CHAPITRE VI (ANCIEN CHAPITRE VIII)
QUELQUES EXEMPLES ELEMENTAIRES D'ESPACES TOPOLOGIQUES (ETAT 1)

Rédaction n° 024

Nombre de pages : 22

Nombre de feuilles : 22

Topologie générale

Chap VIII Exemples élémentai
d'espaces topologiques

24

Chapitre VI

A 24 [2]

Etat 1

(Ancien CHAPITRE VIII.)

QUELQUES EXEMPLES ELEMENTAIRES D'ESPACES TOPOLOGIQUES.

Nous nous proposons, dans ce chapitre, de donner les définitions et quelques propriétés simples d'un certain nombre d'espaces topologiques qu'on peut considérer comme usuels, car ils interviennent dans de nombreuses théories mathématiques, et servent en particulier de support aux structures géomètriques (voir) les plus simples. Tous ces espaces se déduisent de la droite numérique R par l'application des divers procédés de formation d'espaces topologiques, que nous avons exposés au ch. I .

§ 1. L'espace R^n et ses variétés linéaires. La périsphère euclidienne.

Résumons brièvement les principales propriétés de l'espace R^n et de ses variétés linéaires, dont certaines ont déjà été rencontrées précédemment.

La structure uniforme de R^n, produit de n espaces uniformes identiques à la droite numérique, est aussi celle qu'on déduit de la structure de R^n en tant que groupe topologique, produit direct de n groupes identiques au groupe additif des nombres réels; avec cette structure uniforme, R^n est un espace uniforme métrisable et complet ; on peut prendre par exemple comme métriques (équivalentes) les expressions

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|x_k-y_k\right| , \quad \sum_{k=1}^{n}\left|x_k-y_k\right| , \quad \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$$

Cette dernière, dite métrique <u>euclidienne</u>, est la plus fréquemment utilisée ; nous la désignerons dans ce qui suit par la notation $\|x-y\|$: notation justifiée par le fait que cette métrique est <u>invariante</u> par toute translation, autrement dit $\|(x+z)-(y+z)\| = \|x-y\|$ (cette propriété appartient aussi d'ailleurs aux deux autres métriques citées plus haut ; nous reviendrons en détail là-dessus dans la théorie des Espaces linéaires).

La structure uniforme précédente fait de R^n un espace topologique <u>localement compact</u>, à base dénombrable ; il y a identité entre les ensembles <u>relativement compacts</u> et les ensembles <u>bornés</u> (au sens de la métrique euclidienne) dans R^n ; enfin, R^n est <u>connexe</u>.

Toute <u>transformation linéaire</u>

$$y_k = \sum_{h=1}^{n} a_{hk} x_h + b_k \qquad (k = 1,2,\ldots,n)$$

est une <u>application continue</u> de R^n dans R^n ; c'est un <u>homéomorphisme</u> si elle est <u>biunivoque</u>, c'est-à-dire si le déterminant $\boxed{a_{hk}}$ n'est pas nul (on dit encore que la transformation est <u>non dégénérée</u>); la transformation réciproque est aussi linéaire. En particulier, la transformation $y = \lambda x$, où λ est un nombre réel $\neq 0$ (c'est-à-dire la transformation $y_k = \lambda x_k$ $(k = 1,2,\ldots,n)$) est un homéomorphisme ; on la désigne sous le nom d'<u>homothétie</u> de rapport λ ; elle transforme les distances suivant la formule

$$\|\lambda y - \lambda x\| = |\lambda| \cdot \|y-x\| .$$

Une <u>droite</u> passant par deux points distincts x, y, est l'ensemble des points $tx+(1-t)y$, t parcourant l'ensemble des nombres réels.

Une <u>variété linéaire</u> dans R^n est une partie de R^n qui contient la droite joignant deux quelconques de ses points. Une translation quelconque transforme toute droite en droite, donc toute variété linéaire en variété linéaire ; on peut donc effectuer sur toute variété linéaire une translation qui la transforme en variété linéaire passant par l'origine, ou, comme on dit encore, en <u>variété linéaire homogène</u> : cette dernière locution provenant de ce que, si une telle variété contient deux points x, y, elle contient aussi le point $\lambda x + \mu y$, quels que soient les nombres réels λ , μ . Réciproquement, cette propriété caractérise les variétés linéaires homogènes ; si on fait abstraction de la topologie de R^n , en considérant seulement cet ensemble comme un <u>ensemble vectoriel</u>, les variétés linéaires homogènes apparaissent donc comme les <u>sous-ensembles vectoriels</u> de R^n . L'application des résultats de l'Algèbre linéaire (ch. , §) montre alors que dans toute variété linéaire homogène on peut trouver un nombre maximum p de points $a_1, a_2, \ldots, a_p$ $(0 \leqslant p \leqslant n)$ tels qu'il n'y ait aucun système $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ de nombres réels, autre que $(0,0,\ldots,0)$ pour lequel $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k a_k = 0$, et que tout point x de la variété soit de la forme $x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k a_k$ (les coefficients λ_k étant déterminés de manière unique d'après ce qui précède) ; p est la <u>dimension</u> de la variété linéaire. De plus, il existe n-p formes linéaires $L_1(x), L_2(x), \ldots, L_{n-p}(x)$ indépendantes, et telles que la variété soit l'ensemble des points qui <u>annulent simultanément</u> ces formes. Passant de là au cas général, en opérant une translation quelconque, on voit que, dans toute variété linéaire, il existe p+1 points $(0 \leqslant p \leqslant n)$ $a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}$ tels que la ~~suite~~ seule solution du système

