CHAPITRE III GROUPES TOPOLOGIQUES
THEORIE ELEMENTAIRE
CHAPITRE IV NOMBRES REELS

Rédaction n° 023 bis

Nombre de pages : 104

Nombre de feuilles : 104

CHAPITRE III

GROUPES TOPOLOGIQUES
(Théorie élémentaire).

§ 1. Topologies de groupes.

Dans tout ce chapitre, on utilisera la notation $x.y$, ou simplement xy , pour désigner le <u>composé</u> d'un élément x et d'un élément y dans un groupe ; on notera x^{-1} l'<u>inverse</u> de x.

<u>Définition 1.</u> <u>On dit qu'une topologie sur un ensemble E est compatible avec une structure de groupe sur E , si elle satisfait aux deux conditions suivantes</u> :

(GT_I). <u>L'application</u> $(x,y) \longrightarrow xy$ <u>de</u> $E \times E$ <u>sur E est continue</u>.

(GT_{II}). <u>L'application</u> $x \to x^{-1}$ <u>de E sur E</u> (<u>symétrie</u> du groupe E) <u>est continue</u>.

<u>Une structure de groupe et une topologie compatible avec cette structure définissent sur E une structure de groupe topologique</u> ; <u>E</u> , <u>muni de cette structure, est appelé groupe topologique</u>.

<u>Exemple</u>. La topologie discrète est compatible avec toute structure de groupe sur E ; un groupe topologique dont la topologie est discrète est appelé <u>groupe discret</u>.

Les axiomes (GT_I) et (GT_{II}) sont équivalents au suivant :

(GT'). <u>L'application</u> $(x,y) \longrightarrow xy^{-1}$ <u>de</u> $E \times E$ <u>sur E est continue</u>.

En effet, (GT_I) et (GT_{II}) entraînent évidemment (GT'). Réciproquement, en désignant par e l'élément unité du groupe, on voit d'après (GT'), que $x \longrightarrow ex^{-1} = x^{-1}$ est continue, puisque $(x,y) \longrightarrow x.(y^{-1})^{-1} = xy$ est continue ; autrement dit, (GT') entraîne (GT_I) et (GT_{II}).

Comme $x \to x^{-1}$ est une permutation de E, identique à son application réciproque, on voit d'après (GT_{II}) que c'est un <u>homéomorphisme</u> de E sur lui-même.

De même, si a est un élément quelconque de E, la <u>translation à gauche</u> $x \to ax$ et la <u>translation à droite</u> $x \to xa$ sont continues, d'après (GT_I), et comme l'application réciproque de $x \to ax$ est $x \to a^{-1}.x$, ce sont des <u>homéomorphismes</u> de E sur lui-même.

Enfin, si a et b sont deux éléments quelconques de E, l'application $x \to axb$ est encore un <u>homéomorphisme</u> de E sur lui-même. En particulier, $x \to axa^{-1}$ est un homéomorphisme de E sur E.

Ces propriétés montrent que, si A est un ensemble ouvert (resp. fermé) dans E, et x un point quelconque de E, les ensembles A^{-1}, $x.A$ et $A.x$ sont ouverts (resp. fermés) dans E. On en déduit que, si A est <u>ouvert</u> et B quelconque, les ensembles $A.B$ et $B.A$ sont <u>ouverts</u>, comme réunions d'ensembles ouverts.

Par contre, $A.B$ n'est pas nécessairement fermé lorsque A est fermé, même si B est aussi fermé.

<u>Voisinage d'un point dans un groupe topologique.</u>

Soit $\mathfrak{V}$ le filtre des voisinages de l'unité e dans un groupe topologique E, et a un point quelconque de E ; puisque $x \to ax$ et $x \to xa$ sont des homéomorphismes, le filtre des voisinages de a est identique à la famille des ensembles $a.V$, où V parcourt $\mathfrak{V}$, et aussi à la famille des ensembles $V.a$. On connaît donc le filtre des voisinages d'un point quelconque d'un groupe topologique quand on connaît le filtre des voisinages de l'unité.

Comme $x \to axa^{-1}$ est un homéomorphisme conservant e , on voit que $\mathfrak{V}$ possède la propriété suivante :

(GV_I). Quels que soient $a \in E$ et $V \in \mathfrak{V}$, $a.V.a^{-1}$ appartient à $\mathfrak{V}$.

En outre, en exprimant que xy et x^{-1} sont continues pour $x = y = e$, on a les propriétés :

(GV_{II}). Quel que soit $U \in \mathfrak{V}$, il existe $V \in \mathfrak{V}$ tel que $V.V \subset U$.

(GV_{III}). Quel que soit $U \in \mathfrak{V}$, $U^{-1} \in \mathfrak{V}$.

Ces deux propriétés sont d'ailleurs équivalentes à la suivante :

Quel que soit $U \in \mathfrak{V}$, il existe $V \in \mathfrak{V}$ tel que $V.V^{-1} \subset U$.

Enfin, $\mathfrak{V}$ satisfait évidemment à la condition :

(GV_{IV}). Tout ensemble de $\mathfrak{V}$ contient e .

Ces quatre propriétés du filtre $\mathfrak{V}$ sont caractéristiques. De façon précise :

Proposition 1. Soit E un groupe, et $\mathfrak{V}$ un filtre sur E satisfaisant aux axiomes (GV_I), (GV_{II}), (GV_{III}) et (GV_{IV}). Quel que soit $a \in E$, la famille des ensembles $a.V$, où V parcourt $\mathfrak{V}$, est identique à la famille des ensembles $V.a$, et constitue le filtre des voisinages de a dans une topologie compatible avec la structure de groupe de E .

Il est immédiat que la famille $\mathfrak{V}(a)$ des ensembles $a.V$ est un filtre ; comme, d'après (GV_I), $a.V.a^{-1} = U$ appartient à $\mathfrak{V}$, on a $a.V = U.a$ donc $\mathfrak{V}(a)$ est identique à la famille des ensembles $V.a$. $\mathfrak{V}(a)$ satisfait à l'axiome (V_{III}) d'après (GV_{IV}) ; pour voir que c'est le filtre des voisinages de a dans une topologie sur E , il faut montrer qu'il satisfait à (V_{IV}). Soit donc V un ensemble quelconque de $\mathfrak{V}$, et W un ensemble de $\mathfrak{V}$ tel que $W.W \subset V$; quel que soit $x \in a.W$, on a $x.W \in a.W.W \subset a.V$, autrement dit $a.V$ appartient à $\mathfrak{V}(x)$, ce qui établit (V_{IV}).

Reste à voir que la topologie ainsi définie satisfait à (GT'). Soient a,b deux points quelconques de E , et $(ab^{-1}).V$ un voisinage quelconque de ab^{-1} ; il suffit de montrer qu'il existe $W \in \mathfrak{B}$ tel que $x \in a.W$ et $y \in b.W$ entraînent $xy^{-1} \in (ab^{-1}).V$. Or, prenons $U = b^{-1}.V.b$, et W tel que $W.W^{-1} \subset U$; on a $xy^{-1} \in a.W.W^{-1}.b^{-1} \subset a.U.b^{-1} = ab^{-1}.V$, d'où la proposition.

On peut donc former une topologie compatible avec une structure de groupe sur E en se donnant un filtre satisfaisant aux axiomes (GV_I), (GV_{II}), (GV_{III}) et (GV_{IV}) ; les conditions correspondantes pour une <u>base de filtre</u> $\mathfrak{B}$ sont les suivantes :

(GV'_I). <u>Quels que soient</u> $a \in E$ <u>et</u> $U \in \mathfrak{B}$, <u>il existe</u> $V \in \mathfrak{B}$ <u>tel que</u> $a.V.a^{-1} \subset U$.

(GV'_{II}). <u>Quel que soit</u> $U \in \mathfrak{B}$, <u>il existe</u> $V \in \mathfrak{B}$ <u>tel que</u> $V.V \subset U$.

(GV'_{III}). <u>Quel que soit</u> $U \in \mathfrak{B}$, <u>il existe</u> $W \in \mathfrak{B}$ <u>tel que</u> $W^{-1} \subset U$.

(GV'_{IV}). <u>Tout ensemble de</u> $\mathfrak{B}$ <u>contient e</u> .

<u>Exemple</u>. <u>Définition d'une topologie de groupe par un ensemble de sous-groupes</u>. <u>Groupe additif p-adique</u>.

Soit G un groupe, et $\mathfrak{F}$ un ensemble de sous-groupe de G, possédant les propriétés suivantes :

a) l'intersection de deux groupes de $\mathfrak{F}$ appartient à $\mathfrak{F}$;

b) quels que soient $x \in G$ et $H \in \mathfrak{F}$, on a $x.H.x^{-1} \in \mathfrak{F}$.

$\mathfrak{F}$ est une base de filtre, et il est immédiat qu'elle satisfait aux axiomes (GV'_I), (GV'_{II}), (GV'_{III}) et (GV'_{IV}), car si H est un sous-groupe, on a $H.H = H^{-1} = H$. Il existe donc une topologie sur G compatible avec la structure de groupe de G , et dans laquelle $\mathfrak{F}$ est un système fondamental de voisinages de l'unité.

Considérons en particulier le groupe additif $\mathbb{Q}$ des rationnels. Soit p un nombre premier $\neq 1$, et H_n l'ensemble des rationnels qui, mis sous forme de fraction irréductible, ont leurs numérateurs divisibles par p^n (n entier > 0) ; il est immédiat que H_n est un sous-groupe de $\mathbb{Q}$, et si m et n sont deux entiers tels que $m < n$, on a $H_n \subset H_m$; l'ensemble $\mathfrak{F}$ des sous-groupes H_n ($n=1,2,\dots$) satisfait donc aux conditions a) et b). Le groupe topologique obtenu en munissant $\mathbb{Q}$ de la topologie de groupe définie par $\mathfrak{F}$ est appelé <u>groupe additif des rationnels p-adiques</u>.

<u>Remarque</u>. Lorsque E est un groupe <u>abélien</u>, on a $x.A.x^{-1}=A$ pour toute partie A et tout élément x de E ; la condition (GV_I) (resp. (GV'_I)) est automatiquement vérifiée pour tout filtre (resp. base de filtre) sur E. Au contraire, en général, si E n'est pas abélien, (GV_I) n'est pas une conséquence de (GV_{II}), (GV_{III}) et (GV_{IV}) (voir exerc. 3).

Tout voisinage de e identique à son image par la symétrie $x \to x^{-1}$ est dit <u>symétrique</u> ; un voisinage de la forme $V.V^{-1}$ est évidemment symétrique. D'après (GV_{II}) et (GV_{III}), les voisinages symétriques forment un <u>système fondamental de voisinages</u> de e. De même, d'après (GV_{II}) et (GV_{III}), lorsque V parcourt un système fondamental de voisinages de e, les ensembles V^n (n entier fixe strictement positif ou strictement négatif) forment encore un système fondamental de voisinages.

<u>Noyaux de groupes</u>. Soit E un espace topologique. On dit qu'on définit sur E une <u>structure de noyau de groupe</u> si on se donne : 1° un point $e \in E$;

2^o un voisinage V_o de e ; 3^o une application $(x,y) \to x.y$ de $V_o \times V_o$ dans E ; 4^o une application $x \to x^{-1}$ de V_o dans E, de sorte que les conditions suivantes soient remplies :

(NG_I) *Pour tout* $x \in V_o$, $e.x = x.e = x$; *lorsque* $x.x^{-1}$ *et* $x^{-1}.x$ *sont définis, on a* $x.x^{-1} = x^{-1}.x = e$; *on a* $(x.y).z = x.(y.z)$ *chaque fois que les deux membres sont définis*.

(NG_{II}) *Les fonctions* $x.y$ *et* x^{-1} *sont continues* (dans $V_o \times V_o$ et dans V_o respectivement).

Soit G un groupe topologique, V un voisinage de l'unité e de G, W un voisinage de e tel que $W.W \subset V$ et $W^{-1} \subset V$; la restriction de la fonction $x.y$ à $W \times W$, et la restriction de x^{-1} à W, définissent sur V une structure de noyau de groupe, qu'on dit obtenue par *restriction* à W de la structure de groupe topologique de G.

Si E est un noyau de groupe, il résulte de (NG_{II}) que l'ensemble $\mathfrak{V}$ des voisinages de e contenus dans V_o satisfait à (GV'_{II}) et (GV'_{III}) ; on peut donc toujours trouver un voisinage V_n de e tel que le composé de n points de V_n ou de leurs inverses soit défini, quel que soit l'entier n. Par suite, l'ensemble des voisinages de e contenus dans V_3 satisfait à (GV'_I), si on y restreint a à ne prendre que des valeurs dans V_3.

Isomorphismes. Conformément aux définitions générales (Ens.(rés.), § 8), un *isomorphisme* f d'un groupe topologique G sur un groupe topologique G' est une application biunivoque de G sur G' qui est à la fois un isomorphisme de la structure de groupe de G sur celle de G', et un homéomorphisme de G sur G'. Autrement dit, une application f de G sur G' est un isomorphisme si :

1° elle est biunivoque ;

2° elle est bicontinue ;

3° quels que soient les points x, y, de G , $f(xy) = f(x)f(y)$.

Par exemple, si a est un point quelconque de G , l'<u>automorphisme intérieur</u> $x \longrightarrow axa^{-1}$ est un isomorphisme de G sur lui-même.

Soient de même E, E' deux noyaux de groupes. Une application f de E sur E' est un <u>isomorphisme</u> de la structure de noyau de groupe de E sur celle de E' si f est un <u>homéomorphisme</u> de E sur E' , et si en outre, en désignant par g l'application réciproque de f, on a $f(xy)=f(x)f(y)$ et $g(x'y')=g(x')g(y')$ chaque fois que les expressions figurant dans ces relations sont définies.

Si en particulier E et E' sont des noyaux de groupes obtenus par <u>restriction</u> de deux groupes topologiques G, G' , on dit que G et G' sont <u>localement isomorphes</u> lorsqu'il existe un isomorphisme de E sur E'.

<u>Exercices</u>. 1) Dans un groupe topologique <u>fini</u> G , les voisinages de l'unité sont tous les ensembles contenant un sous-groupe invariant N de G ; réciproque.

2) Soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur un groupe E , satisfaisant aux conditions (GV_{II}), (GV_{III}) et (GV_{IV}) ; montrer que lorsque V parcourt $\mathfrak{F}$, les ensembles $V.x$ (resp. $x.V$) forment un système fondamental de voisinages de x dans une topologie dite topologie <u>gauche</u> (resp. topologie <u>droite</u>) sur E . Pour que ces deux topologies soient identiques, il faut et il suffit que $\mathfrak{F}$ vérifie (GV_I).

Soit E_g (resp. E_d) l'espace obtenu en munissant E de la topologie gauche (resp. droite) définie par $\mathcal{F}$. Montrer que, pour tout $a \in E$, $x \to xa$ (resp. $x \to ax$) est une application continue de E_g sur E_g (resp. de E_d sur E_d). Pour que E_g et E_d soient identiques, il faut et il suffit que, pour tout $a \in E$, $x \to ax$ soit une application continue de E_g sur E_g.

La symétrie $x \to x^{-1}$ est un homéomorphisme de E_g sur E_d. Pour que E_g et E_d soient identiques, il faut et il suffit que $x \to x^{-1}$ soit une application continue de E_g sur E_g.

3) Sur un groupe fini non abélien, définir un filtre satisfaisant à (GV_{II}), (GV_{III}) et (GV_{IV}), mais non à (GV_I).

