$ est un groupe topologique isomorphe au produit de ses sous-groupes \mathbb{R}_+^* et S_3 .

En effet, tout quaternion $x \neq 0$ peut s'écrire $x = \|x\| \cdot z$, où z est un quaternion de norme 1 ; comme $\|xx'\| = \|x\| \cdot \|x'\|$, l'application $x \rightarrow (\|x\|, \frac{x}{\|x\|})$ de K^* sur $\mathbb{R}_+^* \times S_3$ est un isomorphisme de la structure de groupe de K^* sur celle de $\mathbb{R}_+^* \times S_3$; on sait d'autre part (§ 2, prop. 2) que c'est un homéomorphisme de K^* sur $\mathbb{R}_+^* \times S_3$.

Remarques. 1) A l'aide des relations $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, et $\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|$, on peut démontrer directement, comme plus haut pour le corps des nombres complexes, que la topologie de \mathbb{R}^4 est compatible avec la structure de corps de K .

2) Sur les sphères S_1 et S_3 , il existe, d'après ce qui précède, une structure de groupe compatible avec leur topologie. Nous verrons plus tard que, pour tout entier n autre que 1 et 3, il n'existe aucune structure de groupe compatible avec la topologie de S_n .

$f(x, y+y') = f(x, y) + f(x, y')$, $f(\lambda x, y) = f(x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$, quels que soient les éléments x, x' de \mathbb{E} , y, y' de \mathbb{F} , et $\lambda \in K$.

(**) Voir L. PONTRJAGIN, Ann. of math., t. XXXIII (1952), p. 163.

Exercices. 1) Soit $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ un polynome de degré n à coefficients complexes, z_i ($1 \leq i \leq n$) ses racines, et $r_0 = \max_{1 \leq i \leq n} |z_i|$.

a) Montrer que, si $r \geq 0$ est tel que

$$r^n \geq |a_1| r^{n-1} + |a_2| r^{n-2} + \dots + |a_n|$$

on a $r_0 \leq r$; en déduire que

$$r_0 \leq \max(1, \sum_{k=1}^n |a_k|)$$

b) Si $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une suite finie de n nombres > 0 tels que

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} = 1, \text{ montrer que}$$

$$r_0 \leq \max_{1 \leq k \leq n} (\lambda_k |a_k|)^{1/k}$$

(utiliser a)).

c) Déduire de a) que, si les a_i sont tous $\neq 0$

$$r_0 \leq \max(2|a_1|, 2|\frac{a_2}{a_1}|, \dots, 2|\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}|, |\frac{a_n}{a_{n-1}}|)$$

d) Déduire de a) que l'on a

$$r_0 \leq |a_1 - 1| + |a_2 - a_1| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n|$$

(considérer le polynome $(z-1)f(z)$). En conclure que, si les a_i sont réels et > 0 , on a

$$r_0 \leq \max(a_1, \frac{a_2}{a_1}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}})$$

2) On appelle nombres algébriques les nombres complexes racines de polynomes à coefficients rationnels.

a) Montrer que le corps A de tous les nombres algébriques est dénombrable (montrer qu'il est équipotent à l'ensemble des polynomes à coefficients rationnels).

b) En déduire que le corps B des nombres algébriques réels n'est pas complet, bien que le corps obtenu par adjonction algébrique de i à B soit le corps algébriquement stable A .

¶ 3) Soit K un corps ordonné (Alg., chap. VI), S le corps des séries formelles descendantes d'une indéterminée x , à coefficients dans K (c'est-à-dire les expressions $\sum_{n \leq k} a_n x^n$ où $a_n \in K$ (voir Alg., chap. IV).

- 30 -

on ordonne (totalement) S en prenant pour éléments > 0 de S les séries formelles dont le coefficient du terme de plus grand degré est > 0 (Alg., chap. VI). Montrer que S , ainsi ordonné, et muni de la topologie $\mathcal{C}_0(S)$ (chap. I, § 1, exerc. 3, et chap. IV, § 3, exerc. 2) est complet, mais que le corps obtenu par adjonction de i à S n'est pas algébriquement stable (montrer que les polynômes $y^D - x$ sont irréductibles dans S).

¶ 4) Soit K un corps topologique commutatif, E un espace vectoriel à n dimensions sur K . Si $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E , et si on transporte à E , par l'application linéaire biunivoque $(x_i) \rightarrow \sum_{i=1}^n x_i a_i$, la topologie de K^n (produit des topologies de ses facteurs), cette topologie est indépendante de la base considérée, est compatible avec la structure de groupe additif de E , et telle que l'application $(t, x) \rightarrow tx$ de $K \times E$ dans E soit continue. Si E est une algèbre sur K , la topologie précédente est compatible avec la structure d'anneau de K ; si F est une sous-algèbre de E , la topologie induite sur F par celle de E est identique à la topologie définie à partir d'une base quelconque de F . Si E est un corps (commutatif ou non) sur K , la topologie de E est compatible avec sa structure de corps (le démontrer d'abord pour une extension algébrique simple, puis remarquer que tout élément $x \in E$ est contenu dans l'extension algébrique simple obtenue en adjoignant x à K). Si le complété \hat{K} de K est un corps, le complété \hat{E} d'une algèbre E sur K est l'algèbre obtenue par extension à \hat{K} du domaine d'opérateurs de E (Alg., chap. II et VII); en déduire des exemples de corps topologiques dont le complété n'est pas un corps.

5) Montrer que tout isomorphisme de la structure de corps topologique de \mathbb{C} sur celle d'un sous-corps de \mathbb{C} , est l'automorphisme identique

de \mathbb{C} , ou l'automorphisme $z \rightarrow \bar{z}$ de \mathbb{C} (remarquer que, si f est un tel isomorphisme, on a $f(x)=x$ pour tout nombre rationnel x ; déduire ensuite de la continuité de f que f , restreint à \mathbb{R} , est un isomorphisme du corps \mathbb{R} sur un de ses sous-corps; appliquer ensuite l'exerc. 3 du chap.IV, § 3).

Montrer de même que tout isomorphisme de la structure de corps topologique du corps des quaternions K sur celle d'un de ses sous-corps est un automorphisme de K de la forme $x \rightarrow a \times a^{-1}$, où a est un quaternion inversible (même raisonnement, et voir alg., ch.VII)

6) Soit f un polynôme de n variables complexes, à coefficients complexes, non identiquement nul. Montrer que, dans \mathbb{C}^n , le complémentaire de l'ensemble S formé des points $Z=(z_i)$ tels que $f(z_1, z_2, \dots, z_n)=0$, est un ensemble connexe (§ 1, cor. 2 de la prop. 5)

§ 4. Sommes et produits infinis dans les \mathbb{R}^n .

1. Sommes infinies de points de \mathbb{R}^n .

Comme tout point de \mathbb{R}^n possède un système fondamental dénombrable de voisinages, une famille (x_z) de points du groupe additif \mathbb{R}^n ne peut être sommable que si l'ensemble des z tels que $x_z \neq 0$ est dénombrable (chap.III, § 4, cor. de la prop. 1), ce qui ramène essentiellement l'étude des familles sommables dans \mathbb{R}^n à celle des suites sommables. Toutefois, pour les mêmes raisons que celles qui ont été exposées au sujet des familles sommables dans \mathbb{R} (chap.IV, § 7), nous ne ferons, dans les énoncés qui suivent, aucune restriction sur la puissance de l'ensemble des indices.

PROPOSITION 1. Pour toute famille finie $(x_i)_{i \in I}$ de points de \mathbb{R}^n , on a

$$(1) \quad \sum_{i \in I} \|x_i\| \leq 2n \cdot \sup_{J \subset I} \left\| \sum_{i \in J} x_i \right\|.$$

En effet, si $x_i = (x_{ij})_{1 \leq j \leq n}$, on a $\|x_i\| \leq \sum_{j=1}^n |x_{ij}|$, donc

$$\sum_{i \in I} \|x_i\| \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i \in I} |x_{ij}| \right). \text{ Or, } \sum_{i \in I} |x_{ij}| = \sum_{i \in I} x_{ij}^+ + \sum_{i \in I} x_{ij}^-, \text{ et}$$

comme, pour toute partie J de I, $-\sum_{i \in J} x_{ij}^- \leq \sum_{i \in J} x_{ij} \leq \sum_{i \in J} x_{ij}^+$,

$$\text{on a } \sum_{i \in I} |x_{ij}| \leq 2 \cdot \sup_{J \subset I} \left| \sum_{i \in J} x_{ij} \right|. \text{ Mais } \left| \sum_{i \in J} x_{ij} \right| \leq \left\| \sum_{i \in J} x_i \right\|,$$

d'où la relation (1).

THEOREME 1. Pour qu'une famille $(x_\nu)_{\nu \in I}$ de points de R^n soit sommable, il faut et il suffit que la famille $(\|x_\nu\|)$ des normes euclidiennes des x_ν soit sommable dans R .

Comme R^n est complet, il suffit de voir que, pour que la famille (x_ν) satisfasse au critère de Cauchy (chap.III, §4, th.1), il faut et il suffit que la famille $(\|x_\nu\|)$ satisfasse aussi à ce critère. Or, c'est là une conséquence immédiate de l'inégalité du triangle et de l'inégalité (1).

COROLLAIRE. Pour qu'une famille (x_ν) de points de R^n soit sommable, il faut et il suffit que l'ensemble des sommes partielles finies de cette famille soit borné dans R^n .

Cela résulte du th.1 ci-dessus et du corollaire du th.3 du chap.IV, § 7, en tenant compte de l'inégalité du triangle et de l'inégalité (1).

PROPOSITION 2. Soit $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille sommable de points de R^m , $(y_\mu)_{\mu \in M}$ une famille sommable de points de R^n , f une application bilinéaire de $R^m \times R^n$ dans R^p . La famille $(f(x_\lambda, y_\mu))_{(\lambda, \mu) \in L \times M}$ est sommable, et on a

$$(2) \quad \sum_{(\lambda, \mu) \in L \times M} f(x_\lambda, y_\mu) = f\left(\sum_{\lambda \in L} x_\lambda, \sum_{\mu \in M} y_\mu\right)$$

Pour montrer que la famille des $f(x_\lambda, y_\mu)$ est sommable, il suffit de voir que chacune des p familles formées par les coordonnées des $f(x_\lambda, y_\mu)$ dans R^p est sommable (chap.III, § 4, prop.4);

autrement dit, on peut se limiter au cas où f est une forme bilinéaire ; mais pour une telle forme f , on a $f(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$, donc on est ramené au cas où $f(x, y) = x_i y_j$, et dans ce cas la proposition a déjà été démontrée (chap. IV, §7, prop. 2).

En spécialisant la fonction f , on a en particulier les corollaires suivants :

COROLLAIRE 1. Si $(a_\lambda)_{\lambda \in L}$ est une famille sommable de nombres réels, $(x_\mu)_{\mu \in M}$ une famille sommable de points de \mathbb{R}^n , la famille $(a_\lambda x_\mu)_{(\lambda, \mu) \in L \times M}$ est sommable, et on a

$$\sum_{(\lambda, \mu) \in L \times M} a_\lambda x_\mu = \left(\sum_{\lambda \in L} a_\lambda \right) \left(\sum_{\mu \in M} x_\mu \right).$$

COROLLAIRE 2. Si $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ et $(y_\mu)_{\mu \in M}$ sont deux familles sommables de points de \mathbb{R}^n , la famille $(\langle x_\lambda, y_\mu \rangle)_{(\lambda, \mu) \in L \times M}$ est sommable dans \mathbb{R} , et on a

$$(4) \quad \sum_{(\lambda, \mu) \in L \times M} \langle x_\lambda, y_\mu \rangle = \left\langle \sum_{\lambda \in L} x_\lambda, \sum_{\mu \in M} y_\mu \right\rangle.$$

COROLLAIRE 3. Si $(u_\lambda)_{\lambda \in L}$ et $(v_\mu)_{\mu \in M}$ sont deux familles sommables de nombres complexes, la famille $(u_\lambda v_\mu)_{(\lambda, \mu) \in L \times M}$ est sommable, et l'on a

$$(5) \quad \sum_{(\lambda, \mu) \in L \times M} u_\lambda v_\mu = \left(\sum_{\lambda \in L} u_\lambda \right) \left(\sum_{\mu \in M} v_\mu \right).$$

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer la proposition analogue pour les quaternions.

2. Familles multipliables dans \mathbb{C}^* .

Dans le groupe multiplicatif \mathbb{C}^* des nombres complexes $\neq 0$, une famille $(z_\iota)_{\iota \in I}$ ne peut être multipliable que si $\lim z_\iota = 1$ suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I (chap. III, §4, prop. 1) ; si on pose $z_\iota = 1 + u_\iota$, avec $u_\iota \neq -1$, on doit donc avoir $\lim u_\iota = 0$ suivant ce filtre. En outre, tout point de \mathbb{C}^* ayant un système fondamental dénombrable de voisinages, l'ensemble des ι tels que $u_\iota \neq 0$ est dénombrable si la famille $(1 + u_\iota)$ est multipliable.

THEOREME 2. Pour que la famille $(1+u_i)$ soit multipliable dans \mathbb{C}^* il faut et il suffit que la famille (u_i) soit sommable dans \mathbb{C} .

Lemme 1. Si $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une suite finie de nombres complexes telle

que $\sum_{i=1}^p |a_i| \leq h < 1$, on a

$$(6) \quad \left| \prod_{i=1}^p (1+a_i) - 1 - \sum_{i=1}^p a_i \right| \leq \frac{h^2}{1-h}$$

En effet

$$\prod_{i=1}^p (1+a_i) = 1 + \sum_i a_i + \sum_{i < j} a_i a_j + \dots + \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} + \dots + a_1 a_2 \dots a_p$$

Or, on a

$$\left| \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \right| \leq \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} |a_{i_1}| |a_{i_2}| \dots |a_{i_k}| \leq \left(\sum_{i=1}^p |a_i| \right)^k \leq h^k$$

donc

$$\left| \prod_{i=1}^p (1+a_i) - 1 - \sum_{i=1}^p a_i \right| \leq h^2 + h^3 + \dots + h^p \leq h^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} h^n \right) = \frac{h^2}{1-h}$$

Lemme 2. Soit ϵ un nombre réel tel que $0 < \epsilon < \frac{1}{81}$. Si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille finie de nombres complexes telle que, pour toute partie J de I ,

$$\left| \prod_{i \in J} (1+a_i) - 1 \right| \leq \epsilon, \text{ on a } \sum_{i \in I} |a_i| \leq 8\epsilon.$$

Posons $s = \sum_{i \in J} |a_i|$; d'après (6), on a, pour toute partie H de J ,

$$\left| \prod_{i \in H} (1+a_i) - 1 - \sum_{i \in H} a_i \right| \leq \frac{s^2}{1-s} \text{ pourvu que } s < 1; \text{ en supposant cette condition vérifiée, l'hypothèse du lemme 2 entraîne } \left| \sum_{i \in H} a_i \right| \leq \epsilon + \frac{s^2}{1-s};$$

donc, en vertu de la prop.1, on a aussi $s \leq 4\left(\epsilon + \frac{s^2}{1-s}\right)$, c'est-à-dire

$$\frac{s(1-5s)}{1-s} \leq 4\epsilon. \text{ Si on a en outre } \frac{1-5s}{1-s} \geq \frac{1}{2}, \text{ c'est-à-dire } s \leq \frac{1}{9},$$

on en conclut $s \leq 8\epsilon$. Nous avons donc prouvé que, pour toute partie

J de I , ou bien $\sum_{i \in J} |a_i| > \frac{1}{9}$, ou bien $\sum_{i \in J} |a_i| \leq 8\epsilon$. Reste à

montrer que c'est la seconde éventualité qui a lieu. Nous procéderons par récurrence sur le nombre m des éléments de J ; pour $m=1$, l'hypothèse

donne $|a_i| \leq \epsilon$ pour tout $i \in I$. Supposons la propriété démontrée pour

$m < n$; si J a n éléments, on peut écrire $J = H \cup \{k\}$, où H a $n-1$ éléments.

Par hypothèse, $\sum_{i \in H} |a_i| \leq 8\epsilon$ et $|a_k| \leq \epsilon$, donc

$$\sum_{i \in J} |a_i| \leq 9\epsilon < \frac{1}{9}, \text{ ce qui entraîne } \sum_{i \in J} |a_i| \leq 8\epsilon \text{ d'après ce qui}$$

précède.

Ces lemmes étant démontrés, prouvons d'abord que la condition de l'énoncé est suffisante. Si (u_ν) est sommable dans \mathcal{C} , il existe, d'après le th.1, une partie finie J de I telle que, pour toute partie finie H de I ne rencontrant pas J, on ait $\sum_{\nu \in H} |u_\nu| \leq \varepsilon < 1$; d'après (6), on a donc

$$\left| \prod_{\nu \in H} (1+u_\nu)^{-1} \right| \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

d'où la proposition d'après le critère de Cauchy (chap.III, § 4, th.1), puisque \mathcal{C}^* est un groupe complet.

Montrons maintenant que la condition est nécessaire. En effet, si $(1+u_\nu)$ est une famille multipliable dans \mathcal{C}^* , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J de I telle que, pour toute partie finie H de I ne rencontrant pas J, on ait $\left| \prod_{\nu \in H} (1+u_\nu)^{-1} \right| \leq \varepsilon$. D'après le lemme 2, on en déduit que $\sum_{\nu \in H} |u_\nu| \leq 8\varepsilon$, pourvu que l'on ait pris $\varepsilon < \frac{1}{81}$; la proposition résulte donc du critère de Cauchy. C.Q.F.D.

Au Livre IV, nous donnerons une démonstration plus simple de ce théorème, fondée sur les propriétés différentielles des fonctions exponentielles et trigonométriques.

3. Séries dans \mathbb{R}^n .

DEFINITION 1. Une série de points de \mathbb{R}^n est dite absolument convergente si la série des normes euclidiennes de ses termes est convergente.

PROPOSITION 3. Pour qu'une série de points de \mathbb{R}^n soit commutativement convergente, il faut et il suffit qu'elle soit absolument convergente.

C'est une conséquence de la prop.9 du chap.III, § 4, et du th. 1 ci-dessus.

Pour qu'une série de terme général $x_m = (x_{mi})_{1 \leq i \leq n}$ soit convergente dans \mathbb{R}^n , il faut et il suffit évidemment que chacune des n séries (x_{mi}) soit convergente. Mais les exemples du chap.IV, § 7 montrent que,

dans \mathbb{R}^n , une série peut être convergente sans être absolument convergente.

4. Produits infinis de nombres complexes.

DÉFINITION 2. Un produit infini de nombres complexes, de facteur général

$1+u_n$, est dit absolument convergent, si le produit de facteur général $1 + |u_n|$ est convergent.

PROPOSITION 3. Pour qu'un produit infini de nombres complexes soit commutativement convergent, il faut et il suffit qu'il soit absolument convergent.

Cela résulte de la prop9, chap.III, §4, et des th.1 et 2 ci-dessus. De plus, pour que le produit de facteur général $1+u_n$ soit absolument convergent, il faut et il suffit que la série de terme général u_n soit absolument convergente.

Enfin, si on pose $1+u_n = |1+u_n| \cdot \xi_n$, avec $|\xi_n| = 1$, pour que le produit de facteur général $1+u_n$ soit convergent, il faut et il suffit, d'après la prop.2 du §3, que le produit de facteur général $|1+u_n|$ soit convergent dans \mathbb{R}_+^* , et que le produit de facteur général ξ_n soit convergent dans le groupe \mathcal{U} des nombres complexes de valeur absolue égale à 1.

Remarques. 1) Le produit de facteur général $|1+u_n|$ peut être convergent, et même absolument convergent dans \mathbb{R}_+^* , sans que le produit de facteur général $1+|u_n|$ le soit (voir exerc.4); cela ne peut naturellement se produire lorsque tous les $1+u_n$ sont > 0 à partir d'un certain rang.

2) Comme on l'a déjà signalé pour les produits de facteurs > 0 , la convergence de la série de terme général u_n n'est ni nécessaire ni suffisante pour assurer la convergence du produit de facteur général $1+u_n$.

Exercices. ¶1) a) Soit $(x_k)_{1 \leq k \leq m}$ une suite finie de nombres réels telle que $|x_k| \leq 1$ pour $1 \leq k \leq m$, et $\sum_{k=1}^m x_k = 0$. Montrer qu'il existe une permutation σ de l'intervalle $[1, m]$ de \mathcal{N} , telle que l'on ait $\left| \sum_{k=1}^p x_{\sigma(k)} \right| \leq 1$ pour tout indice p tel que $1 \leq p \leq m$.

b) Soit $(x_k)_{1 \leq k \leq m}$ une suite finie de points $x_k = (x_{ki})_{1 \leq i \leq n}$ de \mathbb{R}^n , telle que $\|x_k\| \leq 1$ pour $1 \leq k \leq m$, et $\sum_{k=1}^m x_k = 0$. Montrer qu'il existe une permutation σ de l'intervalle $[1, m]$ de \mathcal{N} telle que $\left\| \sum_{k=1}^p x_{\sigma(k)} \right\| \leq 5 \frac{n-1}{2}$ pour tout indice p tel que

$1 \leq p \leq m$. (Raisonnement par récurrence sur n , en considérant \mathbb{R}^n comme produit de \mathbb{R}^{n-1} et de \mathbb{R} , et posant $x_k = (x'_k, x_{kn})$; prendre une partie H de $[1, m]$ telle que $\left\| \sum_{k \in H} x_k \right\|$ soit maximum; à l'aide d'une rotation, se ramener au cas où $\sum_{k \in H} x'_k = 0$, et montrer que, dans ce cas, on a nécessairement $x_{kn} > 0$ pour $k \in H$, $x_{kn} < 0$ pour $k \in H'$, H' étant le complémentaire de H dans $[1, m]$; appliquer ensuite l'hypothèse à la suite $(x'_k)_{k \in H}$, à la suite $(x'_k)_{k \in H'}$, et enfin à la suite des x_{kn}).

c) Soit $(x_k)_{1 \leq k \leq m}$ une suite finie de points de \mathbb{R}^n telle que $\|x_k\| \leq 1$ pour $1 \leq k \leq m$, et $\left\| \sum_{k=1}^m x_k \right\| = a > 0$; montrer qu'il existe une permutation σ de l'intervalle $[1, m]$ de \mathcal{N} , telle que $\left\| \sum_{k=1}^p x_{\sigma(k)} \right\| \leq (a+1) 5 \frac{n-1}{2}$ pour tout p tel que $1 \leq p \leq m$ (se ramener à b)).

¶2) soit (x_m) une suite infinie de points de \mathbb{R}^n , telle que $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = 0$. Montrer que, s'il existe des permutations σ de \mathcal{N} telles que la série de terme général $x_{\sigma(m)}$ soit convergente, l'ensemble des sommes $\sum_{m=0}^{\infty} x_{\sigma(m)}$ de ces séries, pour toutes les permutations σ de cette nature, est une classe suivant un sous-groupe fermé connexe (*) du groupe additif \mathbb{R}^n .

(*) C'est donc nécessairement une variété linéaire à p dimensions ($0 \leq p \leq n$) de \mathbb{R}^n , comme il résulte du chap. VI, § 1, th. 2.

(Si, pour toute partie finie H de \mathcal{N} , on pose $s_H = \sum_{m \in H} x_m$ montrer, à l'aide de l'exerc.1b), que toute valeur d'adhérence de l'application $H \rightarrow s_H$, suivant l'ordonné filtrant des parties finies de \mathcal{N} , est somme d'une série de la forme $\sum_{m=0}^{\infty} x_{\sigma(m)}$; utiliser ensuite l'exerc.3 du § 4 du chap.III pour prouver que l'ensemble de ces valeurs d'adhérence est une classe suivant un sous-groupe fermé B de \mathbb{R}^n . Pour établir que B est connexe, utiliser l'exerc.1c) ci-dessus, et l'exerc.12 du § 4 du chap.II).

¶ 3) Soit (z_n) une suite de nombres complexes $z_n = x_n + iy_n$, telle que $x_n \geq 0$ quel que soit n. Montrer que, si les séries définies par les suites (z_n) et (z_n^2) sont convergentes, la série de terme général z_n^2 est absolument convergente.

* Donner un exemple où ce résultat tombe en défaut, lorsqu'on remplace la condition $x_n \geq 0$ (qui s'écrit aussi $-\frac{\pi}{2} \leq \text{Am}(z_n) \leq \frac{\pi}{2}$ par $-(1+\epsilon)\frac{\pi}{2} \leq \text{Am}(z_n) \leq (1+\epsilon)\frac{\pi}{2}$, quelque petit que soit le nombre fixe $\epsilon > 0$ ($\text{Am}(z)$ étant la mesure en radians de l'amplitude de z). *

4) Montrer que le produit infini de facteur général $1 + \frac{1}{n}$ n'est pas convergent, mais que le produit des valeurs absolues de ses facteurs est absolument convergent.

¶ 5) Etant donné une suite (x_n) de quaternions $\neq 0$, on dit que le produit infini de facteur général x_n est convergent si la suite des produits $y_p = \prod_{n=1}^p x_n$ des séquences $(x_n)_{1 \leq n \leq p}$ (Alg., chap.I) est convergente dans le groupe multiplicatif K^* des quaternions $\neq 0$; la limite de la suite (y_p) est appelée le produit de la suite (x_n) . On dit que le produit infini de facteur général x_n est commutativement convergent si, pour toute permutation σ de \mathcal{N} , le produit de facteur général $x_{\sigma(n)}$ est convergent (la valeur de ce produit dépendant de σ).

a) Pour que le produit de facteur général x_n soit commutativement convergent, il faut et il suffit que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partie finie J de \mathcal{N} telle que, pour toute partie finie H de \mathcal{N} ne rencontrant pas J , et pour toutes les séquences déduites de la suite $(x_n)_{n \in H}$, on ait $\| \prod_{n \in H} x_n - 1 \| \leq \epsilon$ (raisonner par l'absurde comme dans la prop. 9 du § 4 du chap. III, en utilisant le fait que le groupe K^* est complet).

b) Si on pose $x_n = 1 + u_n$, pour que le produit de facteur général x_n soit commutativement convergent, il faut et il suffit que la série de terme général u_n soit absolument convergente (raisonner comme dans le th. 2, en utilisant a)).

§ 5. Topologie des espaces projectifs réels et complexes.

1. Espaces projectifs réels et complexes.

Rappelons qu'on a défini en Algèbre (Alg., chap. IX) l'espace projectif à n dimensions sur un corps commutatif K , de la manière suivante : désignons par K_{n+1}^* le complémentaire de l'origine 0 dans l'espace vectoriel K^{n+1} à $n+1$ dimensions sur le corps K , par $\Delta_n(K)$ la relation d'équivalence "il existe $t \in K$ tel que $t \neq 0$ et $y = tx$ " entre points x, y de K_{n+1}^* ; l'espace projectif à n dimensions sur K , qu'on note $P_n(K)$, est par définition l'ensemble quotient de K_{n+1}^* par $\Delta_n(K)$, muni de la structure d'espace homogène définie par le groupe linéaire à $n+1$ variables $GL_{n+1}(K)$ (groupe des automorphismes de l'espace vectoriel K^{n+1}), qui opère transitivement dans $P_n(K)$.

DEFINITION 1. On appelle espace projectif réel à n dimensions (resp. espace projectif complexe à n dimensions) l'espace projectif $P_n(\mathbb{R})$ (resp. $P_n(\mathbb{C})$), muni de la topologie quotient de celle de K_{n+1}^* (resp. \mathbb{C}_{n+1}^*) par la relation $\Delta_n(\mathbb{R})$ (resp. $\Delta_n(\mathbb{C})$).

L'espace projectif $P_1(\mathbb{R})$ (resp. $P_1(\mathbb{C})$) s'appelle droite projective réelle (resp. droite projective complexe) ; l'espace projectif $P_2(\mathbb{R})$ (resp. $P_2(\mathbb{C})$), plan projectif réel (resp. plan projectif complexe).

Les démonstrations des propriétés topologiques des espaces projectifs réels et complexes sont tout à fait analogues ; nous ne donnerons en général ces démonstrations que pour l'espace projectif réel.

Lorsque, dans une question déterminée, n'intervient que l'un des deux espaces $P_n(\mathbb{R})$, $P_n(\mathbb{C})$, à l'exclusion de l'autre, on se permettra, par abus de langage, de désigner simplement par P_n (et d'appeler espace projectif à n dimensions) celui de ces deux espaces qui intervient seul.

PROPOSITION 1. L'espace projectif $P_n(\mathbb{R})$ (resp. $P_n(\mathbb{C})$) est séparé.

Montrons d'abord que la relation $\Delta_n(\mathbb{R})$ est ouverte (*): soit A un ensemble ouvert dans R_{n+1}^* , x un point de A, $x' = t x$ un point de la classe d'équivalence de x ; il existe $r > 0$ tel que la boule de centre x et de rayon r soit contenue dans A ; la boule de centre x' et de rayon tr sera contenue dans l'ensemble saturé de A pour la relation $\Delta_n(\mathbb{R})$, ce qui montre que cet ensemble est ouvert. D'autre part, la relation $\Delta_n(\mathbb{R})$ entre deux points $x = (x_i)$ $y = (y_i)$ de R_{n+1} est équivalente à la suivante : "quels que soient i et j, $x_i y_j - x_j y_i = 0$ " ; comme tout polynome est continu dans $R^{2(n+1)}$, l'ensemble défini par $\Delta_n(\mathbb{R})$ dans $R_{n+1}^* \times R_{n+1}^*$ est fermé dans cet espace produit ; comme on peut appliquer la prop.4 du chap.I, §9 (*), la proposition est démontrée.

(*) Voir Rectifications au fasc. II .

PROPOSITION 2. L'espace projectif $P_n(\mathbb{R})$ (resp. $P_n(\mathbb{C})$) est un espace compact et connexe, homéomorphe à l'espace quotient de la sphère S_n (resp. S_{2n+1}) par la relation d'équivalence induite sur cette sphère par $\Delta_n(\mathbb{R})$ (resp. $\Delta_n(\mathbb{C})$).

En effet, soit F cet espace quotient ; toute classe d'équivalence suivant $\Delta_n(\mathbb{R})$ rencontre S_n en deux points opposés, car tout $x \in \mathbb{R}_{n+1}^*$ est équivalent aux points $\frac{x}{\|x\|}$ et $-\frac{x}{\|x\|}$ de S_n . Donc (chap.I, §9, prop.2), l'application canonique de F dans $P_n(\mathbb{R})$ est une application biunivoque et continue de F sur $P_n(\mathbb{R})$. Il en résulte d'abord (chap.I, §9, prop.5) que F est séparé ; comme S_n est compact, F est compact (chap.I, §10, prop.6) ; mais alors l'application canonique de F sur $P_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme (chap.I, §10, th.1). Enfin, comme S_n est connexe (§2, prop.4), $P_n(\mathbb{R})$ est connexe (chap.I, §11, prop.7).