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_{p+1} a_{p+1} = 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{p+1} = 0$$

soit $(0,0,\ldots,0)$, et que tout point de la variété se mette d'une manière et d'une seule sous la forme $x = \sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k a_k$ avec $\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k = 1$.

p est encore appelé la dimension de la variété ; il existe n-p formes linéaires indépendantes, $L_1(x), \ldots, L_{n-p}(x)$, et n-p nombres réels $b_1, b_2, \ldots, b_{n-p}$ tels que la variété soit l'ensemble des points vérifiant simultanément les relations $L_k(x) = b_k$ $(k=1,2,\ldots,n-p)$ (<u>équations</u> de la variété) ; on désignera sous le nom générique de V_n^p une variété linéaire de dimension p dans $\mathbb{R}^n$. Les V_n^0 sont les <u>points</u> de $\mathbb{R}^n$, les V_n^1 sont les <u>droites</u> ; pour $2 \leqslant p \leqslant n-1$, on dit encore que les V_n^p sont les <u>plans à p dimensions</u> ; les V_n^{n-1} sont souvent appelés <u>hyperplans</u> ; enfin, il n'existe qu'une seule V_n^n, à savoir l'espace lui-même.

Il est clair que toute transformation linéaire non dégénérée transforme une V_n^p en une V_n^p ; de plus, si $p < n$ on peut toujours, par une telle transformation, transformer une V_n^p quelconque en une V_n^p <u>coordonnée</u>, c'est-à-dire dont les équations s'obtiennent en annulant n-p coordonnées de x : si $L_k(x) = b_k$ $(k=1,2,\ldots,n-p)$ sont les équations de la variété, et si, par exemple, le déterminant des coefficients des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-p}$ dans les L_k n'est pas nul, il suffit de considérer la transformation

$$y_k = L_k(x) - b_k \quad (k = 1,2,\ldots,n-p) \ , \ y_k = x_k \ (k = n-p+1, \ldots, n)$$

Il résulte de ce fait, et des propriétés générales des produits d'espaces topologiques, que les V_n^p, en tant que <u>sous-espaces</u> de $\mathbb{R}^n$, sont <u>homéomorphes</u> à $\mathbb{R}^p$ $(1 \leqslant p \leqslant n-1)$; de plus, ce sont des ensembles <u>fermés</u> et <u>épars</u> dans $\mathbb{R}^n$: en effet, une variété coordonnée ne peut contenir d'ensemble ouvert, puisque sa projection sur un au moins des espaces facteurs de $\mathbb{R}^n$ se réduit à un point.

Signalons encore que le complémentaire d'un <u>hyperplan</u> $f(x) \equiv L(x)-b = 0$ est <u>non connexe</u>, puisqu'il se compose des deux ensembles ouverts sans point commun $\overset{-1}{f}(t > 0)$, $\overset{-1}{f}(t < 0)$ (la remarque est d'ailleurs valable pour tout ensemble de points de $\mathbb{R}^n$ défini par une seule équation $f(x)=0$, f étant continue).

<u>Exercice</u>. Montrer que, pour $p < n-1$, le complémentaire d'une V_n^p est connexe [on montrera qu'on peut joindre deux points quelconques de cet ensemble par une ligne brisée (image continue d'un segment de droite) qui y est située tout entière].

<u>La périsphère euclidienne</u>. Par une translation et une homothétie, on voit que dans $\mathbb{R}^n$ toute périsphère euclidienne est homéomorphe à la périsphère S^{n-1} définie par $\|x\| = 1$, ou encore $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1$; nous pouvons donc nous borner à étudier cette dernière.

S^{n-1} est un ensemble fermé et borné, donc <u>compact</u> (et bien entendu métrisable). Nous allons voir qu'on peut le rattacher topologiquement de deux manières, respectivement aux espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n-1}$

Montrons tout d'abord que $\mathbb{R}^n - \{0\}$ <u>est homéomorphe au produit de</u> S^{n-1} <u>par la demi-droite strictement positive</u> $(0,+\infty)$. En effet, à tout couple (λ, x) de ce produit $(\lambda > 0,\ x \in S^{n-1})$ correspond le point λx de $R^n - \{0\}$; et, réciproquement, tout point y de $R^n - \{0\}$ peut être mis d'une seule manière sous cette forme, en prenant $\lambda = \|y\|$, et $x = y/\|y\|$; ces deux dernières fonctions de y sont évidemment continues, et inversement, λx est fonction continue du couple (λ, x) , car $\|\lambda x - \lambda' x'\| \leqslant |\lambda| . \|x - x'\| + |\lambda - \lambda'| . \|x'\|$. On a bien défini l'homéomorphisme annoncé. Comme $(0, +\infty)$ est homéomorphe à R , on peut encore dire que $R^n - \{0\}$ <u>est homéomorphe au produit</u> $S^{n-1} \times R$.