4) Soit n un entier >0, et G_n l'ensemble des rationnels qui, mis sous forme irréductible, ont leurs numérateurs divisibles par n ; montrer que G_n est un sous-groupe de $\mathbb{Q}$. Pour que les sous-groupes G_n correspondant aux entiers n d'une partie P de $\mathbb{N}$ forment une famille satisfaisant à la condition a), il faut et il suffit que le p.p.c.m. de deux entiers de P appartienne à P. P et P' étant deux ensembles d'entiers >0 satisfaisant à cette condition, dans quel cas les topologies qu'ils définissent sur $\mathbb{Q}$ sont-elles identiques ?

5) Soit $\mathcal{F}$ une famille de topologies compatibles avec la structure de groupe d'un groupe E ; montrer que la topologie <u>borne supérieure</u> des topologies de $\mathcal{F}$ (dans l'ensemble ordonné des topologies sur E) est encore compatible avec la structure de groupe de E.

§ 2. Structures uniformes de groupes.

<u>Structures uniformes droite et gauche sur un groupe topologique</u>. Dans un groupe topologique E , on aperçoit la possibilité de définir une notion de "points assez voisins", et par suite une structure uniforme, en opérant de la manière suivante : x et y étant deux points de E , on effectuera sur ces deux points <u>la même translation</u>, ramenant l'un d'eux, par exemple x , à l'élément unité e ; la "proximité" de x et y sera alors évaluée, en quelque sorte, par le voisinage V de e dans lequel sera ramené y. Cette translation, qui revient à composer x^{-1} avec x et y respectivement, peut d'ailleurs se faire <u>à droite</u> ou <u>à gauche</u> ; nous allons montrer que, dans les deux cas, on obtient bien ~~anisi~~ une structure uniforme sur E <u>compatible avec la topologie donnée</u>.

Prenons d'abord le cas où la translation se fait <u>à droite</u> ; à tout voisinage V de e , on fait correspondre l'ensemble V' des couples $(x,y) \in E \times E$ tels que $yx^{-1} \in V$. Soit $\mathfrak{S}'$ la famille des ensembles V' lorsque V parcourt le filtre $\mathfrak{V}$ des voisinages de e ; montrons que $\mathfrak{S}'$ est un <u>système fondamental d'entourages</u>. Tout d'abord, d'après (GV_{IV}), $\Delta \subset V'$ quel que soit $V \in \mathfrak{V}$, donc $\mathfrak{S}'$ est une base de filtre et vérifie (U'_I) ; comme les relations $yx^{-1} \in V$ et $xy^{-1} \in V^{-1}$ sont équivalentes, on voit, d'après (GV_{III}) que $\overset{-1}{V'}$ appartient à $\mathfrak{S}'$, d'où (U'_{II}) ; enfin, les relations $zx^{-1} \in V$ et $yz^{-1} \in V$ entraînent $yx^{-1} \in V.V$, et (GV_{II}) montre que $\mathfrak{S}'$ satisfait à (U'_{III}).

La structure uniforme définie par $\mathfrak{S}'$ est compatible avec la topologie de E , car les relations $y \in V'(x)$ et $y \in V.x$ sont équivalentes par définition, autrement dit $V'(x) = V.x$.

On raisonne de manière analogue lorsque la translation se fait à gauche, et on peut donc poser la définition suivante :

Définition 1. On appelle structure uniforme droite (resp. gauche) sur un groupe topologique E la structure dont un système fondamental d'entourages est obtenu en faisant correspondre à tout voisinage V de l'élément unité e , l'ensemble V' (resp. V") des couples (x,y) tels que $yx^{-1} \in V$ (resp. $x^{-1}y \in V$).

Remarques. 1) Il est clair que, lorsque V parcourt un système fondamental de voisinages de e , les ensembles V' (resp. V") correspondants forment encore un système fondamental d'entourages de la structure uniforme droite (resp. gauche).

2) V' n'est autre que l'image réciproque de V par l'application $(x,y) \rightarrow yx^{-1}$ de $E \times E$ sur E ; si on désigne par φ cette application, et si on pose $A' = \overset{-1}{\varphi}(A)$ pour tout ensemble $A \subset E$, on remarquera qu'à la composition de parties de E par l'extension de la loi de composition de ce groupe, correspond la composition des parties de $E \times E$, au sens de la théorie des correspondances (Ensembles (rés.), § 3) ; autrement dit, si $C = A.B$, on a $C' = A' \circ B'$, et réciproquement; de même, si $D = A^{-1}$, on a $D' = \overset{-1}{A'}$.

Si ψ est de même l'application $(x,y) \rightarrow \overset{-1}{x}y$, on a $V" = \overset{-1}{\psi}(V)$; on a cette fois, avec des notations analogues, $C" = B" \circ A"$ si $C = A.B$, et $D" = \overset{-1}{A"}$ si $D = A^{-1}$.

A tout proposition sur la topologie d'un espace uniforme correspond une proposition sur la topologie d'un groupe, la traduction se faisant à l'aide de la définition 1 et des formules $V'(x)=V.x$,

$V'(A)=V.A$, $V''(x)=x.V$, $V''(A)=A.V$ qui en découlent immédiatement. Par exemple, on a, pour toute partie $A \subset E$,

$$\bar{A} = \bigcap_{V \in \mathfrak{V}} V.A = \bigcap_{V \in \mathfrak{V}} A.V$$

On a même, plus généralement, $\bar{A} = \bigcap_{V \in \mathfrak{V}} V.A.V.$ En effet, soit $a \notin \bar{A}$; il existe un $V \in \mathfrak{V}$ tel que $(a.V) \cap A = \emptyset$. Prenons $U \in \mathfrak{V}$ tel que $U.U \subset V$, puis $W \in \mathfrak{V}$, symétrique et tel que $W.a \subset a.U$ et $W \subset U$; on aura $W.a.W \subset a.U.U \subset a.V$, donc $(W.a.W) \cap A = \emptyset$, et par suite aussi $a \notin W.A.W$, d'où la proposition.

De même, on a la proposition suivante (voir ch.II, § 2,prop.1) :

Proposition 1. Pour que la topologie d'un groupe soit séparée, il faut et il suffit que l'intersection des voisinages de e se réduise au seul point e ; en outre, tout groupe séparé est régulier.

La structure uniforme droite et la structure uniforme gauche sur un groupe topologique sont en général distinctes (voir exerc.3). Elles sont évidemment confondues si le groupe est abélien, car alors $V'=V''$; elles sont aussi confondues si le groupe est compact (ch.II, § 4, th.1).

Proposition 2. Lorsque les structures uniformes droite et gauche sont identiques, l'application $(x,y) \to xy^{-1}$ de $E \times E$ sur E est uniformément continue.

Il faut montrer qu'à tout voisinage U de e on peut en faire correspondre deux autres V,W tels que les relations $x'x^{-1} \in V$, $y'^{-1}y \in W$, entraînent $(x'y'^{-1})(xy^{-1})^{-1} \in U$, c'est-à-dire $x'y'^{-1}yx^{-1} \in U$, ou encore $(x'x^{-1})(xy'^{-1}yx^{-1}) \in U$. Prenons V tel que $V.V \subset U$; d'autre part, les structures uniformes droite et gauche étant identiques, il existe un voisinage W tel que $W'' \subset V'$, autrement dit $x^{-1}z \in W$ entraîne $zx^{-1} \in V$; cela signifie que, pour tout x , $z \in x.W$ entraîne $z \in V.x$, ou encore que $x.W \subset V.x$ quel que soit x ; si $y'^{-1}y \in W$, on aura donc $xy'^{-1}yx^{-1} \in x.W.x^{-1} \subset V.xx^{-1}=V$, d'où la proposition d'après le choix de V .

Cette proposition est inexacte lorsque les structures droite et gauche sont distinctes, et qu'on munit E de l'une d'elles. Désignons par E_g (resp. E_d) l'espace uniforme obtenu en munissant E de sa structure uniforme gauche (resp. droite). On a la proposition suivante :

Proposition 3. Soit a un point quelconque de E ; les translations $x \to ax$, $x \to xa$, considérées comme applications de E_g sur E_g , ou de E_d sur E_d , sont uniformément continues.

En effet, la condition $x^{-1}y \in V$ entraîne $(ax)^{-1}(ay)=x^{-1}y \in V$; d'autre part, si $U = a.V.a^{-1}$, la relation $x^{-1}y \in U$ entraîne $(xa)^{-1}(ya)=a^{-1}x^{-1}ya \in a^{-1}.U.a = V$. Démonstrations analogues pour E_d.

Proposition 4. La symétrie $x \to x^{-1}$ est un isomorphisme de l'espace uniforme E_g sur l'espace uniforme E_d .

En effet, l'extension de cette symétrie à $E \times E$ transforme V' en $\overset{-1}{V''}$ et V'' en $\overset{-1}{V'}$.

Structure uniforme bilatère. Définition 2. On appelle structure uniforme bilatère sur un groupe topologique E , la borne supérieure de la structure uniforme droite et de la structure uniforme gauche de ce groupe.

Cette structure a un système fondamental d'entourages formé des ensembles $V' \cap V''$, où V parcourt le filtre des voisinages de e ; il est clair qu'elle est compatible avec la topologie de E.

On désignera par E_b l'espace uniforme obtenu en munissant E de sa structure uniforme bilatère. Lorsque les structures uniformes droite et gauche sont confondues, la structure uniforme bilatère leur est identique.

Proposition 5. La symétrie $x \to x^{-1}$ est un isomorphisme de l'espace uniforme E_b sur lui-même.

C'est une conséquence immédiate de la proposition 4.

Exercices. 1) La définition des structures uniformes droite et gauche sur un groupe topologique E n'utilise que les propriétés (GV_{II}), (GV_{III}) et (GV_{IV}) du filtre $\mathfrak{V}$. Si on suppose que ce filtre ne satisfait pas à (GV_I), montrer que les structures uniformes droite et gauche sont respectivement compatibles avec les topologies droite et gauche définies à l'exerc. 2 du § 1 .

2) Soit E un groupe topologique, A un ensemble fermé, B un ensemble compact dans E. Montrer que A.B et B.A sont fermés dans E (on pourra remarquer que si $x \notin A.B$, on a $(A^{-1}.x) \cap B = \emptyset$, et appliquer la prop.2 du § 4 du ch.II).

3) Si A et B sont deux ensembles relativement compacts dans un groupe topologique séparé E , A.B est relativement compact dans E .

4) Montrer que chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que les structures uniformes droite et gauche sur un groupe topologique E soient identiques:

a) Quel que soit le voisinage V de e , il existe un voisinage W de e tel que, pour tout $x \in E$, on ait $x.W.x^{-1} \subset V$.

b) La symétrie $x \to x^{-1}$ est une application uniformément continue de E_g sur E_g (ou de E_d sur E_d).

c) L'application $(x,y) \to xy$ est une application uniformément continue de $E_g \times E_g$ sur E_g (ou de $E_d \times E_d$ sur E_d).

5) On considère le groupe multiplicatif G des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients rationnels et à déterminants non nuls. A chaque entier $n > 0$, on fait correspondre l'ensemble V_n des matrices telles que $|a-1| < 1/n$, $|b| < 1/n$, $|c| < 1/n$, $|d-1| < 1/n$. La famille des ensembles V_n constitue un système fondamental de voisinages de l'unité dans une topologie compatible avec la structure de groupe de G. Montrer que les structures uniformes droite et gauche sur le groupe topologique ainsi défini, sont distinctes.

§ 3. Sous-groupes, groupes quotients, homomorphismes, groupes produits.

<u>Sous-groupes</u>. Soit G un groupe topologique, H un sous-groupe de G. Il est clair que la topologie induite sur H par celle de G est compatible avec la structure de groupe de H ; la structure de groupe topologique ainsi définie sur H est dite <u>induite</u> par celle de G. Les structures uniformes induites sur H par les structures droite, gauche ou bilatère, de G, sont respectivement les structures uniformes droite, gauche, bilatère de H.

Par exemple, la structure uniforme induite sur le groupe $\mathcal{N}'$ des entiers par la structure uniforme du groupe additif des rationnels p-adiques, est identique à la structure uniforme p-adique que nous avions définie au ch. II, § 1.

<u>Proposition 1. L'adhérence d'un sous-groupe H d'un groupe topologique G est un sous-groupe de G. Si H est un sous-groupe invariant, $\overline{H}$ est aussi un sous-groupe invariant.</u>

En effet, si a et b sont adhérents à H , ab^{-1} est adhérent à H , puisque $(x,y) \longrightarrow xy^{-1}$ est continue dans $G \times G$, et transforme $H \times H$ en H (ch.I, § 4,prop.1). De la même manière, on voit que si H est invariant, il en est de même de $\overline{H}$.

<u>Proposition 2. Tout sous-groupe ouvert est aussi fermé.</u>

En effet, si H est un sous-groupe ouvert, $\complement H$, réunion de classes à droite x.H , qui sont des ensembles ouverts, est ouvert, donc H est fermé.

Soit V un voisinage quelconque de l'unité dans G ; le sous-groupe V^{∞} engendré par V est <u>ouvert</u>, car $V.V^{\infty} = V^{\infty}$. D'après la prop.2 , ce sous-groupe est aussi fermé. On en conclut que :

<u>Proposition 3. Tout groupe connexe est engendré par un voisinage quelconque de l'unité.</u>

La réciproque de cette proposition est inexacte, comme nous le verrons au ch.IV en étudiant les groupes ordonnés.

<u>Groupes quotients</u>. Soit H un sous-groupe <u>invariant</u> d'un groupe topologique G ; on sait (Algèbre, ch.I, §   ) que les classes d'équivalence suivant les relations $x^{-1}y \in H$ et $yx^{-1} \in H$ sont identiques, et que l'ensemble quotient de G par l'une ou l'autre de ces relations d'équivalence est un <u>groupe</u>, la loi de composition de deux classes $\tilde{x} = x.H$ et $\tilde{y} = y.H$, étant définie par $\tilde{x}.\tilde{y} = x.y.H$; ce groupe est appelé <u>groupe quotient</u> de G par H , et noté G/H .

Considérons sur G/H la topologie quotient de celle de G par la relation $yx^{-1} \in H$; elle est <u>compatible</u> avec la structure de groupe de G/H. En effet, pour voir que $(\tilde{x},\tilde{y}) \longrightarrow \tilde{x}.\tilde{y}^{-1}$ est continue, il suffit (ch.I, § 9, th.1) de montrer que $(x,y) \longrightarrow \tilde{x}.\tilde{y}^{-1}$ est une application continue de $G \times G$ sur G/H ; mais, comme $\tilde{x}.\tilde{y}^{-1}$ est la classe d'équivalence de $x.y^{-1}$, cette application est composée de l'application canonique de G sur G/H et de l'application $(x,y) \longrightarrow xy^{-1}$, d'où la proposition.

Lorsque nous parlerons désormais d'un groupe quotient G/H comme d'un groupe topologique, il faudra toujours entendre, sauf mention expresse du contraire, que sa topologie est la topologie quotient précédente.

L'image canonique d'un ensemble <u>ouvert</u> quelconque A de G est un ensemble <u>ouvert</u> dans G/H ; car, en saturant A pour la relation d'équivalence $yx^{-1} \in H$, on obtient l'ensemble $A.H$, qui est ouvert.

Il en résulte que, lorsque V parcourt le filtre des voisinages de e dans G (ou un système fondamental de voisinages), les ensembles $\tilde{V}$ (image canonique de V) forment un système fondamental de voisinages de l'unité dans G/H. Par suite, la structure uniforme gauche (resp. droite, bilatère) de G/H est l'image par l'application canonique de G sur G/H, de la structure uniforme gauche (resp. droite, bilatère) de G.