L'espace $P_n(\mathbb{R})$ peut donc être considéré comme obtenu en identifiant les points opposés de la sphère S_n .

La seule différence entre la démonstration précédente et celle relative à $P_n(\mathbb{C})$ consiste en ce que l'intersection de S_{2n+1} et de la classe d'équivalence d'un point $x \in \mathbb{C}_{n+1}^*$ suivant $\Delta_n(\mathbb{C})$ est ici formée des points $\frac{\xi x}{\|x\|}$, où ξ parcourt le cercle unité U de \mathbb{C} .

2. Variétés linéaires de l'espace projectif.

Toute application linéaire (Alg., chap.IX) f de $P_n(\mathbb{R})$ dans $P_m(\mathbb{R})$ provient, par passage aux quotients (Ens. R, §5, n°8) d'une application linéaire g de \mathbb{R}^{n+1} dans \mathbb{R}^{m+1} ; si φ est l'application canonique de \mathbb{R}_{n+1}^* sur $P_n(\mathbb{R})$, γ l'application canonique de \mathbb{R}_{m+1}^* sur $P_m(\mathbb{R})$, on a $f \circ \varphi = \gamma \circ g$, ce qui montre que f est continue dans $P_n(\mathbb{R})$ (chap.I, §9, th.1). En particulier, toute application linéaire biunivoque

de $P_n(R)$ sur lui-même est un homéomorphisme. L'intersection avec R_{n+1} d'une variété linéaire coordonnée à $p+1$ dimensions de R^{n+1} est fermée dans R_{n+1}^* et saturée pour la relation $\Delta_n(R)$; par suite (chap. I, § 9, prop. 2) son image canonique dans $P_n(R)$ (qu'on appelle encore variété linéaire coordonnée à p dimensions de $P_n(R)$) est homéomorphe à $P_p(R)$.

Si maintenant V est une variété linéaire quelconque à p dimensions de $P_n(R)$ ($p \leq n$), il existe une application linéaire biunivoque de $P_n(R)$ sur lui-même, transformant V en une variété linéaire coordonnée; donc :

PROPOSITION 3. Toute variété linéaire à p dimensions de l'espace projectif $P_n(R)$ (resp. $P_n(C)$) est un ensemble fermé dans $P_n(R)$ (resp. $P_n(C)$), homéomorphe à $P_p(R)$ (resp. $P_p(C)$).

En raison de cette homéomorphie, on appelle droite projective réelle (resp. droite projective complexe) toute variété linéaire à 1 dimension de $P_n(R)$ (resp. $P_n(C)$), plan projectif réel (resp. plan projectif complexe) toute variété linéaire à 2 dimensions de $P_n(R)$ (resp. $P_n(C)$) pour $n > 3$, les variétés linéaires à $n-1$ dimensions de $P_n(R)$ (resp. $P_n(C)$) sont appelées hyperplans projectifs réels (resp. hyperplans projectifs complexes).

Par abus de langage, on omet souvent les qualificatifs "réel" et "complexe" lorsqu'il ne peut en résulter de confusions.

PROPOSITION 4. Dans l'espace projectif $P_n(R)$ (resp. $P_n(C)$), le complémentaire d'un hyperplan projectif est homéomorphe à R^n (resp. à C^n).

Il suffit de le démontrer pour un hyperplan particulier : prenons par exemple l'hyperplan d'équation (en coordonnées homogènes) $x_{n+1} = 0$,

et soit U son complémentaire dans $P_n(R)$; U est l'image canonique du complémentaire E de l'hyperplan $x_{n+1}=0$ dans R_{n+1}^* .

Soit H l'hyperplan $x_{n+1}=1$ dans R^{n+1} ; tout point $x=(x_i)$ de E est équivalent, pour la relation $\Delta_n(R)$, à un point et un seul de H , savoir le point $\frac{x}{x_{n+1}}$. Il en résulte que l'application canonique de R_{n+1}^* sur $P_n(R)$ applique biunivoquement H sur U . Pour montrer que U est homéomorphe à H , il suffit (chap.I, § 7, prop.2) de voir que tout ensemble ouvert par rapport à H est la trace sur H d'un ensemble ouvert par rapport à R_{n+1}^* et saturé pour $\Delta_n(R)$. Or, $x \rightarrow \frac{x}{x_{n+1}}$ est une application continue ~~aux~~ ~~xxxxxx~~ de E sur H , et l'image réciproque d'une partie A de H par cette application est la partie de R_{n+1}^* obtenue en saturant A pour $\Delta_n(R)$; d'où la proposition (chap.I, § 4, th.2).

COROLLAIRE. Tout point de $P_n(R)$ (resp. $P_n(C)$) possède un voisinage homéomorphe à un pavé ouvert de R^n (resp. R^{2n}).

On en conclut en particulier que les espaces projectifs réels et complexes sont localement connexes.

3. Immersion de l'espace numérique dans l'espace projectif.

Le prop.4 montre que, si on se donne un hyperplan projectif H dans $P_n(R)$ (resp. $P_n(C)$), il existe un homéomorphisme de R^n (resp. C^n) sur le complémentaire $\int H$ de cet hyperplan. Une fois choisi H , il est souvent commode d'identifier, à l'aide de l'homéomorphisme défini dans la prop.4, R^n (resp. C^n) et $\int H$; l'hyperplan projectif H est alors dit "à l'infini" , ainsi que les points ou ensembles qui y sont contenus. Le plus souvent, on prendra pour H un hyperplan "coordonné" d'équation $x_p=0$; alors le point $(z_i)=z$ de R^n (resp. C^n) est identifié au point de coordonnées homogènes $z_1, z_2, \dots, z_{p-1}, z_p, \dots, z_n$ de $P_n(R)$ (resp. $P_n(C)$).

Une fois faite une telle identification, toute variété linéaire V à p dimensions dans \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{C}^n) a pour adhérence dans $P_n(\mathbb{R})$ (resp. $P_n(\mathbb{C})$) une variété linéaire à p dimensions, non contenue dans l'hyperplan à l'infini, et identique à la variété linéaire engendrée par V . Réciproquement, toute variété linéaire à p dimensions de l'espace projectif, non contenue dans l'hyperplan à l'infini, a pour trace sur \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{C}^n) une variété linéaire à p dimensions, dont elle est l'adhérence.

Dans le cas particulier où $n=1$, l'hyperplan à l'infini est un point ; comme $P_1(\mathbb{R})$ et $P_1(\mathbb{C})$ sont compacts, il résulte du th. d'Alexandroff (chap.I, §10, th.3) que $P_1(\mathbb{R})$ (resp. $P_1(\mathbb{C})$) est homéomorphe à l'espace $\tilde{\mathbb{R}}$ (resp. $\tilde{\mathbb{C}}$) obtenu en rendant compact l'espace localement compact \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}) par adjonction d'un point (le "point à l'infini"). D'après la prop.3 du §2, on voit également que la droite projective réelle $P_1(\mathbb{R})$ est homéomorphe au cercle $U = S_1$, la droite projective complexe $P_1(\mathbb{C})$ est homéomorphe à la sphère S_2 .

Au contraire, pour $n > 1$, $P_n(\mathbb{R})$ n'est pas homéomorphe à S_n , ni $P_n(\mathbb{C})$ à S_{2n} , comme nous le verrons plus tard (voir exerc.5)

Le "point à l'infini" de l'espace $\tilde{\mathbb{R}}$ se note ∞ , sans signe. Il faut bien distinguer l'espace $\tilde{\mathbb{R}}$, où est ainsi plongée la droite numérique, de la droite achevée $\bar{\mathbb{R}}$ définie au chap.IV, §4, et qui possède deux "points à l'infini". Le th. d'Alexandroff montre d'ailleurs que $\tilde{\mathbb{R}}$ est homéomorphe à l'espace quotient de $\bar{\mathbb{R}}$ obtenu en identifiant les points $+\infty$ et $-\infty$.

Soit A une partie de \mathbb{R} , et f une application de A dans \mathbb{R} (fonction numérique définie dans A) ; supposons qu'il existe deux fonctions numériques g, h , définies dans la partie B de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ formée des couples (x, y)

tels que $y \neq 0, \frac{x}{y} \in A$, ces fonctions satisfaisant à l'identité $g(x,y) = f(\frac{x}{y})h(x,y)$ en tout point $(x,y) \in B$, et ne s'annulant simultanément en aucun point de B . Identifions \tilde{R} et $P_1(R)$, tout nombre réel $x \in R$ étant identifié au point $(x,1)$ de $P_1(R)$, le point ∞ étant identifié au point $(1,0)$. Alors, A étant identifié à la partie correspondante de $P_1(R)$, l'application qui, à tout point de A de coordonnées homogènes (x,y) , fait correspondre le point de $P_1(R)$ de coordonnées homogènes $(g(x,y), h(x,y))$ peut être identifiée à f .

Envisagée de cette manière, une application f peut parfois être prolongée par continuité à une partie de \tilde{R} contenant A . Par exemple, on retrouve ainsi le prolongement à \tilde{R} tout entier d'une fonction rationnelle, défini en algèbre (Alg., chap. IX); si $u(x)$ et $v(x)$ sont deux polynomes à coefficients réels, premiers entre eux, de degrés respectifs m et n , la fonction $\frac{u(x)}{v(x)}$ est définie en tout point $x \in R$ tel que $v(x) \neq 0$, c'est-à-dire dans le complémentaire A d'un ensemble de n points au plus. Si on suppose par exemple $m \leq n$, et qu'on pose

$$u_1(x,y) = y^n u(\frac{x}{y}), \quad v_1(x,y) = y^n v(\frac{x}{y})$$

on peut identifier la fonction rationnelle u/v à l'application $(x,y) \rightarrow (u_1(x,y), v_1(x,y))$ de A dans $P_1(R)$, et cette dernière est définie et continue, non seulement dans A , mais en tout point de $P_1(R)$; en effet, pour $y \neq 0$, u_1 et v_1 ne peuvent s'annuler simultanément, u et v étant premiers entre eux; et pour $y=0$, u_1 et v_1 ne peuvent non plus s'annuler tous deux, v étant de degré n ; enfin, la continuité de la fonction résulte de ce que u_1 et v_1 sont continues dans R^2 (chap. I, § 9, th. 1). En d'autres termes, on prolonge u/v en lui donnant la valeur ∞ aux points $x \in R$ où $v(x)=0$, et en lui donnant au point ∞ la valeur 0 si $m < n$, et la valeur du rapport des coefficients des termes de degré n de u et v , si $m=n$ (cf. alg., chap. IX).

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les résultats analogues pour les fonctions rationnelles à coefficients complexes d'une variable complexe.

En particulier, la fonction $1/x$ se prolonge au point 0 en y prenant la valeur ∞ , au point ∞ en y prenant la valeur 0 ; cette fonction est évidemment un homéomorphisme de $\tilde{\mathbb{R}}$ (resp. de $\tilde{\mathbb{C}}$) sur lui-même ; il en est de même de la fonction homographique $\frac{ax+b}{cx+d}$ lorsque $ad-bc \neq 0$.
De même, pour n entier > 0 , la fonction x^n se prolonge au point ∞ en y prenant la valeur ∞ .

Par contre, on ne peut en général prolonger par continuité à l'espace $P_1(\mathbb{R}) \times P_1(\mathbb{R})$, ni à l'espace $P_2(\mathbb{R})$, une fonction rationnelle de deux variables réelles (voir exerc. 6).

4. Immersion de l'espace projectif réel dans l'espace projectif complexe.

Si on considère l'espace \mathbb{R}^{n+1} comme plongé dans \mathbb{C}^{n+1} (§1, n°4), la relation d'équivalence induite sur \mathbb{R}_{n+1}^* par $\Delta_n(\mathbb{C})$ n'est autre que $\Delta_n(\mathbb{R})$; par suite (chap. I, §9, prop. 2), il existe une application biunivoque et continue de $P_n(\mathbb{R})$ sur le sous-espace de $P_n(\mathbb{C})$ formé des points admettant un système au moins de coordonnées homogènes réelles ; comme $P_n(\mathbb{R})$ est compact, cette application est un homéomorphisme et on peut donc identifier $P_n(\mathbb{R})$ au sous-espace précédent.

Comme tout sous-espace vectoriel à $p+1$ dimensions de \mathbb{R}^{n+1} engendre, dans \mathbb{C}^{n+1} , un sous-espace vectoriel complexe à $p+1$ dimensions, on voit que toute variété linéaire réelle V à p dimensions dans $P_n(\mathbb{R})$ engendre, dans $P_n(\mathbb{C})$, une variété linéaire complexe V' à p dimensions, dont elle est la trace sur $P_n(\mathbb{R})$; en outre, tout système d'équations homogènes de V est un système d'équations homogènes de V' , en donnant aux variables des valeurs complexes.

Exercices. 1) On considère l'application de S_2 dans R^4 qui, à tout point $x = (x_1, x_2, x_3)$ de S_2 , fait correspondre le point $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ tel que

$$y_1 = x_1^2 - x_2^2, \quad y_2 = x_1 x_2, \quad y_3 = x_1 x_3, \quad y_4 = x_2 x_3.$$

Cette fonction a la même valeur en deux points opposés de S_2 ; montrer que, par passage au quotient, elle donne un homéomorphisme de $P_2(R)$ dans R^4 .

Définir de même un homéomorphisme de $P_2(C)$ dans R^7 .

2) L'espace projectif $P_n(R)$ est homéomorphe à l'espace quotient de la boule B_n , obtenu en identifiant les points opposés de la frontière S_{n-1} de B_n .

3) Identifiant l'espace projectif $P_n(R)$ et l'espace quotient de B_n défini dans l'exerc.2, on désigne par φ l'application canonique de B_n sur $P_n(R)$. On dit qu'une application continue f d'un espace topologique E dans $P_n(R)$ est inessentielle s'il existe une application continue g de E dans B_n telle que $f = \varphi \circ g$; une application non inessentielle est dite essentielle (cf. § 2, exerc.7).

Montrer qu'il existe un entourage U de la structure uniforme de $P_n(R)$ tel que, si f est une application inessentielle d'un espace topologique E dans $P_n(R)$, toute application continue f' de E dans $P_n(R)$ telle que $(f(x), f'(x)) \in U$ pour tout $x \in E$, soit aussi inessentielle.

4) Si une application continue de S_1 dans $P_n(R)$ est essentielle, il n'est pas possible de la prolonger en une application continue de B_2 dans $P_n(R)$ (cf. § 2, exerc.9)

5) Si $n > 1$, il existe une application essentielle f de S_1 dans $P_n(R)$, telle que $f(S_1) \neq P_n(R)$ (prendre pour $f(S_1)$ l'image par φ d'un demi-cercle de centre 0 contenu dans S_{n-1}).

- 2+ -

En déduire que, pour $n > 1$, $P_n(\mathbb{R})$ n'est pas homéomorphe à S_n ni à B_n (utiliser l'exerc. 4 ci-dessus, et l'exerc. 3 du § 2).

6) Lorsqu'on considère \mathbb{R}^2 comme plongé dans $P_1(\mathbb{R}) \times P_1(\mathbb{R})$ et \mathbb{R} comme plongé dans $P_1(\mathbb{R})$, montrer que l'application $(x, y) \rightarrow x+y$ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} peut être prolongée par continuité aux points (a, ∞) et (∞, a) de $P_1(\mathbb{R}) \times P_1(\mathbb{R})$, pour toutes les valeurs finies de a ; elle ne peut être prolongée par continuité au point (∞, ∞) . Si on considère \mathbb{R}^2 comme plongé dans $P_2(\mathbb{R})$ (\mathbb{R} étant toujours plongé dans $P_1(\mathbb{R})$), $x+y$ peut être prolongée par continuité en tous les points de la droite de l'infini distincte du point de coordonnées homogènes $(1, -1, 0)$.

Énoncer et démontrer les propriétés analogues pour le produit xy , et pour la somme et le produit dans \mathbb{C}^2 .

7) Quelles conditions doivent remplir deux polynômes $u(x, y)$ et $v(x, y)$, à coefficients réels, définis dans \mathbb{R}^2 , pour que la fonction rationnelle $\frac{u(x, y)}{v(x, y)}$ puisse être prolongée par continuité en tous les points de $P_1(\mathbb{R}) \times P_1(\mathbb{R})$?

8) Dans l'espace projectif $P_n(\mathbb{R})$, soit $H'_{n,p}$ la "quadrique" d'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{n+1}^2 = 0 \quad (1 \leq p \leq n)$$

Montrer que $H'_{n,1}$ et $H'_{n,n}$ sont homéomorphes à S_{n-1} ; pour $2 \leq p \leq n-1$, $H'_{n,p}$ est homéomorphe à l'espace obtenu en identifiant les points opposés dans le produit $S_{p-1} \times S_{n-p}$ (considéré comme sous-espace de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p+1}$). Tout point de $H'_{n,p}$ a un voisinage homéomorphe à un pavé ouvert de \mathbb{R}^{n-1} .

Montrer que $H'_{3,2}$ est homéomorphe à $P_1(\mathbb{R}) \times P_1(\mathbb{R})$ (utiliser la représentation paramétrique de la quadrique au moyen de ses génératrices rectilignes).

- 55 -

9) Dans l'espace projectif $P_n(\mathbb{R})$, soit $C'_{n,p}$ le "cône du second degré" défini par l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2 = 0 \quad (1 \leq p \leq n-1)$$

montrer que le complémentaire de 0 dans $C'_{n,p}$ est homéomorphe à $\mathbb{R} \times H'_{n-1,p}$.

10) Dans l'espace projectif complexe $P_n(\mathbb{C})$, soit H'_n la "quadrique" définie par l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 0.$$

Montrer que tout point de H'_n a un voisinage homéomorphe à un pavé ouvert de $\mathbb{R}^{2(n-1)}$, et que H'_n est connexe, ainsi que son intersection avec le complémentaire d'un hyperplan projectif complexe quelconque (pour ce dernier point, on se ramènera au cas où $n=2$).

Montrer que H'_2 est homéomorphe à $P_1(\mathbb{C})$, H'_3 homéomorphe à $P_1(\mathbb{C}) \times P_1(\mathbb{C})$ (même méthode que dans l'exerc. 8).

¶ 11) A toute matrice \underline{X} à $p+1$ lignes et $n+1$ colonnes, dont les éléments sont des nombres réels, et qui est de rang $p+1$, on fait correspondre le sous-espace vectoriel à $p+1$ dimensions de \mathbb{R}^{n+1} engendré par ses $p+1$ lignes. Pour que les sous-espaces correspondant à deux telles matrices \underline{X} , \underline{Y} soient identiques, il faut et il suffit qu'il existe une matrice carrée régulière \underline{T} d'ordre $p+1$ telle que $\underline{Y} = \underline{TX}$.

Cette relation Θ entre \underline{X} et \underline{Y} est une relation d'équivalence dans l'ensemble $M_{n+1,p+1}$ des matrices à $p+1$ lignes et $n+1$ colonnes, de rang $p+1$. La correspondance qui précède définit une application biunivoque de l'ensemble quotient $M_{n+1,p+1} / \Theta$ sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels à $p+1$ dimensions de \mathbb{R}^{n+1} , ou, ce qui revient au même, sur l'ensemble des variétés linéaires à p dimensions de l'espace projectif $P_n(\mathbb{R})$; ce dernier ensemble sera désigné par $P_{n,p}(\mathbb{R})$.

Identifiant une matrice de $M_{n+1, p+1}$ avec le point de $R^{(n+1)(p+1)}$ dont les coordonnées sont les éléments de la matrice, $M_{n+1, p+1}$ est un sous-espace de $R^{(n+1)(p+1)}$, on définit sur $P_{n, p}(R)$ une topologie en transportant par la correspondance précédente la topologie quotient de celle de $M_{n+1, p+1}$ par la relation Θ .

a) A toute matrice $\underline{X} \in M_{n+1, p+1}$ on fait correspondre le point dont les $\binom{n+1}{p+1}$ coordonnées homogènes dans l'espace projectif $P_r(R)$ ($r = \binom{n+1}{p+1} - 1$) sont les déterminants d'ordre $p+1$ extraits de la matrice \underline{X} (rangés par exemple dans l'ordre lexicographique). Cette application est compatible avec la relation Θ et définit une application continue et biunivoque φ de $P_{n, p}(R)$ sur la grassmannienne $G_{n, p}(R)$ (Alg., chap. III et IX). En déduire que $P_{n, p}(R)$ est séparé.

b) Pour toute suite croissante σ de $p+1$ nombres distincts de l'intervalle $[1, p+1]$ de N , on désigne par H_σ l'ensemble des matrices $\underline{X} \in M_{n+1, p+1}$ dont la sous-matrice formée des colonnes d'indices $i \in \sigma$ est régulière. Montrer que l'image canonique de H_σ dans $M_{n+1, p+1} / \Theta$ est homéomorphe à $R^{(p+1)(n-p)}$ (remarquer que toute matrice de H_σ est équivalente à une matrice et une seule dont la sous-matrice formée des colonnes d'indice $i \in \sigma$ est la matrice unité). En déduire que tout point de $P_{n, p}(R)$ possède un voisinage homéomorphe à un pavé ouvert de $R^{(p+1)(n-p)}$.

c) Montrer que $P_{n, p}(R)$ est compact (remarquer que, dans toute classe d'équivalence mod. Θ , il existe une matrice dont tous les déterminants d'ordre $p+1$ sont en valeur absolue ≤ 1 , et dont une sous-matrice d'ordre $p+1$ est la matrice unité ; raisonner ensuite comme dans la prop. 2). En déduire que φ est un homéomorphisme de $P_{n, p}(R)$ sur la grassmannienne $G_{n, p}(R)$.

d) Montrer que $P_{n,p}(R)$ est connexe (établir que $M_{n+1,p+1}$ est connexe, en montrant par récurrence sur $k \leq p+1$ que, si X et Y sont deux matrices de $M_{n+1,p+1}$, il existe une matrice Z appartenant à la composante connexe de X et une matrice U appartenant à la composante connexe de Y , dont les k premières lignes sont identiques; utiliser pour cela la prop.5 du §1 .

e) Définitions et propriétés analogues pour l'ensemble des variétés linéaires à p dimensions $P_{n,p}(C)$ de l'espace projectif complexe $P_n(C)$.

12) L'espace projectif gauche (resp. droit) à n dimensions sur le corps des quaternions K , est par définition l'espace quotient de K^n par la relation "il existe $\lambda \in K$ tel que $\gamma = \lambda x$ (resp. $\gamma = x \lambda$)" Généraliser à ces espaces topologiques les propriétés de $P_n(R)$ et $P_n(C)$: montrer en particulier que les espaces projectifs droit et gauche à 1 dimension sur K sont homéomorphes à S_4 .

§ 6. Topologie des groupes linéaires réels et complexes,

et de leurs principaux sous-groupes et groupes quotients.

1. Groupes linéaires réels et complexes.

Rappelons qu'on a défini, en Algèbre (Alg., chap.II) le groupe linéaire à n variables sur un corps K , noté $GL_n(K)$, comme le groupe des automorphismes de l'espace vectoriel K^n ; on peut dire aussi que c'est le groupe des éléments inversibles de l'anneau des endomorphismes $\mathcal{L}(K^n)$ de l'espace vectoriel K^n . Lorsqu'on choisit une base dans K^n , à tout endomorphisme de K^n , rapporté à cette base, correspond une matrice carrée d'ordre n ; on définit ainsi un isomorphisme de l'anneau $\mathcal{L}(K^n)$ sur l'anneau des matrices carrées d'ordre n ; par cet isomorphisme, $GL_n(K)$ est appliqué sur le groupe des matrices carrées inversibles d'ordre n .

Nous allons considérer dans ce qui suit le cas où $K = \mathbb{R}$, ou $K = \mathbb{C}$. Alors l'anneau des matrices carrées d'ordre n sur \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}) est une algèbre de rang n^2 sur \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}), sur lequel on peut définir une topologie qui en fait un anneau topologique homéomorphe à \mathbb{R}^{n^2} (resp. \mathbb{C}^{n^2} ; voir §3, n°5); on peut identifier cet espace à \mathbb{R}^{n^2} (resp. \mathbb{C}^{n^2}) en identifiant (par exemple) la matrice $\underline{X} = (x_{ij})$ au point dont x_{ij} est la coordonnée d'indice $n(i-1)+j$ ($1 \leq i, j \leq n$). La topologie induite sur le groupe des matrices inversibles est alors compatible avec sa structure de groupe; car l'application $\underline{X} \rightarrow \underline{X}^{-1}$ est continue dans ce groupe, les éléments de \underline{X}^{-1} étant des fonctions rationnelles par rapport aux éléments de \underline{X} , dont le dénominateur est le déterminant de \underline{X} , qui n'est pas nul par hypothèse.

Nous choisirons une fois pour toutes une base dans \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{C}^n), par exemple la base canonique (e_i) , et identifierons $GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$) au groupe de matrices correspondant, lui-même identifié à une partie de \mathbb{R}^{n^2} (resp. \mathbb{C}^{n^2}) comme il vient d'être dit.

DÉFINITION 1. On appelle groupe linéaire réel (resp. complexe) à n variables, le groupe topologique obtenu en munissant le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$) de la topologie induite par celle de \mathbb{R}^{n^2} (resp. \mathbb{C}^{n^2}).

Remarques. 1) Comme on l'a déjà remarqué (§3, n°5), la topologie ainsi définie dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ou $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ est indépendante de la base choisie dans \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{C}^n) (on peut d'ailleurs le voir directement en remarquant qu'un changement de base revient à transporter cette topologie par un automorphisme intérieur de l'anneau $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$). Au chap. VIII, nous verrons comment on peut donner une définition intrinsèque de cette topologie.

- 59 -

2) Le groupe linéaire $GL_1(\mathbb{R})$ (resp. $GL_1(\mathbb{C})$) est isomorphe au groupe multiplicatif \mathbb{R}^* (resp. \mathbb{C}^*) des nombres $\neq 0$ du corps \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}), avec lequel on l'identifie.

Le complémentaire de $GL_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R}^{n^2} est l'ensemble des matrices $\underline{X}=(x_{ij})$ dont le déterminant $\boxed{x_{ij}}=0$; ce déterminant étant une fonction continue dans \mathbb{R}^{n^2} , le complémentaire de $GL_n(\mathbb{R})$ est fermé. Par suite:

PROPOSITION 1. Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$) est localement compact; chacun de ses points a un voisinage homéomorphe à un pavé ouvert de \mathbb{R}^{n^2} (resp. \mathbb{R}^{2n^2}).

Il est évident que $GL_n(\mathbb{R})$ est l'intersection de $GL_n(\mathbb{C})$ et de \mathbb{R}^{n^2} (considéré comme sous-espace de \mathbb{C}^{n^2}); autrement dit, on peut considérer $GL_n(\mathbb{R})$ comme un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{C})$.

Dans $GL_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices de déterminant > 0 est un sous-groupe distingué d'indice 2, ouvert et fermé dans $GL_n(\mathbb{R})$; on le désigne par $GL_n^+(\mathbb{R})$, et on note de même $GL_n^-(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de déterminant < 0 , qui est la seconde classe mod. $GL_n^+(\mathbb{R})$ dans $GL_n(\mathbb{R})$.

En considérant un point $x=(x_i)$ de \mathbb{R}^n comme une matrice à une colonne, le transformé de x par une matrice $\underline{X} \in GL_n(\mathbb{R})$ est le point (matrice à une colonne) $y=\underline{X} \cdot x$. Pour $n > 1$, le groupe $GL_n^+(\mathbb{R})$ opère transitivement dans \mathbb{R}^n ; il y définit donc une structure d'espace homogène; si, pour un point quelconque $a \in \mathbb{R}^n$, $S(a)$ désigne le sous-groupe de $GL_n^+(\mathbb{R})$ formé des matrices laissant invariant a ("groupe de stabilité" de \underline{a}), cette structure d'espace homogène est isomorphe à celle de $GL_n^+(\mathbb{R})/S(a)$. Prenons par exemple $a = e_n$; alors $S(e_n)$ est formé des matrices de déterminant > 0 et de la forme

$$\begin{pmatrix} & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & \underline{U} & & 0 \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices s'obtiennent donc en prenant pour \underline{U} une matrice arbitraire de $GL_{n-1}^+(\mathbb{R})$, pour les u_{ni} ($1 \leq i \leq n-1$) des nombres réels arbitraires. Il en résulte aussitôt que $S(e_n)$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1} \times GL_{n-1}^+(\mathbb{R})$.

PROPOSITION 2. L'espace homogène $GL_n^+(\mathbb{R})/S(e_n)$ est homéomorphe à \mathbb{R}^n .

D'après la définition de la topologie d'un espace homogène (chap. III, § 2, n° 8), il suffit de prouver que l'application $\underline{X} \rightarrow \underline{X} \cdot e_n$ de $GL_n^+(\mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^n est continue et transforme tout voisinage de la matrice unité \underline{I} en un voisinage de e_n . Le premier point est immédiat ; quand au second, il suffit de remarquer que $\underline{X} \cdot e_n$ n'est autre que la colonne d'indice n de \underline{X} ; l'image par l'application $\underline{X} \rightarrow \underline{X} \cdot e_n$ d'un cube de centre \underline{I} et de coté $a < 1$ contiendra donc un cube de centre e_n et de coté a .

PROPOSITION 3. Le groupe linéaire réel $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes, la composante de l'élément neutre étant $GL_n^+(\mathbb{R})$. Le groupe linéaire complexe $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe.

La première partie sera établie si on prouve que $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe. Procédons par récurrence sur n ; la proposition est vraie pour $n=1$, car $GL_1^+(\mathbb{R})$ est le groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* . Supposons-la démontrée pour $GL_{n-1}^+(\mathbb{R})$; alors $S(e_n)$, homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1} \times GL_{n-1}^+(\mathbb{R})$ est connexe, et d'après la prop. 2, l'espace homogène $GL_n^+(\mathbb{R})/S(e_n)$ est aussi connexe ; la proposition résultera donc du lemme général suivant :

LEMME. Soient E un espace topologique, R une relation d'équivalence dans E . Si l'espace quotient E/R est connexe, et si toute classe (mod. R) est connexe, l'espace E est connexe.

En effet, si A est un ensemble ouvert et fermé dans E , il contient nécessairement la classe de chacun de ses points, autrement dit il est saturé pour R ; mais son image canonique dans E/R est alors un ensemble ouvert et fermé, donc identique à E/R , ce qui entraîne $A=E$.

La seconde partie de la prop. 3 s'établit de même, en montrant d'abord que \mathbb{C}^n est homéomorphe à un espace homogène défini par un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ homéomorphe à $\mathbb{C}^{n-1} \times GL_{n-1}(\mathbb{C})$; nous laissons au lecteur le détail de la démonstration.