Ce résultat peut encore s'exprimer autrement : d'après les propriétés générales des espaces produits, S^{n-1} <u>est homéomorphe à l'espace quotient de</u> $R^n - \{0\}$ <u>par la relation</u> $\Pi\{x, y\}$: "il existe $\lambda > 0$ tel que $y = \lambda x$". Comme $R^n - \{0\}$ est <u>connexe</u> si $n > 1$ (car on peut toujours joindre deux points quelconques par une ligne brisée de deux cotés au plus ne passant pas par 0), il en résulte que, pour $n > 1$, S^{n-1} est <u>connexe</u> .

<u>Exercice.</u> Démontrer directement que l'espace quotient R^n / Π est compact.

Considérons maintenant le point $a = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ de S^{n-1} , et l'hyperplan H d'équation $x_n = 0$. A tout point $x \neq a$ de S^{n-1} , faisons correspondre le point y où la droite qui joint a et x rencontre l'hyperplan H : on définit ainsi entre $S^{n-1} - \{a\}$ et H un <u>homéomorphisme</u>. En effet, on a $y = \lambda a + \mu x$ avec $\lambda + \mu = 1$, et la condition $y_n = 0$, ce qui donne $\lambda + \mu x_n = 0$, d'où $\lambda = -x_n/(1-x_n)$, et $\mu = 1/(1-x_n)$, et y est bien fonction continue de x dans $S^{n-1} - \{a\}$; inversement, de $x = \alpha a + \beta y$, avec $\alpha + \beta = 1$ et $\|x\| = 1$, on tire $\alpha = (\|y\|^2-1)/(\|y\|^2+1)$ et $\beta = 2/(\|y\|^2+1)$, ce qui montre que x est fonction continue de y.

Il résulte de là que <u>la périsphère S^n est homéomorphe à l'espace $\mathbb{R}^n$ rendu compact par adjonction d'un point à l'infini</u>.

L'homéomorphisme qui vient d'être défini s'appelle <u>projection stéréographique</u> de S^{n-1} sur H ; le point a est le <u>centre</u> de projection et H l'<u>hyperplan de projection</u>. Le choix qui a été fait de ces deux éléments n'a rien d'essentiel : on a le même résultat en prenant pour a un point quelconque de S^{n-1}, et pour H un hyperplan $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n - \beta_n = 0$, où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les coordonnées de a. Il en résulte que, dans le sous-espace S^{n-1}, <u>tout point possède un voisinage homéomorphe à un voisinage d'un point de $\mathbb{R}^{n-1}$</u>.

<u>Ensembles étoilés compacts</u>. Dans $\mathbb{R}^n$, un ensemble E est dit <u>étoilé</u> par rapport à l'origine, s'il existe un point de E et un seul sur toute demi-droite ouverte issue de 0 (c'est-à-dire l'ensemble des points λx, où x est quelconque dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$, et $\lambda > 0$).

<u>Tout ensemble étoilé compact est homéomorphe à S^{n-1}</u>. En effet, $y = x/\|x\|$ est une application biunivoque d'un tel ensemble E sur S^{n-1} ; comme elle est continue, et que E est compact, c'est un homéomorphisme.

<u>Exercices</u>. 1) Montrer que les ensembles définis par les conditions : $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| = 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k| = 1$ respectivement, sont des ensembles étoilés compacts.

2) Si x parcourt un ensemble étoilé compact E, montrer que l'ensemble des points λx, où $0 \leqslant \lambda < 1$, est un ensemble ouvert homéomorphe à une sphère ouverte.

§ 2. L'espace P^n et les espaces associés.

Considérons, dans l'espace $R^{n+1}-\{0\}$, la relation $\Delta\{x,y\}$: "il existe $\lambda \neq 0$ tel que $y = \lambda x$" ; il est clair que c'est une relation d'équivalence, les classes d'équivalence étant les <u>droites pointées</u> (droites passant par O, dont on a enlevé le point O). On appelle <u>espace projectif à n dimensions</u>, et on représente par P^n, <u>l'espace quotient de</u> $R^{n+1}-\{0\}$ <u>par la relation</u> Δ. C'est donc un espace <u>connexe</u>.

On appelle <u>système de coordonnées homogènes</u> d'un point x de P^n les coordonnées d'un point quelconque de la classe d'équivalence de $R^{n+1}-\{0\}$ correspondant à x ; si $(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})$ est un tel système, tous les autres systèmes de coordonnées homogènes de x sont donc de la forme $(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_{n+1})$, où λ est un nombre non nul quelconque.

Toute partie de P^n étant l'image canonique d'une partie de $R^{n+1}-\{0\}$ invariante par la relation Δ, on voit que toute partie de P^n peut être définie par une relation entre les coordonnées homogènes de ses points, soumise à la condition que, si $(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})$ vérifie cette relation, il en est de même de $(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_{n+1})$ quel que soit $\lambda \neq 0$.