Cela montre aussi que l'application canonique de G sur G/H est <u>uniformément continue</u> quand on munit G et G/H des structures uniformes de même nom.

<u>Proposition 4</u>. <u>Pour qu'un groupe quotient G/H soit séparé, il faut et il suffit que H soit fermé</u>.

En effet, cette condition est équivalente au fait que l'ensemble réduit à l'unité e' de G/H est fermé dans G/H, d'où la proposition (§ 2, prop.1).

Considérons un groupe topologique <u>non séparé</u> G, et soit N l'<u>adhérence</u> de l'unité e de G ; N est un sous-groupe invariant fermé d'après la prop.1. D'après la prop. 4, G/N est <u>séparé</u> ; on dit que c'est le groupe séparé <u>associé</u> à G.

Lorsqu'on munit G et G/N de leurs structures uniformes de même nom, G/N n'est autre que l'espace uniforme séparé <u>associé</u> à l'espace uniforme G.

<u>Représentations et homomorphismes.</u> Soient G et G' deux groupes ; rappelons que nous avons donné le nom de <u>représentation</u> de G dans G' à toute application f de G dans G' telle que $f(xy) = f(x)f(y)$ quels que soient x et y dans G. (Algèbre, ch.I, §). Comme f(G) est un sous-groupe de G', on peut se borner à considérer des représentations d'un groupe G <u>sur</u> un groupe G'. La décomposition canonique (Ens.(rés.), § 5) de f montre alors qu'elle est composée d'une représentation <u>biunivoque</u>(c'est-à-dire d'un isomorphisme de structure de <u>groupe</u>) d'un groupe quotient G/H de G sur G', et de l'application canonique de G sur G/H (H étant l'image réciproque par f de l'unité e' de G').

Supposons maintenant que G et G' soient des <u>groupes topologiques</u>.

<u>Proposition 5</u>. <u>Pour qu'une représentation f de G sur G' soit continue dans G, il faut et il suffit qu'elle soit continue au point e</u> (unité de G). <u>Elle est alors uniformément continue, lorsqu'on munit G et G' des structures uniformes de même nom.</u>

En effet, à tout voisinage W de e' correspond un voisinage V de e tel que $f(V) \subset W$. Comme f est une représentation, on a, quel que soit $x \in G$, $f(x.V)=f(x).f(V) \subset f(x).W$, et $f(V.x)=f(V).f(x) \subset W.f(x)$ d'où la proposition.

En posant encore $H = \overset{-1}{f}(\{e'\})$, on sait (ch.I, § 9) que, si f est continue, la représentation biunivoque de G/H sur G' est <u>continue</u>, mais non <u>bicontinue</u> en général (autrement dit, ce n'est pas un isomorphisme de structure de <u>groupe topologique</u>).

<u>Définition 1</u>. <u>On dit qu'une représentation continue f d'un groupe topologique G sur un groupe topologique G' est un homomorphisme de G sur G' si la représentation biunivoque de G/H sur G' est bicontinue</u>. <u>On appelle homomorphisme de G dans G' un homomorphisme de G sur un sous-groupe de G'</u>.

<u>Proposition 6</u>. <u>Pour qu'une représentation continue f d'un groupe topologique G sur un groupe topologique G' soit un homomorphisme de G sur G', il faut et il suffit que l'image par f de tout ensemble ouvert dans G soit un ensemble ouvert dans G'</u>.

C'est immédiat, si on se rappelle que, g désignant l'application canonique de G sur G/H, l'image par g de tout ensemble ouvert dans G est ouvert dans G/H, et que tout ensemble ouvert dans G/H est l'image par g d'un ensemble ouvert dans G.

La condition énoncée dans la prop.6 est équivalente à la suivante: <u>il faut et il suffit que l'image par f de tout voisinage de l'unité dans G soit un voisinage de l'unité dans G'</u>; car cela entraîne que l'image par f d'un voisinage quelconque de x est un voisinage de $f(x)$.

<u>Produit de groupes topologiques</u>. Soit $(G_\iota)_{\iota\in I}$ une famille de groupes topologiques. On sait (Algèbre, ch.I, §) qu'on définit sur l'ensemble produit $G=\prod_{\iota\in I} G_\iota$ une structure de groupe (dite produit des structures de groupe des G_ι) en posant $(x_\iota).(y_\iota)=(x_\iota y_\iota)$; l'unité de G est $e=(e_\iota)$, et on a $(x_\iota)^{-1}=(x_\iota^{-1})$. Montrons que la <u>topologie produit</u> des topologies des G_ι est <u>compatible</u> avec la structure de groupe précédente. L'application $((x_\iota),(y_\iota))\longrightarrow(x_\iota y_\iota^{-1})$ de $G\times G$ sur G est composée de l'application $((x_\iota,y_\iota))\longrightarrow(x_\iota y_\iota^{-1})$ de $\prod_{\iota\in I}(G_\iota\times G_\iota)$ sur G, et de l'application canonique $((x_\iota),(y_\iota))\longrightarrow((x_\iota,y_\iota))$ de $G\times G$ sur $\prod_{\iota\in I}(G_\iota\times G_\iota)$; et ces applications sont continues (ch.I, §8, cor.2 du th.1 et prop.1).

<u>Définition 2</u>. <u>On dit que le groupe topologique obtenu en munissant le groupe G de la topologie produit des topologies des G_ι est le produit des groupes topologiques G_ι</u>.

Il est immédiat que la structure uniforme gauche (resp. droite, bilatère) du groupe produit G est le produit des structures uniformes gauches (resp. droites, bilatères) des groupes facteurs G_ι.

Si $(J_\varkappa)_{\varkappa\in K}$ est une <u>partition</u> de I, G est isomorphe au produit des groupes topologiques $\prod_{\iota\in J_\varkappa} G_\iota$ (associativité du produit).

Soit J une partie quelconque de I et $J' = \complement J$; le groupe $\prod_{\iota\in J} G_\iota$ est isomorphe au sous-groupe invariant $G_J = (\prod_{\iota\in J} G_\iota)\times(\prod_{\iota\in J'}\{e_\iota\})$ de G ; la projection pr_J de G sur $\prod_{\iota\in J} G$ est un <u>homomorphisme</u> (la projection de tout ensemble ouvert étant ouvert). Le groupe quotient G/G_J est isomorphe à $G_{J'}$; G est donc isomorphe au produit $G_J\times(G/G_J)$.

Remarquons encore que, si G_1, G_2 sont deux groupes topologiques, H_1, H_2 des sous-groupes invariants de G_1 et G_2 respectivement, l'application canonique de $(G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$ sur $(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2)$ est un isomorphisme de structure de groupe topologique (ch. I, §9, prop. 3).

<u>Exercices</u>. 1) Dans le groupe additif des rationnels p-adiques l'adhérence du sous-groupe N' des entiers est le sous-groupe formé des fractions irréductibles dont le dénominateur est premier avec p.

2) Pour qu'un sous-groupe H d'un groupe topologique G soit discret, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage V de l'unité e dans G, qui ne contienne aucun autre point de H que e.

3) Dans un groupe séparé, tout sous-groupe discret est fermé.

3^{bis}) Soit H un sous-groupe partout dense d'un groupe topologique G. Montrer que, pour tout x G, les ensembles x.H et H.x sont partout denses.

4) Soit G un groupe séparé, H un sous-groupe partout dense dans G ; si les structures uniformes droite et gauche de H sont identiques, les structures uniformes droite et gauche de G sont aussi confondues.

5) Dans un groupe topologique :

1° la composante connexe de l'unité ;

2° l'intersection des ensembles à la fois ouverts et fermés contenant l'unité ;

3° l'intersection des sous-groupes à la fois ouverts et fermés ;

- sont des sous-groupes invariants fermés.

6) Dans le groupe additif des rationnels p-adiques, l'intersection des ous-groupes à la fois ouverts et fermés se réduit au point 0.

7) Dans un groupe topologique G , soit $\mathfrak{F}_0$ <u>la plus petite</u> des familles $\mathfrak{F}$ de sous-groupes possédant les propriétés suivantes : a) $G \in \mathfrak{F}$; b) si $H \in \mathfrak{F}$, l'intersection des ensembles à la fois ouverts et fermés dans H et contenant l'unité, appartient encore à $\mathfrak{F}$. Montrer que l'intersection des sous-groupes de $\mathfrak{F}_0$ est la composante connexe de l'unité dans G.

8) Dans un groupe connexe G , tout sous-groupe invariant discret appartient au centre de G (montrer que, si a est un point d'un tel sous-groupe, il existe un voisinage V de l'unité dans G tel que $xax^{-1} = a$ quel que soit $x \in V$).

9) Pour qu'une représentation continue f d'un groupe G sur un groupe G' soit un homomorphisme, il faut et il suffit que l'image par f de tout ensemble ouvert dans G contienne au moins un point intérieur.

10) Soit G un groupe topologique, H un sous-groupe invariant discret de G ; montrer que G/H est localement isomorphe à G .

11) Quelle est la topologie d'un groupe quotient G/H d'un groupe G par un sous-groupe invariant partout dense H ?

12) Le groupe quotient d'un groupe topologique G par un sous-groupe invariant à la fois ouvert et fermé, est discret.

13) Soit K un sous-groupe invariant d'un groupe topologique G , H un sous-groupe de G contenant K ; si f est l'application canonique de G sur G/K , sa restriction f_H est un homomorphism

23

de H sur $f(H)$. Montrer par un exemple qu'il n'en est pas toujours ainsi lorsque H ne contient pas K.

Si H est un sous-groupe invariant contenant K, l'application canonique de G/H sur $(G/K)/(H/K)$ est un isomorphisme. En déduire en particulier que, si K n'est pas fermé et si $H=\overline{K}$, G/H est isomorphe au groupe séparé associé à G/K.

14) Soit H un sous-groupe invariant d'un groupe topologique G, et f une représentation continue de G sur H telle que $f(x)=x$ pour tout $x \in H$; montrer que G est isomorphe au produit $H \times (G/H)$. (On considèrera le sous-groupe invariant $K=\overset{-1}{f}(\{e\})$ on montrera que tout point $x \in G$ se met sous la forme yz, où $y \in H$, $z \in K$, et que tout point de H est permutable avec tout point de K ; on en déduira que l'application $(y,z) \longrightarrow yz$ de $H \times K$ sur G est un isomorphisme).

15) Soit H un sous-groupe invariant <u>compact</u> d'un groupe topologique G, f l'application canonique de G sur G/H ; l'image réciproque $\overset{-1}{f}(K)$ d'un ensemble compact dans G/H est un ensemble compact dans G (Utiliser la forme (C") de l'axiome des espaces compacts et l'exercice 2 du §2).

16) Un groupe quotient d'un groupe localement compact par un sous-groupe invariant fermé, est localement compact.

17) Soit G un groupe localement compact, H un sous-groupe invariant fermé dans G, f l'application canonique de G sur G/H. Si K' est compact dans G/H, il existe un ensemble K compact dans G et tel que $f(K)=K'$.

18) Un sous-groupe localement compact H d'un groupe localement compact G est fermé dans G (montrer qu'un point adhérent à H est adhérent à un ensemble compact contenu dans H).

§4. Complétion d'un groupe topologique.

Théorème. Tout groupe topologique séparé G est isomorphe à un sous-groupe partout dense d'un groupe $\hat{G}$ séparé et complet pour sa structure uniforme bilatère ; de plus, $\hat{G}$ est déterminé à une isomorphie près.

1) Existence de $\hat{G}$. Munissons G de sa structure uniforme bilatère, et considérons le complété $\hat{G}$ de cet espace uniforme. Pour simplifier, nous identifierons G avec la partie partout dense de $\hat{G}$ à laquelle il est isomorphe (en tant qu'espace uniforme). Tout revient à montrer qu'on peut prolonger à $\hat{G}$ la structure de groupe topologique de G.

On peut évidemment prolonger par continuité à $\hat{G}$ la fonction x^{-1}, qui est uniformément continue dans G (§2,prop.5 et ch.II, §3,th.1). Montrons qu'on peut aussi prolonger à $\hat{G} \times \hat{G}$ la fonction xy continue dans $G \times G$. Remarquons que tout filtre de Cauchy pour la structure bilatère sur G est à la fois filtre de Cauchy pour la structure droite et pour la structure gauche, et réciproquement. Il suffira donc de voir que l'image par xy de tout produit $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$ de deux filtres de Cauchy pour la structure droite (resp.gauche), est encore un filtre de Cauchy pour la structure droite (resp.gauche) (ch.II, §3,prop.7). Nous ferons le raisonnement pour la structure droite, on procède de la même manière pour la structure gauche.

Soit U un voisinage quelconque de e dans G , et V un voisinage symétrique de e tel que $V^3 \subset U$; considérons un ensemble $A \in \mathfrak{F}$ petit d'ordre V' , et soit a un point de A ; si x et x' sont deux points quelconques de A , on a $x'a^{-1} \in V$ et $ax^{-1} \in V$. Soit $W = a^{-1}.V.a$, et $B \in \mathfrak{G}$ un ensemble petit d'ordre W' ; quels que soient y et y' dans B , on a $y'y^{-1} \in W$. Montrons que l'image de $A \times B$ par l'application $(x,y) \longrightarrow xy$ est un ensemble petit d'ordre U'. Soient donc (x,y), (x',y') deux points quelconques de $A \times B$. On a

$(x'y')(xy)^{-1} = x'y'y^{-1}x^{-1} = (x'a^{-1})(ay'y^{-1}a^{-1})(ax^{-1}) \in V.(a.W.a^{-1}).V = V^3 \subset U$

d'où la proposition.

On désignera encore par x^{-1} et xy les fonctions ainsi prolongées. Elles définissent sur $\hat{G}$ une structure de groupe topologique. En effet, comme elles sont continues, il suffit de vérifier qu'elles définissent une structure de groupe. Or, les fonctions continues $x(yz)$ et $(xy)z$, continues sur $\hat{G} \times \hat{G} \times \hat{G}$ et égales dans $G \times G \times G$, sont aussi égales dans $\hat{G} \times \hat{G} \times \hat{G}$; de même les fonctions continues x, ex, xe, égales dans G, le sont dans $\hat{G}$; enfin, les fonctions continues e, xx^{-1}, $x^{-1}x$, égales dans G, le sont dans $\hat{G}$.

Reste à voir que la structure uniforme bilatère $\mathcal{U}$ du groupe topologique $\hat{G}$ ainsi définie est une structure d'espace complet (ce qui montrera (ch.II, § 3,prop.8) qu'elle est identique à la structure $\mathcal{U}'$, complétée de la structure uniforme bilatère sur G). Or, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ définissent la même topologie sur $\hat{G}$ et induisent la même structure uniforme sur G ; toute base de filtre de Cauchy sur G, pour la structure $\mathcal{U}$, est donc convergente dans $\hat{G}$, puisque c'est une base de filtre de Cauchy pour la structure $\mathcal{U}'$ et que $\mathcal{U}'$ est une structure d'espace complet ; mais il en résulte alors (ch.II, § 3,lemme de la démonstration du th.2) que $\mathcal{U}$ est une structure d'espace complet.

2) Unicité de $\hat{G}$. Elle résulte de la proposition suivante :

Proposition 1. Soient G_1, G_2 des groupes topologiques séparés complets pour leur structure bilatère, H_1 et H_2 des sous-groupes partout denses de G_1, G_2 respectivement. S'il existe un isomorphisme f (de structure de groupe topologique) de H_1 sur H_2, il se prolonge en un isomorphisme de G_1 sur G_2.