2. Groupes orthogonaux et groupes unitaires.
 =====

Rappelons (Alg., chap. VIII) que, si K est un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$, on appelle groupe orthogonal à n variables sur K le sous-groupe $O_n(K)$ de $GL_n(K)$ formé des automorphismes de K^n qui laissent invariante la forme quadratique $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. Si K est un corps ordonné, et K' le corps obtenu par adjonction à K de la racine i de $x^2 + 1 = 0$, on appelle groupe unitaire à n variables sur K' le sous-groupe $U_n(K')$ de $GL_n(K')$ formé des automorphismes de K'^n laissant invariante la forme hermitienne $x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_n \bar{x}_n$.

DEFINITION 2. On appelle groupe orthogonal réel à n variables (ou simplement groupe orthogonal à n variables) le sous-groupe $O_n(\mathbb{R})$ (qu'on note aussi O_n) du groupe topologique $GL_n(\mathbb{R})$. On appelle groupe unitaire complexe à n variables (ou simplement groupe unitaire à n variables) le sous-groupe $U_n(\mathbb{C})$ (qu'on note aussi U_n) du groupe topologique $GL_n(\mathbb{C})$.

En considérant $GL_n(\mathbb{R})$ comme sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$, on a $O_n = U_n \cap GL_n(\mathbb{R})$, donc O_n est sous-groupe fermé de U_n .

PROPOSITION 4. Le groupe unitaire U_n et le groupe orthogonal O_n sont compacts. Tout point de U_n a un voisinage homéomorphe à un pavé ouvert de R^{n^2} ; tout point de O_n a un voisinage homéomorphe à un pavé ouvert de $R^{n(n-1)/2}$.

En effet, pour qu'une matrice $\underline{X}=(x_{ij})$ appartienne à U_n , il faut et il suffit qu'elle satisfasse aux conditions

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n |x_{ij}|^2 = 1 \quad (i=1,2,\dots,n)$$

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n x_{hj} \bar{x}_{kj} = 0 \quad (1 \leq h, k \leq n, h \neq k)$$

U_n est donc un ensemble fermé dans C^{n^2} , et les relations (1) entraînent $|x_{ij}| \leq 1$ quels que soient i et j , autrement dit U_n est borné dans C^{n^2} , donc il est compact.

D'autre part (Alg., chap. VIII), si \underline{X} est une matrice unitaire telle que

$$\boxed{\underline{I} + \underline{X}} \neq 0 \quad (\underline{I} \text{ matrice unité}), \text{ la matrice}$$

$$(3) \quad \underline{S} = (\underline{I} - \underline{X})(\underline{I} + \underline{X})^{-1}$$

est une matrice hermitienne gauche, telle que

$$(4) \quad \underline{X} = (\underline{I} + \underline{S})^{-1}(\underline{I} - \underline{S})$$

Inversement, à toute matrice hermitienne gauche S correspond par la formule (4) une matrice unitaire \underline{X} telle que $\boxed{\underline{I} + \underline{X}} \neq 0$. Or, l'ensemble des matrices hermitiennes gauches est un sous-espace vectoriel à n^2 dimensions de R^{2n^2} ; et ce qui précède montre que l'application $\underline{S} \rightarrow (\underline{I} + \underline{S})^{-1}(\underline{I} - \underline{S})$ est un homéomorphisme de ce sous-espace sur l'ensemble des matrices unitaires \underline{X} telles que $\boxed{\underline{I} + \underline{X}} \neq 0$; mais ce dernier est un voisinage de $\underline{1}$ dans U_n , ce qui achève de démontrer la partie de l'énoncé qui concerne U_n .

Les propositions correspondantes concernant O_n se démontrent de même; dans les formules (3) et (4), \underline{S} est cette fois une matrice symétrique gauche à éléments réels.

On sait que le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à +1 ou à -1 ; les matrices de déterminant +1 forment un sous-groupe distingué O_n^+ d'indice 2 de O_n , le groupe des rotations de \mathbb{R}^n ; il est ouvert et fermé dans O_n . De même, le déterminant d'une matrice unitaire est un nombre complexe de valeur absolue 1 ; les matrices unitaires de déterminant +1 forment un sous-groupe distingué U_n^+ de U_n ; c'est un sous-groupe fermé de U_n , et le groupe quotient U_n/U_n^+ est isomorphe au groupe multiplicatif $U = U_1$ des nombres complexes de valeur absolue 1.

Pour $n > 1$, le groupe O_n^+ opère transitivement dans la sphère S_{n-1} ; il y définit donc une structure d'espace homogène ; si, pour un point quelconque $a \in S_{n-1}$, $S(a)$ désigne le sous-groupe de O_n^+ formé des rotations laissant invariant a , cette structure d'espace homogène est isomorphe à celle de $O_n^+/S(a)$. Si on prend $a = e_n$, il est immédiat que $S(e_n)$ est isomorphe à O_{n-1}^+ , avec lequel nous l'identifierons. De même, pour $n > 1$, le groupe U_n^+ opère transitivement dans la sphère $S_{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, et y définit une structure d'espace homogène ; en identifiant à U_{n-1}^+ le sous-groupe de U_n^+ laissant invariant le point $v_n \in \mathbb{C}^n$ de coordonnées $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0, x_n = 1$, on voit de même que cette structure d'espace homogène est isomorphe à celle de U_n^+/U_{n-1}^+ .

PROPOSITION 5. L'espace homogène O_n^+/O_{n-1}^+ est homéomorphe à S_{n-1} ; l'espace homogène U_n^+/U_{n-1}^+ est homéomorphe à S_{2n-1} .

Par passage au quotient, l'application $\underline{x} \rightarrow \underline{x} \cdot e_n$ de U_n^+ sur S_{2n-1} donne une application biunivoque et continue de U_n^+/U_{n-1}^+ sur S_{2n-1} ; il suffit de démontrer que cette application est bicontinue, ce qui est immédiat, U_n^+ étant compact, donc aussi U_n^+/U_{n-1}^+ (chap. I, §10, th. 1).

Démonstration analogue pour l'espace homogène O_n^+ / O_{n-1}^+ .

PROPOSITION 6. Le groupe orthogonal réel O_n a deux composantes connexes, la composante de l'élément neutre étant O_n^+ . Le groupe unitaire U_n et son sous-groupe U_n^+ sont connexes.

Pour montrer que O_n^+ est connexe, il suffit de raisonner par récurrence ; la proposition est vraie pour $n=1$, car O_1^+ est réduit à l'élément neutre ; si elle est vraie pour O_{n-1}^+ , elle l'est pour O_n^+ d'après le lemme du n°1, puisque O_n^+ / O_{n-1}^+ est connexe en vertu de la prop. 5. Démonstration analogue pour U_n^+ ; comme U_n / U_n^+ et U_n^+ sont connexes, le lemme prouve encore que U_n lui-même est connexe.

On peut d'ailleurs appliquer la même méthode qu'à O_n^+ et U_n^+ : ce groupe opère transitivement dans S_{2n-1} ; le sous-groupe laissant invariant U_n peut être identifié à U_{n-1} , et on montre comme ci-dessus que U_n / U_{n-1} est homéomorphe à S_{2n-1} .

Le groupe O_n (resp. U_n) n'est pas un sous-groupe distingué de $GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$) pour $n > 1$; mais, au point de vue topologique, on a la propriété suivante :

PROPOSITION 7. Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à l'espace produit $O_n \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$; le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{C})$ est homéomorphe à l'espace produit $U_n \times \mathbb{R}^{n^2}$.

On a vu en effet (Alg. Chap. VIII) que toute matrice $\underline{X} = (x_{ij})$ de $GL_n(\mathbb{R})$ peut, d'une manière et d'une seule, se mettre sous la forme $\underline{Y}\underline{U}$, où \underline{U} est une matrice orthogonale, et $\underline{Y} = (y_{ij})$ une matrice de $GL_n(\mathbb{R})$ telle que $y_{ij} = 0$ pour $j > i$, et $y_{ii} > 0$ pour $1 \leq i \leq n$; en outre, chaque y_{ij} pour $i > j$, et y_{ii}^2 pour $1 \leq i \leq n$, est fonction rationnelle des x_{ij} . Il en résulte que l'application $\underline{X} \rightarrow (\underline{Y}, \underline{U})$ est un homéomorphisme de $GL_n(\mathbb{R})$ sur le produit du sous-espace \mathbb{E} des matrices \underline{Y}

et du groupe orthogonal O_n . Or, il est immédiat que E est homéomorphe au produit de $n(n-1)/2$ facteurs homéomorphes à \mathbb{R} , et de n facteurs homéomorphes à l'intervalle $]0, +\infty[$, donc encore à \mathbb{R} ; d'où la proposition en ce qui concerne $GL_n(\mathbb{R})$; même démonstration pour $GL_n(\mathbb{C})$.

On observera que cette proposition permet de déduire chacune des propositions 3 et 6 de l'autre.

Nous avons déjà remarqué que les groupes U_1^+ et O_1^+ se réduisent à l'élément neutre, et que U_1 est le groupe multiplicatif des nombres complexes de valeur absolue 1; le groupe des rotations O_2^+ est isomorphe à U_1 , donc homéomorphe à S_1 (ce qui résulte aussi d'ailleurs de la prop. 5). Les groupes U_2^+ et O_3^+ se rattachent de même au groupe multiplicatif S_3 des quaternions de norme 1. En effet (Alg. chap. VII), on définit un isomorphisme de la structure de groupe de K^* dans $GL_2(\mathbb{C})$ en faisant correspondre à un quaternion $x_1 + x_2j + x_3k + x_4l \neq 0$, la matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}$$

et cette application est évidemment aussi un isomorphisme du groupe topologique K^* dans $GL_2(\mathbb{C})$; or, au sous-groupe S_3 de K^* correspond par cet isomorphisme le groupe unitaire U_2^+ .

D'autre part, l'espace \mathbb{R}^3 étant identifié à l'ensemble des quaternions dont la première coordonnée est nulle, si $z \neq 0$ est un quaternion quelconque, l'application $x \rightarrow z \times z^{-1}$ laisse invariant \mathbb{R}^3 , et sa restriction à \mathbb{R}^3 est une rotation; soit $\underline{F}(z)$ la matrice correspondant à cette rotation. Réciproquement, toute matrice de O_3^+ est de la forme $\underline{F}(z)$, et la relation $\underline{F}(z) = \underline{F}(z')$ équivaut à $z' = t z$, avec t réel et $\neq 0$ (Alg., chap. VIII). Comme en outre, on a $\underline{F}(z z') = \underline{F}(z) \underline{F}(z')$ et que les éléments de la matrice $\underline{F}(z)$ sont fonctions rationnelles

des coordonnées du quaternion z , on voit que \underline{F} est une représentation continue du groupe multiplicatif K^* des quaternions $\neq 0$ sur O_3^+ ; en restreignant \underline{F} au sous-groupe S_3 des quaternions de norme 1, \underline{F} est un homomorphisme de S_3 sur O_3^+ , puisque S_3 est compact; en outre, sur S_3 , on n'a $\underline{F}(z) = \underline{F}(z')$ que si $z' = z$ ou $z' = -z$. En résumé :

PROPOSITION 8. Le groupe U_2^+ est isomorphe au groupe multiplicatif S_3 des quaternions de norme 1. Le groupe O_3^+ est isomorphe au groupe quotient de S_3 par le sous-groupe distingué $H = \{-1, +1\}$.

COROLLAIRE. Le groupe O_3^+ est homéomorphe à l'espace projectif réel $P_3(\mathbb{R})$.

En effet, les classes mod. H dans S_3 sont formées des couples de points diamétralement opposés de S_3 .

3. Groupes projectifs.

Un sait (Alg., chap. IX) que, si K est un corps commutatif, les homothéties $x \rightarrow tx$ de rapport $\neq 0$ de l'espace vectoriel K^n , forment un sous-groupe distingué $H_n(K)$ du groupe linéaire $GL_n(K)$, et que le groupe quotient $GL_n(K)/H_n(K)$ est isomorphe au groupe projectif à n variables $PL_n(K)$ (c'est-à-dire le groupe des applications linéaires biunivoques de l'espace projectif $P_{n-1}(K)$ sur lui-même). On identifie en général ces deux groupes.

DEFINITION 3. On appelle groupe projectif réel (resp. complexe) à n variables, le groupe topologique $PL_n(\mathbb{R})$ (resp. $PL_n(\mathbb{C})$) quotient du groupe linéaire réel $GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$) par le sous-groupe distingué $H_n(\mathbb{R})$ (resp. $H_n(\mathbb{C})$) des homothéties de rapport $\neq 0$ dans $\neq 0$ dans \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{C}^n).

Deux matrices \underline{X} , \underline{Y} de $GL_n(\mathbb{R})$ appartiennent à la même classe (mod. $H_n(\mathbb{R})$) s'il existe un nombre réel $t \neq 0$ tel que $\underline{Y} = t\underline{X}$, ou encore (en identifiant les matrices de $GL_n(\mathbb{R})$ à des points de \mathbb{R}^{n^2}) si \underline{X} et \underline{Y} sont sur une droite passant par l'origine. On en conclut que l'espace quotient $PL_n(\mathbb{R}) = GL_n(\mathbb{R})/H_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe au sous-espace ouvert de l'espace projectif $P_{n^2-1}(\mathbb{R})$, défini par la relation $\boxed{x_{1j}} \neq 0$ entre les n^2 coordonnées homogènes de ses points : il suffit pour le voir de remarquer que $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans \mathbb{R}^{n^2} et saturé pour la relation $\Delta_{n^2-1}(\mathbb{R})$ (§5), puis d'utiliser la prop.2 du chap.I §9. On identifiera $PL_n(\mathbb{R})$ à ce sous-espace de $P_{n^2-1}(\mathbb{R})$. Un raisonne de même pour $PL_n(\mathbb{C})$; par suite :

PROPOSITION 9 . Le groupe projectif $PL_n(\mathbb{R})$ (resp. $PL_n(\mathbb{C})$) est localement compact ; chacun de ses points a un voisinage homéomorphe à un pavé ouvert de \mathbb{R}^{n^2-1} (resp. $\mathbb{R}^{2(n^2-1)}$).

Comme $P_n(\mathbb{R})$ peut être identifié à une partie de $P_n(\mathbb{C})$ (§5, n°4), tout ensemble ouvert dans \mathbb{R}^{n+1} et saturé pour la relation $\Delta_n(\mathbb{R})$ est la trace d'un ensemble ouvert dans \mathbb{C}^{n+1} et saturé pour la relation $\Delta_n(\mathbb{C})$ (chap.I, §9, prop.2) ; remplaçant n par n^2-1 , on voit que tout ensemble ouvert dans $GL_n(\mathbb{R})$ et saturé pour $\Delta_{n^2-1}(\mathbb{R})$ est la trace d'un ensemble ouvert dans $GL_n(\mathbb{C})$ et saturé pour $\Delta_{n^2-1}(\mathbb{C})$; donc (chap.I, §9, prop.2), le groupe projectif $PL_n(\mathbb{R})$ peut être identifié au sous-groupe fermé de $PL_n(\mathbb{C})$ formé des points ayant un système de coordonnées homogènes réelles.

PROPOSITION 10. Le groupe projectif réel $PL_n(\mathbb{R})$ est connexe si n est impair, et a deux composantes connexes si n est pair. Le groupe projectif complexe $PL_n(\mathbb{C})$ est connexe.

La seconde partie de la proposition est immédiate, puisque $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe.

Si n est impair, toute classe (mod. $H_n(\mathbb{R})$) contenue dans $GL_n(\mathbb{R})$ rencontre $GL_n^+(\mathbb{R})$, car le déterminant de la matrice $t\underline{x}$ est $t^n \underline{x}$, et en prenant t du signe de \underline{x} , on a $\underline{t\underline{x}} > 0$; l'image canonique de $GL_n^+(\mathbb{R})$ dans $PL_n(\mathbb{R})$ est donc identique à $PL_n(\mathbb{R})$, et comme $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe, il en est de même de $PL_n(\mathbb{R})$. Au contraire, si n est pair, le déterminant de $t\underline{x}$ a même signe que celui de \underline{x} , quel que soit $t \neq 0$; les images canoniques de $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$ dans $PL_n(\mathbb{R})$ sont donc deux ensembles ouverts, connexes et sans point commun, et par suite ce sont les deux composantes connexes de $PL_n(\mathbb{R})$.

Exercices. 1) On appelle groupe unimodulaire réel (resp. complexe) à n variables, le sous-groupe distingué $SL_n(\mathbb{R})$ (resp. $SL_n(\mathbb{C})$) de $GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$) formé des matrices de déterminant $+1$. Montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{(n^2+n-2)/2} \times O_n^+$, et $SL_n(\mathbb{C})$ à $\mathbb{R}^{n^2-1} \times U_n^+$. En utilisant la prop. 8, en déduire en particulier que la quadratique $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ dans \mathbb{C}^4 , est homéomorphe à $\mathbb{R}^3 \times S_3$.

2) Le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$) laissant invariant un sous-espace vectoriel V à $p < n$ dimensions est homéomorphe à $\mathbb{R}^{p(n-p)} \times GL_p(\mathbb{R}) \times GL_{n-p}(\mathbb{R})$ (resp. à $\mathbb{R}^{2p(n-p)} \times GL_p(\mathbb{C}) \times GL_{n-p}(\mathbb{C})$); il a quatre composantes connexes (resp. est connexe).

Le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$) laissant invariants deux sous-espaces vectoriels supplémentaires à p et $n-p$ dimensions respectivement, est isomorphe au produit $GL_p(\mathbb{R}) \times GL_{n-p}(\mathbb{R})$ (resp. $GL_p(\mathbb{C}) \times GL_{n-p}(\mathbb{C})$).

3) montrer que tout point de U_n^+ a un voisinage homéomorphe à un pavé ouvert de \mathbb{R}^{n^2-1} (il suffit de l'établir pour l'élément neutre \underline{I} de U_n^+ ; on est ramené à prouver que, dans l'ensemble des matrices hermitiennes gauches \underline{S} satisfaisant à l'équation,

- 69 -

$\boxed{\underline{I} + \underline{S}} = \boxed{\underline{I} - \underline{S}}$, le point 0 possède un voisinage homéomorphe à un pavé ouvert de \mathbb{R}^{n^2-1} ; pour le voir, remarquer que, de l'équation précédente, on peut, au voisinage de 0, tirer un des éléments diagonaux de \underline{S} en fonction rationnelle des autres éléments de \underline{S}).

4) On sait (Alg., chap. VIII) que toute matrice unitaire \underline{X} peut s'écrire $\underline{U}\underline{Z}\underline{U}^{-1}$, où \underline{U} est une matrice unitaire, et \underline{Z} la matrice diagonale dont les éléments sont les racines caractéristiques de \underline{X} (de valeur absolue 1) déduire de ce fait une autre démonstration de la prop. 6 (montrer que \underline{Z} appartient à un sous-groupe connexe formé de matrices diagonales).

5) Dans le groupe des rotations O_n^+ (resp. dans le groupe unitaire U_n) l'ensemble des matrices \underline{X} telles que $\boxed{\underline{I} + \underline{X}} \neq 0$ forme un ensemble ouvert et partout dense (ramener une matrice \underline{X} telle que $\boxed{\underline{I} + \underline{X}} = 0$ à la forme diagonale; cf. exerc. 4). En déduire une nouvelle démonstration de la prop. 6.

¶ a) On appelle groupe orthogonal complexe à n variables le sous-groupe $O_n(\mathbb{C})$ du groupe topologique $GL_n(\mathbb{C})$. Soit $O_n^+(\mathbb{C})$ le sous-groupe de $O_n(\mathbb{C})$ formé des matrices de déterminant $+1$.

a) Le groupe $O_n(\mathbb{C})$ est localement compact; chacun de ses points possède un voisinage homéomorphe à un pavé ouvert de $\mathbb{R}^{n(n-1)}$ (même méthode que pour la prop. 4).

b) Le groupe $O_n^+(\mathbb{C})$ opère transitivement dans la "quadrique" H_n d'équation $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ dans \mathbb{C}^n ; le sous-groupe de $O_n^+(\mathbb{C})$ laissant invariant le point \underline{v}_n de coordonnées $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$, $x_n = 1$ dans \mathbb{C}^n est isomorphe à $O_{n-1}^+(\mathbb{C})$, avec lequel on peut l'identifier. Montrer que l'espace homogène $O_n^+(\mathbb{C})/O_{n-1}^+(\mathbb{C})$ est homéomorphe à la quadrique H_n (pour prouver que l'application $\underline{X} \rightarrow \underline{X} \cdot \underline{v}_n$ transforme un voisinage de \underline{I} dans $O_n^+(\mathbb{C})$ en un voisinage

de v_n dans H_n , remarquer que l'équation $(I+S).z=(I-S).v_n$ définit un certain nombre d'éléments de la matrice symétrique gauche S en fonction rationnelle des autres éléments de cette matrice et des coordonnées du point $z \in H_n$ dans C^n).

c) Dédurre de b) que le groupe $O_n^+(C)$ est connexe (raisonner comme dans les prop.3 et 6, en utilisant l'exerc.10 du § 5).

¶ 7) Soit $O_{n,p}$ le sous-groupe de $GL_n(R)$ laissant invariant la forme quadratique

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_p^2-x_{p+1}^2-\dots-x_n^2 \quad (0 \leq p \leq n).$$

a) Montrer que $O_{n,p}$ est localement compact, et que chacun de ses points a un voisinage homéomorphe à un pavé ouvert de $R^{n(n-1)/2}$ (même méthode que pour la prop. 4).

b) Si $p \geq 1$, le groupe $O_{n,p}$ opère transitivement dans la "quadrique" $H_{n,p,n-p}$ (§2,exerc.11) d'équation

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_p^2-x_{p+1}^2-\dots-x_n^2 = 1.$$

Le sous-groupe de $O_{n,p}$ laissant invariant le point e_1 est isomorphe à $O_{n-1,p-1}$, avec lequel on peut l'identifier. Montrer que l'espace homogène $O_{n,p}/O_{n-1,p-1}$ est homéomorphe à la quadrique $H_{n,p,n-p}$ (même méthode que dans l'exerc. 6b)).

c) Démontrer le lemme suivant : soit G un groupe topologique localement connexe, K un sous-groupe de G ayant un nombre fini p de composantes connexes. Si l'espace homogène G/K a un nombre fini q de composantes connexes, G a au plus pq composantes connexes (si C est la composante connexe de l'élément neutre dans G , remarquer que l'image canonique de CK dans G/K est une composante connexe de G/K).

d) Dédurre de ce lemme et de b) que $O_{n,p}$ a au plus quatre composantes connexes (cf. §2,exerc.11).

e) soit E' la variété coordonnée de R^n engendrée par les vecteurs e_1, e_2, \dots, e_p , E'' la variété supplémentaire engendrée par e_{p+1}, \dots, e_n pour tout vecteur $x \in R^n$, on désigne par x' sa projection sur E' , par x'' sa projection sur E'' .

Soient $x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n$ les colonnes d'une matrice \underline{X} du groupe $O_{n,p}$; montrer que le déterminant des p vecteurs x_1', x_2', \dots, x_p' n'est pas nul (minorer le carré de ce déterminant en utilisant l'identité de Lagrange et les relations entre les éléments de \underline{X}); de même, le déterminant des $n-p$ vecteurs x_{p+1}'', \dots, x_n'' n'est pas nul. En déduire que pour $1 \leq p \leq n-1$, $O_{n,p}$ a au moins quatre composantes connexes, et par suite (d'après d)) qu'il a exactement quatre composantes connexes.

f) Faire une étude analogue du sous-groupe $U_{n,p}$ de $GL_n(C)$ laissant invariante la forme hermitienne

$$x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_p \bar{x}_p - x_{p+1} \bar{x}_{p+1} - \dots - x_n \bar{x}_n;$$

montrer en particulier que ce groupe est connexe.

g) On appelle groupe symplectique réel (resp. complexe) à $2n$ variables et on note $Sp_n(R)$ (resp. $Sp_n(C)$) le sous-groupe du groupe topologique $GL_{2n}(R)$ (resp. $GL_{2n}(C)$) qui laisse invariante la forme bilinéaire alternée

$$\sum_{i=1}^n (x_i y_{n+1-i} - y_i x_{n+1-i})$$

a) Le groupe $Sp_n(R)$ (resp. $Sp_n(C)$) est localement compact; chacun de ses points possède un voisinage homéomorphe à un pavé ouvert de $R^{n(2n+1)}$ (resp. $R^{2n(2n+1)}$) (même méthode que pour la prop. 4). Le groupe $Sp_1(R)$ (resp. $Sp_1(C)$) est identique au groupe $SL_2(R)$ (resp. $SL_2(C)$) (exerc. 1).

- 12 -

b) Le groupe $Sp_n(\mathbb{R})$ opère transitivement dans \mathbb{R}^{2n} . Le sous-groupe $S(e_1)$ laissant invariant e_1 est homéomorphe à $\mathbb{R}^{2n-1} \times Sp_{n-1}(\mathbb{R})$, et l'espace homogène $Sp_n(\mathbb{R})/S(e_1)$ est homéomorphe à \mathbb{R}^{2n} (méthode de la prop. 2). En déduire que $Sp_n(\mathbb{R})$ est connexe. Propriétés analogues pour $Sp_n(\mathbb{C})$.

9) a) dans l'application canonique de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $PL_n(\mathbb{R})$, soient $PSL_n(\mathbb{R})$, PO_n , PO_n^+ les images canoniques de $SL_n(\mathbb{R})$, O_n et O_n^+ . Montrer que ces groupes sont respectivement isomorphes aux groupes quotients $SL_n(\mathbb{R})/(SL_n(\mathbb{R}) \cap H_n(\mathbb{R}))$, $O_n/(O_n \cap H_n(\mathbb{R}))$, $O_n^+/(O_n^+ \cap H_n(\mathbb{R}))$ et par suite localement isomorphes à $SL_n(\mathbb{R})$, O_n et O_n^+ . Si n est impair, $PSL_n(\mathbb{R})$ est isomorphe à $SL_n(\mathbb{R})$, $PO_n = PO_n^+$ est isomorphe à O_n^+ ; si n est pair, PO_n a deux composantes connexes.

b) Si n est impair, $PSL_n(\mathbb{R})$ est identique à $PL_n(\mathbb{R})$; si n est pair, $PSL_n(\mathbb{R})$ est identique à la composante connexe de l'élément neutre dans $PL_n(\mathbb{R})$.

c) montrer que $PSL_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{(n^2+n-2)/2} \times PO_n^+$ (voir exerc. 1).

d) désignant de même par $PSL_n(\mathbb{C})$, PU_n et PU_n^+ les images de $SL_n(\mathbb{C})$, U_n et U_n^+ respectivement par l'application canonique de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $PL_n(\mathbb{C})$, montrer que $PU_n = PU_n^+$ et $PSL_n(\mathbb{C}) = PL_n(\mathbb{C})$ que $PSL_n(\mathbb{C})$ et PU_n^+ sont localement isomorphes à $SL_n(\mathbb{C})$ et U_n^+ respectivement, et que $PSL_n(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n^2-1} \times PU_n^+$.

e) étudier de même l'image canonique $PO_{n,p}$ de $O_{n,p}$ dans $PL_n(\mathbb{R})$, les images canoniques $PU_{n,p}$ et $PO_n(\mathbb{C})$ de $U_{n,p}$ et de $O_n(\mathbb{C})$ dans $PL_n(\mathbb{C})$. Montrer en particulier que $PO_{n,p}$ a deux composantes connexes si l'un des nombres $p, n-p$ est impair, quatre composantes connexes s'ils sont tous deux pairs, et que $PO_n(\mathbb{C})$ est isomorphe à

- 72 -

$O_n^+(\mathbb{C})$ si n est impair, et a deux composantes connexes si n est pair.

10) Soit $A_{n,p}(\mathbb{R})$ (resp. $A_{n,p}(\mathbb{C})$) le sous-groupe du groupe projectif $PL_n(\mathbb{R})$ (resp. $PL_n(\mathbb{C})$) laissant invariante la variété linéaire à $n-p-1$ dimensions $x_{n-p+1}=x_{n-p+2}=\dots=x_n=0$ de l'espace projectif $P_{n-1}(\mathbb{R})$ (resp. $P_{n-1}(\mathbb{C})$). Les groupes $A_{n,p}(\mathbb{R})$ et $A_{n,n-p}(\mathbb{R})$ (resp. $A_{n,p}(\mathbb{C})$ et $A_{n,n-p}(\mathbb{C})$) sont isomorphes.

a) Le groupe $A_{n,p}(\mathbb{C})$ est connexe et homéomorphe au produit $PL_p(\mathbb{C}) \times (GL_{n-p}(\mathbb{C}) / \Gamma_p) \times \mathbb{R}^{2p(n-p)}$, où Γ_p est le sous-groupe distingué de $GL_{n-p}(\mathbb{C})$ formé des homothéties $x \rightarrow \omega x$ de \mathbb{C}^{n-p} , où ω parcourt l'ensemble des racines p -ièmes de l'unité.

b) Si l'un des nombres $p, n-p$ est impair, $A_{n,p}(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes, et est homéomorphe au produit $SL_p(\mathbb{R}) \times GL_{n-p}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{p(n-p)}$.

c) Si p et $n-p$ sont tous deux pairs, $A_{n,p}(\mathbb{R})$ a quatre composantes connexes ; la composante connexe de l'élément neutre est homéomorphe à $PSL_p(\mathbb{R}) \times (GL_{n-p}^+(\mathbb{R}) / \Gamma_2) \times \mathbb{R}^{p(n-p)}$, où Γ_2 est le sous-groupe distingué de $GL_{n-p}^+(\mathbb{R})$ formé des deux homothéties $x \rightarrow x$ et $x \rightarrow -x$ de \mathbb{R}^{n-p} .

d) En particulier, le groupe affine complexe $A_n(\mathbb{C}) = A_{n+1,1}(\mathbb{C})$ est connexe et homéomorphe à $GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{2n}$; le groupe affine réel $A_n(\mathbb{R}) = A_{n+1,1}(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes et est homéomorphe à $GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$.

e) Montrer de même que le groupe des déplacements euclidiens (propres) dans \mathbb{R}^n est homéomorphe à $O_n^+ \times \mathbb{R}^n$.

f) Le groupe $PL_n(\mathbb{R})$ (resp. $PL_n(\mathbb{C})$) opère transitivement dans l'ensemble des variétés linéaires à $n-p-1$ dimensions de $P_{n-1}(\mathbb{R})$ (resp. $P_{n-1}(\mathbb{C})$). Montrer que l'espace homogène $PL_n(\mathbb{R})/A_{n,p}(\mathbb{R})$

(resp. $PL_n(\mathbb{C})/A_{n,p}(\mathbb{C})$) est homéomorphe à l'espace $P_{n-1,n-p-1}(\mathbb{R})$ (resp. $P_{n-1,n-p-1}(\mathbb{C})$) (§ 5, exerc. 11).