En particulier, une variété linéaire à p+1 dimensions dans R^{n+1}, invariante par la relation Δ n'est autre qu'une V^{p+1}_{n+1} <u>homogène</u> ; l'image canonique dans P^n d'une telle variété, dont on a oté l'origine, est par définition une <u>variété linéaire à p dimensions</u> (dite <u>projective</u>) V^p_n dans P^n ; si $L_k(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})=0$ $(k=1,2,\dots,n-p)$

sont les équations de la V_{n+1}^{p+1} (les L_k formes linéaires) dont la variété W_n^p est l'image canonique, on dit que ces équations sont les <u>équations homogènes</u> de cette W_n^p. Tout système de coordonnées homogènes d'un point d'une W_n^p est le système des coordonnées d'un point distinct de 0 de la V_{n+1}^{p+1} correspondante : on a vu plus haut qu'un tel point peut être mis d'une manière et d'une seule sous la forme $\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k a_k$, où les λ_k sont des nombres non tous nuls, et les a_k sont $p+1$ points de la V_{n+1}^{p+1} n'appartenant à aucune variété linéaire homogène de dimension inférieure à $p+1$; il en résulte que les images canoniques de ces points dans P^n n'appartiennent à aucune variété projective de dimension inférieure à p, et réciproquement.

Pour qu'une transformation linéaire non dégénérée T dans R^{n+1} fasse correspondre une droite pointée à une droite pointée, il faut et il suffit qu'elle soit <u>homogène</u>, c'est-à-dire laisse invariant le point 0 ; elle définit alors une application biunivoque de P^n sur P^n (à savoir celle qui, à l'image canonique d'un point $x \in R^{n+1} - \{0\}$, fait correspondre l'image canonique de $T(x)$) ; ce sont ces applications qui, par définition, sont les <u>transformations linéaires</u> (non dégénérées) dans P^n ; une telle transformation fait correspondre à toute W_n^p une W_n^p, et on peut toujours trouver une transformation linéaire faisant correspondre à une W_n^p donnée une W_n^p dont les équations homogènes s'obtiennent en égalant à zéro $n-p$ des coordonnées homogènes de ses points. Les équations d'une transformation linéaire homogène T dans R^{n+1} sont par définition les <u>équations homogènes</u> de la transformation linéaire correspondante dans P^n. Enfin, il résulte des théorèmes sur les fonctions continues dans un espace quotient que <u>toute transformation linéaire non dégénérée dans P^n est un homéomorphisme de P^n sur lui-même</u>.

Considérons maintenant, dans P^n, le complémentaire E de l'hyperplan d'équation $x_{n+1}=0$; tout point de E a un système de coordonnées homogènes et un seul de la forme $(x_1, x_2, \dots, x_n, 1)$; autrement dit, E est l'image canonique de l'hyperplan H d'équation $x_{n+1}=1$ dans R^{n+1}.

Montrons que E est <u>homéomorphe</u> à H ; comme, <u>dans H</u>, toute classe d'équivalence relative à Δ se compose d'un seul point, il suffit de voir que tout ensemble ouvert <u>dans H</u> est la trace d'un ensemble ouvert dans $R^{n+1}-\{0\}$, invariant par la relation Δ. Or, si H_0 est l'hyperplan $x_{n+1}=0$ dans R^{n+1}, $y = x/x_{n+1}$ est une application <u>continue</u> de $R^{n+1} - H_0$ sur H, telle que l'image inverse d'un ensemble $A \subset H$ soit l'ensemble des points de $R^{n+1}-\{0\}$ équivalents par Δ à un point de A, ce qui démontre la proposition.

On voit donc que E est homéomorphe à R^n ; comme une transformation linéaire convenable amène un hyperplan projectif quelconque sur l'hyperplan $x_{n+1}=0$, on voit finalement que, <u>dans</u> P^n, <u>le complémentaire d'un hyperplan projectif est homéomorphe à</u> R^n.

Pour tout point de P^n, il existe au moins un indice k tel que le point n'appartienne pas à l'hyperplan $x_k = 0$; comme un hyperplan projectif est fermé, on en déduit que <u>tout point de</u> P^n <u>possède un voisinage homéomorphe à un voisinage de</u> R^n ; en particulier, comme tout point possède un voisinage fermé de Hausdorff, P^n <u>est un espace de Hausdorff</u>.

<u>Exercices</u>. 1) Démontrer directement cette proposition.

2) Montrer que toute variété projective de dimension $< n$ est un ensemble épars dans P^n.

Montrons maintenant que P^n <u>est compact</u> ; remarquons pour cela que toute droite pointée coupe en deux points "diamétralement opposés" la périsphère S^n dans R^{n+1} ; il existe donc une application biunivoque et continue de l'espace quotient F de S^n par la relation Δ, <u>sur</u> P^n ; comme P^n est de Hausdorff, il en est de même de F, et, comme S^n est compact, F est compact ; mais alors, l'application de F sur P^n est un homéomorphisme, donc P^n est compact (et en outre <u>métrisable</u>). Comme, sur S^n, la relation Δ se réduit à $y = -x$, on dit qu'on passe de S^n à P^n en "identifiant les points diamétralement opposés".