En effet, f est un isomorphisme de la structure bilatère de H_1 sur celle de H_2, donc (ch.II, § 3, prop.8) se prolonge en un isomorphisme $\bar{f}$ de la structure bilatère de G_1 sur celle de G_2. Comme les fonctions $\bar{f}(x.y)$ et $\bar{f}(x).\bar{f}(y)$ sont continues sur $G_1 \times G_1$ et égales dans $H_1 \times H_1$, elles sont égales en tout point de $G_1 \times G_1$, donc $\bar{f}$ est aussi un isomorphisme de la structure de groupe de G_1 sur celle de G_2.

Le groupe G dont nous venons de démontrer l'existence et l'unicité (à une isomorphie près) est appelé le <u>groupe complété</u> de G.

<u>Remarques</u>. 1) Le cas le plus intéressant est celui où les trois structures uniformes sur G sont confondues (en particulier, le cas où G est <u>abélien</u>) ; dans ce cas, en raisonnant comme à la fin de la démonstration de l'existence de $\hat{G}$, on voit que les trois structures uniformes sur $\hat{G}$ sont également confondues. Si en outre G est <u>abélien</u>, $\hat{G}$ est aussi <u>abélien</u>, car les fonctions continues xy et yx, égales sur $G \times G$, le sont encore sur $\hat{G} \times \hat{G}$.

2) Si G est engendré par tout voisinage de l'unité, il en est de même de $\hat{G}$; en effet, un système fondamental de voisinages de e dans $\hat{G}$ est formé par les adhérences $\bar{V}$ des voisinages de e dans G ; si V engendre G, $\bar{V}$ engendre un sous-groupe H de $\hat{G}$, qui contient G et est ouvert, donc aussi fermé (§ 3, prop.2) ; comme $\bar{G} = \hat{G}$, on a $H = \hat{G}$.

3) Si H est un sous-groupe de G, son adhérence $\bar{H}$ dans $\hat{G}$ est isomorphe au groupe complété de H. Si en outre H est <u>invariant dans G</u>, $\bar{H}$ est <u>invariant dans $\hat{G}$</u>, car l'image de $H \times G$ par la fonction continue $(z,x) \longrightarrow zxz^{-1}$ est H, donc l'image de $\bar{H} \times \bar{G}$ est $\bar{H}$ (ch.I, § 4, prop.1).

<u>Exercices</u>. 1) Montrer que, si la symétrie $x \to x^{-1}$, considérée comme application de G_d (groupe G muni de sa structure uniforme droite) sur G_d, est uniformément continue dans un voisinage V_o de e, le groupe complété $\hat{G}$ est complet pour sa structure uniforme droite et sa structure uniforme gauche (montrer que l'image par cette symétrie d'un filtre de Cauchy sur G_d est un filtre de Cauchy sur G_d).

2) Tout groupe localement compact est complet pour chacune de ses structures uniformes (montrer que tout filtre de Cauchy induit un filtre sur un ensemble compact).

3) Soit G un groupe topologique, V_o un voisinage de l'unité tel que, pour tout voisinage V de e, on puisse recouvrir V_o par un nombre <u>fini</u> d'ensembles $V.x_i$. Montrer que le groupe complété $\hat{G}$ est localement compact, et que $x \to x^{-1}$ est uniformément continue dans V_o (en tant qu'application de G_d sur G_d).

CHAPITRE IV.

NOMBRES REELS.

§ 1. Groupes topologiques ordonnés.

Groupes ordonnés. Il n'est question, dans ce paragraphe, que de groupes abéliens ; on écrira additivement leur loi de composition.

Définition 1. Une structure d'ensemble totalement ordonné (qu'on note "$x \leqslant y$") sur un ensemble E, est dite compatible avec une structure de groupe abélien sur E, si elle satisfait à la condition :

(GO) La relation "$x \leqslant y$" entraîne "$x+z \leqslant y+z$" pour tout $z \in E$.

Une structure de groupe abélien et une structure d'ensemble totalement ordonné compatible avec cette structure de groupe, définissent sur E une structure de groupe ordonné ; E, muni de cette structure, est appelé groupe ordonné.

L'axiome (GO) peut encore s'exprimer en disant que l'ordre est invariant par toute translation.

D'après (GO) la relation $x+z \leqslant y+z$ entraîne $(x+z)-z \leqslant (y+z)-z$, c'est-à-dire $x \leqslant y$; donc "$x \leqslant y$" et "$x+z \leqslant y+z$" sont équivalentes. En particulier, les relations $x \leqslant y$, $0 \leqslant y-x$, $x-y \leqslant 0$, et $-y \leqslant -x$ sont équivalentes.

Définition 2. On dit qu'un élément x d'un groupe ordonné E est positif (resp. strictement positif, négatif, strictement négatif) si $x \geqslant 0$ (resp. $x > 0$, $x \leqslant 0$, $x < 0$).

Les relations $x \leqslant y$, $z \leqslant t$ entraînent $x+z \leqslant y+z$ et $y+z \leqslant y+t$, donc $x+z \leqslant y+t$; les relations $x < y$, $z \leqslant t$ entraînent de même $x+z < y+t$. En particulier, les relations $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ entraînent $x+y \geqslant 0$.

Soient P et N l'ensemble des éléments positifs et l'ensemble des éléments négatifs de E ; ces ensembles possèdent les propriétés suivantes :

a) $P \cup N = E$; b) $P \cap N = \{0\}$; c) $N = -P$; d) $P+P \subset P$.

Réciproquement, si, dans un groupe abélien E , P et N sont deux parties satisfaisant à ces quatre conditions, la relation $y-x \in P$ est une relation d'ordre, définissant sur E une structure d'ensemble totalement ordonné compatible avec la structure de groupe de E : en effet, de $y-x \in P$ et $z-y \in P$, on déduit, d'après d), $(z-y)+(y-x)=z-x \in P$; de $y-x \in P$ et $x-y \in P$, on tire, d'après c), $y-x \in N \cap P$, donc d'après b), $x=y$; si x et y sont deux éléments quelconques de E , on a $y-x \in P$ ou $y-x \in N$ d'après a) ; enfin, $(y+z)-(x+z)=y-x$ ce qui achève de démontrer la proposition. Dans le groupe ordonné ainsi défini, P et N sont d'ailleurs l'ensemble des éléments positifs et l'ensemble des éléments négatifs respectivement.

<u>Exemple de groupe ordonné</u>. Sur le groupe additif des rationnels $\mathbb{Q}$, la relation $x \leqslant y$ définie en Algèbre (ch. §) est compatible avec la structure du groupe ; $\mathbb{Q}$, muni de sa structure de groupe additif et de cette structure d'ordre est appelé <u>groupe additif ordonné des rationnels</u>.

Un groupe ordonné ne peut avoir de plus petit ni de plus grand élément, s'il comprend plus d'un élément : car si $a \neq 0$ était le plus petit élément, on aurait $a < 0$, d'où $2a < a$, contrairement à l'hypothèse. En particulier, un groupe ordonné qui comprend plus d'un élément est <u>infini</u>.

Si G est un sous-groupe d'un groupe ordonné E , la relation d'ordre induite sur G par celle de E est compatible avec la structure de groupe de G ; quand on munit G de cette structure d'ordre, on dit que G est un sous-groupe ordonné de E .

Soient E, E' deux groupes ordonnés ; conformément aux définitions générales (Ens. (rés.), § 8), une application biunivoque f de E sur E' est un isomorphisme de la structure de groupe ordonné de E sur celle de E' si c'est à la fois un isomorphisme de la structure de groupe et un isomorphisme de la structure d'ordre (c'est-à-dire une fonction strictement croissante) ; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que f vérifie les conditions suivantes :

1° $f(x+y)=f(x)+f(y)$ quels que soient x et y dans E ;

2° $f(x) > 0$ quel que soit $x > 0$ dans E .

Topologie d'un groupe ordonné. Considérons, dans un groupe ordonné E , l'ensemble $\mathfrak{F}$ des intervalles ouverts $]-a,a[$, a parcourant l'ensemble des éléments >0 de E . $\mathfrak{F}$ est évidemment une base de filtre, qui satisfait aux axiomes (GV'_I), (GV'_{III}) et (GV'_{IV}) ; montrons que $\mathfrak{F}$ satisfait aussi à (GV'_{II}). Nous distinguerons deux cas :

a) il existe, parmi les éléments >0 de E , un plus petit élément α. On a alors $]-\alpha, \alpha[= \{0\}$, et la condition (GV'_{II}) est évidemment remplie ;

Ce cas est celui du groupe ordonné N' des entiers (sous-groupe du groupe additif ordonné des rationnels).

b) l'ensemble des éléments >0 de E n'a pas de plus petit élément. Dans ce cas, soit a un élément >0 quelconque ; il existe un élément b tel que $0 < b < a$; on a donc $a-b > 0$.

Soit c un élément tel que $c < b$ et $c < a-b$; on a donc $2c < a$, d'où $]-c,c[+]-c,c[\subset]-a,a[$.

Ce cas est celui du groupe additif ordonné des rationnels.

$\mathfrak{F}$ est donc un système fondamental de voisinages de 0 dans une topologie sur E , compatible avec la structure de groupe de E ; on dit que cette topologie est *déterminée* par la structure de groupe ordonné de E .

Définition 3. *Une structure de groupe ordonné sur un ensemble E , et la topologie déterminée par cette structure, définissent sur E une structure de groupe topologique ordonné*. *E , muni de cette structure est appelé groupe topologique ordonné*.

Pour abréger, on dira souvent "groupe ordonné" au lieu de "groupe topologique ordonné", même lorsqu'on considèrera le groupe muni de sa topologie ; il sera toujours sous-entendu alors que cette topologie est celle qui est déterminée par la structure de groupe ordonné. Il ne faudrait pas croire d'ailleurs qu'il n'existe pas d'autre topologie compatible avec la structure de *groupe* d'un groupe ordonné en dehors de celle déterminée par sa structure de *groupe ordonné*. Sur le groupe additif des rationnels, par exemple, nous avons déjà défini toutes les topologies p-adiques et la topologie discrète, qui sont toutes compatibles avec sa structure de groupe, et distinctes de sa topologie de groupe ordonné.

L'intersection des ensembles de $\mathfrak{F}$ est réduite au point 0 ; on voit donc que *tout groupe topologique ordonné est séparé*.

Un système fondamental de voisinages d'un point x d'un groupe ordonné E , est formé par les intervalles ouverts $]x-a,x+a[$, où a parcourt l'ensemble des éléments >0 de E. Il en résulte que tout intervalle ouvert I (borné ou non) est un ensemble ouvert dans E ; en effet, si x est un point quelconque de I, il existe un intervalle ouvert borné $]b,c[$ contenant x et contenu dans I ; si a est le plus petit des éléments $x-b$, $c-x$, on a aussi $]x-a,x+a[\subset I$, ce qui montre que I est un voisinage de chacun de ses points. On voit en outre que l'ensemble des intervalles ouverts forme un système de générateurs (et même une base) de la topologie de E (ch.I, § 2).

De même, tout intervalle fermé (borné ou non) est un ensemble fermé ; en effet, tout intervalle illimité $[a,\rightarrow[$ (resp. $]\leftarrow,a]$) est complémentaire de l'intervalle ouvert $]\leftarrow, a[$ (resp. $]a,\rightarrow[$) ; et un intervalle borné fermé $[a,b]$ est l'intersection des intervalles $[a,\rightarrow[$ et $]\leftarrow, b]$.

On aura un système fondamental d'entourages de la structure uniforme d'un groupe topologique ordonné E, en considérant, pour chaque $a>0$, l'ensemble V_a des couples (x,y) tels que $-a<y-x<a$.

On voit donc que, sur le groupe additif ordonné $\mathbb{Q}$ des rationnels, la topologie déterminée par la structure de groupe ordonné est la topologie de la droite rationnelle (ch. I, §1), et la structure uniforme correspondante la structure uniforme additive des rationnels (ch.II, §1). Aussi le groupe additif des rationnels, muni de la topologie de la droite rationnelle, est-il encore appelé groupe additif de la droite rationnelle.

Remarque. La topologie de groupe ordonné sur le groupe additif $\mathbb{N}'$ des entiers est la topologie discrète ; elle est donc identique à la topologie induite par celle du

groupe additif de la droite rationnelle. Mais il peut se faire que, dans un groupe topologique ordonné E , la topologie induite sur un sous-groupe G de E soit distincte de la topologie de groupe ordonné de ce sous-groupe(1).

Si E et E' sont deux groupes ordonnés, et si f est un isomorphisme de la structure de groupe ordonné de E sur celle de E' , f est aussi un isomorphisme de la topologie de groupe ordonné de E sur celle de E' , d'après la définition de ces topologies.

Groupes archimédiens. Soit E un groupe topologique ordonné ; cherchons à quelle condition E est engendré par un voisinage quelconque de l'unité. Il faut d'abord que E ne soit pas discret, s'il comprend plus d'un élément ; car le groupe engendré par l'unité se réduit à ce point. Soit alors $]-a,a[$ un intervalle ouvert symétrique quelconque ; si E est engendré par cet intervalle, tout élément $x \in E$ se met sous la forme $x_1+x_2+\ldots+x_n$, les x_i étant dans $]-a,a[$. Il en résulte que $x \leqslant na$.

Définition 4. On dit qu'un groupe ordonné E est archimédien si, pour tout couple d'éléments a,x de E tels que $a > 0$, il existe un entier n tel que $x < na$.

Tout groupe ordonné engendré par un voisinage quelconque de l'unité est donc archimédien. Réciproquement supposons que E comprenne plus d'un élément, ne soit pas discret et soit archimédien ; si a est un élément > 0 quelconque de E , il existe au moins un élément $b > 0$ dans $]-a, a[$. Soit x un élément quelconque de E , et n le plus grand entier tel que $nb \leqslant x$. On a $x = (x-nb)+nb$, et $0 \leqslant x-nb < b$, donc $x-nb \in]-a,a[$, et x appartient bien au groupe engendré par $]-a,a[$. On a donc la proposition suivante :

34

<u>Proposition 1. Pour qu'un groupe ordonné comprenant plus d'un élément soit engendré par un voisinage quelconque de l'unité, il faut et il suffit qu'il soit archimédien et non discret.</u>

Le groupe additif $\mathbb{Q}$ de la droite rationnelle satisfait à ces deux conditions ; il est donc engendré par tout voisinage de 0.

<u>Complétion d'un groupe ordonné</u>. Soit E un groupe topologique ordonné, $\hat{E}$ son groupe complété ; nous supposerons $E \subset \hat{E}$. Nous allons voir qu'on peut définir sur $\hat{E}$ une structure d'ordre telle que :

1° elle soit compatible avec la structure de groupe de $\hat{E}$;

2° elle induise sur E la structure d'ordre donnée sur ce groupe ;

3° la topologie déterminée sur $\hat{E}$ par cette structure d'ordre soit identique à celle obtenue par complétion de E.

1° Soient P et N les ensembles des éléments positifs (resp. négatifs) de E, $\overline{P}$ et $\overline{N}$ leurs adhérences dans $\hat{E}$; on a $P \cup N = E$, d'où $\overline{P} \cup \overline{N} = \hat{E}$. Soit a un élément appartenant à $\overline{P} \cap \overline{N}$; on sait que les adhérences des voisinages symétriques de 0 dans E forment un système fondamental de voisinages de 0 dans $\hat{E}$; soit $V = [-b, b]$ un voisinage fermé de 0 dans E ; il existe un voisinage symétrique W de 0 dans E tel que $\overline{W}+\overline{W} \subset \overline{V}$. D'après l'hypothèse, il existe $x \in P$ et $y \in N$ tels que $x-a \in \overline{W}$, $y-a \in \overline{W}$, d'où $x-y \in \overline{W}+\overline{W} \subset \overline{V}$, et comme $x-y \in E$, $x-y \in V$. On a donc $0 \leqslant x \leqslant y+b$, et comme $y \leqslant 0$, on a $0 \leqslant x \leqslant b$, autrement dit $x \in V \subset \overline{V}$, d'où $a \in \overline{V}+\overline{V}$. Comme $\hat{E}$ est séparé et V quelconque, on en déduit $a=0$, autrement dit, $\overline{P} \cap \overline{N} = \{0\}$.