11) a) soit $HO_{n,p}$ le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ qui reproduit la forme quadratique $x_1^2+x_2^2+\dots+x_p^2-x_{p+1}^2-\dots-x_n^2$ à un facteur constant près. Montrer que si $n \neq 2p$, $HO_{n,p}$ est isomorphe au groupe produit $R_+^* \times O_{n,p}$; si $n=2p$, $HO_{n,p}$ contient un sous-groupe ouvert et fermé d'indice 2, isomorphe à $R_+^* \times O_{2p,p}$; $HO_{2p,p}$ a donc huit composantes connexes.

b) Soit $HU_{n,p}$ le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ qui reproduit la forme hermitienne $x_1\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2+\dots+x_p\bar{x}_p-x_{p+1}\bar{x}_{p+1}-\dots-x_n\bar{x}_n$ à un facteur constant près. Montrer de même que, si $n \neq 2p$, $HU_{n,p}$ est isomorphe à $R_+^* \times U_{n,p}$; si $n=2p$, $HU_{n,p}$ contient un sous-groupe ouvert et fermé, d'indice 2, isomorphe à $R_+^* \times U_{2p,p}$, et a deux composantes connexes.

c) Soit $HO_n(\mathbb{C})$ le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ qui reproduit à un facteur constant près la forme quadratique $x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2$. Montrer que $HO_n(\mathbb{C})$ est isomorphe au groupe quotient du produit $\mathbb{C}^* \times O_n(\mathbb{C})$ par un sous-groupe distingué d'ordre 2; il est connexe si n est impair, et a deux composantes connexes si n est pair.

12) a) Le sous-groupe de $PL_n(\mathbb{R})$ laissant invariante la quadrique $x_1^2+x_2^2+\dots+x_p^2-x_{p+1}^2-\dots-x_n^2=0$ dans $P_{n-1}(\mathbb{R})$ est identique à $PO_{n,p}$ si $n \neq 2p$; si $n=2p$, $PO_{n,p}$ en est un sous-groupe ouvert et fermé d'indice 2.

b) Le sous-groupe de $PL_n(\mathbb{C})$ laissant invariante la quadrique $x_1\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2+\dots+x_p\bar{x}_p-x_{p+1}\bar{x}_{p+1}-\dots-x_n\bar{x}_n=0$ dans $P_{n-1}(\mathbb{C})$ est identique à $PU_{n,p}$ si $n \neq 2p$; si $n=2p$, $PU_{n,p}$ en est un sous-groupe ouvert et fermé d'indice 2.

c) Le sous-groupe de $PL_n(\mathbb{C})$ laissant invariante la quadrique $x_1^2+\dots+x_n^2=0$ dans $P_{n-1}(\mathbb{C})$ est identique à $PO_n(\mathbb{C})$.

CHAPITRE VI

LES GROUPES ADDITIFS \mathbb{R}^n .

1. Sous-groupes et groupes quotients de \mathbb{R}^n .

Introduisons d'abord la convention suivante : si G est un groupe topologique, on a défini, au chap.III (§ 2) le groupe produit G^n de n facteurs égaux à G , pour tout entier $n > 0$; dans ce chapitre, nous étendrons cette définition au cas où $n=0$, en convenant que G^0 désignera un groupe réduit à l'élément neutre.

Sur l'ensemble \mathbb{R}^n , nous aurons à considérer, dans ce chapitre, d'une part sa structure de groupe topologique (additif), d'autre part sa structure d'espace vectoriel par rapport au corps \mathbb{R} (chap.V, § 1). Conformément aux définitions données en algèbre (Alg., chap.II), nous appellerons rang d'une partie non vide A de \mathbb{R}^n le nombre de dimensions du sous-espace vectoriel V de \mathbb{R}^n engendré par A (plus petit sous-espace vectoriel contenant A); si A est de rang p , il existe un système libre (par rapport au corps \mathbb{R}) de p points de A formant une base de V . On peut donc dire encore que le rang p de A est le plus grand nombre d'éléments d'une partie finie (x_i) de A formant un système libre c'est-à-dire tel que la relation $\sum_i t_i x_i = 0$, où les t_i sont réels, entraîne $t_i = 0$ pour tout i).

Dans ce qui suit interviendra aussi la notion de système de points de \mathbb{R}^n libre par rapport au corps \mathbb{Q} des nombres rationnels: un tel système est une partie finie (x_i) de \mathbb{R}^n telle que la relation $\sum_i r_i x_i = 0$, où les r_i sont rationnels (ou entiers, ce qui revient au même), entraîne $r_i = 0$ pour tout i . On aura soin de ne pas confondre cette notion et celle de système libre par rapport à \mathbb{R} : tout système libre par rapport à \mathbb{R} est libre

2

par rapport à \mathbb{Q} , mais la réciproque est inexacte (voir Alg., chap. II) lorsque nous parlerons de système libre, sans préciser, il s'agira toujours de système libre par rapport à \mathbb{R} . Il faut donc bien distinguer sur \mathbb{R}^n , la structure d'espace vectoriel par rapport à \mathbb{R} de la structure d'espace vectoriel par rapport à \mathbb{Q} ; en particulier, le sous-espace vectoriel par rapport à \mathbb{Q} engendré par une partie A de \mathbb{R}^n , est l'ensemble U des combinaisons linéaires de points de A , à coefficients rationnels; il est contenu dans le sous-espace vectoriel (par rapport à \mathbb{R}) V engendré par A , mais en est en général distinct, et son nombre de dimensions (par rapport à \mathbb{Q}) est au moins égal au nombre de dimensions de V (par rapport à \mathbb{R}) (et peut d'ailleurs être infini (si A est infini), alors que le nombre de dimensions de V est toujours $\leq n$). On dira que le nombre de dimensions de U est le rang rationnel de A ; il est au moins égal au rang de A défini ci-dessus.

A plus forte raison, on ne confondra par le sous-espace vectoriel V (par rapport à \mathbb{R}) engendré par A , et le sous-groupe additif de \mathbb{R}^n engendré par A , qui est l'ensemble des combinaisons linéaires de points de A à coefficients entiers.

1. Sous-groupes discrets de \mathbb{R}^n .

Le sous-groupe de \mathbb{R}^n engendré par p vecteurs e_{i_k} ($1 \leq k \leq p \leq n$) de la base canonique (chap. V, § 1) de \mathbb{R}^n , est isomorphe au groupe produit \mathbb{Z}^p de p groupes identiques au groupe discret \mathbb{Z} des entiers rationnels; c'est donc un groupe discret. Plus généralement, soit $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ un système libre de p points de \mathbb{R}^n ($1 \leq p \leq n$); il existe une application linéaire biunivoque de \mathbb{R}^n sur lui-même transformant a_i en e_i

($1 \leq i \leq p$) ; donc, le sous-groupe G de \mathbb{R}^n engendré par les a_i est isomorphe au sous-groupe engendré par les e_i ($1 \leq i \leq p$), et c'est par suite un groupe discret de rang p , isomorphe à \mathbb{Z}^p .

La structure du groupe \mathbb{Z}^p , et par suite du groupe G , a été étudiée en Algèbre (Alg., chap.V) : rappelons les principaux résultats de cette étude. Tout système de générateurs de G est formé de p points

$b_i = \sum_{j=1}^p r_{ij} a_j$, où les r_{ij} sont des entiers rationnels tels que le déterminant $\begin{vmatrix} r_{ij} \end{vmatrix}$ soit égal à $+1$ ou à -1 . Tout sous-groupe H de G est naturellement discret et de rang $q \leq p$; en outre (Alg., chap.V), il existe un système de p points b_i ($1 \leq i \leq p$) engendrant G , et un système de q points c_i ($1 \leq i \leq q$) engendrant H , tels que, pour $1 \leq i \leq q$, on ait $c_i = e_i b_i$, où les e_i sont des entiers (les facteurs invariants de H par rapport à G) tels que $e_{i+1} \equiv 0 \pmod{e_i}$. Le groupe quotient G/H est un groupe discret, isomorphe au produit $\mathbb{Z}^{p-q} \times F$, où F est un groupe abélien fini, produit direct de q sous-groupes cycliques d'ordres respectifs e_1, e_2, \dots, e_q .

Nous allons maintenant montrer que les sous-groupes discrets de \mathbb{R}^n que nous venons de considérer sont les seuls.

PROPOSITION 1. Soit $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ un système libre de p points de \mathbb{R}^n , et $b = \sum_{i=1}^p t_i a_i$ une combinaison linéaire à coefficients réels des a_i . Pour que le sous-groupe G de \mathbb{R}^n engendré par les $p+1$ points a_i ($1 \leq i \leq p$) et b soit discret, il faut et il suffit que les nombres t_i soient rationnels.

La condition est suffisante, car si elle est remplie, on peut écrire $t_i = m_i/d$, où d et les m_i sont entiers ; b est donc combinaison linéaire à coefficients entiers des p points $a'_i = \frac{1}{d} a_i$, d'où résulte que G est un sous-groupe du groupe discret engendré par les a'_i , et par suite est lui-même discret.

La condition est nécessaire. Supposons en effet G discret, et pour tout entier $m > 0$, considérons le point $Z_m = \sum_{i=1}^p (mt_i - [mt_i]) a_i$; il appartient à G , et comme $0 \leq mt_i - [mt_i] < 1$, il est contenu dans le paralléloétope fermé P de centre O , construit sur les vecteurs a_i (chap.V, § 1). Mais comme G est discret et P un voisinage compact de O , $G \cap P$ est compact et discret, donc fini; par suite, il existe deux entiers distincts h, k tels que $Z_h = Z_k$, ce qui entraîne $(h-k)t_i = [ht_i] - [kt_i]$, donc que les t_i sont rationnels.

On peut encore exprimer le résultat de la prop.1 de la façon suivante : si q points x_i ($1 \leq i \leq q$) d'un sous-groupe discret G de \mathbb{R}^n forment un système lié par rapport à \mathbb{R} , ils forment aussi un système lié par rapport à \mathbb{Q} : car, en prenant dans (x_i) un système libre maximal, on se ramène au cas où x_1, x_2, \dots, x_{q-1} forment un système libre, x_q étant une combinaison linéaire à coefficients réels de x_1, \dots, x_{q-1} ; comme le groupe engendré par les x_i est contenu dans G , donc discret, la prop.1 s'applique et montre que x_q est combinaison linéaire à coefficients rationnels de x_1, x_2, \dots, x_{q-1} .

On en conclut aussitôt que le rang rationnel d'un sous-groupe discret de \mathbb{R}^n est égal à son rang.

THEOREME 1. Tout sous-groupe discret G de \mathbb{R}^n , de rang égal à p , est engendré par un système libre de p points.

D'après les propriétés des groupes isomorphes à \mathbb{Z}^p rappelées ci-dessus, il suffira de montrer que G est sous-groupe d'un groupe discret engendré par un système libre de p points.

Or, comme G est de rang p , il existe un système libre de p points a_i ($1 \leq i \leq p$) de G tel que tout $x \in G$ soit égal à une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^p t_i a_i$ à coefficients réels des a_i ; G étant discret, la prop. 1 montre que les t_i sont rationnels. D'autre part, la démonstration de la prop. 1 prouve que G est engendré par l'intersection $G \cap P$ de G et du parallélotope fermé P de centre 0 construit sur les a_i ; ces points sont en nombre fini et comme ils sont combinaisons linéaires des a_i à coefficients rationnels, il existe un entier d tel qu'ils soient combinaisons linéaires à coefficients entiers des p points $\frac{1}{d} a_i$; il en résulte que G est un sous-groupe du groupe engendré par ces p points.

La proposition 1 appliquée au cas où les a_i sont les n vecteurs e_i de la base canonique, donne la proposition suivante :

PROPOSITION 2 (Kronecker). Soient $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ n nombres réels.
Afin que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier q et n entiers
 p_i ($1 \leq i \leq n$) tels que

$$|q \theta_i - p_i| \leq \epsilon \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

un au moins des premiers membres de ces inégalités n'étant pas nul,
il faut et il suffit que l'un au moins des θ_i soit irrationnel.

2. Sous-groupes fermés de \mathbb{R}^n .

Nous connaissons déjà deux sortes de sous-groupes fermés de \mathbb{R}^n ; d'une part, les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n (chap. V, § 1, prop. 2) qui sont isomorphes aux groupes \mathbb{R}^p ($p \leq n$); d'autre part, les sous-groupes discrets (chap. III, § 2, prop. 3), qui sont isomorphes aux groupes \mathbb{Z}^q ($q \leq n$) comme nous venons de le voir. Nous allons déterminer la structure d'un sous-groupe fermé quelconque de \mathbb{R}^n en montrant qu'un tel sous-groupe est isomorphe à un produit de la forme $\mathbb{R}^p \times \mathbb{Z}^q$ ($0 \leq p+q \leq n$).

Commençons par le cas où $n=1$; alors :

PROPOSITION 3. Tout sous-groupe fermé du groupe additif \mathbb{R} , distinct de \mathbb{R} et de $\{0\}$, est de la forme $a \cdot \mathbb{Z}$, où $a > 0$.

Cette proposition est une conséquence du th.1 et de la proposition générale suivante :

PROPOSITION 4. Tout sous-groupe fermé non discret G de \mathbb{R}^n contient une droite (passant par 0) .

En effet, soit $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de points de G , tels que $x_p \neq 0$ et $\lim_{p \rightarrow \infty} x_p = 0$; une telle suite existe d'après l'hypothèse. Soit P un cube ouvert de centre 0 . Désignons par k_p le plus grand des entiers $h > 0$ tels que $h x_p \in P$ (comme P est un pavé borné et $x_p \neq 0$, l'existence de k_p résulte de l'axiome d'Archimède). Les points $k_p x_p$ appartiennent à l'ensemble compact \bar{P} ; la suite $(k_p x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ a donc une valeur d'adhérence $a \in \bar{P}$. D'ailleurs, si $\|k_p x_p - a\| \leq \epsilon$, on a $\|(k_p + 1)x_p - a\| \leq \epsilon + \|x_p\|$, et comme $\lim_{p \rightarrow \infty} x_p = 0$, a est aussi valeur d'adhérence de la suite $((k_p + 1)x_p)$, dont les points appartiennent à l'ensemble fermé $\bigcup P$, d'après la définition de k_p ; on a donc $a \in \bar{P} \cap \bigcup P$ (frontière de P) (fig.3), ce qui entraîne $a \neq 0$; en outre, comme G est fermé, $a \in G$. Soit alors t un nombre réel quelconque ; comme $|tk_p - [tk_p]| < 1$, la relation $\|k_p x_p - a\| \leq \epsilon$ entraîne $\|[tk_p]x_p - ta\| \leq |t|\epsilon + \|x_p\|$; comme $\lim_{p \rightarrow \infty} x_p = 0$, ta est valeur d'adhérence de la suite $([tk_p]x_p)$; les points de cette suite appartenant à G , on a $ta \in G$, puisque G est fermé. La proposition est ainsi démontrée.

Passons maintenant au cas général :

THEOREME 2. Soit G un sous-groupe fermé de rang r ($0 \leq r \leq n$) ; soit V le plus grand sous-espace vectoriel contenu dans G , p \leq r son nombre de dimensions. Pour tout sous-espace vectoriel W supplémentaire de V , $W \cap G$ est un groupe disc. et de rang r-p , et G est somme directe de V et de $W \cap G$.

Démontrons d'abord l'existence de V en établissant que V est la réunion des droites (passant par 0) contenues dans G ; il suffit de prouver que si X et Y appartiennent à cette réunion, il en est de même de $uX + vY$ quels que soient u, v réels ; or, si tX et tY appartiennent à G quel que soit $t \in \mathbb{R}$, $t(uX + vY) = tuX + tvY$ appartient aussi au groupe G pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'où la proposition.

Le groupe G est somme directe de V et de $W \cap G$, car pour tout $x \in G$, on a $x = y + z$, avec $y \in V$, $z \in W$; comme $V \subset G$, $z = x - y \in G$ donc $z \in W \cap G$. Reste à prouver que $W \cap G$ est discret ; cela résulte de la prop.4, car $W \cap G$ est fermé, et ne contient aucune droite, en vertu de la définition de V .

D'une manière imagée, on peut dire que G est la réunion d'une infinité dénombrable de variétés linéaires parallèles à V , passant par les points du groupe discret $W \cap G$ (fig.4).

COROLLAIRE 1. Il existe une base $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de \mathbb{R}^n , telle que $a_i \in G$ pour $1 \leq i \leq r$, $a_i \in V$ pour $1 \leq i \leq p$, et que G soit identique à l'ensemble des points $\sum_{i=1}^p t_i a_i + \sum_{i=p+1}^r n_i a_i$, où les t_i prennent toutes les valeurs réelles, les n_i toutes les valeurs entières.

Cela résulte du th.2, et du th.1 appliquée au groupe discret $W \cap G$.

COROLLAIRE 2. Il existe un automorphisme de \mathbb{R}^n qui applique G sur le groupe G' , isomorphe à $\mathbb{R}^p \times \mathbb{Z}^{r-p}$, somme directe du sous-espace vectoriel engendré par e_1, e_2, \dots, e_p , et du sous-groupe additif (discret) engendré par $e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_r$.

C'est une conséquence immédiate du cor. 1 .

3. Sous-groupes conjugués.

Soit G un sous-groupe quelconque (fermé ou non) de R^n . Considérons l'ensemble G^* des points $v=(u_i)$ de R^n tels que, pour tout point $x=(x_i) \in G$, $\langle v, x \rangle = \sum_{i=1}^n u_i x_i$ soit un entier. Il est immédiat que G^* est un sous-groupe de R^n ; on dit que c'est le sous-groupe conjugué de G . Si G et H sont deux sous-groupes de R^n tels que $H \subset G$, il est clair que $G^* \subset H^*$.

PROPOSITION 5. La sous-groupe conjugué G^* d'un sous-groupe G de R^n est fermé, et on a $(\bar{G})^* = G^*$.

En effet, si, pour tout $x \in G$, on pose $f_x(v) = \langle v, x \rangle$, f_x est une forme linéaire, donc continue; comme G^* est l'intersection des ensembles $f_x^{-1}(Z)$ lorsque x parcourt G , et que chacun de ces ensembles est fermé, G^* est fermé. D'autre part, si $v \in G^*$, on a $\langle v, x \rangle \in Z$ pour tout $x \in G$, donc, puisque Z est fermé dans R , $\langle v, y \rangle \in Z$ pour tout point y adhérent à G ; autrement dit, $v \in (\bar{G})^*$; comme d'autre part $(\bar{G})^* \subset G^*$, $(\bar{G})^* = G^*$.

PROPOSITION 6. Soit G un sous-groupe fermé de R^n , somme directe d'un sous-espace vectoriel V à p dimensions et d'un sous-groupe discret de rang q contenu dans un sous-espace vectoriel supplémentaire de V . Le sous-groupe G^* conjugué de G est somme directe, d'un sous-espace vectoriel W à $n-p-q$ dimensions, et d'un sous-groupe discret de rang q , contenu dans un sous-espace vectoriel supplémentaire de W .

En effet, d'après le cor.1 du th.2, il existe une base $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de R^n , telle que G soit identique à l'ensemble des points $x = \sum_{i=1}^p t_i a_i + \sum_{i=p+1}^{p+q} n_i a_i$, où les t_i prennent toutes les valeurs réelles, n_i toutes les valeurs entières. Pour que $\langle v, x \rangle$ soit entier pour tous ces points, il faut et il suffit évidemment que $\langle v, a_i \rangle = 0$ pour $1 \leq i \leq p$, et que $\langle v, a_i \rangle$ soit entier pour $p+1 \leq i \leq p+q$.

- 83 -

si on désigne par $(a_i^1)_{1 \leq i \leq n}$ la base de \mathbb{R}^n telle que $\langle a_i^1, a_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$, $\langle a_i^1, a_i \rangle = 1$ ("base duale" de (a_i) , cf. Ag., chap. II et VIII) et si on pose $v = \sum_{i=1}^n u_i a_i^1$, on voit donc que les points $v \in G^*$ sont caractérisés par les conditions $u_i = 0$ pour $1 \leq i \leq p$, et u_i entier pour $p+1 \leq i \leq p+q$; donc G^* est somme directe du sous-espace vectoriel W ayant pour base les a_i^1 d'indice tel que $p+q+1 \leq i \leq n$, et du sous-groupe discret engendré par les a_i^1 d'indice tel que $p+1 \leq i \leq p+q$.

PROPOSITION 7. Pour tout sous-groupe G de \mathbb{R}^n , $(G^*)^* = \bar{G}$.

D'après la prop. 5, il suffit de démontrer que, pour un sous-groupe fermé G , le conjugué du conjugué de G est identique à G ; c'est ce qui résulte immédiatement du raisonnement de la prop. 6, appliqué à G^* , en remarquant que la "base duale" de (a_i^1) est de nouveau (a_i) .

COROLLAIRE. Pour qu'un point x soit adhérent à un sous-groupe G de \mathbb{R}^n , il faut et il suffit que, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $\gamma \in G$ $\langle v, \gamma \rangle$ soit entier, $\langle v, x \rangle$ soit aussi entier.

Appliquons cette caractérisation des points adhérents à un sous-groupe G , au cas du sous-groupe G engendré par les n vecteurs e_j de la base canonique ($1 \leq j \leq n$), et un nombre quelconque m de points a_i ($1 \leq i \leq m$) de \mathbb{R}^n . Dire que $\langle v, e_j \rangle$ est entier pour $1 \leq j \leq n$, signifie que les n coordonnées de v sont entières; donc:

PROPOSITION 8 (Kronecker). Soient $a_i = (a_{ij})$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) m points de \mathbb{R}^n , $b = (b_j)$ ($1 \leq j \leq n$) un point de \mathbb{R}^n . Afin que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe m entiers q_i ($1 \leq i \leq m$) et n entiers p_j ($1 \leq j \leq n$) tels que

$$\left| q_1 a_{1j} + q_2 a_{2j} + \dots + q_m a_{mj} - p_j - b_j \right| \leq \epsilon$$

pour $1 \leq j \leq n$, il faut et il suffit que, pour toute suite finie (r_j) ($1 \leq j \leq n$) de n entiers telle que les m nombres $\sum_{j=1}^n a_{ij} r_j$ ($1 \leq i \leq m$)

soient tous entiers, le nombre $\sum_{j=1}^n b_j r_j$ soit aussi entier.

COROLLAIRE 1. Afin que, pour tout $x = (x_j) (1 \leq j \leq n)$, et tout $\epsilon > 0$, il existe m entiers $q_i (1 \leq i \leq m)$ et n entiers $p_j (1 \leq j \leq n)$ tels que

$$|q_1 a_{1j} + q_2 a_{2j} + \dots + q_m a_{mj} - p_j - x_j| \leq \epsilon$$

pour $1 \leq j \leq n$, il faut et il suffit qu'il n'existe aucune suite finie (r_j) de n entiers non tous nuls, telle que chacun des m nombres

$\sum_{j=1}^n a_{ij} r_j$ soit entier.

En effet, si G est partout dense, donc $\bar{G} = \mathbb{R}^n$, G^* est réduit à 0 et réciproquement.

En particulier :

COROLLAIRE 2. Soient $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ n nombres réels. Afin que, quels que soient les n nombres réels x_1, x_2, \dots, x_n et le nombre $\epsilon > 0$, il existe un entier q et n entiers p_j tels que

$$|q \theta_j - p_j - x_j| \leq \epsilon$$

pour $1 \leq j \leq n$, il faut et il suffit qu'il n'existe aucune relation de la forme $\sum_{j=1}^n r_j \theta_j = h$, où les r_j sont n entiers non tous nuls,

et h un entier (condition qui entraîne, en particulier, que tous les θ_j , ainsi que les rapports θ_j / θ_k pour $j \neq k$, doivent être irrationnels)

Lorsque la condition de l'énoncé du cor.2 est satisfaite, on peut encore interpréter le résultat de ce corollaire de la façon suivante :

si, pour tout entier $q \in \mathbb{Z}$, x_q est le point de coordonnées $q \theta_j - [q \theta_j] (1 \leq j \leq n)$, l'ensemble des x_q est dense dans le cube produit des intervalles $[0, 1]$ des espaces facteurs de \mathbb{R}^n .

4. Groupes quotients de \mathbb{R}^n .

Cherchons d'abord les groupes quotients séparés de \mathbb{R} ; un tel groupe est de la forme \mathbb{R} / H , où H est un sous-groupe fermé de \mathbb{R} (chap.III, §2, th.2) ; donc d'après la prop.3 .

PROPOSITION 9. Les groupes quotients séparés de \mathbb{R} , non réduits à l'élément neutre, sont les groupes $\mathbb{R}/a\mathbb{Z}$ ($a > 0$).

De même, tout groupe quotient séparé de \mathbb{R}^n est de la forme \mathbb{R}^n/H , où H est un sous-groupe fermé de \mathbb{R}^n . D'après le cor.2 du th.2, il existe un automorphisme f de \mathbb{R}^n transformant H en un sous-groupe H' somme directe d'un sous-espace vectoriel engendré par p des vecteurs e_i de la base canonique, et du groupe discret engendré par q des $n-p$ vecteurs e_i restants ($0 \leq p+q \leq n$). Par passage aux quotients, f donne un isomorphisme \dot{f} de \mathbb{R}^n/H sur \mathbb{R}^n/H' (chap.III, § 2, n°7) : or, \mathbb{R}^n/H' est isomorphe à $\mathbb{R}^{n-p-q} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ (chap.III, § 2, prop.17).
Donc :

PROPOSITION 10. Tout groupe quotient séparé de \mathbb{R}^n est isomorphe à un groupe produit $\mathbb{R}^h \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^k$ ($0 \leq h+k \leq n$).

DEFINITION 1. Le groupe topologique $\mathbb{R}/a\mathbb{Z}$ ($a > 0$) est appelé groupe additif des nombres réels modulo a . L'espace topologique \mathbb{R}/\mathbb{Z} est appelé tore à une dimension et se note \mathbb{T} ; l'espace produit \mathbb{T}^n est appelé tore à n dimensions (par abus de langage, on appelle aussi "tore à n dimensions" le groupe topologique $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$).

La relation $x \equiv y \pmod{a\mathbb{Z}}$ s'écrit plus souvent $x \equiv y \pmod{a}$ ou simplement $x \equiv y \pmod{a}$, et se lit "x et y sont congrus modulo a", elle signifie donc que $x-y$ est un multiple entier de a . Lorsque a est entier, la relation induite sur \mathbb{Z} par cette relation d'équivalence n'est autre que la congruence modulo a (Alg., chap.I), ce qui justifie la notation précédente.

PROPOSITION 11. Le tore \mathbb{T} est un espace compact, connexe et localement connexe, homéomorphe : 1° à l'espace quotient d'un intervalle fermé quelconque $[a, a+1]$ de \mathbb{R} , obtenu en identifiant ses extrémités ; 2° au cercle S_1 et à la droite projective $P_1(\mathbb{R})$.

En effet, tout $x \in \mathbb{R}$ est congru (mod.1) à un nombre de l'intervalle $[a, a+1]$, savoir $x - [x-a]$; donc \mathbb{T} est image de cet intervalle par l'application canonique φ de \mathbb{R} sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} , et par suite est compact (chap.I, § 10, th.1) et connexe (chap.I, § 11, prop.4). D'autre part, deux éléments distincts de l'intervalle $[a, a+1]$ ne peuvent être congrus (mod.1) que si ce sont les extrémités; de la compacité de \mathbb{T} , on conclut donc l'homéomorphie de \mathbb{T} et de l'espace quotient de $[a, a+1]$ obtenu en identifiant ses extrémités (chap.I, § 9, prop.2 et § 10, cor.2 du th.1). Il en résulte immédiatement que le complémentaire d'un point dans \mathbb{T} est homéomorphe à \mathbb{R} ; en vertu du th. d'Alexandroff, \mathbb{T} est homéomorphe à $\tilde{\mathbb{R}}$, à S_1 et à $P_1(\mathbb{R})$ (chap.V, § 2, prop.3 et § 5, prop.4); en particulier, il est localement connexe.

Remarques. 1) Au § 5, nous préciserons la prop.11 en montrant que le groupe topologique \mathcal{U} des nombres complexes de valeur absolue 1 est isomorphe au groupe $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et en définissant sur $\tilde{\mathbb{R}}$ et $P_1(\mathbb{R})$ des structures de groupe topologique isomorphes à celles de \mathbb{T} et de \mathcal{U} .

2) L'homéomorphie de \mathbb{T} et du cercle S_1 entraîne que le tore de révolution de la géométrie classique est homéomorphe à \mathbb{T}^2 (exerc.12); c'est ce qui a amené à donner à l'espace \mathbb{T}^n le nom de tore à n dimensions.

3) On observera que l'application canonique φ de \mathbb{R} sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, restreinte à l'intervalle semi-ouvert $[a, a+1[$, est une application biunivoque et continue de cet intervalle sur \mathbb{T} ; son application réciproque est continue en tout point de \mathbb{T} distinct de $\varphi(a)$, discontinue au point $\varphi(a)$. On identifie parfois \mathbb{T} avec l'intervalle $[a, a+1[$, muni de la topologie image réciproque par

de celle de \mathbb{T} (chap.I, §3) ; cette topologie est bien entendu distincte de la topologie induite sur $[a, a+1[$ par la topologie de \mathbb{R} .

COROLLAIRE. Le tore à n dimensions \mathbb{T}^n est un espace compact, connexe, dont chaque point admet un voisinage homéomorphe à un pavé ouvert de \mathbb{R}^n .

2

Nous verrons plus tard que, pour $n > 1$, cet espace n'est pas homéomorphe à S_n (voir chap.V, §2, exerc.), ni à $P_n(\mathbb{R})$.

D'après la prop.11, si on désigne par C un cube fermé de coté égal à 1 dans \mathbb{R}^n , \mathbb{T}^n est homéomorphe à l'espace quotient de C par la relation d'équivalence : "quel que soit i , $x_i \equiv y_i \pmod{1}$ " entre les points $x=(x_i)$ et $y=(y_i)$ de C . De façon plus imagée, on dit que \mathbb{T}^n provient du cube C par "identification des faces opposées" .

PROPOSITION 12. Le groupe topologique $\mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ est localement isomorphe à \mathbb{R}^n .

En effet, \mathbb{T}^n est isomorphe à $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ (chap.III, §2, prop.17), et \mathbb{Z}^n est un sous-groupe discret de \mathbb{R}^n (chap.III, §2, prop.9).

Il en résulte que le groupe $\mathbb{R}^p \times \mathbb{T}^{n-p}$ est localement isomorphe à \mathbb{R}^n pour $0 \leq p \leq n$; nous verrons au §2 que ce sont les seuls groupes connexes ayant cette propriété.