Résumant ces résultats sur la topologie de P^n, on peut dire que <u>l'espace projectif est l'espace numérique rendu compact par adjonction d'un hyperplan projectif "à l'infini"</u>. En particulier, pour $n=1$, l'hyperplan à l'infini est alors de dimension 0, autrement dit est <u>un point</u> : donc <u>la droite projective</u> P^1 <u>est homéomorphe à la circonférence</u> S^1.

La proposition correspondante pour $n > 1$ est inexacte. Il faut se garder également de croire, malgré l'analogie des notations, que S^n ou P^n soient homéomorphes respectivement à un produit de n espaces S^1 ou P^1.

<u>Exercice</u>. Démontrer directement que P^1 et S^1 sont homéomorphes en formant une application continue de S^1 sur S^1, qui soit constante sur chaque classe d'équivalence.

<u>L'espace des droites de</u> P^n. Toute droite W_n^1 dans P^n est l'image canonique d'une V_{n+1}^2 homogène dans R^{n+1}. Considérons R^{n+1} comme un ensemble vectoriel, dont les vecteurs de base sont les e_k($x_i=0$ si $i \neq k$, $x_k=1$) ; x et y étant deux points d'une V_{n+1}^2, distincts de 0 et non situés sur la même droite pointée, considérons le produit extérieur (bivecteur) $x \wedge y = \sum_{(ij)} p_{ij} e_{ij}$, où $p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$, $e_{ij} = e_i \wedge e_j$,

la sommation étant étendue aux combinaisons de deux indices distincts i,j, parcourant $\{1,2,\dots,n+1\}$; si x',y' sont deux autres points analogues de la même V^2_{n+1}, on a $x' = \lambda x + \mu y$, $y' = \lambda' x + \mu' y$, avec $\lambda\mu' - \lambda'\mu \neq 0$, et $x' \wedge y' = (\lambda\mu' - \mu\lambda') x \wedge y$. Si à tout bivecteur $x \wedge y$ d'une V^2_{n+1}, on fait correspondre le point (p_{ij}) de l'espace $R^{n(n+1)/2}$, on voit qu'à l'ensemble des bivecteurs de la V^2_{n+1} considérée correspond, dans cet espace, une <u>droite pointée</u> ; par suite, il correspond aussi à cet ensemble de bivecteurs un <u>point</u> de l'espace projectif $P^{(n-1)(n+2)/2}$, dont les p_{ij} d'un quelconque de ces bivecteurs forment un système de coordonnées homogènes ; c'est ce point que nous ferons correspondre à la V^2_{n+1} homogène considérée, et à la droite W^1_n qui en est l'image canonique. On a ainsi une application de l'<u>ensemble des droites</u> de P^n <u>dans</u> l'espace projectif $P^{(n-1)(n+2)/2}$, et cette application est <u>biunivoque</u>, car deux bivecteurs ne peuvent avoir des coordonnées p_{ij} proportionnelles que s'ils appartiennent à la même V^2_{n+1} homogène. Soit D_n l'image de l'ensemble des droites de P^n par cette application ; on sait (Algèbre, ch. , §) que la condition nécessaire et suffisante pour que $n(n+1)/2$ nombres p_{ij} soient les coordonnées d'un bivecteur, est qu'ils vérifient $\frac{n(n+1)}{2} - (2n-1)$ relations quadratiques de Grassmann indépendantes ; D_n est donc la partie de $P^{(n-1)(n+2)/2}$ définie par ces équations. Par définition, l'<u>espace des droites</u> de P^n est le <u>sous-espace</u> D_n de l'espace projectif $P^{(n-1)(n+2)/2}$; comme D_n est fermé, c'est un espace <u>compact</u> et métrisable.

<u>Exercice</u>. Montrer que D_n est <u>connexe</u> [on montrera qu'on peut trouver dans D_n une image continue d'un segment de droite joignant deux points de D_n qui représentent deux

droites concourantes de P^n ; puis qu'il en est de même lorsque les points de D_n représentent deux droites quelconques] .

On peut évidemment définir de la même manière une topologie sur l'ensemble des <u>variétés projectives à</u> p <u>dimensions</u> de P^n pour toute valeur de p $(1 < p \leqslant n-1)$, en plongeant cet ensemble dans un espace projectif convenable ; en vertu de la <u>dualité</u> de l'algèbre extérieure, les espaces des W_n^p et des W_n^{n-p-1} qu'on obtient ainsi sont <u>homéomorphes</u>.