La fonction $-x$ est continue, et applique P sur N et réciproquement. On en déduit que $-\overline{P} \subset \overline{N}$ et $-\overline{N} \subset \overline{P}$, d'où $-\overline{P} = \overline{N}$.

Enfin, la fonction $x+y$ est continue dans $\hat{E} \times \hat{E}$, et applique $P \times P$ sur P ; elle applique donc aussi $\overline{P} \times \overline{P}$ dans $\overline{P}$, autrement dit $\overline{P}+\overline{P}\subset\overline{P}$.

Les ensembles $\overline{P}$ et $\overline{N}$ définissent donc sur E une structure d'ordre compatible avec la structure de groupe, et dans laquelle $\overline{P}$ est l'ensemble des éléments positifs, $\overline{N}$ l'ensemble des éléments négatifs.

2° Comme P est fermé dans E , on a $\overline{P}\cap E = P$, donc, si x et y sont dans E , la relation $y-x\in\overline{P}$ est équivalente à $y-x\in P$, ce qui montre que la structure d'ordre induite sur E par celle de $\hat{E}$ est identique à la structure d'ordre donnée sur E.

3° Soit $\mathcal{C}$ la topologie sur $\hat{E}$ obtenue par complétion de E , et $\mathcal{C}'$ la topologie déterminée par la structure d'ordre de $\hat{E}$.

Soit a un élément >0 quelconque de $\hat{E}$; on a , dans $\hat{E}$, $[a,\rightarrow[\ = a+\overline{P}$, donc cet intervalle est un ensemble fermé pour la topologie $\mathcal{C}$; on voit de même que $]\leftarrow,-a]$ est fermé, et par suite que $]-a,a[$ est un ensemble ouvert pour la topologie $\mathcal{C}$, ce qui montre que $\mathcal{C}$ est plus fine que $\mathcal{C}'$. Soit d'autre part b un élément >0 de E ; l'intervalle $S =]-b,b[$ de E est dense par rapport à l'intervalle $S' =]-b,b[$ de $\hat{E}$, pour la topologie $\mathcal{C}$, puisque S' est un ensemble ouvert pour $\mathcal{C}$, et que S est sa trace sur E ; on a donc $S'\subset\overline{S}$, $\overline{S}$ étant l'adhérence de S pour la topologie $\mathcal{C}$. Or, lorsque b parcourt l'ensemble des éléments >0 de E , les ensembles $\overline{S}$ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathcal{C}$; la relation précédente montre que $\mathcal{C}'$ est plus fine que $\mathcal{C}$, ce qui achève d'établir que ces deux topologies sont identiques.

On remarquera que, si b est un élément >0 de E, l'intervalle $I' = [-b,b]$ de $\hat{E}$ est l'adhérence de l'intervalle $I = [-b,b]$ de E ; en effet, I' est fermé dans $\hat{E}$ et contient I ;

d'autre part, si x est un point de I' distinct de b et $-b$, tout intervalle ouvert contenant x et contenu dans I' contient un point de E, qui appartient nécessairement à I, d'où la proposition.

On a vu (ch.III, § 4) que si un groupe est engendré par un voisinage quelconque de l'unité, il en est de même de son complété. Il en résulte que si un groupe ordonné est archimédien, il en est de même de son complété.

On a en outre la proposition suivante :

Proposition 2. Pour qu'une partie A d'un groupe ordonné archimédien et complet E soit relativement compacte, il faut et il suffit qu'elle soit bornée.

La condition est nécessaire : il suffit de montrer que tout intervalle $[-a,a]$ est compact ; comme c'est un ensemble fermé dans un espace complet, il suffira de voir que, pour tout élément $b > 0$ de E, on peut recouvrir $[-a,a]$ par un nombre fini d'intervalles de la forme $]x-b, x+b[$. Or, soit n un entier tel que $nb > a$; si x est un élément quelconque de $]-a,a[$, et m le plus grand entier tel que $mb \leq x$, on a $-n < m < n$, et $-b < x - mb < b$, ce qui montre que $]-a,a[\subset \bigcup_{k=-n}^{+n}](k-1)b, (k+1)b[$.

La condition est suffisante. Soit en effet A une partie relativement compacte de E, et a un élément > 0 de E. Il existe un nombre fini d'éléments x_i $(i = 1,2,\dots,n)$ de E tels que $A \subset \bigcup_i]x_i-a, x_i+a[$. Si x_0 est le plus grand des éléments x_i, $-x_i$, et m un entier tel que $x_0 < ma$, on a $-ma < x_i < ma$ $(i = 1,2,\dots,n)$, d'où $A \subset]-(m+1)a, (m+1)a[$.

<u>Noyaux de groupe ordonnés</u>. Soit E un ensemble totalement ordonné. Supposons donnés : 1° un élément $0 \in E$; 2° un intervalle ouvert V_0 de E contenant 0 ; 3° une application $(x,y) \longrightarrow x+y$ de $V_0 \times V_0$ dans E ; 4° une application $x \longrightarrow -x$ de V_0 dans E , de sorte que l'axiome (NG_I) (ch.III, § 1), où on remplace la notation multiplicative par la notation additive, soit vérifié ; on suppose en outre qu'on a $x+y = y+x$ chaque fois que les deux membres sont définis, et enfin qu'on a la propriété suivante :

(NGO) <u>La relation</u> $x \leqslant y$ <u>entraîne</u> $x+z \leqslant y+z$ <u>et</u> $-y \leqslant -x$ <u>chaque fois que les deux membres de ces inégalités sont définis</u>.

Munissons alors E de la topologie <u>engendrée par l'ensemble des intervalles ouverts de E</u> . Nous allons voir que pour cette topologie $-x$ et $x+y$ sont continues respectivement dans un voisinage W_0 de 0 , et dans le produit $W_0 \times W_0$; il en résultera qu'on aura ainsi défini sur E une structure de <u>noyau de groupe</u> (ch.III, § 1) ; une structure de noyau de groupe obtenue de cette manière est dite <u>structure de noyau de groupe ordonné</u>.

Pour établir la continuité de $-x$, il suffit de remarquer que cette fonction transforme un intervalle ouvert contenu dans V_0 en un intervalle ouvert, d'après (NGO) ; il en résulte que les intervalles symétriques $]-c,c[$ forment un système fondamental de voisinages de 0 . Considérons un tel intervalle $I =]-c,c[\subset V_0$; si cet intervalle se réduit au point 0, il est clair que $x+y$ est continue dans $I \times I$; sinon, il existe b tel que $0 < b < c$; si a est le plus petit des éléments b et $c-b$, les conditions $-a < x < a$ et $-a < y < a$ entraînent $-c < x+y < c$, d'où la continuité de $x+y$ dans $W_0 \times W_0$, si on pose $W_0 =]-a,a[$.

Soit $x > 0$ un élément quelconque de W_o ; si $0 < y \leqslant x$, l'ensemble des entiers $n > 0$ tels que ny soit défini et $\leqslant x$ n'est pas vide et si $n > 1$ appartient à cet ensemble, il en est de même de $n-1$. Lorsque cet ensemble n'est pas identique à $\mathbb{N}$, il admet donc un plus grand élément n_o ; comme $n_o y \leqslant x$, $(n_o+1)y$ est défini, et on a $n_o y \leqslant x < (n_o+1)y$, ou encore $x = n_o y+z$ avec $0 \leqslant z < x$. Lorsque pour tout $x > 0$ appartenant à W_o , et tout y tel que $0 < y \leqslant x$, il existe un entier n_o ayant la propriété précédente, on dit que le noyau de groupe E est <u>archimédien</u>.

Tout noyau de groupe obtenu par <u>restriction</u> d'un groupe ordonné à un voisinage de 0 est évidemment un noyau de groupe ordonné ; si le groupe est archimédien, il en est de même du noyau de groupe correspondant.

Soient E, E' deux noyaux de groupe ordonnés, f une application biunivoque de E sur E', g son application réciproque. Si on a $f(x+y)=f(x)+f(y)$, et $g(x'+y')=g(x')+g(y')$ lorsque les expressions qui figurent dans ces expressions sont définies, et si en outre f est strictement croissante, il est clair que f est un <u>isomorphisme</u> de la structure de noyau de groupe de E sur celle de E' .

§ 2. Définition et propriétés topologiques fondamentales de la droite numérique.

<u>Nombres réels. Droite numérique</u>. <u>Définition 1</u>. <u>On désigne par $\mathbb{R}$ le groupe complété du groupe additif $\mathbb{Q}$ de la droite rationnelle</u>. <u>Les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés nombres réels</u> ; <u>en tant qu'espace topologique, $\mathbb{R}$ est appelé droite numérique</u> ; <u>en tant que groupe topologique ordonné, on l'appelle groupe additif de la droite numérique</u>.

On identifiera toujours $\mathbb{Q}$ avec le sous-groupe partout dense de $\mathbb{R}$ auquel il est isomorphe ; avec cette convention, tout nombre rationnel est un nombre réel. Tout nombre réel non rationnel est dit <u>irrationnel</u>.

On a vu (ch.II, §3) que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet ; il existe donc des nombres irrationnels. En outre, si x est irrationnel, $x+r$ est irrationnel, quel que soit le nombre rationnel r ; on en déduit que l'ensemble des nombres irrationnels est <u>partout dense</u> dans $\mathbb{R}$, car si a et b sont deux nombres quelconques de $\mathbb{R}$ tels que $a < b$, et x un nombre irrationnel, on a $a-x < b-x$; il existe donc un nombre rationnel r tel que $a-x < r < b-x$, d'où $a < x+r < b$, et $x+r$ est irrationnel.

D'après le § 1, les intervalles $\left[-r,r\right]$, où r parcourt l'ensemble des nombres rationnels >0 , forment un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathbb{R}$. Il en est de même des intervalles $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, où n parcourt l'ensemble des entiers >0 . Par suite :

<u>Proposition 1</u>. <u>Tout point de la droite numérique possède un système fondamental dénombrable de voisinages</u>.

La structure uniforme du groupe additif $\mathbb{R}$ de la droite numérique est encore appelée <u>structure uniforme de la droite numérique</u>. Si, pour tout nombre réel $a > 0$, on appelle V_a l'ensemble des points (x,y) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tels que $-a < y-x < a$ les ensembles V_a forment un système fondamental d'entourages de cette structure uniforme, lorsque a parcourt l'ensemble des nombres réels >0 (ou l'ensemble des rationnels >0 , ou l'ensemble des inverses des entiers >0).

Lorsqu'on parlera de la droite numérique comme d'un espace uniforme il faudra toujours sous-entendre qu'il s'agit de $\mathbb{R}$ muni de la structure uniforme précédente.

On appelle <u>valeur absolue</u> du nombre réel x , et on désigne par $|x|$ le nombre x si $x \geqslant 0$, le nombre $-x$ si $x < 0$; si a est un nombre réel >0 , l'inégalité $|x| \leqslant a$ est équivalente à $-a \leqslant x \leqslant a$, l'inégalité $|x| < a$ à $-a < x < a$. On a donc toujours $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$, d'où l'inégalité dite <u>triangulaire</u>

(1) $$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$

l'égalité n'ayant lieu que si x et y sont tous deux positifs, ou tous deux négatifs. De cette inégalité, on déduit que

(2) $$\big|\,|x| - |y|\,\big| \leqslant |x-y|$$

Comme l'entourage V_a n'est autre que l'ensemble des couples (x,y) tels que $|y-x| < a$, on voit que $|x|$ est une fonction <u>uniformément continue</u> dans $\mathbb{R}$; elle prolonge évidemment la fonction $|x|$ déjà définie sur l'ensemble des rationnels.

La fonction $x-y$ est <u>uniformément continue</u> (et par suite continue) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Si f et g sont deux applications d'un ensemble E dans $\mathbb{R}$, on désigne par $f+g$ la fonction dont la valeur en un point quelconque $x \in E$ est $f(x)+g(x)$. Soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur E ; si $\lim_{\mathfrak{F}} f$ et $\lim_{\mathfrak{F}} g$ existent, $\lim_{\mathfrak{F}} (f+g)$ existe et est égale à $\lim_{\mathfrak{F}} f + \lim_{\mathfrak{F}} g$. On désigne de même par $-f$ la fonction dont la valeur en x est $-f(x)$; si $\lim_{\mathfrak{F}} f$ existe, $\lim_{\mathfrak{F}} (-f)$ existe et est égale à $-\lim_{\mathfrak{F}} f$.

En particulier, si E est un espace topologique, et si f et g sont continues en un point x_0 , $-f$ et $f+g$ sont aussi continues en ce point. Si E est un espace uniforme, et si f et g sont uniformément continues dans E , $-f$ et $f+g$ sont uniformément continues dans E .

Soit $x \in \mathbb{R}$; on pose $x^+=(x+|x|)/2$, $x^-=(|x|-x)/2$; x^+ est donc égal à x si $x \geqslant 0$, à 0 si $x \leqslant 0$; x^- est égal à 0 si $x \geqslant 0$, à $-x$ si $x \leqslant 0$; on a $x = x^+-x^-$, $|x| = x^+ + x^-$. D'après ce qui précède, ces fonctions sont uniformément continues dans $\mathbb{R}$.

Si x et y sont deux nombres réels, on a $\mathrm{Max}(x,y)= x+(y-x)^+$, $\mathrm{Min}(x,y)= x-(y-x)^-$; on voit donc que les fonctions $\mathrm{Max}(x,y)$, $\mathrm{Min}(x,y)$ sont uniformément continues dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Des résultats du § 1, on déduit que $\mathbb{R}$ est un groupe <u>archimédien</u> ; donc (§ 1, prop. 2) :

<u>Théorème 1. Pour qu'une partie de $\mathbb{R}$ soit relativement compacte, il faut et il suffit qu'elle soit bornée.</u>

<u>Corollaire. La droite numérique est un espace localement compact.</u>

<u>Parties connexes de la droite numérique.</u> <u>Proposition 2. Sur la droite numérique, tout intervalle est connexe.</u>

<u>Borne d'une ensemble.</u>

Démontrons-le d'abord pour un intervalle <u>compact</u> $[a,b]$. Il suffira alors (ch.II, § 4, prop.4) de montrer que deux points quelconques x,y de $[a,b]$ $(x < y)$ peuvent être joints par une $V_{1/n}$-chaîne, quel que soit l'entier $n > 0$. Or, soit p le plus grand entier tel que $p/n \leqslant x$, q le plus grand entier tel que $q/n \leqslant y$ (ces entiers existent puisque $\mathbb{R}$ est archimédien) ; on a $q \geqslant p$. Si $q = p$, on a $y-x < 1/n$, les points x et y forment déjà une $V_{1/n}$-chaîne. Si $q > p$, on posera $x_i=(p+i)/n$ $(i=1,2,\ldots,q-p)$; on a $x_1-x < 1/n$, $y-x_{q-p} \leqslant 1/n$, $x_{i+1}-x_i = 1/n$, donc les points $x,x_1,x_2,\ldots,x_{q-p},y$ forment une $V_{1/n}$-chaîne joignant x et y, ce qui établit la proposition dans ce cas.