5. Sous-groupes et groupes quotients de \mathbb{T}^n .

Identifions \mathbb{T}^n et $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, et soit φ l'homomorphisme canonique de \mathbb{R}^n sur $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$; tout sous-groupe de \mathbb{T}^n est de la forme $G = \varphi(H)$, H étant un sous-groupe de \mathbb{R}^n contenant \mathbb{Z}^n (Alg., chap.I), et est isomorphe à H / \mathbb{Z}^n (chap.III, §2, prop.12) ; pour que G soit fermé dans \mathbb{T}^n , il faut et il suffit que H soit fermé dans \mathbb{R}^n (chap.I, §9) . Pour chercher les sous-groupes fermés de \mathbb{T}^n , nous sommes donc ramenés à déterminer les sous-groupes fermés H de \mathbb{R}^n tels que $H \supset \mathbb{Z}^n$;

nous allons utiliser la prop.7 et déterminer d'abord le sous-groupe conjugué H^* d'un tel sous-groupe. Comme Z^n est son propre conjugué, on a $H^* \subset Z^n$; par suite ($n^0 1$), il existe une base $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de R^n engendrant Z^n et un système de p points b_i ($1 \leq i \leq p$) engendrant H^* , tel que $b_i = e_i a_i$ pour $1 \leq i \leq p$, les e_i étant des entiers qui satisfont à $e_{i+1} \equiv 0 \pmod{e_i}$. Soit (a'_i) la "base duale" de (a_i) ; pour que $\sum_{i=1}^n u_i a'_i$ appartienne à $(H^*)^* = H$, il faut et il suffit que $u_i e_i$ soit entier pour $1 \leq i \leq p$; autrement dit, H est somme directe du sous-espace vectoriel V engendré par a'_{p+1}, \dots, a'_n , et du sous-groupe discret K engendré par les p points $\frac{1}{e_i} a'_i$ ($1 \leq i \leq p$); d'autre part, Z^n est évidemment somme directe de $V \cap Z^n$ et de $K \cap Z^n$, puisque les a'_i ($1 \leq i \leq n$) engendrent Z^n . Le groupe quotient H/Z^n est donc isomorphe à $(V/(V \cap Z^n)) \times (K/(K \cap Z^n))$ (chap.III, 2, prop.17): $V/(V \cap Z^n)$ est isomorphe à T^{n-p} , et $K/(K \cap Z^n)$ est un groupe fini, somme directe de p groupes cycliques d'ordres respectifs e_i ($1 \leq i \leq p$) (cf. $n^0 1$).

Avec les mêmes notations, tout groupe quotient séparé de T^n est de la forme $T^n/\varphi(H)$, et est isomorphe à R^n/H (chap.III, §2, prop.11); si W est le sous-espace vectoriel engendré par K , R^n/H est isomorphe à W/K (chap.III, §2, prop.17), c'est-à-dire à T^p . En résumé :

PROPOSITION 13. Tout sous-groupe fermé de T^n est isomorphe à un groupe de la forme $T^h \times F$ ($0 \leq h \leq n$), où F est un groupe abélien fini, somme directe de groupes cycliques en nombres au plus égal à $n-h$. Tout groupe quotient séparé de T^n est isomorphe à un groupe de la forme T^k ($0 \leq k \leq n$).

En particulier, pour $n=1$:

COROLLAIRE. Tout sous-groupe fermé de T , non identique à T , est un groupe cyclique fini. Tout groupe quotient séparé de T , non réduit à l'élément neutre, est isomorphe à T

6. Fonctions périodiques.

DEFINITION 2. On dit qu'une fonction f , définie dans \mathbb{R}^n , et prenant ses valeurs dans un ensemble quelconque E , est périodique, s'il existe un point $a \neq 0$ de \mathbb{R}^n tel que

$$(1) \quad f(x+a) = f(x)$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$. Si f est périodique, tout point $a \in \mathbb{R}^n$ pour lequel la relation (1) est une identité en x , est appelé une période de f .

L'ensemble G des périodes d'une fonction périodique f est un sous-groupe (non réduit à 0 par hypothèse) du groupe additif \mathbb{R}^n . Si G_x désigne l'ensemble des $a \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x+a) = f(x)$ pour un point donné $x \in \mathbb{R}^n$, G est l'intersection des G_x , lorsque x parcourt \mathbb{R}^n .

Envisageons maintenant le cas où f est une application périodique continue de \mathbb{R}^n dans un espace topologique séparé E ; chacun des G_x est alors fermé (chap. I, § 8, cor. de la prop. 6), donc le groupe G des périodes de f est fermé. Soit V le plus grand sous-espace vectoriel contenu dans G ; la fonction f est constante dans toute classe mod. V ; si W désigne un sous-espace vectoriel supplémentaire de V , f est déterminée par sa restriction à W . Autrement dit (W étant un groupe topologique isomorphe à un \mathbb{R}^p), l'étude des fonctions périodiques continues dans un \mathbb{R}^n se ramène à l'étude de celles de ces fonctions f dont le groupe des périodes G est discret; si ce groupe est de rang q , on dit que f est une fonction q fois périodique, et tout système (libre) de q points engendrant G est appelé un système principal de périodes de f .

Si (a_i) et (b_i) sont deux systèmes principaux de périodes de f , on a vu ($n^o 1$) que l'un d'eux se déduit de l'autre par une transformation linéaire à coefficients entiers, de déterminant $+1$ ou -1 .

Soit γ l'application canonique de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^n/G ; à toute application g de \mathbb{R}^n/G dans un ensemble E correspond la fonction $\dot{g}=g \circ \gamma$, qui est une application périodique de \mathbb{R}^n dans E , ayant un groupe de périodes qui contient G ; et réciproquement, toute application de \mathbb{R}^n dans E , admettant un groupe de périodes qui contient G , est de cette forme, puisqu'elle est compatible avec la relation $x \equiv y \pmod{G}$ (Ens.R , § 5, n°7). On définit ainsi une application biunivoque $g \rightarrow \dot{g}$ de l'ensemble des applications de \mathbb{R}^n/G dans E , sur l'ensemble des applications de \mathbb{R}^n dans E , dont le groupe de périodes contient G . Pour que \dot{g} soit continue (lorsque E est un espace topologique), il faut et il suffit que g le soit (chap.I, § 9, th.1).

Exercices. ¶ 1) Soit G un sous-groupe discret de rang p de \mathbb{R}^n , (a_i) ($1 \leq i \leq p$) un système libre de p points de G . D'après le raisonnement du th.1, G est sous-groupe du groupe engendré par les p points $\frac{1}{d} a_i$, où d est un entier convenable. Montrer qu'il existe un système libre de p points $b_i = \sum_{j=1}^p b_{ij} a_j$ de G tel que, pour tout autre système libre de p points $x_i = \sum_{j=1}^p x_{ij} a_j$ de G , on ait $\left| \boxed{x_{ij}} \right| \gg \left| \boxed{b_{ij}} \right| > 0$.

En déduire une démonstration du th.1 indépendante de la théorie des facteurs invariants, en prouvant que les b_i engendrent G (raisonner par l'absurde : si, pour un point $z = \sum_{i=1}^p z_i b_i$, un des z_i n'était pas entier, montrer qu'il existerait un point $u = \sum_{i=1}^p u_i b_i$ du groupe engendré par z et les b_i , tel que $0 < u_i < 1$ pour un indice i , et en conclure une contradiction).

2) Soit G un sous-groupe discret de \mathbb{R}^n ; si G est somme directe de deux sous-groupes, H, K , l'intersection des sous-espaces vectoriels engendrés par H et K se réduit à 0 , et le rang de G est

donc égal à la somme des rangs de H et K (soit $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ un système libre de points de H, $(b_j)_{1 \leq j \leq q}$ un système libre de points de K; montrer qu'il ne peut exister de combinaison linéaire $\sum_{i=1}^p t_i a_i$ à coefficients réels non tous nuls, égale à une combinaison linéaire des b_j , en utilisant la prop. 1).

3) Soit G un sous-groupe discret de \mathbb{R}^n . Pour qu'un sous-groupe H de G soit tel que G soit somme directe de H et d'un autre sous-groupe K, il faut et il suffit que H soit de la forme $V \cap G$, où V est un sous-espace vectoriel (pour voir que la condition est nécessaire, utiliser l'exerc. 2; pour montrer qu'elle est suffisante, remarquer que H est aussi intersection de G et du sous-espace vectoriel engendré par H, et utiliser la théorie des facteurs invariants).

4) Soient G, G' deux sous-groupes fermés de \mathbb{R}^n tels que $G' \subset G$, V et V' les plus grands sous-espaces vectoriels contenus dans G et G' respectivement. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel W supplémentaire de V, tel que G soit somme directe de V et du groupe discret $K = W \cap G$, et G' somme directe de $V \cap G'$ et de $K \cap G' = W \cap G'$ (si U est un sous-espace supplémentaire de V', remarquer, en utilisant l'exerc. 3, que le groupe discret $U \cap G'$ est somme directe de $U \cap V \cap G'$ et d'un groupe discret K', et prendre pour W un sous-espace contenant K'). En déduire que le groupe quotient G/G' est isomorphe à un produit de la forme $\mathbb{R}^p \times \mathbb{Z}^q \times F$, où F est un groupe abélien fini.

5) Soit G un sous-groupe fermé de \mathbb{R}^n , somme directe de deux sous-groupes fermés H et K de \mathbb{R}^n . On désigne par U, V, W les plus grands sous-espaces vectoriels contenus respectivement dans G, H, K.

a) Montrer que U est somme directe de V et W (on a $V \cap W = \{0\}$; d'autre part, si x est un élément de G n'appartenant pas à $V+W$, remarquer que l'ensemble des nombres réels t tels que $tx \in H+K$ est dénombrable, en tenant compte de la structure des groupes H et K).

b) Soit V', W' deux sous-espaces supplémentaires de V et W respectivement ; montrer que la somme (directe) des sous-groupes discrets $V' \cap H$ et $W' \cap K$ est un groupe discret L (remarquer que, d'après a) aucun point de cette somme, autre que 0 , ne peut appartenir à U , et utiliser la décomposition de G en somme directe de U et d'un sous-groupe discret M situé dans un supplémentaire de U).

c) Montrer que l'intersection de U et du sous-espace vectoriel engendré par L se réduit à 0 (G est somme directe de U et de L ; si (a_i) est un système libre engendrant L , montrer qu'aucune combinaison linéaire des a_i à coefficients non nuls ne peut être contenue dans U , en considérant les composantes a_i^j des a_i dans M et montrant qu'ils forment un système libre, à l'aide de la prop.1).

d) Conclure que l'intersection des sous-espaces vectoriels engendrés par H et K se réduit à 0 , et que le rang de G est par suite égal à la somme des rangs de H et K .

¶ 6) Soit G un sous-groupe fermé de \mathbb{R}^n . Pour qu'un sous-groupe fermé H de G soit tel que G soit somme directe de H et d'un autre sous-groupe fermé K , il faut et il suffit que H soit intersection de G et d'un sous-espace vectoriel (utiliser l'exerc.5 pour voir que la condition est nécessaire ; pour montrer qu'elle est suffisante, appliquer convenablement le th.2 à G et à H , et utiliser l'ex.3)).

7) Soit G un groupe non fermé de \mathbb{R}^n , de rang p ; soit V le plus grand sous-espace vectoriel contenu dans \bar{G} ; si V à q dimensions ($q \leq p$)

montrer que G est somme directe de $V \cap G$ et d'un sous-groupe discret de rang $p-q$, contenu dans un sous-espace supplémentaire de V (remarquer que, pour tout $x \in \bar{G}$, $(x+V) \cap G$ est dense par rapport à la variété linéaire $x+V$).

8) Soient $a_i = (a_{ij})$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) m points de \mathbb{R}^n , t un entier > 0 ; pour toute suite (x_j) de n entiers non tous nuls et tels que $0 \leq x_j \leq t$ pour $1 \leq j \leq n$, on considère les m nombres

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right]$$

a) Montrer que, ou bien il existe une suite (x_j) satisfaisant aux conditions précédentes et telle que

$$\left[t^{\frac{n}{m}} f_i(x_1, \dots, x_n) \right] = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m$$

ou bien il existe deux suites distinctes $(x'_j), (x''_j)$ telles que

$$\left[t^{\frac{n}{m}} f_i(x'_1, \dots, x'_n) \right] = \left[t^{\frac{n}{m}} f_i(x''_1, \dots, x''_n) \right] \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m$$

(évaluer le nombre des suites distinctes $(\left[t^{\frac{n}{m}} f_i(x_1, \dots, x_n) \right])_{1 \leq i \leq m}$

et le comparer au nombre des suites (x_j) distinctes ("principe des tiroirs").

b) En déduire qu'il existe n entiers z_j ($1 \leq j \leq n$) non tous nuls, tels que $|z_j| \leq t$ pour $1 \leq j \leq n$, et m entiers y_i ($1 \leq i \leq m$), satisfaisant aux m inégalités

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j - y_i \right| \leq \frac{1}{t^{\frac{n}{m}}} \quad (1 \leq i \leq m).$$

c) Déduire de b) une seconde démonstration de la prop. 2.

¶ 9) Pour tout couple de nombres réels (θ, β) , il existe une infinité de triplets (p, q, r) d'entiers tels que $r > 0$, $|q| \leq \frac{r}{2}$ et $-\frac{1}{r} < \theta q + p - \beta < \frac{1}{r}$ (si m et n sont deux entiers tels que $|n\theta - m| < 1/n$ (exerc. 8)), prendre $r=n$, et choisir p et q de sorte que $pn + qm$ diffère de $n\beta$ de moins de $\frac{1}{2}$).

¶ 10) On appelle suite de Farey d'ordre n (n entier > 0) l'ensemble F_n des nombres rationnels irréductibles p/q tels que $0 < q \leq n$.

- 94 -

Deux points r, r' de F_n sont dits consécutifs si l'intervalle ouvert d'extrémités r et r' ne contient aucun point de F_n .

a) Si $r=p/q$, $r'=p'/q'$ ($r < r'$) sont deux points consécutifs de F_n , on a $p'q - pq' = 1$; s'il existe dans l'intervalle $]r, r'[$ un point p''/q'' de F_{n+1} , on a nécessairement $p'' = p + p'$, $q'' = q + q' = n + 1$; dans le cas contraire, on a $q + q' > n + 1$ (procéder par récurrence sur n , en démontrant d'abord la seconde partie de la proposition : remarquer que, si $p'q - pq' = 1$, pour toute fraction irréductible p''/q'' telle que $p/q < p''/q'' < p'/q'$, on a $p'' = \lambda p + \mu p'$, $q'' = \lambda q + \mu q'$, où λ et μ sont des entiers > 0). Réciproquement, si $r=p/q$ et $r'=p'/q'$ sont deux nombres rationnels tels que $p'q - pq' = 1$, et si n est le plus petit entier tel que r et r' appartiennent à F_n , r et r' sont consécutifs dans F_n .

b) Dédire de a) que, pour tout nombre réel θ et tout entier $n \geq 1$, il existe au moins un nombre rationnel irréductible p/q tel que $1 \leq q \leq n$ et $|\theta - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{(n+1)q}$ (cf. exerc. 8)). Il ne peut exister deux nombres rationnels distincts satisfaisant à ces conditions que si θ est rationnel.

c) Si p/q est un nombre rationnel irréductible, et θ un nombre réel tel que $|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$, θ appartient à l'intervalle ouvert dont les bornes sont les deux termes de la suite de Farey F_q , consécutifs à p/q .

¶ 11) Soient θ un nombre irrationnel, λ un nombre réel tels que $0 \leq \theta < 1$, $0 \leq \lambda < 1$; on pose $x_n = n\theta + \lambda - [n\theta + \lambda]$, $y_n = n\theta - [n\theta]$ pour tout entier $n > 0$. Si α et β sont deux nombres réels tels que $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, on désigne par $\nu(\alpha, \beta; n)$ le nombre des indices p tels que $1 \leq p \leq n$ et $\alpha \leq x_p \leq \beta$.

a) Montrer que $\mathcal{V}(0, \theta; n) = [n\theta + \lambda]$.

b) Plus généralement, on a

$$\mathcal{V}(0, y_m; n) = \sum_{k=0}^{m-1} ([(n-k)\theta + \lambda] - [-k\theta + \lambda]) - n[m\theta]$$

(évaluer la quantité $\mathcal{V}(y_k, y_{k+1}; n)$ si $0 \leq y_k < y_{k+1} < 1$, la quantité $\mathcal{V}(0, y_{k+1}; n) + \mathcal{V}(y_k, 1; n)$ si $0 \leq y_{k+1} < y_k < 1$, et en déduire la formule).

c) Conclure de b) que, quels que soient les nombres réels α, β tels que $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{V}(\alpha, \beta; n)}{n} = \beta - \alpha$$

(approcher α et β par des y_m).

*12) Soit I un cube fermé dans \mathbb{R}^n , de coté 2π ; à tout point $x = (x_i)$ de I , on fait correspondre le point $y = (y_j)$ de \mathbb{R}^{n+1} tel que

$$y_1 = \sin x_1$$

$$y_p = (2^{p-1} + \sum_{k=1}^{p-1} 2^{p-k-1} \cos x_{p-k} \cos x_{p-k+1} \dots \cos x_{p-1}) \sin x_p$$

($2 \leq p \leq n$)

$$y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-1} \cos x_{n-k} \cos x_{n-k+1} \dots \cos x_n.$$

Montrer que l'image de I par cette application est homéomorphe à \mathbb{T}^n (raisonner par récurrence sur n , en observant que y_p est toujours du signe de $\sin x_p$ pour $p \leq n$). Pour $n=2$, la partie de \mathbb{R}^3 ainsi définie est appelée tore de révolution.*

¶13) Soit E le produit $(\mathbb{Q}_p)^n$ de n facteurs identiques au corps des nombres p -adiques \mathbb{Q}_p (chap. III, § 5, exerc. 30), muni de la structure de groupe topologique produit des structures de groupe additif de ses facteurs, et de sa structure d'espace vectoriel à n dimensions sur le corps \mathbb{Q}_p . Si v désigne la valuation p -adique dans \mathbb{Q}_p , on pose $|x|_p = 2^{-v(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$; pour tout $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in E$, on pose $\|x\|_p = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|_p$.

a) Pour qu'une partie A de E soit relativement compacte, il faut et il suffit que $\sup_{x \in A} \|x\|_p < +\infty$ (remarquer que v est une application continue de \mathbb{Q}_p dans \mathbb{Z} muni de la topologie discrète).

b) Si G est un sous-groupe fermé de E, G est un module par rapport à l'anneau \mathbb{Z}_p des entiers p-adiques (remarquer que, si $x \in G$, $nx \in G$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et que \mathbb{Z} est dense dans \mathbb{Z}_p).

c) Si K est un sous-groupe compact de E, il existe un système libre de $m \leq n$ points a_i ($1 \leq i \leq m$) de E, tel que K soit somme directe des m groupes $\mathbb{Z}_p \cdot a_i$ (utiliser a) pour montrer que, si e_i ($1 \leq i \leq n$) sont les vecteurs de la base canonique de E, il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que K soit contenu dans la somme directe des n groupes $\mathbb{Z}_p \cdot p^k e_i$; puis appliquer la théorie des modules sur un anneau principal (Alg., chap.V)).

d) Si G est un sous-groupe fermé non compact de E, G contenant un sous-espace vectoriel à une dimension \mathbb{Q}_p, a (soit C la partie compacte de E formée des points x tels que $\|x\|_p = 1$; montrer que $G \cap C$ contient une suite de points $(x_r)_{r \in \mathbb{N}}$ telle que $p^{-r} x_r \in G$, et prendre pour a une valeur d'adhérence de cette suite).

e) Si G est un sous-groupe fermé de E, V le plus grand sous-espace vectoriel contenu dans G, W un sous-espace supplémentaire quelconque de V, le groupe $W \cap G$ est compact, et G est somme directe de V et de $W \cap G$ (raisonner comme dans le th.2, en utilisant d)).

§ 2. Représentations continues de \mathbb{R}^n et de ses groupes quotients.

1. Représentations continues du groupe \mathbb{R}^m dans le groupe \mathbb{R}^n .

Nous avons vu (chap.V, §1, n°2) que toute application linéaire de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n est une représentation continue du groupe additif \mathbb{R}^m dans le groupe additif \mathbb{R}^n . Réciproquement :

PROPOSITION 1. Toute représentation continue f du groupe additif \mathbb{R}^m dans le groupe additif \mathbb{R}^n est une application linéaire de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n .

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$ et tout entier $p \in \mathbb{Z}$, on a $f(px) = pf(x)$; en remplaçant x par $\frac{1}{p}x$, on en tire $f(\frac{1}{p}x) = \frac{1}{p}f(x)$, si $p \neq 0$, d'où, quels que soient les entiers p et $q \neq 0$, $f(\frac{p}{q}x) = \frac{p}{q}f(x)$; autrement dit, pour tout nombre rationnel r , $f(rx) = rf(x)$. Si maintenant t est un nombre réel quelconque, on a, en vertu de la continuité de f dans \mathbb{R}^m

$$f(tx) = \lim_{r \rightarrow t, r \in \mathbb{Q}} f(rx) = \lim_{r \rightarrow t, r \in \mathbb{Q}} (rf(x)) = \left(\lim_{r \rightarrow t, r \in \mathbb{Q}} r \right) \cdot f(x) = tf(x)$$

d'où la proposition.

Remarque. Si $m=2p$ et $n=2q$ sont pairs, une représentation continue f de \mathbb{R}^{2p} dans \mathbb{R}^{2q} ne sera pas en général une application linéaire de l'espace vectoriel \mathbb{C}^p dans l'espace vectoriel \mathbb{C}^q (sur le corps \mathbb{C} des nombres complexes). Pour qu'elle le soit, il faut et il suffit en outre qu'on ait $f(ix) = if(x)$ quel que soit $x \in \mathbb{C}^p$.

En particulier, pour $m=n=1$:

PROPOSITION 2. Toute représentation continue f du groupe topologique \mathbb{R} dans lui-même est de la forme $x \rightarrow ax$, où $a \in \mathbb{R}$ (autrement dit, est une homothétie du corps \mathbb{R}); c'est un automorphisme du groupe \mathbb{R} si $a \neq 0$.

Le groupe des automorphismes du groupe topologique \mathbb{R} est donc isomorphe au groupe multiplicatif \mathbb{R}^* des nombres réels $\neq 0$.

PROPOSITION 3. Soit G un groupe topologique isomorphe à R ; pour tout a ∈ G , il existe une représentation continue et une seule f_a de dans G , telle que f_a(1)=a ; cette représentation est un isomorphisme de R sur G si a est distinct de l'élément neutre e .

En effet, soit f un isomorphisme de R sur G ; il est immédiat que pour toute représentation continue g de R dans R , f . g est une représentation continue de R dans G , et réciproquement toute représentation continue de R dans G est de cette forme ; la proposition est donc une conséquence immédiate de la prop. 2 .

Lorsqu'on a choisi un isomorphisme f_a (a≠e) de R sur G , l'élément correspondant a est parfois appelé "unité de mesure" dans G (voir Appendice) ; désignons par φ_a l'isomorphisme réciproque de f_a . Soit b un élément quelconque de G ; l'application ξ → f_a(ξ . φ_a(b)) est une représentation continue de R dans G , dont la valeur pour ξ =1 est b ; on a donc identiquement

$$(1) \quad f_b(\xi) = f_a(\xi \cdot \varphi_a(b))$$

formule dite "du changement d'unité" ; lorsque b≠e , elle est équivalente à

$$(2) \quad \varphi_a(x) = \varphi_a(b) \cdot \varphi_b(x) .$$

2. Définition locale d'une représentation continue de Rⁿ dans un groupe topologique.

Etant donné un groupe G et une partie A de G engendrant G , il est clair que, si deux représentations f, g de G dans un groupe G' prennent la même valeur en tout point de A , elles sont égales. Mais les valeurs dans A d'une représentation f de G dans G' ne peuvent en général être prises arbitrairement ; elles doivent évidemment satisfaire à la condition f(xy)=f(x)f(y) pour tout couple (x,y) tel que x ∈ A, y ∈ A, xy ∈ A ,

mais cette condition nécessaire n'est pas suffisante en général.

2 En particulier, un isomorphisme local d'un groupe topologique G à un groupe topologique G' ne peut pas toujours se prolonger en une représentation (continue ou non) de G dans G' (voir n° 4).

Le groupe topologique \mathbb{R}^n jouit à cet égard de la propriété particulière suivante :

PROPOSITION 4. Soit A un parallélotope de \mathbb{R}^n , tel que $0 \in A$; soit f une application continue de A dans un groupe topologique G , telle que $f(x+y)=f(x)f(y)$ pour tout couple de points x, y tels que $x \in A, y \in A, x+y \in A$. Il existe une représentation continue et une seule de \mathbb{R}^n dans G qui prolonge f .

L'unicité du prolongement de f (s'il existe) résulte des remarques qui précèdent, puisque A engendre \mathbb{R}^n ; reste donc à montrer l'existence de ce prolongement.

a) On a $f(0)f(0)=f(0)$, donc $f(0)$ est l'élément neutre e de G . Si $x \in A$ et $-x \in A$, on a $f(x)f(-x)=f(0)=e$, d'où $f(-x)=(f(x))^{-1}$. Si $x \in A$ et $kx \in A$ pour un entier $k > 0$, on a $f(kx)=(f(x))^k$: en effet, on a $hx \in A$ pour tout entier h tel que $1 \leq h \leq k$, et on voit par récurrence que $f(hx)=(f(x))^h$ pour ces valeurs de h .

b) Le sous-groupe G_1 de G , engendré par $f(A)$, est abélien; en effet, soient $x \in A, y \in A$; les points $\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}(x+y)$ appartiennent à A , donc $f(\frac{1}{2}x)$ et $f(\frac{1}{2}y)$ sont permutables, parce que $f(\frac{1}{2}x)f(\frac{1}{2}y)=f(\frac{1}{2}(x+y))=f(\frac{1}{2}(y+x))=f(\frac{1}{2}y)f(\frac{1}{2}x)$; par suite $f(x)=(f(\frac{1}{2}x))^2$ et $f(y)=(f(\frac{1}{2}y))^2$ sont permutables.

c) Soit $a \neq 0$ un point de A , D la droite passant par 0 et a ; nous allons voir qu'on peut prolonger f en une représentation continue de D (considérée comme sous-groupe de \mathbb{R}^n) dans G .

La valeur de $f(ta)$ est définie pour $0 \leq t \leq 1$; pour $t \geq 0$ quelconque, il existe un entier $n > 0$ tel que $t/n \leq 1$ (chap. IV, § 2, th. 1) ; $(f(\frac{t}{n}a))^n$ est indépendant du choix de n satisfaisant à cette condition : en effet, si $t/m \leq 1$, on a $f(\frac{t}{n}a) = (f(\frac{t}{mn}a))^m$, $f(\frac{t}{m}a) = (f(\frac{t}{mn}a))^n$ d'après a), donc $(f(\frac{t}{n}a))^n = (f(\frac{t}{m}a))^m = (f(\frac{t}{mn}a))^{mn}$. On définit donc un prolongement f_1 de f pour les points ta , où t est un nombre ≥ 0 quelconque, en posant $f_1(ta) = (f(\frac{t}{n}a))^n$ pour tout n tel que $t/n \leq 1$; f_1 prend ses valeurs dans le groupe abélien G_1 , et quels que soient $t \geq 0$, $t' \geq 0$, on a $f_1((t+t')a) = f_1(ta)f_1(t'a)$ car, pour n assez grand, $(t+t')/n \leq 1$, donc $(f(\frac{t+t'}{n}a))^n = (f(\frac{t}{n}a))^n (f(\frac{t'}{n}a))^n$ en vertu de la permutabilité de $f(\frac{t}{n}a)$ et $f(\frac{t'}{n}a)$. Posons maintenant $\bar{F}(ta) = f_1(ta)$ pour $t \geq 0$, $\bar{F}(ta) = (f_1(-ta))^{-1}$ pour $t < 0$. Les valeurs prises par \bar{F} sont dans G_1 , donc permutable entre elles, et on a $\bar{F}(-ta) = (\bar{F}(ta))^{-1}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrons que $\bar{F}((t+t')a) = \bar{F}(ta)\bar{F}(t'a)$ quels que soient t et t' réels ; cela résulte de la propriété correspondante pour f_1 , si t et t' sont de même signe ; si $t \geq 0$, $t' = -t'' < 0$, et $t+t' = t-t'' \geq 0$, on a $t = (t+t') + t''$, d'où $\bar{F}(ta) = \bar{F}((t+t')a)\bar{F}(t''a)$, et $\bar{F}((t+t')a) = \bar{F}(ta)(\bar{F}(t''a))^{-1} = \bar{F}(ta)\bar{F}(t'a)$; démonstration analogue dans les autres cas.

Enfin, au point $t=0$, la fonction $\bar{F}(ta)$ a par hypothèse une limite à droite égale à e ; en vertu de $\bar{F}(-ta) = (\bar{F}(ta))^{-1}$, elle a aussi une limite à gauche égale à e ; autrement dit, elle est continue pour $t=0$, et par suite \bar{F} est une représentation continue de D dans G .

d) Soient maintenant a_1, a_2, \dots, a_n n vecteurs contenus dans A , et proportionnels aux vecteurs de base de ce parallélotope. Prolongeons f en une représentation \bar{F} de chacune des droites D_i (passant par 0 et a_i) dans G_1 ; comme \mathbb{R}^n est somme directe des sous-groupes D_i , on définit

une représentation \bar{f} de \mathbb{R}^n dans G_1 en posant, pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i$ ($x_i = t_i a_i \in D_i$), $\bar{f}(x) = \prod_{i=1}^n \bar{f}(x_i)$; \bar{f} est un prolongement de f , puisque, si $x \in A$, toutes les composantes x_i de x appartiennent aussi à A , d'après le choix des a_i ; en outre, \bar{f} est continue dans \mathbb{R}^n , puisqu'elle est continue sur chacune des droites D_i , et que x_i est fonction linéaire (donc continue) de x .

COROLLAIRE 1. Soit V un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n , f une application continue de V dans un groupe topologique G , telle que $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tout couple de points x, y tels que $x \in V, y \in V, x+y \in V$. Il existe une représentation continue et une seule de \mathbb{R}^n dans G , qui coïncide avec f en tous les points d'un voisinage W de 0 .

Il suffit de prendre pour W un pavé ouvert de centre 0 , contenu dans V et de lui appliquer la prop.4.

COROLLAIRE 2. Soit f un isomorphisme local de \mathbb{R}^n à un groupe topologique G ; il existe un homomorphisme et un seul de \mathbb{R}^n sur un sous-groupe ouvert de G , qui coïncide avec f en tous les points d'un voisinage de 0 .

En effet, soit \bar{f} la représentation continue de \mathbb{R}^n dans G qui coïncide avec f en tous les points d'un voisinage de 0 ; $\bar{f}(\mathbb{R}^n)$ contient par hypothèse un voisinage de l'élément neutre de G , donc (chap.III, § 2, prop.4) est un sous-groupe ouvert de G ; en outre, \bar{f} est un homomorphisme de \mathbb{R}^n sur $\bar{f}(\mathbb{R}^n)$, d'après le th.3 du chap.III, § 2.