<u>L'espace des droites de</u> R^n. A tout point de R^n, faisons correspondre le point ayant les mêmes n premières coordonnées dans l'hyperplan H d'équation $x_{n+1}=1$, de l'espace R^{n+1} ; les droites de R^n correspondent aux droites de H par cette transformation. Or, les droites de H correspondent biunivoquement aux V_{n+1}^2 non contenues dans l'hyperplan $x_{n+1}=0$, ou encore aux droites de P^n telles que, pour un indice i au moins $(1 \leqslant i \leqslant n)$, la coordonnée $p_{i,n+1} \neq 0$. Finalement, on obtient une correspondance biunivoque entre l'ensemble des droites de R^n, et l'intersection D'_n de D_n avec le complémentaire de la variété linéaire

$$p_{1,n+1}=0 \; , \; p_{2,n+1}=0, \ldots\ldots, p_{n,n+1} = 0$$

de l'espace $P^{(n-1)(n+2)/2}$. C'est le <u>sous-espace</u> D'_n de cet espace projectif que nous prenons comme définition de l'<u>espace des droites</u> de R^n ; D'_n étant un ensemble ouvert dans D_n, c'est un espace <u>localement compact</u> , et évidemment métrisable.

<u>Exercice</u>. Montrer, comme ci-dessus, que D'_n est <u>connexe</u>. On généralise encore ici sans difficulté aux variétés linéaires à un nombre quelconque de dimensions de R^n .

<u>L'espace des transformations linéaires de P^n</u>. A toute transformation linéaire non dégénérée de P^n, dont les équations homogènes sont

$$y_k = \sum_{h=1}^{n+1} a_{hk}x_h \qquad (k = 1,2,\ldots,n+1)$$

faisons correspondre, dans l'espace projectif $P^{(n+1)^2-1}$, le point dont les coordonnées homogènes sont les a_{hk} ; il est clair qu'on définit ainsi une application biunivoque de l'ensemble des transformations linéaires non dégénérées de P^n <u>dans</u> l'espace projectif $P^{n(n+2)}$; et c'est aussi une application <u>sur</u> le complémentaire A_n de la partie de $P^{n(n+2)}$ définie par l'équation $\left| a_{hk} \right| = 0$. Par définition, l'<u>espace des transformations linéaires</u> (non dégénérées) de P^n est le <u>sous-espace</u> A_n de $P^{n(n+2)}$.

A_n étant un ensemble ouvert, c'est un espace <u>localement compact</u>, dont chaque point possède un voisinage homéomorphe à un voisinage de $R^{n(n+2)}$.

Considérons maintenant une transformation linéaire non dégénérée dans R^n, d'équations

$$y_k = \sum_{h=1}^{n} a_{hk}x_h + b_k \qquad (k = 1,2,\ldots,n)$$

On peut lui faire correspondre la transformation linéaire dans P^n, d'équations homogènes

$$y_k = \sum_{h=1}^{n} a_{hk}x_h + b_k x_{n+1} \qquad (k = 1,2,\ldots,n)$$

$$y_{n+1} = x_{n+1}$$

et réciproquement, à toute transformation linéaire non dégénérée de P^n, de ce type (c'est-à-dire transformant en lui-même l'hyperplan $x_{n+1}=0$, ou, comme on dit encore, une transformation <u>affine</u>) correspond une transformation linéaire et une seule de R^n.

On a donc une application biunivoque de l'ensemble des transformations linéaires de $\mathbb{R}^n$ sur la partie A'_n de A_n définie par les équations $a_{1,n+1} = 0$, $a_{2,n+1} = 0, \ldots\ldots, a_{n,n+1} = 0$

C'est le sous-espace A'_n de A_n que nous prendrons comme définition de l'espace des transformations linéaires non dégénérées de $\mathbb{R}^n$; il est clair que c'est un espace localement compact, dont chaque point possède un voisinage homéomorphe à un voisinage de $\mathbb{R}^{n(n+1)}$.

§ 3. Généralisations diverses.

L'espace numérique complexe. On appelle espace numérique complexe à n dimensions et on désigne par $\mathbb{R}^n(i)$ le produit de n espaces uniformes identiques au plan de la variable complexe $\mathbb{R}(i)$; tout point de cet espace est donc défini par un système de n nombres complexes $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

Comme $\mathbb{R}(i)$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n(i)$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{2n}$, et ne constitue donc pas un nouvel espace uniforme ; la raison qui conduit à introduire pour le désigner une nouvelle dénomination est essentiellement la possibilité d'y définir une nouvelle structure d'ensemble vectoriel (Algèbre linéaire, ch.) distincte de la structure d'ensemble vectoriel dont le corps des coefficients est le corps des nombres réels : à savoir, celle dont le corps des coefficients est le corps des nombres complexes. Si λ est un nombre complexe, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ un point de $\mathbb{R}^n(i)$, en désignant par λz le point $(\lambda z_1, \lambda z_2, \ldots, \lambda z_n)$, on constate en effet immédiatement que cette opération jouit de toutes les propriétés de la "multiplication par un scalaire" ; en notant $\| z-t \|$ la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^{2n}$, c'est-à-dire ici l'expression $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left| z_k - t_k \right|^2}$, on a encore $\|\lambda z-\lambda t\| = |\lambda| . \|z-t\|$, quel que soit λ complexe.