Si maintenant I est un intervalle quelconque (borné ou non), montrons que I ne peut avoir deux composantes connexes distinctes ; sinon, en désignant par a, b deux points appartenant à deux composantes différentes et tels que $a < b$, l'intervalle $[a,b]$ serait connexe, contenu dans I et rencontrerait deux composantes distinctes, ce qui est absurde. I est donc connexe.

<u>Corollaire 1</u>. <u>La droite numérique est un espace connexe</u>.

<u>Corollaire 2</u>. <u>L'image d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ par une application continue f de I dans un espace topologique E , est un ensemble connexe</u>.

Rappelons (Ens.(rés.) §6) qu'on a défini la <u>borne supérieure</u> d'une partie A d'un ensemble ordonné E comme <u>le plus petit majorant</u> de A. On a le théorème fondamental suivant :

<u>Théorème 2</u>. <u>Sur la droite numérique, toute partie majorée et non vide possède une borne supérieure</u>.

Remarquons d'abord que l'ensemble des majorants (resp. minorants) d'une partie non vide A de $\mathbb{R}$, est <u>fermé</u>, car c'est l'intersection des intervalles $[x, \rightarrow[$ (resp. $]\leftarrow, x]$) lorsque x parcourt A.

Soit alors A un ensemble non vide et majoré, et soit B l'ensemble des majorants de A ; B est fermé et non vide. Soit C l'ensemble des minorants de B ; C contient A, donc n'est pas vide, et est fermé. Si un nombre réel x n'est pas un majorant de A , il est inférieur à un nombre de A , donc à tous les nombres de B , autrement dit $x \in C$. On a donc $\mathbb{R} = B \cup C$; comme $\mathbb{R}$ est connexe, $B \cap C$ n'est pas vide, ce qui montre que B possède un plus petit élément, d'où la proposition.

On voit de même que toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée possède une *borne inférieure*. Aussi dit-on souvent "ensemble borné supérieurement (resp. inférieurement)" au lieu d'"ensemble majoré (resp. minoré)" quand il s'agit de parties de $\mathbb{R}$.

La borne supérieure b d'un ensemble A majoré et non vide est caractérisée par les deux propriétés suivantes :

1° quel que soit $x \in A$, $x \leqslant b$;

2° quel que soit $a < b$, il existe $x \in A$ tel que $a < x \leqslant b$.

La seconde de ces propriétés montre que b est *adhérent à A* ; d'ailleurs, tout nombre $> b$ est extérieur à A , donc

Proposition 3. *La borne supérieure d'un ensemble majoré et non vide est le plus grand nombre adhérent à cet ensemble*.

En particulier, la borne supérieure d'un ensemble *fermé* (majoré et non vide) appartient à cet ensemble.

On a des énoncés correspondant aux précédents pour la borne inférieure.

> Un intervalle d'origine a et d'extrémité b a pour borne supérieure b et pour borne inférieure a ; la borne inférieure d'un intervalle illimité d'origine a est a ; la borne supérieure d'un intervalle illimité d'extrémité b est b .

Le théorème 2 permet de *caractériser les intervalles* parmi les parties de $\mathbb{R}$:

Proposition 4. *Pour qu'une partie non vide A de $\mathbb{R}$ soit un intervalle, il faut et il suffit que, quels que soient a et b dans A*, $(a \leqslant b)$, *l'intervalle fermé* $[a,b]$ *soit contenu dans A*.

Il faut simplement montrer que la condition est *suffisante*.

Soit a un point quelconque de A. Si A n'est pas borné supérieurement, l'intervalle $[a, \rightarrow[$ est contenu dans A ; en effet, si $x > a$, il existe $b \in A$ tel que $a < x \leqslant b$, donc $x \in A$ d'après l'hypothèse. Si A est borné supérieurement, soit m sa borne supérieure ; l'intervalle $[a,m[$ est contenu dans A, car si x est tel que $a < x < m$, il existe $b \in A$ tel que $x < b \leqslant m$, d'où $x \in A$ d'après l'hypothèse.

On voit de même que si A n'est pas borné inférieurement, l'intervalle $]\leftarrow, a]$ est contenu dans A ; et si A est borné inférieurement, m désignant sa borne inférieure, l'intervalle $]m,a]$ est contenu dans A.

Il suffit alors d'examiner les quatre combinaisons des éventualités précédentes, et de remarquer que la borne supérieure (resp. inférieure) d'un ensemble peut ou non lui appartenir, pour voir que, dans tous les cas, A est un intervalle.

On en déduit la réciproque de la proposition 2 ; autrement dit, on a le théorème suivant :

<u>Théorème 3</u>. <u>Pour qu'une partie A de $\mathbb{R}$ soit connexe, il faut et il suffit que A soit un intervalle</u>.

Nous n'avons à démontrer que la <u>nécessité</u> de cette condition. Soit donc A connexe, et supposons qu'il contienne plus d'un point (dans le cas contraire le théorème est évident) ; si a et b sont deux points de A tels que $a < b$, nous allons voir que tout point x tel que $a < x < b$ appartient à A, ce qui démontrera la proposition d'après la prop.4. Or A ne peut être contenu dans $\complement \{x\}$, car cet ensemble est la réunion des deux ensembles ouverts non vides $]\leftarrow, x[$ et $]x, \rightarrow[$ qui sont sans point commun et dont chacun rencontre A ; donc $x \in A$.

Corollaire 1. Les seules parties de $\mathbb{R}$ qui soient à la fois compactes et connexes sont les intervalles fermés bornés.

Corollaire 2. L'image d'une partie connexe A d'un espace topologique E par une application continue de A dans $\mathbb{R}$ est un intervalle.

Le théorème 3 montre que, sur $\mathbb{R}$, un ensemble ne contenant aucun intervalle est totalement discontinu ; il en est ainsi en particulier, de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, puisque l'ensemble des nombres irrationnels est partout dense.

Homéomorphismes d'un intervalle sur un autre.

Théorème 4. Pour qu'une application f d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ soit un homéomorphisme de I sur un intervalle, il faut et il suffit que f soit strictement monotone et continue dans I .

1° La condition est nécessaire. En effet, soient a,b deux points de I $(a < b)$; si f est un homéomorphisme de I sur f(I), l'image réciproque par f de l'intervalle fermé de bornes f(a) et f(b) est connexe, donc c'est un intervalle qui contient a et b , et qui contient par suite $[a,b]$; autrement dit, quel que soit c tel que $a \leq c \leq b$, f(c) appartient à l'intervalle fermé de bornes f(a) et f(b) , ce qui montre que f est monotone. Comme f est une application biunivoque, elle est strictement monotone.

2° La condition est suffisante. Supposons f continue et strictement monotone dans I ; f(I) est connexe, donc un intervalle ;

si J est un intervalle compact contenu dans I , f(J) est un ensemble compact et connexe, donc un intervalle compact contenu dans f(I) ; en outre, comme f est strictement monotone, si x est intérieur à J (resp. une borne de J), f(x) est intérieur à f(J) (resp. une borne de f(J)). Par suite, l'image par f d'un voisinage dans I d'un point $x \in I$, est un voisinage de f(x) dans f(I), ce qui montre que f est bicontinue.

<u>Structure des ensembles ouverts dans</u> $\mathbb{R}$. <u>Proposition 5</u>. <u>Toute composante connexe d'un ensemble non vide ouvert dans</u> $\mathbb{R}$ <u>est un intervalle ouvert</u>.

Soit A un ensemble ouvert non vide dans $\mathbb{R}$; si $A = \mathbb{R}$ la proposition est évidente. Sinon, soit I une composante connexe de A ; c'est un intervalle, qui est borné supérieurement ou inférieurement ; supposons par exemple qu'il soit borné supérieurement, et soit b sa borne supérieure ; b n'appartient pas à I , sans quoi, il existerait un intervalle ouvert J contenant b et contenu dans A ; $I \cup J$ serait un intervalle contenu dans A et contenant des points $x > b$, donc I ne serait pas une composante connexe de A . On voit de même que, si I est borné inférieurement, sa borne inférieure n'appartient pas à I , et ces résultats montrent que I est un intervalle ouvert.

<u>Définition 2</u>. <u>On appelle longueur d'un intervalle borné d'origine a et d'extrémité b , le nombre b-a</u> .

La longueur d'un intervalle borné est toujours un nombre $\geqslant 0$; elle n'est $= 0$ que pour un intervalle réduit à un point (en particulier, tout intervalle ouvert borné a une longueur > 0).

Définition 3. On dit que deux intervalles sont empiétants quand ils ont des points intérieurs communs. On dit qu'une famille d'intervalles $\mathcal{F}$ est formée d'intervalles non empiétants, s'il n'existe aucun couple d'intervalles empiétants distincts et appartenant à $\mathcal{F}$.

Proposition 6. Soit $\mathcal{F}$ une famille finie d'intervalles non empiétants contenus dans un intervalle borné I ; la somme des longueurs des intervalles de $\mathcal{F}$ est au plus égale à la longueur de I.

Soit à l'origine, b l'extrémité de I. Nous démontrerons la proposition par récurrence sur le nombre n d'intervalles de la famille $\mathcal{F}$. Elle est évidente si $n=1$, car les relations $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$ entraînent $d-c \leqslant b-a$. Supposons-là établie pour $n-1$; soient c et d l'origine et l'extrémité de l'intervalle de $\mathcal{F}$ dont l'extrémité est la plus grande, et $\mathcal{F}'$ la famille des intervalles de $\mathcal{F}$ autres que l'intervalle de bornes c et d. Comme les intervalles de $\mathcal{F}$ sont non empiétants, les intervalles de $\mathcal{F}'$ sont tous contenus dans $[a,c]$, donc la somme σ' de leurs longueurs est inférieure à $c-a$; d'autre part, on a $d-c \leqslant b-c$, d'où, pour la somme σ des longueurs des intervalles de $\mathcal{F}$,
$\sigma = \sigma' + (d-c) \leqslant (c-a)+(b-c) = b-a$, ce qui démontre la proposition.

Proposition 7. Une famille $\mathcal{F}$ d'intervalles non empiétants non bornés, ou de longueurs strictement positives, est dénombrable.

Soit p un entier quelconque, $\mathcal{F}_p$ la famille des intersections non vides des intervalles de $\mathcal{F}$ avec $]p,p+1[$: tout intervalle de $\mathcal{F}$, ayant des points intérieurs par hypothèse, a une intersection non vide avec un au moins des intervalles $]p,p+1[$;

48

il suffit donc de montrer que $\mathfrak{F}_p$ est dénombrable. Or, les ensembles de $\mathfrak{F}_p$ sont de nouveau des intervalles non empiétants de longueur strictement positive ; soit $\mathfrak{F}_{p,n}$ la famille de ceux dont la longueur est $\geqslant 1/n$ $(n=1,2,\ldots)$. D'après la proposition 6 , une partie finie de $\mathfrak{F}_{p,n}$ ne peut contenir plus de n intervalles ; donc $\mathfrak{F}_{p,n}$, est finie, et comme $\mathfrak{F}_p$ est la réunion des $\mathfrak{F}_{p,n}$, $\mathfrak{F}_p$ est dénombrable.

Si maintenant on remarque qu'un intervalle ouvert est non borné, ou a une longueur >0 , on voit qu'on peut énoncer le théorème suivant :

<u>Théorème 5</u>. <u>Tout ensemble ouvert non vide dans</u> $\mathbb{R}$ <u>est la réunion d'une famille dénombrable d'intervalles ouverts non empiétants</u>.

Par passage aux complémentaires, on voit que tout ensemble fermé F est le complémentaire d'une réunion dénombrable d'intervalles ouverts non empiétants ; ces intervalles sont dits <u>contigus</u> à F ; si deux intervalles contigus ont une borne commune a , ce point est <u>isolé</u> dans F .

§ 3. La multiplication des nombres réels.

Nous avons défini en Algèbre (ch. , §) le produit de deux nombres rationnels xy , qui est donc une application $(x,y) \to xy$ de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$; nous allons montrer qu'on peut la <u>prolonger par continuité</u> dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Il suffit de voir (ch. II, § 3, prop. 7) que, si $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ sont deux filtres de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, l'image du filtre $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$ par l'application $(x,y) \to xy$ est encore un filtre de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. Or, il existe des ensembles bornés dans un filtre de Cauchy sur $\mathbb{Q}$; soient A_0 , B_0 des ensembles bornés appartenant à $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ respectivement, et m un entier >0 tel que A_0 et B_0 soient contenus dans $[-m,m]$.

Soit n un entier >0 arbitraire, A un ensemble de $\mathfrak{F}$ contenu dans A_0 et tel que $|x'-x| < 1/nm$ quels que soient x, x' dans A , B un ensemble de $\mathfrak{G}$ contenu dans B_0 et tel que $|y'-y| < 1/nm$ quels que soient y, y' dans B . Quels que soient (x,y), (x',y') dans $A \times B$, on a

$$|x'y'-xy| = |x'(y'-y)+y(x'-x)| < 2\,n$$

d'où la proposition.

Nous désignerons encore par xy la fonction ainsi prolongée dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; elle est continue dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, donc uniformément continue sur toute partie relativement compacte de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Les fonctions $x(yz)-(xy)z$, $xy-yx$, $x(y+z)-(xz+yz)$, $1.x-x$, sont continues dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et nulles dans $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, qui est partout dense dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; elles sont donc identiquement nulles. Autrement dit, les applications $(x,y) \longrightarrow x+y$ et $(x,y) \longrightarrow xy$ définissent sur $\mathbb{R}$ une structure d'anneau commutatif, dans laquelle 1 est l'élement unité.

Soit x un nombre réel $\neq 0$; l'application $y \longrightarrow xy$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est appelée homothétie de rapport x . C'est évidemment une représentation continue du groupe additif de la droite numérique sur un de ses sous-groupes $x\mathbb{R}$; ce sous-groupe est donc connexe. Or, il contient $x = x.1$ et $-x = x.(-1)$; il contient donc l'intervalle ouvert de bornes $-x$ et x , qui est un voisinage de 0 (puisque $x \neq 0$), donc un système de générateurs du groupe $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que $x\mathbb{R} = \mathbb{R}$. On en déduit d'abord que $1 \in x\mathbb{R}$, autrement dit que x possède un inverse $1/x$; $\mathbb{R}$ est donc un corps. L'application réciproque de l'homothétie de rapport x est l'homothétie de rapport $1/x$; on en conclut que toute homothétie est un isomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}$ sur lui-même.

L'ensemble P des nombres réels positifs est l'adhérence de $P \cap \mathbb{Q}$; comme xy applique $(P \cap \mathbb{Q}) \times (P \cap \mathbb{Q})$ dans P , elle applique $P \times P$ dans P : autrement dit, le produit de deux nombres positifs est positif. Les formules $(-x)y = -xy$, $(-x)(-y) = xy$ montrent alors que le produit d'un nombre positif par un nombre négatif est négatif, et le produit de deux nombres négatifs est positif. On en tire la relation $|xy| = |x|.|y|$. En outre, si $x \neq 0$, $x^2 > 0$; une somme de carrés ne peut donc être nulle que si chacun d'eux est nul.

Si $x > 0$, et $y' > y$, on a $x(y'-y) > 0$, donc $xy' > xy$; autrement dit, une homothétie de rapport > 0 conserve l'ordre de $\mathbb{R}$; comme $(-x)y = -xy$, on voit qu'une homothétie de rapport strictement négatif transforme l'ordre de $\mathbb{R}$ en l'ordre opposé.