THÉORÈME 1. Un groupe connexe G , localement isomorphe à \mathbb{R}^n , est isomorphe à un groupe $\mathbb{R}^p \times \mathbb{T}^{n-p}$ ($0 \leq p \leq n$).

En effet, un isomorphisme local convenable f de \mathbb{R}^n à G se prolonge en un homomorphisme de \mathbb{R}^n sur un sous-groupe ouvert de G (cor.2 de la prop.4), donc sur G lui-même, puisque G est connexe. Il s'ensuit que G

est isomorphe à un groupe quotient R^n/H de R^n ; H est discret, sans quoi il existerait des points $x \neq 0$ de H , arbitrairement voisins de 0 et tels que $f(x)=f(0)$, contrairement à l'hypothèse que f est un isomorphisme local. Le théorème est donc une conséquence de la prop.10 du § 1 .

COROLLAIRE. Tout groupe connexe localement isomorphe à R , est isomorphe à R ou à T .

3. Représentations continues de R^m dans T^n .

Soit G un groupe localement isomorphe à R^n , f un isomorphisme local de R^n à G , défini dans un voisinage V de 0 , g l'isomorphisme local de G à R^n , réciproque de f , et défini dans le voisinage f(V) de l'élément neutre de G . Soit h une représentation continue quelconque de R^m dans G ; $V' = h^{-1}(f(V))$ est un voisinage de 0 dans R^m ; l'application $x \rightarrow g(h(x))$, restreinte à V' , est une application continue de V' dans R^n , telle que $g(h(x+y))=g(h(x))+g(h(y))$ pour tout couple (x, y) de points de R^m tels que $x \in V' , y \in V' , x+y \in V'$; donc (cor.1 de la prop.4), cette application coïncide avec une représentation continue u de R^m dans R^n en tous les points d'un voisinage de 0 dans R^m ; u est d'ailleurs une application linéaire de R^m dans R^n , d'après la prop.1. D'autre part, f coïncide avec une représentation continue \bar{f} de R^n dans G en tous les points d'un voisinage de 0 dans R^n . Les deux représentations $x \rightarrow h(x)$ et $x \rightarrow \bar{f}(u(x))$ de R^m dans G coïncident donc en tous les points d'un voisinage de 0 dans R^m ; ce voisinage engendrant R^m , elles sont identiques.

En particulier :

PROPOSITION 5. Toute représentation continue de \mathbb{R}^m dans \mathbb{T}^n est de la forme $x \rightarrow \varphi(u(x))$, où φ est l'application canonique de \mathbb{R}^n sur \mathbb{T}^n , et u une application linéaire de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n .

Il suffit de remarquer que φ (restreint à un voisinage convenable de 0) est un isomorphisme local de \mathbb{R}^n à \mathbb{T}^n (§1, prop.12).

Dans le cas où $m=n=1$, la prop.5 donne la suivante :

PROPOSITION 6. Si φ est l'homomorphisme canonique de \mathbb{R} sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ toute représentation continue de \mathbb{R} dans \mathbb{T} est de la forme $x \rightarrow \varphi(ax)$ où $a \in \mathbb{R}$; c'est un homomorphisme de \mathbb{R} sur \mathbb{T} si $a \neq 0$.

Soit G un groupe topologique isomorphe à \mathbb{T} , et noté multiplicativement. Si f est un isomorphisme de \mathbb{T} sur G , tout homomorphisme de \mathbb{R} sur G est de la forme $\xi \rightarrow f(\varphi(a\xi))$, où a est un nombre réel $\neq 0$, d'après la prop.6 ; il est clair que l'intervalle $]-\frac{1}{2|a|}, +\frac{1}{2|a|}[$ est le plus grand intervalle ouvert symétrique de \mathbb{R} que cet homomorphisme applique biunivoquement dans G . Inversement, les seuls homomorphismes de \mathbb{R} sur G ayant cette propriété sont $\xi \rightarrow f(\varphi(a\xi))$ et $\xi \rightarrow f(\varphi(-a\xi))$. Pour distinguer ces deux homomorphismes, considérons l'élément $u \in G$, image par f de la classe (mod.1) du nombre $1/4$: c'est un des deux éléments de G déterminés par les conditions $u^4=e$, $u^2 \neq e$ (l'autre étant u^{-1}) ; un des deux homomorphismes précédents applique $1/4$ sur u , l'autre l'applique sur u^{-1} . On peut alors énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 7. Soit G un groupe topologique isomorphe à \mathbb{T} ; pour tout nombre réel $\lambda > 0$, il existe un homomorphisme f_λ et un seul de \mathbb{R} sur G tel que : $1^0]-\frac{\lambda}{2}, +\frac{\lambda}{2}[$ soit le plus grand intervalle ouvert symétrique dont l'image par f_λ soit biunivoque ; $f_\lambda(\frac{\lambda}{4})=u$.

Remarque. La condition $g(\frac{\lambda}{4})=u$ ne suffit pas à déterminer l'homomorphisme g de R sur G ; on vérifie aisément que les homomorphismes f_μ qui satisfont à cette condition correspondent aux nombres $\mu = \frac{\lambda}{4k+1}$, où k prend toutes les valeurs entières.

4. Automorphismes de T^n .

Soit H un sous-groupe fermé de R^n , φ l'homomorphisme canonique de R^n sur le groupe quotient R^n/H . Si f est une représentation continue de R^n/H dans un groupe topologique G , $\hat{f}=f \circ \varphi$ est une représentation continue de R^n dans G , périodique, et ayant un groupe de périodes qui contient H ; réciproquement, toute représentation continue périodique de R^n dans G , dont le groupe de périodes contient H , est de cette forme.

Dans le cas où $H=Z^n$, le groupe quotient $R^n/Z^n=T^n$ est compact, donc toute représentation continue f de T^n dans un groupe topologique G est un homomorphisme de T^n dans G si G est séparé (chap.III, § 2, n°7), et $\hat{f}=f \circ \varphi$ est un homomorphisme de R^n dans G ; en outre $f(T^n)=\hat{f}(R^n)$ est un sous-groupe compact de G , isomorphe à un groupe T^p ($0 \leq p \leq n$).

On voit en particulier que la seule représentation continue de T^n dans un groupe R^m est l'application identiquement nulle, puisque $\{0\}$ est le seul sous-groupe compact de R^m . Ceci montre entre autres qu'un isomorphisme local de T^n à R^n ne peut se prolonger en une représentation continue de T^n dans R^n ; il ne peut même se prolonger en aucune représentation (continue ou non) de T^n dans R^n ; en effet, si un tel isomorphisme local f est défini dans un voisinage V de l'élément neutre de T^n , il existe un élément d'ordre fini p (assez grand) contenu dans V (il suffit de prendre la classe (mod. Z^n) du point de R^n dont toutes les coordonnées sont égales à $1/p$) ; l'image de cet élément par une

représentation de \mathbb{T}^n dans \mathbb{R}^n ne peut être que 0, puisque 0 est le seul élément d'ordre fini de \mathbb{R}^n ; il n'existe par suite aucune représentation de \mathbb{T}^n dans \mathbb{R}^n prolongeant f .

Appliquons ce qui précède aux représentations continues de \mathbb{T}^n dans un groupe \mathbb{T}^p ; si f est une telle représentation, φ l'homomorphisme canonique de \mathbb{R}^n sur \mathbb{T}^n , $f \circ \varphi$ est une représentation continue de \mathbb{R}^n dans \mathbb{T}^p ; donc (prop.5), si ψ est l'homomorphisme canonique de \mathbb{R}^p sur \mathbb{T}^p , il existe une application linéaire u de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p telle que $f \circ \varphi = \psi \circ u$. Si $x \in \mathbb{Z}^n$, $f(\varphi(x))$ est l'élément neutre de \mathbb{T}^p , donc on a nécessairement $u(x) \in \mathbb{Z}^p$, autrement dit, il faut que $u(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^p$. Réciproquement, pour toute application linéaire u de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p satisfaisant à cette condition, $\psi \circ u$ est une représentation continue périodique de \mathbb{R}^n dans \mathbb{T}^p , dont le groupe des périodes contient \mathbb{Z}^n ; elle définit donc une représentation continue de \mathbb{T}^n dans \mathbb{T}^p .

Cherchons à quelle condition f est un isomorphisme de \mathbb{T}^n dans \mathbb{T}^p . Il faut d'abord que u soit une application biunivoque de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p ; sinon, le sous-espace vectoriel $u^{-1}(0)$ contiendrait des points $x \neq 0$ arbitrairement voisins de 0, et en un tel point on aurait $f(\varphi(x)) = f(\varphi(0))$ et $\varphi(x) \neq \varphi(0)$, contrairement à l'hypothèse. Cette condition entraîne donc en premier lieu $p \geq n$. L'image $u(\mathbb{Z}^n)$ est alors un sous-groupe discret de rang n du groupe \mathbb{Z}^p ; les facteurs invariants de $u(\mathbb{Z}^n)$ par rapport à \mathbb{Z}^p (§ 1, n° 1, et Alg., chap.V) doivent tous être égaux à un; sinon, il existerait un point $x \in \mathbb{Z}^n$, et un entier $k > 1$ tel que $u(\frac{x}{k}) \in \mathbb{Z}^p$, et $\frac{x}{k} \notin \mathbb{Z}^n$, donc $f(\varphi(\frac{x}{k})) = f(\varphi(0))$, et $\varphi(\frac{x}{k}) \neq \varphi(0)$ contrairement à l'hypothèse. Réciproquement, si cette condition est remplie, $u(\mathbb{R}^n) \cap \mathbb{Z}^p$ est identique à $u(\mathbb{Z}^n)$, et f est un isomorphisme de \mathbb{T}^n sur $u(\mathbb{R}^n)/u(\mathbb{Z}^n)$.

Si on applique ce raisonnement au cas où $p=n$, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 8. Tout isomorphisme du groupe topologique T^n dans lui-même est un automorphisme de T^n , qui s'obtient par passage aux quotients à partir d'une application linéaire u de R^n sur lui-même, qui, restreinte à Z^n , est un automorphisme de ce groupe.

Il revient au même ($\S 1, n^o 1$) de dire que, si $u(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$, les a_{ij} doivent être des entiers tels que le déterminant $\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ soit égal à $+1$ ou à -1 .

En particulier, pour $n=1$:

PROPOSITION 9. Les seuls isomorphismes du groupe topologique T dans lui-même sont l'application identique et la symétrie $x \rightarrow -x$.

Exercices. 1) si G est un groupe topologique localement isomorphe à R^n , la composante connexe H de l'élément neutre de G est isomorphe à un groupe de la forme $R^p \times T^{n-p}$ ($0 \leq p \leq n$), et G/H est discret ; si G est compact, H est isomorphe à T^n , et G/H est fini.

2) Soient ϕ l'application canonique de R^n sur T^n , u une application linéaire de R^m dans R^n . Pour que $\phi \circ u$ soit un homomorphisme de R^m dans T^n , il faut et il suffit que $u(R^m) \cap Z^n$ soit un groupe discret de rang égal au nombre de dimensions de $u(R^m)$ (pour voir que la condition est nécessaire, remarquer que $u(R^m) + Z^n$ doit être un sous-groupe fermé de R^n si $\phi \circ u$ est un homomorphisme).

3) Soit f une représentation continue de R^n dans un groupe topologique séparé G . Si f n'est pas un isomorphisme de R^n dans G , montrer que, pour tout voisinage V de l'élément neutre e de G , $f^{-1}(V)$ n'est pas borné dans R^n (dans le cas contraire, montrer

que f serait une représentation biunivoque de \mathbb{R}^n dans G , et que sa restriction à un voisinage convenable de 0 dans \mathbb{R}^n serait un isomorphisme local de \mathbb{R}^n à $f(\mathbb{R}^n)$; conclure à l'aide du th.3 du chap. III, § 2).

¶ 4) Soit f une représentation continue de \mathbb{R} dans un groupe localement compact G . Montrer que, si f n'est pas un isomorphisme de \mathbb{R} dans G , $f(\mathbb{R})$ est relativement compact dans G (en se bornant au cas où $f(\mathbb{R})$ est partout dense dans G , considérer un voisinage ouvert, symétrique et relativement compact V de l'élément neutre dans G ; montrer d'abord, à l'aide de l'exerc.3, que, pour tout $x \in G$, il existe $t > 0$ tel que $f(t) \in xV$; en déduire qu'il existe un nombre fini de nombres $t_i > 0$ tels que les voisinages $f(t_i).V$ forment un recouvrement de V ; pour tout $x \in G$, soit A_x l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ tels que $f(t) \in xV$; montrer que, si $t \in A_x$, il existe un t_1 tel que $t - t_1 \in A_x$; en déduire que si I est le plus grand intervalle compact d'origine 0 contenant tous les t_i , $I \cap A_x$ n'est pas vide; conclure que $G \subset V.f(I)$ est compact, à l'aide de l'exerc.6 du chap.III, § 1).

5) a) Montrer que toute représentation croissante f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est continue (et par suite de la forme $x \rightarrow ax$) (établir que, si $x_0 \neq 0$, $f(rx_0) = rf(x_0)$ pour tout nombre rationnel r).

b) En déduire que toute représentation f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , bornée inférieurement dans $[0, +\infty[$, est continue (montrer qu'on ne peut avoir $f(x) < 0$ pour $x \geq 0$).

¶ 6) Soit f une application continue strictement croissante de \mathbb{R} sur \mathbb{R} , telle que $0 \leq f(0) < 1$, et $f(x+1) = f(x) + 1$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$ (cf. chap.V, § 2, exerc.). On pose $f_1 = f$, et, pour $n > 1$, on définit par récurrence $f_n = f \circ f_{n-1}$.

a) Montrer que f_n est strictement croissante et continue, et que $f_n(x+1) = f_n(x) + 1$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

b) Si p et n sont deux entiers ($n > 0$) tels que $f_n(0) \gg p$ (resp. $f_n(0) < p$), montrer que, pour tout entier $k > 0$, on a $f_{kn}(0) \gg kp$ (resp. $f_{kn}(0) < kp$); en déduire que $\frac{f_n(0)}{n}$ tend vers une limite $\theta \leq 1$ lorsque n croît indéfiniment (prendre pour θ la borne inférieure des nombres rationnels p/n ($n > 0$) tels que $f_n(0) < p$; on montrera d'abord que cette borne est ≤ 1). Montrer ensuite que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a aussi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x)}{n} = \theta$.

c) Si θ est égal à la fraction irréductible m/n , montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1[$ tel que $f_n(x_0) = x_0 + m$ (raisonner par l'absurde: en supposant $f_n(x) - (x+m) \gg a > 0$ pour $0 \leq x \leq 1$, montrer qu'on en déduit $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{f_p(x)}{p} \gg \frac{m+a}{n}$).

d) On suppose désormais θ irrationnel, et on pose, pour $p \geq 1$, $a_p = p^\theta - [p^\theta]$, $u_p(x) = f_p(x) - [f_p(x)]$ pour tout $x \in [0, 1[$. Montrer que la relation $a_h < a_k$ entraîne $u_h(x) < u_k(x)$ (utiliser la définition de θ comme borne inférieure de l'ensemble des p/n tels que $f_n(x) < p$ et considérer particulièrement les valeurs de h telles que $a_h < \theta$). En déduire que l'ensemble P_x des valeurs d'adhérence de la suite $(u_p(x))$ est parfait (remarquer qu'entre deux points de la suite $(u_p(x))$, il y a une infinité d'autres points de cette suite, donc un point de P_x).

e) On pose, pour $0 \leq x < 1$, $g(x) = \inf a_p$, où p parcourt l'ensemble des indices $p \geq 1$ tels que $u_p(0) \geq x$. Montrer que g est croissante et continue dans $[0, 1[$, et que

$$(1) \quad g(u_1(x)) \equiv g(x) + \theta \pmod{1}.$$

Soit A l'ensemble des points $y \in [0, 1[$ tels que $^{-1}g(y)$ soit un intervalle I_y non réduit à un point ; montrer que, si A n'est pas vide, il est partout dense dans $[0, 1[$ (utiliser (1)). Soit U l'ensemble ouvert, réunion des intérieurs I_y^0 des intervalles compacts I_y pour $y \in A$; montrer que, si U n'est pas vide, il est partout dense dans $[0, 1[$. Montrer que les ensembles parfaits P_x sont tous identiques au complémentaire de U par rapport à $[0, 1]$ (utiliser (1), en distinguant le cas où $x \in U$ et celui où $x \notin U$).

f) On considère inversement une fonction numérique g continue dans $[0, 1]$, telle que $g(0)=0$, $g(1)=1$; et on suppose d'abord que g est strictement croissante. Etant donné un nombre irrationnel θ tel que $0 \leq \theta < 1$, il existe une et une seule fonction f, strictement croissante et continue dans \mathbb{R} , telle que $0 \leq f(0) < 1$, que $f(x+1)=f(x)+1$ quel que soit x, et que, si on pose $u_1(x)=f(x)-[f(x)]$ l'identité (1) soit vérifiée ; montrer que, pour la fonction f ainsi définie, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x)}{n} = \theta$, et que les ensembles parfaits P_x sont tous identiques à $[0, 1]$.

g) De même, soit P un ensemble parfait contenu dans $[0, 1]$, et dont le complémentaire U par rapport à cet intervalle soit partout dense. Etant donné un nombre irrationnel θ tel que $0 \leq \theta < 1$, montrer qu'on peut ranger les intervalles contigus à P en une suite (I_p) telle que la relation $a_h < a_k$ (avec les notations de d) entraîne $x < y$ pour $x \in I_h$ et $y \in I_k$; en déduire qu'il existe une et une seule fonction g continue et croissante dans $[0, 1[$, et telle que $g(x)=a_p$ pour $x \in I_p$. Montrer enfin qu'on peut définir une fonction f, strictement croissante et continue dans \mathbb{R} , telle que $0 \leq f(0) < 1$, que $f(x+1)=f(x)+1$ quel que soit x, et que, si on pose $u_1(x)=f(x)-[f(x)]$.

l'identité (1) soit vérifiée ; mais ici, il y a une infinité de fonctions satisfaisant à ces conditions ; pour chacune d'elles, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x)}{n} = \theta$, et les ensembles parfaits P_x sont tous identiques à P .

§ 3. Caractérisation topologique des groupes R et T .

THEOREME 1 () . Un groupe topologique G dans lequel il existe un voisinage de l'élément neutre homéomorphe à un intervalle ouvert de R est localement isomorphe à R .

Si on convient de dire que deux groupes topologiques G, G' sont localement homéomorphes lorsqu'il existe un voisinage de l'élément neutre de G homéomorphe à un voisinage de l'élément neutre de G' , le th.1 s'énonce encore en disant qu'un groupe G localement homéomorphe à R est localement isomorphe à R .

Scholie. L'intérêt de ce théorème est qu'il permet de conclure d'une propriété purement topologique de G à une propriété de la structure de groupe de G . Il s'agit là d'un phénomène tout à fait particulier au groupe R , et qui n'a pas d'analogue pour les groupes R^n lorsque $n > 1$.

Par exemple, le groupe multiplicatif S_3 des quaternions de norme 1 (chap.V, § 3, n°6) est "localement homéomorphe" à R^3 (chap.V, § 2, prop.4), mais non localement isomorphe à R^3 , car, étant connexe et compact, il serait isomorphe à T^3 (§ 2, th.1), donc commutatif, ce qui est absurde.

Le théorème 1 va être une conséquence de la proposition suivante.

PROPOSITION 1. Soit V un voisinage de 0 dans le sous-espace $R_+ = [0, +\infty[$, et soit $(x,y) \rightarrow x \tau y$ une application continue de $V \times V$ dans R_+ , telle que :

- a) $x \tau (y \tau z) = (x \tau y) \tau z$ lorsque les deux membres sont définis ;
- b) $0 \tau x = x \tau 0 = x$ quel que soit $x \in V$;
- c) quels que soient x, y, z dans V , chacune des relations $x \tau y = x \tau z$, $y \tau x = z \tau x$ entraîne $y = z$.

Dans ces conditions, il existe un voisinage $W \subset V$ de 0 dans R_+ , et un homéomorphisme γ de l'intervalle $[0, 1]$ sur W , tel que $\gamma(x \tau y) = \gamma(x) \tau \gamma(y)$ pour tout couple (x, y) tel que x, y et $x \tau y$ appartiennent à $[0, 1]$.

D'une manière plus imagée, on peut dire que la seule loi de composition $x \tau y$ ayant les propriétés énoncées dans la prop.1, est, à un isomorphisme près, l'addition des nombres réels.

Démonstration de la proposition 1. Nous procéderons en plusieurs étapes :

1) Invariance de l'ordre par les "translations" relatives à la loi τ .

On peut toujours supposer que V est un intervalle fermé $[0, a]$.

Lemme 1. Si x, y, z appartiennent à V , la relation $x \leq y$ entraîne $x \tau z \leq y \tau z$ et $z \tau x \leq z \tau y$.

Il suffit de prouver que $x < y$ entraîne $x \tau z < y \tau z$ et $z \tau x < z \tau y$.

Or, les fonctions numériques $z \rightarrow (x \tau z) - (y \tau z)$ et $z \rightarrow (z \tau x) - (z \tau y)$ sont continues dans $[0, a]$; pour $z=0$, elles sont < 0 par hypothèse ; d'autre part, elles ne peuvent s'annuler dans $[0, a]$, puisqu'il en résulterait $x \tau z = y \tau z$ ou $z \tau x = z \tau y$, c'est-à-dire $x = y$, contrairement à l'hypothèse. D'après le th. de Bolzano (chap.IV, § 6, th.2), ces fonctions sont strictement négatives dans $[0, a]$, ce qui démontre le lemme.

2) L'"axiome d'Archimède" dans V . D'après l'hypothèse, $\frac{2}{\tau} x$ est défini pour tout $x \in V$; par récurrence, on définit, pour un entier $p > 0$, l'élément $\frac{p}{\tau} x$ comme égal à $x \tau (\frac{p-1}{\tau} x)$ lorsque $\frac{p-1}{\tau} x \in V$ et on pose $\frac{0}{\tau} x = 0$ pour tout $x \in V$. On voit par récurrence que, si $x_0 \in V$ est tel que

$\frac{p-1}{\tau} x_0$ existe et soit $< a$, la fonction $\frac{p}{\tau} x$ est définie et continue dans un intervalle ouvert contenant x_0 ; en particulier, comme $\frac{p}{\tau} 0=0$ quel que soit p , la fonction $\frac{p}{\tau} x$ est définie et continue dans un intervalle $\left[0, b_p\right]$ ($b_p > 0$). Si $p=q+r$ (q et r entiers ≥ 0) et si $\frac{p}{\tau} x$ est définie, on a $\frac{p}{\tau} x = \left(\frac{q}{\tau} x\right) \tau \left(\frac{r}{\tau} x\right)$ d'après l'associativité de τ on en déduit que $\frac{kp}{\tau} x = \frac{k}{\tau} \left(\frac{p}{\tau} x\right)$ chaque fois que $\frac{kp}{\tau} x$ est défini.

Si $x > 0$ est tel que $\frac{p}{\tau} x$ soit défini, et si $q < p$, $\frac{q}{\tau} x < \frac{p}{\tau} x$; enfin, si $x < y \leq a$, $p > 0$, et si $\frac{p}{\tau} y$ est défini, il en est de même de $\frac{p}{\tau} x$, et on a $\frac{p}{\tau} x < \frac{p}{\tau} y$ (en effet, si $\frac{p-1}{\tau} x < \frac{p-1}{\tau} y$, on a, d'après le lemme 1, $\frac{p}{\tau} x < \left(\frac{p-1}{\tau} y\right) \tau x < \frac{p}{\tau} y$).

Lemme 2. Si $0 < x < y \leq a$, il existe un entier n tel que $\frac{n}{\tau} x \in V$ et $\frac{n}{\tau} x \leq y < \frac{n+1}{\tau} x$.

Supposons en effet qu'on ait $\frac{p}{\tau} x \leq y$ quel que soit p ; la suite $\left(\frac{p}{\tau} x\right)_{p \geq 1}$ est croissante et amorcée dans \mathbb{R} , elle a donc (chap. IV, § 5, th. 2) une limite $b \leq y$. Comme $b \in V$, $b \tau x$ est défini et on a $b < b \tau x$, puisque $x > 0$; mais $b \tau x = \left(\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{\tau} x\right) \tau x = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p+1}{\tau} x$ d'après la continuité de $u \tau v$ au point (b, x) ; donc $b \tau x = b$, contrairement à ce qui précède.

3) Définition de $\frac{1}{\tau} a$.

Lemme 3. Pour tout entier $p > 0$, il existe un nombre $a_p \in \left[0, a\right]$ tel que l'application $x \rightarrow \frac{p}{\tau} x$ soit un homéomorphisme croissant de $\left[0, a_p\right]$ sur $\left[0, a\right]$; le nombre a_p est l'unique solution de l'équation $\frac{p}{\tau} x = a$.

C'est évident pour $p=1$, avec $a_1 = a$. Supposons le lemme vrai pour p , d'où en particulier $\frac{p}{\tau} a_p = a$. Dans ces conditions, $\frac{p+1}{\tau} x$ est défini, continu et strictement croissant sur $\left[0, a_p\right]$; c'est donc (chap. IV, § 2, th. 5) un homéomorphisme de $\left[0, a_p\right]$ sur un intervalle $\left[0, b\right]$. Puisque $\frac{p+1}{\tau} a_p > \frac{p}{\tau} a_p$, on a $b > a$, donc il existe $a_{p+1} \in \left[0, a_p\right]$ tel que

$\frac{p+1}{T} a_{p+1} = a$. La fonction $\frac{p+1}{T} x$ étant strictement croissante dans l'ensemble où elle est définie, qui est $[0, a_p]$, le lemme est démontré.

On posera $a_p = \frac{1}{T^p} a$.

4) Définition de l'homéomorphisme Ψ . Montrons que, si $0 \leq p \leq q$, ($q > 0$), l'élément $\frac{p}{T} (\frac{1}{T^q} a)$ (qui est défini et $\leq a$ d'après ce qui précède) ne dépend que de p/q . Il suffit de montrer que $\frac{kp}{T} (\frac{1}{T^{kq}} a) = \frac{p}{T} (\frac{1}{T^q} a)$ quel que soit l'entier $k > 0$; or, on a $a = \frac{kq}{T} (\frac{1}{T^{kq}} a) = \frac{q}{T} (\frac{k}{T} (\frac{1}{T^{kq}} a))$; donc (lemme 3) on a $\frac{k}{T} (\frac{1}{T^{kq}} a) = \frac{1}{T^q} a$, d'où $\frac{kp}{T} (\frac{1}{T^{kq}} a) = \frac{p}{T} (\frac{k}{T} (\frac{1}{T^{kq}} a)) = \frac{kp}{T} (\frac{1}{T^{kq}} a)$. Nous poserons $\Psi(p/q) = \frac{p}{T} (\frac{1}{T^q} a)$; Ψ est une application strictement croissante de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ dans V , car si $p/q < p'/q$, on a $p < p'$, d'où $\frac{p}{T} (\frac{1}{T^q} a) < \frac{p'}{T} (\frac{1}{T^q} a)$. Si $p/q, p'/q$ sont des nombres rationnels tels que $\frac{p+p'}{q} \leq 1$, on a $(\frac{p}{T} (\frac{1}{T^q} a)) \tau (\frac{p'}{T} (\frac{1}{T^q} a)) = \frac{p+p'}{T} (\frac{1}{T^q} a)$, autrement dit $\Psi(\frac{p}{q} + \frac{p'}{q}) = \Psi(\frac{p}{q}) \tau \Psi(\frac{p'}{q})$.

Il résulte du lemme 2, en y faisant $y=a$, qu'à tout $x > 0$ correspond un n tel que $\frac{1}{T^n} a \leq x$; autrement dit, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(1/n) = 0$; Ψ étant croissante, il s'ensuit que $\Psi(r)$ tend vers 0 avec le nombre rationnel $r > 0$. L'application $(x, y) \rightarrow x \tau y$ étant continue dans l'ensemble compact $V \times V$, donc uniformément continue, il existe, pour tout $\epsilon > 0$ un $\delta > 0$ tel que $0 \leq y \leq \delta$ entraîne $|x \tau y - x| \leq \epsilon$; soit alors n un entier tel que $0 \leq r' \leq 1/n$ entraîne $\Psi(r') \leq \delta$; la même condition entraîne aussi $|\Psi(r+r') - \Psi(r)| \leq \epsilon$, ce qui prouve l'uniforme continuité de Ψ . Par suite (chap. II, § 3, th. 1) on peut prolonger Ψ en une application continue (qu'on notera encore Ψ) de $[0, 1]$ dans V .

En vertu du principe de prolongement des inégalités (chap. IV, § 5, th. 1) Ψ est croissante dans $[0, 1]$; montrons qu'elle est strictement croissante dans $[0, 1]$: si x, y sont deux nombres de cet intervalle

tels que $x < y$, il existe deux nombres rationnels r, r' tels que $x \leq r < r' \leq y$, donc $\gamma(x) \leq \gamma(r) < \gamma(r') \leq \gamma(y)$; par suite (chap. IV, § 2, th. 5) γ est un homéomorphisme de $[0, 1]$ sur V . D'autre part, si x et y sont tels que $x \tau y \leq 1$, on a, par passage à la limite, $\gamma(x \tau y) = \gamma(x) \tau \gamma(y)$, d'après la continuité de $x \tau y$ dans $V \times V$.

C.Q.F.D.

Démonstration du théorème 1. Soit f un homéomorphisme d'un voisinage ouvert U de l'élément neutre e de G sur un intervalle ouvert de \mathbb{R} ; on peut supposer que $f(e) = 0$. Soit g l'application réciproque de f ; soit I un intervalle qui soit un voisinage de 0 dans $f(U)$, et tel que $g(I) \cdot g(I) \subset U$. Pour $x \in I, y \in I$, on posera $x \tau y = f(g(x)g(y))$. On démontre, comme ci-dessus pour le lemme 1, que $x \leq y$ entraîne $x \tau z \leq y \tau z$ et $z \tau x \leq z \tau y$ lorsque $x \in I, y \in I, z \in I$. En particulier, $y \geq 0$ entraîne $z \leq y \tau z$, d'où $y \tau z \geq 0$ si $y \geq 0$ et $z \geq 0$. En restreignant la loi de composition à $V = I \cap \mathbb{R}_+$, on est donc dans les conditions d'application de la prop. 1 (les propriétés a), b) c) étant conséquences immédiates du fait que G est un groupe). Utilisant les notations de cette proposition, posons $\varphi = g \circ \gamma$; φ est un homéomorphisme de $[0, 1]$ sur $g(W)$, et on a $\varphi(x \tau y) = \varphi(x) \varphi(y)$ si x, y et $x \tau y$ appartiennent à $[0, 1]$; d'après la prop. 4 du § 2, φ se prolonge en une représentation continue $\bar{\varphi}$ de \mathbb{R} dans G ; $\bar{\varphi}$ est en même temps un homéomorphisme de $]0, 1[$ sur un ensemble ouvert dans G ; par suite (chap. III, § 2, th. 3), $\bar{\varphi}$ est un homomorphisme de \mathbb{R} sur un sous-groupe ouvert H de G ; H étant isomorphe à \mathbb{R} ou \mathbb{T} est localement isomorphe à \mathbb{R} , et il en est donc de même de G .