Les notions de transformation linéaire et de variété linéaire ont donc dans $R^n(i)$ un tout autre sens que dans R^{2n} , bien que ces espaces soient isomorphes au sens de leur structure uniforme : il s'agit en effet de notions relatives à leur structure d'ensemble vectoriel. Une transformation linéaire dans $R^n(i)$ sera une application de $R^n(i)$ dans lui-même, de la forme

$$y_k = \sum_{h=1}^{n} a_{hk}x_k+b_k \qquad (k = 1,2,\ldots,n)$$

où les coefficients a_{hk} et b_k sont complexes ; toute transformation linéaire dans $R^n(i)$ est donc, quand on sépare les parties réelle et imaginaire de ses équations, une transformation linéaire dans R^{2n} , mais la réciproque est inexacte (on précisera cette différence un peu plus loin lorsqu'on définira l'espace des transformations linéaires dans $R^n(i)$).

On définit de même une droite complexe dans $R^n(i)$ comme l'ensemble des points $tx+(1-t)y$, x et y étant deux points distincts, et t parcourant l'ensemble des nombres complexes ; puis une variété linéaire dans $R^n(i)$ comme une partie de cet espace contenant la droite qui joint deux quelconques de ses points. Les raisonnements faits au § 1 sur les variétés linéaires de R^n se transportent alors, mutatis mutandis, en remplaçant les systèmes de coefficients réels qui y figurent, par des systèmes de coefficients complexes. On peut donc en étendre les conclusions : les variétés linéaires à p dimensions complexes $V_n^p(i)$ de $R^n(i)$ sont homéomorphes à $R^p(i)$ $(1 \leqslant p \leqslant n)$; pour $p \leqslant n-1$, ce sont des ensembles fermés et épars dans $R^n(i)$; la seule différence avec le cas réel est qu'ici le complémentaire d'un hyperplan est connexe.

__Exercice__. Démontrer cette proposition.

On remarquera que l'espace R^n peut être considéré comme plongé dans $R^n(i)$, car il est homéomorphe à la partie de cet espace définie par les équations $\mathcal{J} z_k = 0$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Mais cette partie de $R^n(i)$ n'est pas une variété linéaire complexe.

__L'espace projectif complexe__. A partir de l'espace numérique complexe, on définit __l'espace projectif complexe__ de la même manière que l'espace projectif à partir de l'espace numérique : on appelle __espace projectif complexe à n dimensions__ $P^n(i)$ l'espace quotient de $R^{n+1}(i) - \{0\}$ par la relation d'équivalence $\Delta'\{x,y\}$: "il existe un nombre __complexe__ $\lambda \neq 0$ tel que $y = \lambda x$". L'extension analogue des notions de coordonnées homogènes, de variétés projectives à p dimensions (ici complexes)de transformation linéaire, sont immédiates. On voit de même que, dans $P^n(i)$, toute $W^p_n(i)$ est homéomorphe à $P^p(i)$, et que le complémentaire d'un hyperplan projectif est homéomorphe à $R^n(i)$; de ce dernier fait résulte que tout point de $P^n(i)$ a un voisinage homéomorphe à un voisinage de R^{2n}, et par suite que $P^n(i)$ est un espace de Hausdorff.

Montrons enfin que $P^n(i)$ est __compact__ : chaque classe d'équivalence relative à Δ' possède des points dans la périsphère euclidienne S^{2n+1} (c'est-à-dire la partie de $R^{n+1}(i)$ d'équation $\sum_{k=1}^{n+1} |x_k|^2 = 1$) ; on montre alors comme dans le cas réel que $P^n(i)$ est homéomorphe à l'espace quotient de S^{2n+1} par la relation Δ' (qui, sur S^{2n+1}, se réduit à la relation "il existe un nombre réel α tel que $y = e^{i\alpha} x$"), et par suite est __compact__.

Ainsi, $P^n(i)$ est l'espace numérique complexe $R^n(i)$ rendu compact par adjonction d'un hyperplan projectif complexe "à l'infini". En particulier, pour $n=1$, l'hyperplan à l'infini est un point ; donc <u>la droite projective complexe</u> $P^1(i)$ <u>est homéomorphe à la périsphère</u> S^2.

> Ici encore, ce résultat ne s'étend pas au cas où n est > 1 ; de plus, il ne faudrait pas croire que $P^n(i)$ soit homéomorphe à l'espace projectif <u>réel</u> P^{2n}, ni au produit de n droites projectives complexes $P^1(i)$.

On définit ensuite les espaces des droites (complexes) de $P^n(i)$ ou de $R^n(i)$ en répétant les définitions des espaces analogues du cas réel, où on remplace partout les nombres réels par des nombres complexes ; de même on définira les espaces des transformations linéaires de $R^n(i)$ ou de $P^n(i)$; ces derniers sont des espaces localement compacts, dont chaque point a un voisinage homéomorphe à un voisinage de $R^{2n(n+1)}$, ou $R^{2n(n+2)}$ respectivement (dans l'espace des transformations linéaires de R^{2n}, chaque point a un voisinage homéomorphe à un voisinage de $R^{2n(2n+1)}$; en s'appuyant sur un théorème de la théorie de la dimension (voir), il en résulte qu'il ne peut être homéomorphe à l'espace des transformations linéaires de $R^n(i)$).