Si $x > 0$, $1/x > 0$, car $x.(1/x) = 1 > 0$; on en déduit que, si $0 < x < y$, comme $xy > 0$, $x.(1/xy) < y.(1/xy)$, autrement dit $1/y < 1/x$; l'application $x \to 1/x$ de l'ensemble P^* des nombres > 0 sur lui-même est strictement décroissante. Elle transforme donc tout voisinage $]a,b[$ $(0 < a < b)$ d'un point $x_0 \in P^*$ en un ensemble contenu dans le voisinage $]1/b, 1/a[$ du point $1/x_0$; comme c'est une permutation de P^* , on en conclut qu'elle est bicontinue . On verrait de même que $\frac{1}{x}$ est continue dans l'ensemble N^* des nombres réels strictement négatifs.

Les résultats précédents montrent d'une part que P^* est un sous-groupe du groupe multiplicatif des nombres $\neq 0$ du corps $\mathbb{R}$, et, d'autre part, que la topologie induite sur P^* par celle de $\mathbb{R}$ est compatible avec la structure de groupe multiplicatif de P^* . Quand nous parlerons du groupe multiplicatif P^* comme d'un groupe topologique, c'est toujours de cette topologie qu'il sera question.

Nous verrons au ch. VI que ce groupe topologique est <u>isomorphe</u> au groupe additif de la droite numérique.

Soient f et g des applications d'un ensemble E dans $\mathbb{R}$; on désigne par fg la fonction dont la valeur en un point quelconque $x \in E$, est $f(x)g(x)$. Si $\mathfrak{F}$ est un filtre sur E, et si $\lim_{\mathfrak{F}} f$ et $\lim_{\mathfrak{F}} g$ existent, $\lim_{\mathfrak{F}} fg$ existe et est égale à $(\lim_{\mathfrak{F}} f)(\lim_{\mathfrak{F}} g)$, d'après la continuité de la fonction xy. De même, si $f(x) \neq 0$ dans E, on désigne par $1/f$ la fonction dont la valeur, en un point $x \in E$, est $1/f(x)$; si $\lim_{\mathfrak{F}} f$ existe et est $\neq 0$, $\lim_{\mathfrak{F}} 1/f$ existe et est égale à $1/(\lim_{\mathfrak{F}} f)$.

En particulier, si E est un espace topologique, et si f et g sont continues au point x_0, il en est de même de fg, et de $1/f$ si $f(x_0) \neq 0$. En rapprochant ces résultats de ceux du § 2, on voit que les fonctions continues sur un espace topologique E, et à valeurs dans $\mathbb{R}$, forment un <u>anneau commutatif</u>, dont l'élément unité est la fonction égale à la constante 1.

Plus particulièrement, si $E = \mathbb{R}$, comme la fonction x est continue dans $\mathbb{R}$, ainsi que toutes les fonctions constantes, on voit que <u>tout polynome en x à coefficients réels est une fonction continue dans</u> $\mathbb{R}$. Toute <u>fraction rationnelle</u> en x à coefficients réels est continue en tout point où son dénominateur n'est pas nul.

<u>Formation d'homéomorphismes d'intervalles</u>. On peut compléter le théorème 4 du § 2 par la proposition suivante :

<u>Proposition 1</u>. <u>La droite $\mathbb{R}$ et tous les intervalles ouverts sont homéomorphes à l'intervalle</u> $]-1,+1[$; <u>les intervalles de la forme</u> $[a,b[$, $]a,b]$, $[a,\rightarrow[$ <u>ou</u> $]\leftarrow,a]$, <u>sont homéomorphes à l'intervalle</u> $[-1,+1[$; <u>tous les intervalles compacts contenant plus d'un point sont homéomorphes à l'intervalle</u> $[-1,+1]$.

En ce qui concerne les intervalles <u>bornés</u>, il suffit de remarquer qu'on peut toujours trouver une application <u>linéaire</u> $x \rightarrow mx+n$ transformant a en -1 et b en +1 (ou vice-versa) ; comme une telle fonction est strictement monotone et continue, le théorème 4 du § 2 suffit à établir que c'est un homéomorphisme.

En second lieu, considérons la fonction $x/(1+|x|)$; elle est continue en tout point $x \in \mathbb{R}$, puisque $1+|x| \geqslant 1$; elle est strictement croissante, car elle a le signe de x, et si $0 \leqslant x < y$, on a $x/(1+x) < y/(1+y)$ comme on le vérifie immédiatement. C'est donc un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I ; on vérifie immédiatement qu'elle prend toute valeur z telle que $-1 < z < 1$, mais non les valeurs $+1$ et -1 ; d'où $I =]-1,+1[$.

La même fonction, restreinte à l'intervalle $]0,\rightarrow[$ (resp. $[0,\rightarrow[$) est un homéomorphisme de cet intervalle sur $]0,1[$ (resp. $[0,1[$) ; on en déduit aisément le reste de la proposition.

<u>Exercices</u>. 1) Montrer que xy n'est pas uniformément continue dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Montrer que $1/x$ est uniformément continue dans toute partie fermée de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0, mais n'est pas uniformément continue dans P^*.

2) Montrer que la structure uniforme du groupe multiplicatif P^* des nombres réels > 0, n'est pas comparable avec la structure induite sur P^* par celle de la droite numérique.

3) Soit f l'homéomorphisme $x \rightarrow x/(1+|x|)$ de $\mathbb{R}$ sur $]-1,+1[$; montrer que l'image réciproque, par f, de la structure uniforme du sous-espace $]-1,+1[$ de $\mathbb{R}$, est strictement moins fine que la structure uniforme de la droite numérique.

<u>Nombres p-adiques</u>. 4) On désignera par $\mathbb{Q}_p$ le groupe additif des rationnels p-adiques. Montrer que le groupe complété $\hat{\mathbb{Q}}_p$

n'est pas dénombrable (et par suite $\neq \mathbb{Q}_p$). (A chaque suite d'entiers (a_n) $(n=0,1,\dots)$, tels que $0 \leqslant a_n < p$ pour tout n, on associe la suite des entiers $b_n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n$; montrer que (b_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$, et que deux suites (b_n) correspondant à deux suites (a_n) distinctes, convergent vers deux points distincts de $\hat{\mathbb{Q}}_p$).

Les points de $\hat{\mathbb{Q}}_p$ sont appelés <u>nombres</u> p-<u>adiques</u> ; on identifie $\mathbb{Q}_p$ avec la partie partout dense de $\hat{\mathbb{Q}}_p$ qui lui est isomorphe.

5) Montrer que $\hat{\mathbb{Q}}_p$ est localement compact. (Si H_n est le sous-groupe de $\mathbb{Q}_p$ formé des rationnels dont le numérateur est divisible par p^n (n entier $\geqslant 0$), montrer que, pour tout entier $m > n$, $\bar{H}_n$ est contenu dans la réunion des ensembles $x + \bar{H}_m$, x prenant les valeurs entières $0, 1, \dots, p^m - 1$).

6) Montrer que $\hat{\mathbb{Q}}_p$ est totalement discontinu (établir que $\bar{H}_n$ est un sous-groupe ouvert de $\hat{\mathbb{Q}}_p$).

7) Pour tout point $x \neq 0$ de $\mathbb{Q}_p$, on pose $|x|_p = p^{-\rho}$, si ρ est le plus petit entier r (positif ou négatif) tel que x/p^r ait son numérateur premier avec p. Montrer que $|x|_p$ est uniformément continue dans $\mathbb{Q}_p$. On désigne encore par $|x|_p$ son prolongement à $\hat{\mathbb{Q}}_p$; quelles sont ses valeurs ? Montrer qu'on a, quels que soient x et y dans $\hat{\mathbb{Q}}_p$

$$(1) \qquad |x+y|_p \leqslant \operatorname{Max}(|x|_p, |y|_p)$$

8) Montrer que, si x et y sont rationnels,

$$(2) \qquad |xy|_p = |x|_p \cdot |y|_p$$

Déduire des relations (1) et (2) qu'on peut prolonger par continuité la fonction xy dans $\hat{\mathbb{Q}}_p$, et qu'elle y satisfait encore à (2).

9) Montrer qu'on peut prolonger par continuité la fonction $1/x$ à l'ensemble des nombres p-adiques $\neq 0$ (on fera voir qu'lle transforme en un filtre de Cauchy tout filtre sur Q_p qui converge vers un point $x_0 \neq 0$ de $\hat{Q}_p$). Les fonctions $x+y$ et xy définissent donc une structure de <u>corps commutatif</u> sur $\hat{Q}_p$.

§ 4. La droite numérique achevée.

Le fait que R est homéomorphe à l'intervalle <u>ouvert</u> $]-1,+1[$, conduit à penser qu'il doit être possible de "plonger" R dans un espace topologique qui serait homéomorphe à l'intervalle <u>fermé</u> $[-1,+1]$. Pour définir un tel espace, adjoignons à l'ensemble R deux nouveaux éléments, que nous désignerons par $+\infty$ et $-\infty$ (et qu'on lit respectivement "plus l'infini" et "moins l'infini") ; soit $\bar{R}$ l'ensemble ainsi obtenu. Dans cet ensemble, <u>prolongeons</u> la structure d'ordre de R en posant $-\infty < a$, $a < +\infty$, $-\infty < +\infty$, quel que soit $a \in R$; on vérifie immédiatement que, muni de cette structure d'ordre, $\bar{R}$ est <u>totalement ordonné</u>. En second lieu, définissons sur $\bar{R}$ une topologie, de la façon suivante : pour tout point $x \in R$, un système fondamental de voisinages est formé des intervalles ouverts contenant x ; pour le point $+\infty$, un système fondamental de voisinages sera formé des intervalles $]x,+\infty]$, où x parcourt R ; enfin, un système fondamental de voisinages de $-\infty$ sera formé des intervalles $[-\infty,x[$, x parcourant R. On voit aussitôt qu'on définit bien ainsi une topologie sur $\bar{R}$ et que la topologie qu'elle induit sur R est identique à celle de la droite numérique.

Définition 1. On appelle droite numérique achevée l'espace topologique obtenu en munissant l'ensemble $\overline{R}$ *de la topologie précédente.*

Lorsqu'on raisonne sur la droite achevée $\overline{R}$, il est souvent commode, par un abus de langage, d'appeler ses points *nombres réels* ; les points de R , désignés jusqu'ici sous ce nom sont alors appelés *nombres réels finis*. Nous adoptons cette convention *dans ce paragraphe et dans le suivant* ; et, chaque fois que nous l'adopterons par la suite, nous signalerons expressément à quelle partie du texte elle s'étend.

Proposition 1. La droite numérique achevée $\overline{R}$ *est homéomorphe à l'intervalle fermé* $[-1,+1]$ *de* R .

En effet, soit f l'application biunivoque de $\overline{R}$ dans R définie par les conditions suivantes : $f(x)=x/(1+|x|)$ si $x \in R$, $f(+\infty)=1$, $f(-\infty)=-1$. L'image par f de l'intervalle $]x,+\infty]$ n'est autre que $]f(x),1]$, et l'image de $[-\infty,x[$ est $[-1,f(x)[$; en se reportant à la démonstration de la prop.1 du § 3 , on voit que f est un homéomorphisme de $\overline{R}$ sur $[-1,+1]$.

En outre, f est strictement croissante dans $\overline{R}$, donc est un isomorphisme de la *structure d'ordre* de $\overline{R}$ sur celle de $[-1,+1]$; de ce fait, et de la prop.1, on décuit les corollaires suivants :

Corollaire 1. La droite numérique achevée est un espace compact.

Corollaire 2. L'ensemble des parties connexes de $\overline{R}$ *est identique à l'ensemble des intervalles de* $\overline{R}$.

Si x est un nombre réel fini, $]x,+\infty[$ et $]-\infty,x[$ (resp. $[x,+\infty[$ et $]-\infty,x]$) sont contenus dans R et ne sont autres que les intervalles de R qui ont été jusqu'ici désignés par $]x,\rightarrow[$ et $]\leftarrow,x[$ (resp. $[x,\rightarrow[$ et $]\leftarrow,x]$) ; cette nouvelle notation est beaucoup plus fréquemment employée. On voit de même que $\mathbb{R}$ n'est autre que l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, notation sous laquelle on désigne parfois cet ensemble.

Corollaire 3. Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure et une borne inférieure.

Corollaire 4. Pour qu'une application f d'un intervalle I (partie de $\overline{\mathbb{R}}$) dans $\overline{\mathbb{R}}$ soit un homéomorphisme de I sur un intervalle, il faut et il suffit que f soit strictement monotone et continue dans I.

Corollaire 5. Tout ensemble ouvert non vide dans $\overline{\mathbb{R}}$ est la réunion d'une famille dénombrable d'intervalles ouverts non empiétants.

Définition 2. La borne supérieure d'une partie A de $\overline{\mathbb{R}}$ se note sup A ; la borne inférieure de A se note inf A .

On a $\sup A \in \overline{A}$; $\inf A \in \overline{A}$; $\inf A \leqslant \sup A$. La relation $A \subset B$ entraîne $\sup A \leqslant \sup B$ et $\inf A \geqslant \inf B$.

Du corollaire 3, on déduit l'important théorème suivant :

Théorème 1 (théorème de la limite monotone). Soit E un ensemble vasculaire ascendant, $\mathfrak{F}$ le filtre des sections de E ; toute application monotone f de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ possède une limite suivant le filtre $\mathfrak{F}$.

Supposons par exemple que f soit croissante, et soit a la borne supérieure de f(E). Si $a = -\infty$, f est constante et égale à $-\infty$; sinon, quel que soit $b < a$, il existe $x \in E$ tel que $b < f(x)$; donc, si S_x est la section de E relative à x (ensemble des $y \geqslant x$) , on a $f(S_x) \subset]b,a]$, ce qui démontre le théorème. Démonstration analogue lorsque f est décroissante ; en outre, on voit que, dans l'énoncé du théorème, on peut remplacer les mots "vasculaire ascendant" par "vasculaire descendant" , sans en modifier la validité.

Corollaire 1. Toute suite monotone de points de $\overline{\mathbb{R}}$ est convergente.

En particulier, toute suite croissante (resp. décroissante) de nombres finis converge vers un nombre fini si elle est bornée, vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) dans le cas contraire. Par exemple, la suite des entiers positifs (ou ce qui revient au même, le filtre de Fréchet) converge vers $+\infty$.

<u>Corollaire 2</u>. <u>Soit A une partie de</u> $\overline{R}$, $a \neq -\infty$ <u>un point de</u> $\overline{A}$, <u>tel que a soit adhérent à l'ensemble</u> $A'_a = A \cap [-\infty, a[$; <u>si f est une application monotone de A dans</u> $\overline{R}$, $\lim\limits_{x \to a, x \in A'_a} f(x)$ <u>existe</u>.

En effet, le filtre des sections de A'_a, considéré comme ensemble vasculaire ascendant, est identique à la trace sur A'_a du filtre des voisinages de a.

Si on pose de même $A''_a = A \cap]a, +\infty]$ (en supposant $a \neq +\infty$), et si a est adhérent à A''_a, on voit que $\lim\limits_{x \to a, x \in A''_a} f(x)$ existe.

<u>L'addition et la multiplication dans</u> $\overline{R}$. Notons d'abord que, si on prolonge dans $\overline{R}$ la fonction $-x$, en posant $-(+\infty) = -\infty$, $-(-\infty) = +\infty$, la fonction ainsi prolongée est encore un homéomorphisme de $\overline{R}$ sur elle-même.

Montrons maintenant qu'on peut <u>prolonger par continuité</u> en certains points de $\overline{R}^2$ les fonctions $x+y$ et xy, définies dans R^2. On vérifie en effet sans peine les résultats suivants :

1° Relativement à R^2, la fonction $x+y$ a pour limite $+\infty$ en tout point de la forme $(a, +\infty)$ ou $(+\infty, a)$ si $a \neq -\infty$; elle a pour limite $-\infty$ en tout point de la forme $(a, -\infty)$ ou $(-\infty, a)$, si $a \neq +\infty$. Au contraire, elle n'a aucune limite aux points $(+\infty, -\infty)$ et $(-\infty, +\infty)$.