C.Q.F.D.

On déduit de ce théorème et du th.1 du § 2, la caractérisation topologique suivante des groupes \mathbb{R} et \mathbb{T} :

THÉORÈME 2. Un groupe connexe G , localement homéomorphe à \mathbb{R} , est isomorphe à \mathbb{R} ou à \mathbb{T} .

Pour reconnaître si G est isomorphe à \mathbb{R} ou à \mathbb{T} , il suffira de voir si G est compact ou non ; dans le premier cas, il est isomorphe à \mathbb{T} , dans le second à \mathbb{R} .

§ 4. Exponentielles et logarithmes.

1. Définition de a^x et de $\log_a x$.

On a vu au chap.IV (§ 3) que $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$, avec la structure de groupe définie par la multiplication dans \mathbb{R} , et la topologie induite par celle de \mathbb{R} , est un groupe topologique. Tout intervalle ouvert contenu dans \mathbb{R}_+^* et contenant l'unité $+1$ de ce groupe, est un intervalle ouvert dans \mathbb{R} ; le th.1 du § 3 est donc applicable au groupe \mathbb{R}_+^* ; comme en outre ce groupe est connexe et non compact, il est isomorphe à \mathbb{R} . D'après la prop.3 du § 2, pour tout nombre $a > 0$, il existe une représentation continue et une seule f_a de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+^* , telle que $f_a(1)=a$. Quels que soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, on a donc

$$f_a(x+y) = f_a(x)f_a(y) \quad , \quad f_a(-x) = 1/f_a(x)$$

d'où en particulier, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$

$$f_a(n) = a^n .$$

En raison de cette relation, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_a(x) = a^x$; les fonctions a^x (pour toutes les valeurs > 0 de a) sont dites fonctions exponentielles. On a $1^x = 1$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$; pour $a \neq 1$, a^x est un isomorphisme du groupe \mathbb{R} sur le groupe \mathbb{R}_+^* .

Pour $a \neq 1$, l'isomorphisme de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} , réciproque de a^x , s'appelle logarithme de base a , et sa valeur pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ se note $\log_a x$.

On a donc, avec ces notations

$$(1) \quad a^{x+y} = a^x a^y \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, a > 0;$$

$$(2) \quad a^{-x} = 1/a^x \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}, a > 0;$$

$$(3) \quad \log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1 \quad \text{pour } a > 0 \text{ et } \neq 1;$$

$$(4) \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad \text{pour } x > 0, y > 0;$$

$$(5) \quad \log_a(1/x) = -\log_a x \quad \text{pour } x > 0;$$

$$(6) \quad a^{\log_a x} = x \quad \text{pour } x > 0;$$

$$(7) \quad \log_a(a^x) = x \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

Tout isomorphisme de \mathbb{R} sur \mathbb{R}_+^* est une exponentielle; la formule (1) du § 2 s'écrit ici

$$(8) \quad x^y = a^{y \cdot \log_a x} \quad \text{pour } x > 0, y \in \mathbb{R}, a > 0 \text{ et } \neq 1$$

ou encore, en changeant les notations

$$(9) \quad (a^x)^y = a^{xy} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, a > 0.$$

En particulier, pour tout entier $n > 0$, on a $(a^{1/n})^n = a$, ce qui justifie la notation $a^{1/n}$ introduite pour la racine n -ième $\sqrt[n]{a}$, définie au chap. IV, § 3.

De même, la formule (2) du § 2 s'écrit ici

$$(10) \quad \log_a x = \log_a b \cdot \log_b x \quad \text{pour } x > 0$$

(formule dite "du changement de base"); elle est évidemment équivalente à (8) et (9), ou encore, en changeant les notations, à

$$(11) \quad \log_a(x^y) = y \cdot \log_a x \quad \text{pour } x > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}.$$

Cherchons enfin les représentations continues du groupe topologique \mathbb{R}_+^* dans lui-même; si g est une telle représentation, $\log_a(g(a^x))$ est une représentation continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , donc (§ 2, prop. 2), il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\log_a(g(a^x)) = \alpha x$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$;

d'où, en vertu de (9), on tire l'identité $g(x)=x^a$ quel que soit $x > 0$.
On a donc identiquement

$$(12) \quad (xy)^a = x^a y^a \quad \text{quels que soient } x > 0, y > 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

En raison de la formule (4), qui ramène toute multiplication à une addition (seule opération à laquelle soit vraiment adapté le système de numération en usage), les logarithmes ont longtemps été un instrument indispensable pour le calcul numérique (voir la Note historique de ce chapitre, et la partie de ce traité consacrée au Calcul numérique). Lorsqu'on les utilise à cette fin, on choisit la base $a=10$, et il existe des tables donnant les valeurs de la fonction $\log_{10} x$ (avec une certaine approximation). En Analyse, on est conduit à un autre choix de la base a , celle-ci (qu'on note e) étant prise telle qu'on ait $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 1} \frac{\log_a x}{x-1} = 1$ (voir Livre IV).

2. Variation des fonctions a^x et $\log_a x$.

Comme $x \rightarrow a^x$ est un homéomorphisme de \mathbb{R} sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ (lorsque $a \neq 1$, a^x est strictement monotone (chap. IV, § 2, th. 5) ; si $a > 1$, $a^1 = a > 1 = a^0$, donc a^x est strictement croissante ; en outre, \mathbb{R}_+^* n'étant pas borné supérieurement, a^x n'est pas bornée supérieurement dans \mathbb{R} , donc

$$(13) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \quad (a > 1)$$

et, d'après (2)

$$(14) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \quad (a > 1).$$

Au contraire, si $a < 1$, a^x est strictement décroissante dans \mathbb{R} , tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ (fig. 5).

De ces propriétés, et de (12), on déduit que, si $0 < a < b$, on a $a^x < b^x$ pour $x > 0$, $a^x > b^x$ pour $x < 0$; cela revient en effet à constater que $(b/a)^x > 1$ pour $x > 0$, $(b/a)^x < 1$ pour $x < 0$.

La variation de $\log_a x$ dans R_+^* se déduit de celle de a^x dans R ; si $a > 1$, $\log_a x$ est strictement croissante, tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0, vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$; si $a < 1$, $\log_a x$ est strictement décroissante, tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0, vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (fig. 6).

On peut prolonger par continuité la fonction a^x (resp. $\log_a x$), considérée comme prenant ses valeurs dans \bar{R} , à tout \bar{R} (resp. à l'intervalle $[0, +\infty]$ de \bar{R}), en lui donnant aux points $+\infty$ et $-\infty$ (resp. 0 et $+\infty$) ses valeurs limites en ces points.

Plus généralement, la formule (8) montre que la fonction x^y est continue dans le sous-espace $R_+^* \times R$ de \bar{R}^2 , et tend vers une limite lorsque (x, y) tend vers un point (a, b) de \bar{R}^2 adhérent à $R_+^* \times R$, à l'exception des points $(0, 0)$, $(+\infty, 0)$, $(1, +\infty)$, $(1, -\infty)$. On peut encore prolonger par continuité x^y aux points de \bar{R}^2 où sa limite existe; d'après le principe de prolongement des identités (chap. III, § 3, n° 4) les formules (1), (4) et (9) sont encore valables lorsque chacun des deux membres a un sens.

On notera que le prolongement par continuité de x^y ne permet pas de retrouver la formule $0^0 = 1$ qui résultait des conventions faites en Algèbre (Alg., chap. I); il convient d'éviter toute confusion à cet égard.

On remarquera aussi que la définition de l'exponentielle permet de prolonger à R la fonction $n \rightarrow a^n$ définie dans Z , pour tout $a > 0$; mais nous n'obtenons ainsi aucun prolongement

de cette fonction lorsque $a < 0$; un prolongement "naturel" de cette fonction ne pourra être défini qu'avec la théorie des fonctions analytiques.

3. Familles multipliables de nombres > 0 .

L'isomorphie des groupes topologiques R et R_+^* montre aussitôt que, pour qu'une famille (x_n) de nombres réels finis et > 0 soit multipliable (chap. IV, § 7), il faut et il suffit que la famille $(\log_a x_n)$ soit sommable (a étant un nombre quelconque > 0 et $\neq 1$) ; on a en outre

$$(15) \quad \prod_n x_n = a^{\sum_n \log_a x_n}$$

De même, pour qu'un produit infini défini par une suite $(1+u_n)$ de nombres finis et > 0 soit convergent, il faut et il suffit que la série définie par la suite $(\log_a(1+u_n))$ soit convergente, et on a

$$(16) \quad \prod_{n=0}^{\infty} (1+u_n) = a^{\sum_{n=0}^{\infty} \log_a(1+u_n)}$$

L'étude des produits infinis de nombres réels > 0 est donc ramenée à celle des sommes infinies de nombres réels, dont les termes se présentent sous forme de logarithmes ; nous verrons au Livre V comment les sommes de cette nature s'étudient aisément au moyen des propriétés différentielles du logarithme.

Exercices. 1) Soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite finie de nombres ≥ 0 , r et s deux nombres réels tels que $0 < r < s$; montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^s\right)^{1/s} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^r\right)^{1/r}$$

l'égalité n'ayant lieu que si $n-1$ des a_i sont nuls (se ramener au cas où $\sum_{i=1}^n a_i^r = 1$).

2) si $a > 0$ et $a \neq 1$, on a, pour $0 < x < y$

$$\frac{a^x - 1}{x} < \frac{a^y - 1}{y}$$

(le démontrer d'abord pour x entier > 0 et $y=x+1$, puis en déduire la proposition pour x et y rationnels, et passer enfin au cas général).

En déduire que la fonction $\frac{a^x-1}{x}$ (définie pour $x \neq 0$) a une limite quand x tend vers 0, et que la fonction $\frac{\log_a x}{x-1}$ (définie pour $x \neq 1$) a une limite quand x tend vers 1.

3) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n > 0$, $2^n > \frac{n(n+1)}{2}$.
En déduire que, pour $a > 1$ et $a > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^a} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^a} = 0$$

(démontrer d'abord la première de ces relations pour $a=2$ et $a=1$).

§ 5. Mesure des angles ; fonctions trigonométriques.

1. Angles de droites et angles de demi-droites.

Rappelons qu'on a défini en Algèbre (Alg., chap. IX) la notion d'angle de deux droites dans un espace vectoriel à deux dimensions sur un corps commutatif^(*) ; cette notion s'applique en particulier au plan numérique \mathbb{R}^2 (que nous identifierons à \mathbb{C} dans ce qui suit). L'ensemble A_0 des angles de droites est muni d'une structure de groupe abélien, noté additivement ; comme -1 n'est pas un carré dans \mathbb{R} , il résulte de ce qui a été vu en Algèbre (loc.cit.), qu'on peut définir un isomorphisme (dit canonique) du groupe quotient $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^*$ (dont les éléments sont les droites passant par 0, privées du point 0) sur le groupe A_0 ;

(*) On définit, dans l'ensemble des couples (D_1, D_2) de droites passant par l'origine, une relation d'équivalence, en considérant deux couples (D_1, D_2) et (D'_1, D'_2) comme équivalents s'il existe une même similitude directe qui transforme D_1 en D'_1 et D_2 en D'_2 ; l'angle du couple (D_1, D_2) est par définition la classe d'équivalence à laquelle appartient ce couple.

on transportera à A_0 par cet isomorphisme la topologie du groupe quotient $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^*$. Quelles que soient les droites D_1, D_2 passant par 0, l'angle du couple (D_1, D_2) (ou "angle que fait D_2 avec D_1 " qu'on note $\widehat{(D_1, D_2)}$) est toujours défini ; si α_1 est l'élément du groupe A_0 qui correspond à D_1 (privée de 0) par l'isomorphisme canonique précédent, α_2 l'élément de A_0 qui correspond de même à D_2 , on a $\widehat{(D_1, D_2)} = \alpha_2 - \alpha_1$ (en particulier, α_1 n'est autre que l'angle que fait D_1 avec l'axe réel) ; on a $\widehat{(D_0, D_1)} = -\widehat{(D_1, D_2)}$, $\widehat{(D_1, D_2)} + \widehat{(D_2, D_3)} + \widehat{(D_3, D_1)} = 0$. L'angle droit δ_0 est défini dans A_0 par la relation $2\delta_0 = 0$; c'est l'angle que fait l'axe imaginaire avec l'axe réel.

Comme \mathbb{R} est un corps ordonné, on peut aussi définir dans \mathbb{R}^2 l'angle de deux demi-droites quelconques (Alg., chap. IX). L'ensemble A de ces angles est encore muni d'une structure de groupe abélien, noté additivement, et on peut définir un isomorphisme (dit canonique) du groupe quotient $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+^*$ (dont les éléments sont les demi-droites ouvertes d'origine 0) sur le groupe A ; on transportera encore à A par cet isomorphisme la topologie du groupe quotient $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+^*$.

si Δ_1 et Δ_2 sont deux demi-droites d'origine 0, θ_1 et θ_2 les éléments du groupe A qui correspondent respectivement à Δ_1 et Δ_2 (privées du point 0) par l'isomorphisme canonique, l'angle du couple (Δ_1, Δ_2) (qui se note $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$ et s'appelle encore "angle que fait Δ_2 avec Δ_1 ") est égal à $\theta_2 - \theta_1$; on a $\widehat{(\Delta_2, \Delta_1)} = -\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$, $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} + \widehat{(\Delta_2, \Delta_3)} + \widehat{(\Delta_3, \Delta_1)} = 0$. L'angle plat $\bar{\omega}$ est défini dans A par la relation $2\bar{\omega} = 0$; c'est l'angle que fait le demi-axe réel négatif avec le demi-axe réel positif. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle amplitude de z , et on note $\text{Am}(z)$, l'élément du groupe A qui correspond par l'isomorphisme canonique à la classe (mod. \mathbb{R}_+^*) de z dans \mathbb{C}^* ,

c'est-à-dire l'angle que fait la demi-droite d'origine 0 passant par z avec le demi-axe réel positif. L'application $z \rightarrow \text{Am}(z)$ est un homomorphisme du groupe topologique \mathbb{C}^* sur le groupe A ; en particulier

$$\text{Am}(zz') = \text{Am}(z) + \text{Am}(z')$$

$$\text{Am}(z) = \text{Am}(1/z) = -\text{Am}(z)$$

L'angle $\delta = \text{Am}(i)$ est appelé angle droit positif ; c'est une des solutions, dans A , de l'équation $2\theta = \bar{\omega}$, l'autre étant $-\delta = \delta + \bar{\omega}$.

Le groupe $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^*$ est isomorphe au groupe quotient $(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+^*)/(\mathbb{R}^*/\mathbb{R}_+^*)$, (chap. III, § 2, prop. 11) ; le groupe A_0 des angles de droites est donc isomorphe au groupe quotient du groupe A des angles de demi-droites par le sous-groupe de A formé des angles 0 et $\bar{\omega}$; dans l'homomorphisme canonique de A sur A_0 ainsi défini, l'angle α_0 d'une droite avec l'axe réel correspond aux angles α et $\alpha + \bar{\omega}$ que les deux demi-droites opposées contenues dans cette droite font avec le demi-axe réel positif.

2. Tangente d'un angle de droites.

En tant qu'espace topologique, $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^*$ est identique à la droite projective réelle $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ (chap. V, § 5) ; il est donc homéomorphe à l'espace compact $\tilde{\mathbb{R}}$ qu'on obtient en adjoignant un point à l'infini (noté ∞) à \mathbb{R} (chap. V, § 5). On a vu qu'on définit un homéomorphisme de $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^*$ sur $\tilde{\mathbb{R}}$ en faisant correspondre à la droite de paramètres (a, b) le nombre réel b/a si $a \neq 0$, et ∞ si $a = 0$. Si on transporte à $\tilde{\mathbb{R}}$ par cet homéomorphisme la structure de groupe de $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^*$, on définit sur $\tilde{\mathbb{R}}$ une structure de groupe topologique abélien, dans laquelle le composé de deux éléments t_1, t_2 est $\frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 t_2}$ quand t_1 et t_2 appartiennent à \mathbb{R} et sont tels que $1 - t_1 t_2 \neq 0$ (la valeur de ce composé pour les couples (t_1, t_2) qui ne satisfont pas à ces conditions s'obtenant par

prolongement par continuité de la fonction $\frac{t_1+t_2}{1-t_1t_2}$ à $\tilde{\mathbb{R}} \times \tilde{\mathbb{R}}$, et se notant encore de la même manière).

Cela étant, si α est un élément quelconque de A_0 , D la droite qui fait l'angle α avec l'axe réel, l'élément de $\tilde{\mathbb{R}}$ qui correspond à D est appelé tangente de l'angle α et se note $\text{tg } \alpha$; la fonction $\alpha \rightarrow \text{tg } \alpha$ est un isomorphisme du groupe A_0 sur le groupe $\tilde{\mathbb{R}}$; on a en particulier

$$\text{tg } 0=0, \text{tg } \delta_0 = \infty, \text{tg}(-\alpha)=-\text{tg } \alpha, \text{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1-\text{tg } \alpha \text{tg } \beta}$$

On dit encore que $\text{tg } \alpha$ est la pente de la droite D; si a et b sont les paramètres de D, sa pente est égale à b/a ($= \infty$ si $a=0$)

3. Cosinus et sinus d'un angle de demi-droites.

On a vu (chap.V, § 3, prop.1) qu'il existe un isomorphisme du groupe multiplicatif \mathbb{C}^* sur le produit de ses sous-groupes \mathbb{R}_+^* et \mathcal{U} ; cet isomorphisme définit donc un isomorphisme de $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+^*$ sur \mathcal{U} , qui, à toute demi-droite ouverte d'origine 0, fait correspondre le point où elle rencontre \mathcal{U} . En composant cet isomorphisme avec l'isomorphisme canonique de A sur $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+^*$, on obtient un isomorphisme $\theta \rightarrow f(\theta)$ du groupe A sur le groupe \mathcal{U} ; par définition (Alg., chap.IX), $\mathcal{R}(f(\theta))$ se note $\cos \theta$ et s'appelle cosinus de l'angle θ , $\mathcal{I}(f(\theta))$ se note $\sin \theta$ et s'appelle sinus de l'angle θ . Ce sont des fonctions continues dans A, satisfaisant aux relations suivantes

$$\begin{aligned} \cos 0=1, \sin 0=0, \cos \bar{\theta}=-1, \sin \bar{\theta}=0, \cos(-\theta)=\cos \theta, \\ \sin(-\theta)=-\sin \theta, \cos(\theta+\theta')=\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \\ \sin(\theta+\theta')=\sin \theta \cos \theta' + \sin \theta' \cos \theta \\ \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1. \end{aligned}$$

Par définition, on appelle tangente de l'angle $\theta \in A$, et on note $\text{tg } \theta$, l'élément de $\tilde{\mathbb{R}}$ égal à $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ ($= \infty$ si $\cos \theta=0$); si θ_0 est l'angle de droites qui correspond à l'angle de demi-droites θ , on a aussi $\text{tg } \theta_0 = \text{tg } \theta$.

On notera que l'application $z \rightarrow Am(z)$, restreinte à U , est l'isomorphisme réciproque de $\theta \rightarrow f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$; si $Am(z) = \theta$, on a $z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$, expression qui s'appelle la forme trigonométrique du nombre complexe $z \neq 0$.

4. Mesure des angles.

PROPOSITION 1. Les groupes topologiques C^*/R^* et U sont isomorphes.

En effet, l'application $z \rightarrow z/\bar{z}$ est une représentation continue de C^* dans U : elle applique C^* sur U , car, pour tout point $\xi \neq 1$ de U ; on a $\xi = z/\bar{z}$ en prenant $z = 1(1 - \xi)$. Par passage au quotient, elle donne donc une représentation biunivoque et continue de C^*/R^* sur U ; comme C^*/R^* est compact, cette représentation est un isomorphisme.

A l'aide des isomorphismes de C^*/R^* sur A_0 et de U sur A définis ci-dessus (n°s 1 et 3), on déduit de l'isomorphisme précédent un isomorphisme de A_0 sur A qui, à tout angle de droites θ_0 fait correspondre l'angle de demi-droites $2\theta = 2(\theta + \bar{\theta})$, θ et $\theta + \bar{\theta}$ étant les deux angles de demi-droites auxquels correspond θ_0 dans l'homomorphisme canonique de A sur A_0 (fig. 7).

si on compose avec l'isomorphisme ainsi défini l'isomorphisme de \tilde{R} sur C^*/R^* défini au n°2 (et qui, à tout $t \in \tilde{R}$, fait correspondre la droite de pente t), on obtient l'isomorphisme

$$t \rightarrow \frac{1+it}{1-it} \quad \left(\frac{1+it}{1-it} = -1 \text{ si } t = \infty \right)$$

du groupe topologique \tilde{R} sur le groupe topologique U .

On vérifie aussitôt que, si $u = \frac{1+it}{1-it} \neq -1$, le point it est l'intersection de l'axe imaginaire et de la droite passant par les points -1 et u ; autrement dit, l'isomorphisme réciproque du précédent n'est autre que la projection stéréographique de U sur l'axe imaginaire, de centre -1 (fig. 7).

THEOREME 1. Les groupes des angles A et A_0 , et le groupe multiplicatif U des nombres complexes de valeur absolue 1, sont isomorphes au groupe T des nombres réels modulo 1.

En effet, les groupes A et A_0 (respectivement isomorphes à C^*/R_+^* et C^*/R^*) sont isomorphes à U d'après ce qui précède, et ces trois groupes sont isomorphes au groupe \tilde{R} . Or, \tilde{R} est compact, connexe et localement homéomorphe à R ; le th.1 est donc une conséquence de la caractérisation topologique de T donnée au § 4 (th.2).

COROLLAIRE. Le groupe multiplicatif C^* des nombres complexes $\neq 0$ est isomorphe au groupe $R \times T$.

Remarques. 1) On a vu en Algèbre (Alg., chap.IX) que l'isomorphisme entre les structures de groupe (non topologique) de A_0 , C^*/R^* , U et \tilde{R} se généralise pour tout corps K dans lequel -1 n'est pas un carré (et en particulier pour tout corps ordonné); de même, l'isomorphie des structures de groupe de A , C^*/R_+^* et U se généralise pour tout corps ordonné pythagoricien. Par contre, l'isomorphie de tous ces groupes et du groupe additif modulo 1 des éléments du corps ordonné R , est un phénomène tout à fait particulier à ce corps et ne se généralise pas à un corps ordonné pythagoricien quelconque (voir exerc. 3).

2) Il résulte du th.1 que, dans le groupe A (ou le groupe A_0), l'équation $n\theta=a$ (n entier >0) admet n solutions; si on désigne l'une d'elles par $\frac{a}{n}$, toutes ces solutions sont données par la formule $\frac{a + 2k\pi}{n}$ (k entier, $0 \leq k \leq n-1$).

Cette propriété du groupe U entraîne l'existence des racines de toute équation "binôme" $z^n=a$ dans le corps C ; on peut

(en utilisant aussi le fait que \mathbb{C} est localement compact) tirer de là une nouvelle démonstration du th. de d'Alembert-Gauss (exerc. 2).

Donnons-nous un nombre réel $a > 0$. D'après la prop. 7 du § 2, il existe un homomorphisme f_a et un seul du ~~max~~ groupe additif \mathbb{R} sur le groupe multiplicatif U , tel que l'intervalle $]-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}[$ soit le plus grand intervalle ouvert symétrique que cet homomorphisme applique biunivoquement sur son image, et que $f_a(\frac{a}{4})=i$. Nous désignerons par $x \rightarrow e(x)$ l'homomorphisme f_a correspondant à $a=1$; alors, pour tout $a > 0$, l'homomorphisme f_a n'est autre que $x \rightarrow e(\frac{x}{a})$. La fonction $e(x)$ est continue dans \mathbb{R} , et satisfait aux identités

$$(1) \quad |e(x)| = 1$$

$$(2) \quad e(x+y) = e(x) e(y)$$

ainsi qu'aux relations

$$(3) \quad e(0)=1, \quad e(\frac{1}{4})=i, \quad e(\frac{1}{2})=-1, \quad e(\frac{3}{4})=-i, \quad e(1)=1.$$

De (1) et (2) on tire les identités

$$(4) \quad e(-x) = 1 / e(x) = \overline{e(x)}$$

et de (2) et (3) que

$$e(x + \frac{1}{4}) = i e(x), \quad e(x + \frac{1}{2}) = -e(x), \quad e(x + \frac{3}{4}) = -i e(x), \quad e(x+1) = e(x).$$

La fonction $e(x)$ est donc périodique et 1 est période principale de cette fonction.

Tout homomorphisme de \mathbb{R} sur le groupe A des angles de demi-droites s'obtient en composant l'isomorphisme $z \rightarrow Am(z)$ de U sur A et un homomorphisme de \mathbb{R} sur U ; tout homomorphisme de \mathbb{R} sur A est donc de la forme $x \rightarrow Am(e(\frac{x}{a}))$, où $a > 0$; nous poserons $\mathcal{V}(x) = Am(e(\frac{x}{a}))$. Le nombre a étant fixé une fois pour toutes, tout angle θ correspond, par l'homomorphisme $x \rightarrow \mathcal{V}(\frac{x}{a})$, à une classe de nombres réels modulo a (élément de $\mathbb{R}/a\mathbb{Z}$) qu'on appelle la mesure de θ relativement à la base a ;

par abus de langage, tout nombre de cette classe est aussi appelé une mesure de θ ; l'angle $\mathcal{V}_a\left(\frac{x}{a}\right)$ est l'angle de mesure x (relativement à la base a) . Si x est une mesure de θ , x' une mesure de θ' (relativement à la même base), $x+x'$ est une mesure de $\theta+\theta'$, $-x$ une mesure de $-\theta$. On appelle parfois mesure principale d'un angle (relativement à la base a celle de ses mesures qui appartient à l'intervalle $[0, a[$.

En composant avec l'homomorphisme canonique de A sur A_0 , l'homomorphisme $x \rightarrow \mathcal{V}_a\left(\frac{x}{a}\right)$ de \mathbb{R} sur A , on obtient un homomorphisme $x \rightarrow \mathcal{V}_0\left(\frac{x}{a}\right)$ de \mathbb{R} sur A_0 ; tout angle $\theta_0 \in A_0$ correspond, par cet homomorphisme, à une classe de nombres réels mod. $a/2$, qu'on appelle mesure de θ_0 (relativement à la base a) ; par abus de langage, tout nombre de cette classe est aussi appelé une mesure de θ_0 ; l'angle $\mathcal{V}_0\left(\frac{x}{a}\right)$ est l'angle (de droites) de mesure x . Toute mesure de θ_0 est aussi une mesure d'un des deux angles de demi-droites $\theta, \theta+\bar{\omega}$ qui correspondent à θ_0 dans l'homomorphisme canonique de A sur A_0 .

Choix d'une base a . On se borne toujours à considérer des bases $a > 1$. A chaque $a > 1$ correspond un angle de demi-droites $\omega = \mathcal{V}_a\left(\frac{1}{a}\right)$ dont la mesure principale est 1 , et qu'on appelle unité d'angle relative à la base a ; réciproquement, pour tout angle $\omega \neq 0$, il existe un $a > 1$ et un seul tel que $\mathcal{V}_a\left(\frac{1}{a}\right) = \omega$, donc la donnée de l'unité d'angle ω détermine entièrement la base $a > 1$.

Pour le calcul numérique, on prend d'ordinaire $a=360$ ou $a=400$; l'unité d'angle correspondante s'appelle le degré (pour $a=360$) ou le grade (pour $a=400$) .

En Analyse, et dans toutes les parties des mathématiques où on n'a pas en vue le calcul numérique, on utilise la base a définie par la condition

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e\left(\frac{x}{a}\right) - 1}{\frac{x}{a}} = i$$

nombre qu'on désigne par la notation 2π (pour l'existence de ce nombre et le calcul de ses valeurs approchées, voir Livre IV) ; l'unité d'angle correspondante est appelée radian .

Remarque. L'application $x+iy \rightarrow e^x e(y)$ est un homomorphisme du groupe additif \mathbb{C} sur le groupe multiplicatif \mathbb{C}^* , et sa restriction à un voisinage convenable de 0 est un isomorphisme local de \mathbb{C} à \mathbb{C}^* . Par suite (§ 2, n° 3), tout homomorphisme de \mathbb{C} sur \mathbb{C}^* est de la forme $x+iy \rightarrow e^{ax+\beta y} e(\gamma x + \delta y)$ où a, β, γ, δ sont des nombres réels tels que $a\delta - \beta\gamma \neq 0$. On verra au Livre IV qu'il existe un seul de ces homomorphismes, qu'on note $z \rightarrow e^z$, tel que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$; cet homomorphisme restreint à l'axe réel, est identique à e^x (d'où la notation) ; avec cette notation, on a $e(x) = e^{2\pi i x}$.

Une fois choisie une base a , lorsqu'on parle d'un angle (de droites ou de demi-droites), on entend le plus souvent une mesure de cet angle relative à la base a ; cet abus de langage n'a pas d'inconvénient si (comme c'est le cas tant qu'on ne fait pas de calculs numériques), la base a reste fixe dans les raisonnements et si on se souvient que deux nombres réels congrus mod. a (resp. mod. $a/2$) correspondent au même angle de demi-droites (resp. angle de droites).

Par exemple, ce qu'on entendra le plus souvent par amplitude d'un nombre complexe $z \neq 0$, sera une mesure en radians de cet angle, fixée par des conventions qui dépendront de la question étudiée ; une fois ces conventions faites, on notera encore $\text{Am}(z)$ la mesure de l'amplitude ainsi choisie.