<u>Les espaces de Siegel</u>. D'autres espaces, dont la définition généralise celle de l'espace projectif, ont été récemment introduits en Analyse, en vue d'applications à la théorie des Nombres, par C. L. Siegel.

m et n étant deux entiers tels que $m > n$, on peut faire correspondre biunivoquement à tout point $x = (x_1, \ldots, x_{mn})$ de l'espace R^{mn} la matrice à m lignes et n colonnes

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \ldots\ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{(m-1)n+1} & \ldots\ldots & & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Soit A la partie de R^{mn} formée des points x dont la matrice correspondante X est de rang <u>inférieur à n</u> ; c'est un ensemble fermé, puisque on peut définir ses points comme ceux dont les coordonnées annulent tous les déterminants d'ordre n de la matrice X .

Considérons alors, dans $R^{mn}-A$, la relation $M\{x,y\}$: "il existe une matrice carrée T de rang n, telle que $Y = XT$, X et Y étant les matrices correspondant à x et y respectivement" ; c'est une relation d'équivalence. Nous appellerons <u>espace de Siegel</u> l'espace quotient $P_{m,n}$ de $R^{mn}-A$ par cette relation d'équivalence ; pour n = 1, cet espace n'est donc autre que l'espace projectif réel P^{m-1} ; nous allons voir que les propriétés topologiques les plus importantes de P^n se généralisent à $P_{m,n}$.

Considérons d'abord l'ensemble B des points x de R^{mn} tels que le déterminant des n premières lignes de X soit nul ; on a évidemment $A \subset B$. La matrice X qui correspond à un point $x \in R^{mn}-B$ peut donc s'écrire

(1) $$X = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

où U est une matrice carrée de rang n, V une matrice quelconque à m-n lignes et n colonnes ; et réciproquement, toute matrice de cette forme correspond à un point de $R^{mn}-B$.

Soit alors H l'ensemble des points de $R^{mn}-B$ tels que U soit la matrice <u>unité</u>; c'est une $V^n_{mn}(m-n)$, donc homéomorphe à $R^{n(m-n)}$.

Or, la fonction qui à tout point x de R^{mn}-B fait correspondre le point y de H tel que $Y = XU^{-1}$ (X étant de la forme (1)) est une application continue de R^{mn}-B sur H ; il en résulte que tout ensemble ouvert dans H est la trace d'un ensemble ouvert dans R^{mn}-A , invariant par la relation M ; comme deux points de H ne peuvent être équivalents, l'espace quotient de R^{mn}-B par M est homéomorphe à H , et par suite à $R^{n(m-n)}$. Comme d'ailleurs B est un ensemble fermé épars et invariant par M , on voit qu'il existe dans $P_{m,n}$ un ensemble fermé épars dont le complémentaire est homéomorphe à $R^{n(m-n)}$ (mais ici cet ensemble est l'image canonique d'une variété algèbrique de degré n de R^{mn} , et non d'une variété linéaire).

On peut évidemment raisonner de même en remplaçant B par l'ensemble des points de R^{mn} où un quelconque des déterminants d'ordre n de la matrice X est nul ; comme tout point de R^{mn}-A appartient par définition au complémentaire d'un de ces ensembles, on en tire que tout point de $P_{m,n}$ possède un voisinage homéomorphe à un voisinage de $R^{n(m-n)}$; en particulier, $P_{m,n}$ est un espace de Hausdorff.

Montrons maintenant que $P_{m,n}$ est compact ; il nous suffira pour cela (en raisonnant ensuite comme pour P^n) de trouver dans R^{mn}-A un ensemble fermé et borné contenant un point au moins de toute classe d'équivalence relative à M . Reprenons à cet effet l'ensemble H défini ci-dessus, et considérons l'ensemble $K \subset H$ défini par la condition que, pour chacun de ses points, tous les déterminants d'ordre n de la matrice X aient une valeur absolue $\leqslant 1$; c'est évidemment un ensemble fermé, et sa définition entraîne que chacune des coordonnées d'un quelconque de ses points est comprise entre -1 et $+1$, donc que K est borné.

Cela étant, à chaque combinaison de n lignes de la matrice X correspond un ensemble analogue à K ; soit K_o la réunion de tous ces ensembles, qui est encore fermé et borné. Montrons que toute classe d'équivalence contient un point au moins de K_o : en effet, soit x un point quelconque de $R^{mn}-A$, et a le maximum des valeurs absolues des déterminants d'ordre n de la matrice X ; on a $a > 0$. Soit T la matrice formée avec n lignes de X choisies de sorte que $|T| = a$; il est immédiat que le point correspondant à XT^{-1} appartiendra à K_o.

C.Q.F.D.

On peut naturellement définir de la même manière des espaces de Siegel complexes, en partant de l'espace $R^{mn}(i)$; nous laissons au lecteur le soin d'étendre à ces espaces les propriétés qui viennent d'être démontrées.