5. Fonctions trigonométriques.

Si on compose les fonctions $\cos \theta$ et $\sin \theta$ (définies dans A) avec l'homomorphisme $x \rightarrow \mathcal{J}(\frac{x}{a})$ de \mathbb{R} sur A, les fonctions $\cos \mathcal{J}(\frac{x}{a})$ et $\sin \mathcal{J}(\frac{x}{a})$ ainsi obtenues s'appellent respectivement cosinus et sinus du nombre x , relatifs à la base a , et se notent $\cos_a x$ et $\sin_a x$. L'application $x \rightarrow \cos_a x + i \sin_a x$ est composée de $\theta \rightarrow \cos \theta + i \sin \theta$ et de $x \rightarrow \mathcal{J}(\frac{x}{a})$ d'où, en vertu de la définition de $\cos \theta$ et $\sin \theta$ (n^0_3) l'identité

$$(5) \quad e(\frac{x}{a}) = \cos_a x + i \sin_a x$$

qui équivaut à

$$\cos_a x = \mathcal{R}(e(\frac{x}{a})) \quad , \quad \sin_a x = \mathcal{I}(e(\frac{x}{a}))$$

et aussi, d'après (4), à

$$\cos_a x = \frac{1}{2}(e(\frac{x}{a}) + e(-\frac{x}{a})) \quad , \quad \sin_a x = \frac{1}{2i}(e(\frac{x}{a}) - e(-\frac{x}{a})) \quad .$$

On en conclut les identités

$$(6) \quad \cos_b x = \cos_a (\frac{ax}{b}) \quad , \quad \sin_b x = \sin_a (\frac{ax}{b})$$

Les seules fonctions trigonométriques qui interviennent, dans toutes les parties des mathématiques où on n'a pas en vue le calcul numérique, sont celles relatives à la base $a=2\pi$ dont il a été question plus haut, fonctions qu'on note simplement $\cos x$, $\sin x$, au lieu de $\cos_{2\pi} x$ $\sin_{2\pi} x$. Pour le calcul numérique, il existe des tables des fonctions trigonométriques correspondant aux bases $a=360$ et $a=400$; les formules (6) permettent d'ailleurs d'en déduire les valeurs des fonctions trigonométriques relatives à une autre base quelconque.

Les relations rappelées plus haut entre cosinus et sinus d'angles donnent évidemment les mêmes relations entre cosinus et sinus des nombres qui mesurent ces angles; en particulier, on a

$$\cos_a(x+y) = \cos_a x \cos_a y - \sin_a x \sin_a y$$

$$\sin_a(x+y) = \sin_a x \cos_a y + \sin_a y \cos_a x$$

$$\cos_a(-x) = \cos_a x, \quad \sin_a(-x) = -\sin_a x$$

$$\cos_a^2 x + \sin_a^2 x = 1.$$

Si on compose la fonction $\text{tg } \theta_0$ avec l'homomorphisme $x \rightarrow \mathcal{V}_0\left(\frac{x}{a}\right)$ de \mathbb{R} sur A_0 , la fonction $\text{tg } \mathcal{V}_0\left(\frac{x}{a}\right)$ ainsi obtenue s'appelle tangente du nombre x , relative à la base a , et se note $\text{tg}_a x$; on a $\text{tg}_a x = \frac{\sin_a x}{\cos_a x}$ ($\text{tg}_a x = \infty$ si $\cos_a x = 0$). La fonction $1/\text{tg}_a x$ s'appelle cotangente de x et se note $\text{cotg}_a x$.

On écrit aussi $\text{tg } x$ et $\text{cotg } x$ au lieu de $\text{tg}_{2\pi} x$ et $\text{cotg}_{2\pi} x$.

Les fonctions $\cos_a x$ et $\sin_a x$ sont continues dans \mathbb{R} , et périodiques de période a ; a est d'ailleurs période principale de ces fonctions; en effet, la relation $\cos_a x = \cos_a y$ entraîne $\sin_a x = \sin_a y$ ou $\sin_a x = -\sin_a y$, c'est-à-dire $e\left(\frac{x}{a}\right) = e\left(\frac{y}{a}\right)$ ou $e\left(\frac{x}{a}\right) = e\left(-\frac{y}{a}\right)$, donc $x \equiv y \pmod{a}$ ou $x \equiv -y \pmod{a}$; on voit de même que $\sin_a x = \sin_a y$ est équivalente à $x \equiv y \pmod{a}$ ou $x+y \equiv \frac{a}{2} \pmod{a}$.

Les fonctions $\cos_a x$ et $\sin_a x$ appliquent \mathbb{R} sur l'intervalle $[-1, +1]$, car les projections de U sur \mathbb{R} sont des ensembles connexes contenus dans cet intervalle et en contenant les extrémités.

Il résulte de ces remarques que la fonction $\cos_a x$, restreinte à l'intervalle $\left[0, \frac{a}{2}\right]$, applique biunivoquement cet intervalle sur $[-1, +1]$; comme $\cos_a 0 = 1$, $\cos_a(a/2) = -1$, $\cos_a x$ est strictement décroissante dans $\left[0, \frac{a}{2}\right]$ (chap. IV, § 2, th. 5); elle s'annule pour $x = a/4$, est positive pour $0 \leq x \leq a/4$, négative pour $a/4 \leq x \leq a/2$; comme $\cos_a x = \cos_a(-x)$, on en déduit la variation de $\cos_a x$ dans l'intervalle $\left[-\frac{a}{2}, 0\right]$, puis dans tout \mathbb{R} par périodicité (fig. 8). Comme $\sin_a x = -\cos_a\left(x + \frac{a}{4}\right)$, on en déduit sans peine la variation de $\sin_a x$ dans \mathbb{R} (fig. 8).

La fonction $tg_a x$ est une application continue de \mathbb{R} sur $\tilde{\mathbb{R}}$; elle prend la valeur ∞ pour les valeurs $\frac{a}{4} + k \frac{a}{2}$ (k entier quelconque). Comme elle admet pour période $a/2$, $a/2$ en est une période principale. Dans l'intervalle $\left[0, \frac{a}{4}\right[$, $\sin_a x$ croît de 0 à 1, $\cos_a x$ décroît de 1 à 0, donc $tg_a x$ est strictement croissante, et applique $\left[0, \frac{a}{4}\right[$ sur $\left[0, +\infty\right[$; on en conclut que $tg_a x$ est strictement croissante dans $\left]-\frac{a}{4}, +\frac{a}{4}\right[$, et est un homéomorphisme de cet intervalle sur \mathbb{R} (fig. 9).

6. Secteurs angulaires.

Étant données deux demi-droites distinctes D_1, D_2 d'origine 0, soit x la mesure principale de l'angle $\widehat{(D_1, D_2)}$ (relatif à une base a choisie une fois pour toutes). L'ensemble des demi-droites D telles que la mesure principale y de l'angle $\widehat{(D_1, D)}$ satisfasse à $0 \leq y \leq x$ est identique au secteur angulaire S d'origine D_1 et d'extrémité D_2 , défini en Algèbre (Alg., chap.IX).

En effet, par une rotation, on peut toujours se ramener au cas où l'arc (Alg., chap.IX) du cercle U ayant comme origine le point M_1 où D_1 coupe U , comme extrémité le point M_2 où D_2 coupe U , ne contient pas le point -1 (fig. 10). Si α et β sont les angles que font D_1 et D_2 respectivement avec le demi-axe réel positif, le secteur angulaire S n'est autre alors (Alg., chap.IX) que l'ensemble des demi-droites D faisant avec le demi-axe réel positif un angle θ tel que $tg \frac{\alpha}{2} \leq tg \frac{\theta}{2} \leq tg \frac{\beta}{2}$. Or, si u, v, t sont les mesures de α, β, θ respectivement, contenues dans l'intervalle $\left]-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}\right[$, ces inégalités équivalent à $tg_a \frac{u}{2} \leq tg_a \frac{t}{2} \leq tg_a \frac{v}{2}$, et comme $tg_a x$ est une fonction croissante dans $\left]-\frac{a}{4}, +\frac{a}{4}\right[$, elles équivalent aussi à $u \leq t \leq v$, ou à $0 \leq t-u \leq v-u$; comme $x=v-u, y=t-u$, la proposition est démontrée.

Un secteur angulaire est un ensemble fermé dans \mathbb{R}^2 . L'angle (D_1, D_2) , de mesure x , s'appelle l'ouverture du secteur S ; S est dit saillant si $x < a/2$, plat (ou demi-plan fermé) si $x = a/2$, rentrant si $x > a/2$; un secteur angulaire saillant est dit aigu si $x < a/4$, droit (ou quadrant) si $x = a/4$, obtus si $x > a/4$. La bissectrice du secteur S n'est autre que la demi-droite D faisant avec D_1 un angle $y = x/2$.

Deux demi-droites distinctes D_1, D_2 définissent deux secteurs angulaires; celui d'origine D_1 et d'extrémité D_2 , et celui d'origine D_2 et d'extrémité D_1 ; ces deux secteurs sont dits opposés; leur réunion est le plan numérique \mathbb{R}^2 , leur intersection est la réunion de D_1 et D_2 .

7. Angles dans l'espace \mathbb{R}^n ($n > 2$).

La notion d'angle de deux demi-droites dans un espace à n dimensions ($n > 2$) a été également définie en Algèbre^(*) (Alg., chap. IX); si (D_1, D_2) est un couple de demi-droites de \mathbb{R}^n , d'origine O , l'angle de ce couple se note encore $\widehat{(D_1, D_2)}$, mais on a ici $\widehat{(D_1, D_2)} = \widehat{(D_2, D_1)}$. En outre, (chap. V, § 2, n° 1), il existe toujours un déplacement transformant un plan quelconque en un plan donné, d'où résulte que l'ensemble des angles de demi-droites dans \mathbb{R}^n est en correspondance biunivoque avec l'ensemble quotient obtenu en identifiant les angles opposés dans l'ensemble A des angles de demi-droites dans \mathbb{R}^2 ; cet ensemble quotient est appelé l'ensemble des angles non orientés de demi-droites.

(*) On considère encore deux couples (D_1, D_2) , (D'_1, D'_2) de demi-droites issues de l'origine comme équivalents s'il existe une similitude directe qui transforme D_1 en D'_1 et D_2 en D'_2 ; l'angle du couple (D_1, D_2) est par définition la classe d'équivalence à laquelle appartient ce couple.

- 133 -

A tout angle $\alpha = \widehat{(D_1, D_2)}$ dans \mathbb{R}^n correspondent donc deux angles θ , $-\theta$ dans A ; comme $\cos(-\theta) = \cos \theta$, on peut définir $\cos \alpha$ comme égal à $\cos \theta$; si a et b sont des paramètres vectoriels de D_1 et D_2 respectivement,

$$\cos \alpha = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}$$

La relation $\cos \alpha = \cos \alpha'$ entre angles non orientés α, α' , est donc équivalente à $\alpha = \alpha'$.

Toute mesure (relative à une base a) de l'un des deux angles θ , $-\theta$, est encore appelée une mesure de α , relative à la base a ; si x est une de ces mesures, toutes les autres sont de l'une des deux formes $x + k\alpha$, $-x + k\alpha$ (k entier rationnel quelconque).

Exercices. 1) Soit a un nombre complexe $\neq 0$, n un entier > 0 ; pour tout nombre positif r tel que $r^n \leq |a|$, montrer qu'il existe z tel que $|z| = r$ et $|az^n| = a - r^n$. En déduire que si f est un polynôme à coefficients complexes de degré > 0 , on ne peut avoir

$$|f(z_0)| \leq |f(z)| \text{ pour tous les points d'un voisinage de } z_0 \text{ que si } f(z_0) = 0.$$

¶ 2) Montrer que, pour tout polynôme f à coefficients complexes non identiquement nul, il existe un nombre $r > 0$ tel que, pour $|z| \geq r$, $f(z) \neq 0$. En déduire, à l'aide de l'exerc. 1 et du th. de Weierstrass (chap. IV, § 6, th. 1) que \mathbb{C} est un corps algébriquement stable (considérer la fonction $|f|$ dans l'ensemble compact des points z tels que $|z| \leq r$).

¶ 3) Soit K le plus petit sous-corps pythagoricien de \mathbb{R} contenant \mathbb{Q} , K' le corps obtenu par adjonction de i à K , \mathcal{G} le groupe multiplicatif des éléments de K' de norme 1 (sous-groupe de U); montrer que \mathcal{G} n'est pas isomorphe au groupe additif des nombres de K modulo 1

(remarquer que, dans ce dernier groupe, il existe des éléments d'ordre premier p quelconque ; en prenant p tel que $p-1$ ne soit pas une puissance de 2, montrer qu'un élément $z \in G$ ne peut satisfaire à l'équation $(z^p-1)/(z-1)=0$, sans quoi, le corps obtenu par adjonction de z à Q serait contenu dans K' , ce qui est impossible, le degré par rapport à Q de tout élément de K' étant une puissance de 2).

¶ 4) Soit $f(x)=a_0+a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$ un "polynome trigonométrique" à coefficients réels ; si on pose $z = e(\frac{x}{2\pi})$, on a $f(x) = g(z)/z^n$, où $g(z)=u_0+u_1z+\dots+u_{2n}z^{2n}$ est tel que $\bar{u}_k=u_{2n-k}$ pour $0 \leq k \leq 2n$.

a) Montrer que si, pour tout $x \in R$, $f(x) > 0$, il existe un polynome $h(z)=c_0+c_1z+\dots+c_nz^n$ ayant toutes ses racines dans le cercle $|z| \leq 1$, et tel que, en posant $z = e(\frac{x}{2\pi})$ on ait identiquement $f(x)=|h(z)|^2$ (décomposer en facteurs le polynome $g(z)$).

Etendre ce résultat au cas où $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in R$ (considérer le polynome trigonométrique $f(x)+\epsilon$, où $\epsilon > 0$, et faire tendre ϵ vers 0, en utilisant la compacité de l'ensemble $|z| \leq 1$).

b) En déduire que, si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in R$, et si $a_0=1$, on a

$$\begin{aligned}
 |f(x)| &\leq n+1 && \text{quel que soit } x \in R, \\
 a_k^2 + b_k^2 &\leq 4 && \text{pour } 1 \leq k \leq n-1 \\
 a_n^2 + b_n^2 &\leq 1.
 \end{aligned}$$

c) Montrer que, si $a_0=0$, on ne peut avoir $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in R$ que si $f(x)$ est identiquement nul.

APPENDICEMesure des grandeurs et caractérisations du groupe additif \mathbb{R} .

Le théorème fondamental sur les groupes connexes localement homéomorphes à \mathbb{R} (§ 3, th.2) montre en particulier que tout groupe topologique homéomorphe au groupe \mathbb{R} lui est nécessairement isomorphe. On peut donc penser qu'une structure de groupe topologique isomorphe à celle de \mathbb{R} peut être définie sur un ensemble G par des axiomes ne faisant intervenir aucun ensemble auxiliaire (alors que, si on veut utiliser la définition de \mathbb{R} donnée au chap.IV, § 1, il faut introduire Q comme ensemble auxiliaire). Une telle caractérisation de la structure de groupe topologique de \mathbb{R} est en effet possible, mais comme elle exige d'assez longs développements, et est plus curieuse qu'utile, nous ne la donnerons pas dans le texte de cet Appendice (voir exerc. 3).

Par contre, nous allons montrer que la structure de groupe totalement ordonné de \mathbb{R} peut être caractérisée par des axiomes ne faisant intervenir aucun ensemble auxiliaire. Cette caractérisation peut être rattachée à une question plus générale, dont l'origine est le problème fondamental de la mesure des grandeurs dans les sciences expérimentales.

Sous une forme schématique, ce problème est le suivant : les méthodes expérimentales, appliquées à certains phénomènes, permettent de leur faire correspondre (d'une manière tout idéale) un ensemble E , dont les éléments sont qualifiés de grandeurs (d'une certaine espèce, dépendant des phénomènes étudiés), et dans lequel sont définies : 1° une loi de composition interne ; 2° une relation d'ordre. Il s'agit de savoir à quels axiomes doivent satisfaire les deux structures ainsi données sur E pour qu'on puisse affirmer qu'il existe un isomorphisme de E sur une partie E' de \mathbb{R} , faisant correspondre à la loi de composition dans E

l'addition dans E' , et à la structure d'ordre de E la structure d'ordre induite sur E' par celle de R . Lorsque cela est possible, on dit que les grandeurs de E sont mesurables, et le nombre réel de E' qui correspond à une grandeur de E par l'isomorphisme précédent, est appelé la mesure de cette grandeur.

Abordons le problème de façon précise. Nous considérerons un ensemble E totalemant ordonné par une relation d'ordre notée $x \leq y$, et muni d'une loi de composition associative, notée multiplicativement ; nous supposons en outre que les axiomes suivants sont vérifiés :

- (GR_I) E a un plus petit élément ω , qui est élément neutre pour la multiplication dans E (autrement dit $\omega x = x\omega = x$ quel que soit $x \in E$).
- (GR_{II}) La relation $x < y$ entraîne $xz < yz$ et $zx < zy$ quel que soit $z \in E$.
- (GR_{III}) Quels que soient $x > \omega$, $y > \omega$, il existe un entier $n > 0$ tel que $y \leq x^n$ (axiome "d'Archimède").

Il est évident que ces axiomes sont des conditions nécessaires pour que E soit isomorphe à une partie E' de $R_+ = [0, +\infty[$, stable pour l'addition dans R et contenant 0 . Inversement, ils entraînent la conséquence suivante :

PROPOSITION 1. Si E satisfait aux axiomes (GR_I) , (GR_{II}) , (GR_{III}) et a plus d'un élément, il existe, pour tout élément $a > \omega$ de E , une représentation croissante f et une seule de E dans R_+ (muni de l'addition) telle que $f(a)=1$.

Remarquons d'abord qu'il résulte de (GR_{II}) et (GR_I) , par récurrence sur n , que $x > \omega$ entraîne $x^n < x^{n+1}$ quel que soit l'entier $n > 0$; d'autre part, $x < y$ entraîne $x^2 < xy < y^2$, donc $x^2 < y^2$, et on en déduit, par récurrence, que $x^n < y^n$ quel que soit l'entier $n > 0$.

En supposant qu'il existe une représentation croissante f de E dans R_+ telle que $f(a)=1$, nous allons chercher sa valeur pour un élément quelconque $x \in E$. Remarquons pour cela que, si y et z sont deux éléments quelconques de E , p et q des entiers ≥ 0 tels que $y^p \leq z^q$, on a $f(y^p) \leq f(z^q)$, c'est-à-dire $pf(y) \leq qf(z)$. Soit alors A_x l'ensemble des nombres rationnels $r = \frac{p}{q}$ tels que $a^p \leq x^q$; cette propriété ne dépend bien que de r , et non de sa représentation fractionnaire, car les relations $a^p \leq x^q$ et $a^{kp} \leq x^{kq}$ sont équivalentes (k entier). Nous allons montrer que $f(x)$ est la borne supérieure de A_x . En effet, quel que soit l'entier $n > 0$, il existe un entier p tel que $x^n \leq a^p$, d'après (GR_{III}): si m est le plus grand entier tel que $a^m \leq x^n$, on a $a^m \leq x^n < a^{m+1}$, d'où $m \leq nf(x) < m+1$; il en résulte que $\frac{m+1}{n}$ est un majorant de A_x , car si $\frac{r}{s} \in A_x$, on a $a^r \leq x^s$, d'où $a^{rn} \leq x^{sn} < a^{s(m+1)}$, ce qui entraîne $rn < s(m+1)$. Par suite, si b_x est la borne supérieure de A_x , $f(x)$ et b_x appartiennent tous deux à l'intervalle $\left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n} \right]$; comme n est arbitrairement grand, $f(x) = b_x$.

Inversement, nous allons montrer qu'en prenant $f(x) = b_x$ pour tout $x \in E$, on définit bien une représentation croissante de E dans R_+ . En effet, si $x \leq y$, on a $A_x \subset A_y$, puisque la relation $a^p \leq x^q$ entraîne $a^p \leq y^q$; donc $f(x) \leq f(y)$, f est croissante; il suffit de montrer que $f(xy) = f(x) + f(y)$ quels que soient $x \in E$, $y \in E$. Or, quel que soit l'entier $n > 0$, il existe deux entiers p, q tels que $a^p \leq x^n < a^{p+1}$, $a^q \leq y^n < a^{q+1}$; il en résulte que $\frac{p}{n} \leq f(x) \leq \frac{p+1}{n}$ et $\frac{q}{n} \leq f(y) \leq \frac{q+1}{n}$, d'où $\frac{p+q}{n} \leq f(x) + f(y) \leq \frac{p+q+2}{n}$. Si nous montrons que l'on a aussi $\frac{p+q}{n} \leq f(xy) \leq \frac{p+q+2}{n}$, la proposition sera établie puisqu'on en tirera que $|f(xy) - f(x) - f(y)| \leq \frac{2}{n}$, et que n est arbitraire.

Or, on a $a^{p+q} \leq x^n y^n \leq a^{p+q+2}$, et $a^{p+q} \leq y^n x^n \leq a^{p+q+2}$ d'après (GR_{II}) ;
 la proposition résultera donc du lemme suivant :

Lemme. La relation $xy \leq yx$ entre deux éléments x, y de E entraîne
 $x^n y^n \leq (xy)^n \leq (yx)^n \leq y^n x^n$ pour tout entier $n > 0$.

Montrons d'abord, par récurrence sur m , qu'on a $x^m y \leq y x^m$; en effet,
 $x^m y = x(x^{m-1} y) \leq x(y x^{m-1}) = (xy) x^{m-1} \leq (yx) x^{m-1} = y x^m$. On voit de même que
 $xy^m \leq y^m x$. Démontrons alors le lemme par récurrence sur n ; on a

$$x^n y^n = x(x^{n-1} y) y^{n-1} \leq x(y x^{n-1}) y^{n-1} = (xy)(x^{n-1} y^{n-1}) \leq (xy)(xy)^{n-1} = (xy)^n$$

$$(xy)^n \leq (yx)^n = (yx)(yx)^{n-1} \leq (yx)(y^{n-1} x^{n-1}) = y(x y^{n-1}) x^{n-1} \leq y(y^{n-1} x) x^{n-1} = y^n x^n$$

C.Q.F.D.

En général, la représentation f dont nous venons de démontrer
 l'existence n'est pas biunivoque.

Prenons par exemple pour E la partie du produit $\mathcal{N} \times R_+$ formée du
 couple $(0,0)$ et des couples (n,x) où $n \geq 1$ et $x \in R_+$, la loi
 de composition étant la loi induite sur E par le produit des
 lois additives sur \mathcal{N} et R_+ ; on ordonne E lexicographiquement,
 c'est-à-dire en posant $(n,x) < (m,y)$ si $n < m$ ou si $n=m$ et $x < y$.
 Il est immédiat que les axiomes (GR_I) et (GR_{II}) sont vérifiés ;
 d'autre part, si (n,x) et (m,y) sont $> (0,0)$, on a $n > 0$ et $m > 0$,
 donc il existe un entier p tel que $m < pn$, ce qui entraîne
 $(m,y) < p(n,x)$, d'où (GR_{III}) . Cependant, si on prend $a=(1,0)$,
 la représentation f correspondante est telle que $f((n,x))=n$;
 elle n'est donc pas biunivoque.

PROPOSITION 2. Pour qu'il existe une représentation croissante et
biunivoque de E dans R_+ , il faut et il suffit que E satisfasse
aux axiomes (GR_I), (GR_{II}) et

(GR_{IIIa}) Quels que soient x, y, z tels que $\omega \leq x < y$ et $\omega \leq z$, il existe un entier $n > 0$ tel que $x^n z \leq y^n$ ou $zx^n \leq y^n$.

Il est évident que ces conditions sont nécessaires. Réciproquement, si elles sont satisfaites, il en est de même de (GR_{III}) qui est le cas particulier de (GR_{IIIa}) correspondant à $x = \omega$. Montrons alors que la représentation f définie dans la prop. 1 est strictement croissante. Supposons donc $\omega \leq x < y$; s'il existe n tel que $x^n a^2 \leq y^n$, et si p est le plus grand entier tel que $a^p \leq x^n$, on a $a^{p+2} \leq x^n a^2 \leq y^n$; mais $x^n < a^{p+1}$, donc $f(x) \leq \frac{p+1}{n}$ et $f(y) \geq \frac{p+2}{n}$, d'où la proposition dans ce cas; démonstration analogue s'il existe n tel que $a^2 x^n \leq y^n$.

Lorsqu'on a choisi un élément $a > \omega$ de E , la valeur pour $x \in E$ de l'isomorphisme f de E dans R_+ correspondant à a , est appelée la mesure de la grandeur x , relative à la grandeur unité a . Si b est un autre élément de E , la mesure de x lorsqu'on prend b pour grandeur unité n'est autre que $\frac{f(x)}{f(b)}$, d'après la prop. 1.

Remarque. On observera qu'on n'a pas supposé la loi de composition dans E commutative: la commutativité est une conséquence des axiomes (GR_I), (GR_{II}) et (GR_{IIIa}); par contre, on peut donner des exemples d'ensembles E satisfaisant à (GR_I), (GR_{II}) et (GR_{III}) mais où la loi de composition n'est pas commutative (exerc. 1).

PROPOSITION 3. L'axiome (GR_{IIIa}) est entraîné par les axiomes

(GR_I), (GR_{II}), (GR_{III}) et

(GR_{IV}) Si $x \leq y$, il existe $z \in E$ tel que $y = zx$.

En effet, supposons $\omega \leq x < y$, et $\omega \leq z$; il existe $t > \omega$ tel que $y = tx$. Supposons par exemple $tx \leq xt$; alors, d'après le lemme de la démonstration de la prop. 1, $t^n x^n \leq (tx)^n = y^n$ quel que soit $n > 0$.

Prenons n tel que $z \leq t^n$, ce qui est possible d'après (GR_{III}) ; on a donc $zx^n \leq t^n x^n \leq y^n$, d'où (GR_{IIIa}) ; démonstration analogue si $xt \leq tx$.
 On observera que, contrairement aux axiomes $(GR_I), (GR_{II}), (GR_{III})$ et (GR_{IIIa}) , l'axiome (GR_{IV}) n'est pas nécessairement vérifié pour une partie quelconque de R_+ , stable pour l'addition et contenant 0 .

Application aux groupes.

Nous dirons qu'un groupe G (commutatif ou non, noté multiplicativement) est un groupe totalement ordonné s'il est totalement ordonné par une relation d'ordre pour laquelle l'axiome (GR_{II}) est satisfait. Si ω désigne l'élément neutre de G , l'ensemble E des éléments $\geq \omega$ de G satisfait évidemment à (GR_I) et (GR_{II}) ; il satisfait aussi à (GR_{IV}) , car si $\omega \leq x \leq y$, on a, d'après (GR_{II}) , $\omega = xx^{-1} \leq yx^{-1}$, dont $t = yx^{-1} \in E$, et $y = tx$. Nous dirons que G est un groupe archimédien si E satisfait en outre à (GR_{III}) ; pour tout $a > \omega$, il existe alors une représentation biunivoque croissante f et une seule de E dans R_+ , telle que $f(a) = 1$. On peut prolonger f d'une seule manière en un isomorphisme croissant de G dans R (noté encore f), en posant $f(x) = -f(x^{-1})$ pour $x \leq \omega$. Cette fonction est en effet strictement croissante dans G , car $f(x) < 0$ pour $x < \omega$. Reste donc à vérifier que $f(xy) = f(x) + f(y)$ quels que soient $x \in G, y \in G$. Or, si on a par exemple $x \leq \omega \leq y$ et $xy \geq \omega$, on peut écrire $y = x^{-1}(xy)$, donc $f(y) = f(x^{-1}) + f(xy) = f(xy) - f(x)$, d'où $f(xy) = f(x) + f(y)$; démonstration analogue dans les autres cas. Ainsi :

PROPOSITION 4. Pour qu'un groupe totalement ordonné G soit isomorphe à un sous-groupe du groupe additif R , il faut et il suffit qu'il soit archimédien.

Nous allons en déduire une caractérisation du groupe R lui-même :

PROPOSITION 5. Pour qu'un groupe totalement ordonné G soit isomorphe à R, il faut et il suffit qu'il satisfasse aux deux conditions suivantes :

- a) toute suite croissante majorée d'éléments de G admet une borne supérieure dans G ;
- b) l'ensemble des éléments $> e$ (élément neutre de G) n'est pas vide et n'admet pas de plus petit élément.

Montrons d'abord que a) entraîne que G est archimédien. Supposons en effet que, pour un $x > e$, il existe y tel que $x^n \leq y$ quel que soit l'entier $n > 0$; la suite croissante (x^n) , étant majorée, aurait une borne supérieure b ; comme $x > e$, $bx^{-1} < b$, donc il existerait n tel que $bx^{-1} < x^n \leq b$, d'où $b < x^{n+1}$, contrairement à la définition de b .

On peut désormais supposer, d'après la prop.4, que G est un sous-groupe de R , noté additivement .

Remarquons d'abord que G est partout dense dans R , sans quoi (§ 1, prop.3), il serait discret, et l'ensemble des éléments > 0 de G aurait un plus petit élément ou serait vide. Il nous suffit donc de prouver que G est fermé dans R . Soit donc $a \in R$ adhérent à G ; il existe une suite croissante (x_n) de points de G ayant pour limite a ; la borne supérieure b de (x_n) dans G est nécessairement égale à a , sans quoi on aurait $a < b$, et comme G est partout dense dans R , il existerait $c \in G$ tel que $a < c < b$, contrairement à la définition de b ; donc $a=b \in G$.

Exercices. 1) Soit G un groupe non commutatif totalement ordonné (cf. chap.IV, § 1, exerc.4). On considère, dans le produit $N \times G$, l'ensemble E formé du couple $(0, e)$ (e élément neutre de G) et des couples (n, x) , où n parcourt l'ensemble des entiers ≥ 1 ,

et x parcourt G . On prend comme loi de composition dans E la loi $(n,x)(n',x')=(n+n',xx')$, et on ordonne E lexicographiquement. Montrer que l'ensemble E , muni de ces deux structures, satisfait aux axiomes $(GR_I), (GR_{II})$ et (GR_{III}) .

¶ 2) Soit G un groupe totalement ordonné ayant plus d'un élément ; si, quand on munit G de la topologie $\mathcal{C}_0(G)$ (chap.I, §1, exerc.3), G est connexe, G est isomorphe au groupe additif \mathbb{R} (utiliser la prop.5 ci-dessus, et l'exerc.7 du chap.IV, §2).

¶ 3) Un groupe topologique G est isomorphe à \mathbb{R} s'il est connexe et si le complémentaire de l'élément neutre e dans G est non connexe.

On montrera successivement que :

a) Si A est une composante connexe de $G^* = G \setminus \{e\}$, son adhérence $\bar{A} = A \cup \{e\}$.

b) Si A et B sont deux composantes connexes distinctes de G^* , $x \in A, y \in B$, l'ensemble $\{x\} \cup (xB) \cup (Ay) \cup \{y\}$ est connexe ; en conclure que $B=A^{-1}$, et que G^* a exactement deux composantes connexes A et A^{-1} .

c) La relation $yx^{-1} \in \bar{A}$ est une relation d'ordre faisant de G un groupe totalement ordonné (montrer que $A\bar{A}$ et $\bar{A}A$ sont contenus dans A , et que $x\bar{A}x^{-1} \subset A$ quel que soit $x \in G$).

d) La topologie $\mathcal{C}_0(G)$ est moins fine que la topologie donnée \mathcal{C} sur G (montrer que A est ouvert pour la topologie \mathcal{C}).

Conclure à l'aide de l'exerc.2 du chap.I, §11, et de l'exerc.2 ci-dessus.