On vérifie même qu'en ces points, l'ensemble des valeurs d'adhérence de $x+y$, relativement à $\overline{R}^2$, est identique à $\overline{R}$; en effet, si a est fini, et si x tend vers $+\infty$, $x+a$ tend vers $+\infty$, $-x$ tend vers $-\infty$, et $(x+a)+(-x)=a$ tend vers a, ce qui montre déjà que tout nombre fini est valeur d'adhérence ; et, comme 2x tend vers $+\infty$ en même temps que x, les formules $2x-x = x$ et $x-2x = -x$ montrent que $+\infty$ et $-\infty$ sont aussi des valeurs d'adhérence de $x+y$ au point $(+\infty, -\infty)$.

2° Relativement à $\overline{R}^2$, la fonction xy a pour limite $+\infty$ en tout point de la forme $(a,+\infty)$ ou $(+\infty,a)$ si $a > 0$ et en tout point de la forme $(a,-\infty)$ ou $(-\infty,a)$ si $a < 0$; elle a pour limite $-\infty$ en tout point de la forme $(a,+\infty)$ ou $(+\infty,a)$ si $a < 0$, et en tout point de la forme $(a,-\infty)$ ou $(-\infty,a)$ si $a > 0$. Elle n'a aucune limite aux points $(0,+\infty)$, $(+\infty,0)$, $(0,-\infty)$, $(-\infty,0)$.

On montre encore aisément qu'en ces points, l'ensemble des valeurs d'adhérence de xy est identique à $\overline{R}$.

Soit A le complémentaire (dans $\overline{R}^2$) de l'ensemble formé des deux points $(+\infty,-\infty)$ et $(-\infty,+\infty)$; M le complémentaire de l'ensemble formé des quatre points $(0,+\infty)$, $(+\infty,0)$, $(0,-\infty)$, $(-\infty,0)$. On peut prolonger par continuité la fonction $x+y$ dans A et xy dans M ; les fonctions prolongées se désigneront encore par $x+y$ et xy respectivement.

On a donc

$$x+(+\infty)=(+\infty)+x = +\infty \quad \text{si } x \neq -\infty$$

$$x+(-\infty)=(-\infty)+x = -\infty \quad \text{si } x \neq +\infty$$

$$x.(+\infty)=(+\infty).x = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$x.(-\infty)=(-\infty).x = \begin{cases} -\infty & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Les fonctions $x+y$, $y+x$, égales dans R^2, le sont aussi dans A ; si x,y,z sont trois points de $\overline{R}$ tels que (y,z) et $(x,y+z)$ soient dans A , il n'est pas possible que x et y soient infinis de signes contraires, car il en serait de même de x et $(y+z)$ contrairement à l'hypothèse ; $x+y$ a donc un sens, et par suite, d'après le théorème de la double limite

$$x+(y+z)=\lim_{\substack{(u,v,w)\in R\times R\times R\\ (u,v,w)\to(x,y,z)}}(u+(v+w))=\lim_{\substack{w\in R\\ w\to z}}\ \lim_{\substack{(u,v)\in R\times R\\ (u,v)\to(x,y)}}((u+v)+w)$$

ce qui montre que $(x+y,z)$ est dans A , et que $x+(y+z)=(x+y)+z$.

Remarquons encore que, si x,y,z,t sont des points de $\overline{R}$ tels que $x\leqslant y$ et $z\leqslant t$, on a $x+z\leqslant y+t$ si les deux membres de cette inégalité sont définis ; c'est ce que montre sans peine un examen des différents cas possibles. De plus, si $y+t$ est définie et $<+\infty$, $x+z$ est définie ; de même, si $x+z$ est définie et $>-\infty$, $y+t$ est aussi définie.

On voit de même que, si (x,y) est dans M , $xy = yx$; que, si (y,z) et (x,yz) sont dans M , il en est de même de (x,y) et de (xy,z) et que $x(yz)=(xy)z$; enfin, que $x\leqslant y$ et $z>0$ entraînent $xz\leqslant yz$ si les deux membres de cette inégalité sont définis.

La fonction x^n , pour n entier >0 , est définie et continue dans $\overline{R}$, d'après ce qui précède, et on a $(+\infty)^n=+\infty$, $(-\infty)^n=+\infty$ si n est pair, $=-\infty$ si n est impair.

Si x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ en restant dans R , $1/x$ tend vers 0, car pour $|x|>n$, on a $|1/x|<1/n$ (n entier >0 arbitraire). Réciproquement, si x tend vers 0 <u>en restant dans l'ensemble</u> P^* <u>des nombres</u> >0 (resp. dans l'ensemble N^* des nombres <0), $1/x$ tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$) ; mais ces deux faits montrent que, dans $\mathbf{R}$, la fonction $1/x$ n'a pas de limite au point 0, puisqu'elle a deux valeurs d'adhérence distinctes.

La fonction $1/x$ peut donc se prolonger par continuité aux points $+\infty$ et $-\infty$, mais non au point 0. Il en est de même par suite de la fonction x^n pour n entier < 0 .

Si f et g sont deux applications d'un ensemble E dans $\overline{\mathbf{R}}$, on désignera encore par $f+g$, fg , $1/f$, les fonctions dont les valeurs en tout point $x \in E$, sont respectivement $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$, $1/f(x)$, pourvu que ces expressions soient toujours définies. Toutes les propositions démontrées aux §§ 2 et 3 sur les limites des fonctions $f+g$, fg , $1/f$, lorsque f et g ont des valeurs finies en tout point, s'étendent lorsque f et g sont des applications de E dans $\overline{\mathbf{R}}$, pourvu que toutes les expressions qui figurent dans ces propositions aient un sens ; cela résulte de la continuité des fonctions $x+y$, xy , $1/x$ partout où elles sont définies.

Si X est une partie de E , on désigne par $-X$ l'ensemble des points $-x$, où x parcourt X . On a , si X n'est pas vide ,

$$\sup(-X) = -\inf X \quad ; \qquad \inf(-X) = -\sup X .$$

Si X et Y sont deux parties de $\mathbf{R}$, on définira encore l'ensemble $X+Y$ comme formé des points $x+y$, où x parcourt X et y parcourt Y , pourvu que ces expressions aient toutes un sens. Avec cette notation, on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition 2. Si X et Y sont deux parties de $\overline{\mathbf{R}}$ telles que la somme $\sup X + \sup Y$ ait un sens, et que l'ensemble $X+Y$ soit défini, on a

$$\sup(X+Y) = \sup X + \sup Y .$$

Tout d'abord, de $x \leqslant \sup X$, $y \leqslant \sup Y$, on déduit que $x+y \leqslant \sup X + \sup Y$, quels que soient $x \in X$ et $y \in Y$, puisque les deux membres de cette dernière inégalité ont un sens par hypothèse ; donc

$$\sup(X+Y) \leqslant \sup X + \sup Y$$

Il en résulte la proposition lorsque l'un des nombres $\sup X$, $\sup Y$ est $-\infty$. S'il n'en est pas ainsi, posons $a = \sup X$, $b = \sup Y$, et soit c tel que $-\infty < c < a+b$; on a $c-a < b$, donc il existe un nombre β tel que $c-a < \beta < b$; si on pose $\alpha = c-\beta$, on a aussi $\alpha < a$, et par suite on peut mettre c sous la forme $\alpha+\beta$, avec $\alpha < a$, $\beta < b$. Par hypothèse, il existe $x \in X$, $y \in Y$ tels que $\alpha < x \leqslant a$, $\beta < y \leqslant b$, d'où $\alpha + \beta < x+y \leqslant a+b$, ce qui établit la proposition.

On peut encore prolonger par continuité dans $\overline{R}$ les fonctions x^+, x^- et $|x|$, définies dans R ; il suffit, comme on le voit immédiatement, de poser $(+\infty)^+ = (-\infty)^- = +\infty$, $(+\infty)^- = (-\infty)^+ = 0$, $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$; on vérifie que les sommes $x^+ - x^-$ et $x^+ + x^-$ sont toujours définies dans $\overline{R}$, et valent encore x et $|x|$ respectivement. Chaque fois que $x+y$ est définie, on a $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

On notera enfin que les fonctions $\mathrm{Max}(x,y)$ et $\mathrm{Min}(x,y)$ sont continues dans $\overline{R}^2$.

<u>Somme d'une infinité de nombres réels</u>. Soit I un ensemble <u>fini</u> non vide, $i \to x_i$ une application de I dans $\overline{R}$; les résultats précédents montrent que, s'il n'y a pas, parmi les x_i , deux valeurs infinies de signes contraires, on peut définir la <u>somme</u> des x_i indépendamment de l'ordre dans lequel on les considère (voir Algèbre, ch. I, §) ; on la désignera par la notation $\sum\limits_{i \in I} x_i$.

On en déduit la possibilité de définir, dans certains cas, la somme d'une famille infinie de nombres réels :

Définition 3. Soit I un ensemble quelconque, $(x_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de nombres réels dont l'ensemble d'indices soit I :

1° Si $x_\iota \geqslant 0$ quel que soit ι, on appelle somme des nombres x_ι, et on désigne par $\sum_{\iota \in I} x_\iota$, la borne supérieure de l'ensemble des nombres $\sum_{\iota \in J} x_\iota$, où J parcourt l'ensemble des parties finies non vides de I ;

2° Dans le cas général, on appelle somme des nombres x_ι, et on désigne encore par $\sum_{\iota \in I} x_\iota$, l'expression $\sum_{\iota \in I} x_\iota^+ - \sum_{\iota \in I} x_\iota^-$, lorsque cette différence est définie.

Une famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$ dont la somme est définie est dite sommable au sens large ; elle est dite sommable si en outre sa somme est finie.

Lorsque I est un ensemble fini, cette définition coïncide visiblement avec celle donnée ci-dessus.

Lorsque $x_\iota = 1$ quel que soit $\iota \in I$, la somme de ces nombres est égale à n si I est fini et a n éléments, à $+\infty$ si I est infini. Il résulte de cette définition qu'une famille (x_ι) telle que deux des valeurs de x_ι soient infinies de signes contraires, n'est pas sommable au sens large ; de même, si, dans une famille (x_ι) sommable au sens large, un des x_ι est infini, $\sum_\iota x_\iota$ est infinie de même signe.

Proposition 3. Soient $(x_\iota)_{\iota \in I}$ et $(y_\iota)_{\iota \in I}$ deux familles de nombres réels correspondant au même ensemble d'indices, et telles que $x_\iota \leqslant y_\iota$ quel que soit ι ; si elles sont sommables au sens large, on a $\sum_{\iota \in I} x_\iota \leqslant \sum_{\iota \in I} y_\iota$; si (y_ι) est sommable au sens large, et si $\sum_{\iota \in I} y_\iota < +\infty$, (x_ι) est aussi sommable au sens large ; si

(x_ι) <u>est sommable au sens large, et si</u> $\sum_{\iota\in I} x_\iota > -\infty$, (y_ι) <u>est aussi sommable au sens large</u>.

<u>Enfin, si</u> $x_\iota < y_\iota$ <u>pour une valeur au moins de</u> ι , <u>et si</u> (x_ι) <u>et</u> (y_ι) <u>sont sommables au sens large, on a</u> $\sum_{\iota\in I} x_\iota < \sum_{\iota\in I} y_\iota$, <u>sauf si ces deux sommes sont infinies de même signe</u>.

Supposons d'abord x_ι et y_ι positifs ; alors, de $x_\iota \leqslant y_\iota$, on tire, pour toute partie finie $J \subset I$, $\sum_{\iota\in J} x_\iota \leqslant \sum_{\iota\in J} y_\iota \leqslant \sum_{\iota\in I} y_\iota$, d'où $\sum_{\iota\in I} x_\iota \leqslant \sum_{\iota\in I} y_\iota$; si en outre, pour un indice $\varkappa$, on a $x_\varkappa < y_\varkappa$, il existe $a > 0$ tel que $x_\varkappa + a \leqslant y_\varkappa$; en posant $x'_\iota = x_\iota$ pour $\iota \neq \varkappa$, $x'_\varkappa = x_\varkappa + a$ on vérifie sans peine que $\sum_{\iota\in I} x'_\iota = a + \sum_{\iota\in I} x_\iota$, et on a $\sum_{\iota\in I} x'_\iota \leqslant \sum_{\iota\in I} y_\iota$, d'où $\sum_{\iota\in I} x_\iota < \sum_{\iota\in I} y_\iota$, sauf si $\sum_{\iota\in I} x_\iota = \sum_{\iota\in I} y_\iota = +\infty$.

On passe aisément de là au cas général en remarquant que $x_\iota \leqslant y_\iota$ entraîne $x_\iota^+ \leqslant y_\iota^+$ et $x_\iota^- \geqslant y_\iota^-$.

<u>Proposition 4</u>. <u>Soit</u> (x_ι) <u>une famille sommable au sens large, et c un nombre réel fini et</u> $\neq 0$; <u>la famille</u> (cx_ι) <u>est sommable au sens large, et on a</u> $\sum_{\iota\in I} cx_\iota = c \sum_{\iota\in I} x_\iota$.

En effet, si J est une partie finie quelconque de I , on a $\sum_{\iota\in J} cx_\iota = c \sum_{\iota\in J} x_\iota$; dans le cas où les x_ι sont $\geqslant 0$, et $c > 0$, on en déduit la proposition, cx étant une permutation de $\overline{R}$ conservant l'ordre ; on en déduit ensuite sans peine la proposition dans les autres cas.

<u>Proposition 5</u>. <u>Soient</u> $(x_\iota)_{\iota\in I}$, $(y_\iota)_{\iota\in I}$ <u>deux familles sommables au sens large ; si</u> $\sum_{\iota\in I} x_\iota$ <u>et</u> $\sum_{\iota\in I} y_\iota$ <u>ne sont pas infinies de signes contraires, la famille</u> $(x_\iota + y_\iota)_{\iota\in I}$ <u>est sommable au sens large, et</u>

$$\sum_{\iota\in I}(x_\iota + y_\iota) = \sum_{\iota\in I} x_\iota + \sum_{\iota\in I} y_\iota$$

Remarquons que l'hypothèse entraîne d'abord qu'il ne peut y avoir un x_ι et un y_ι de même indice ou non infinis de signes contraires ; les sommes $(x_\iota + y_\iota)$ sont donc bien définies quel que soit ι. Envisageons d'abord le cas où $x_\iota \geqslant 0$ et $y_\iota \geqslant 0$ quel que soit ι ; pour toute partie finie J de I, on a

$$\sum_{\iota\in J}(x_\iota + y_\iota) = \sum_{\iota\in J} x_\iota + \sum_{\iota\in J} y_\iota \leqslant \sum_{\iota\in I} x_\iota + \sum_{\iota\in I} y_\iota$$

Posons $a = \sum_{\iota\in I} x_\iota$, $b = \sum_{\iota\in I} y_\iota$, et soit c un nombre fini et $< a+b$; on peut écrire $c = \alpha + \beta$, avec $\alpha < a$, $\beta < b$; par hypothèse il existe deux parties finies J_1, J_2 de I telles que $\alpha < \sum_{\iota\in J_1} x_\iota \leqslant a$, $\beta < \sum_{\iota\in J_2} y_\iota \leqslant b$; si $K = J_1 \cup J_2$, on aura a fortiori

$$c = \alpha + \beta < \sum_{\iota\in K} x_\iota + \sum_{\iota\in K} y_\iota = \sum_{\iota\in K}(x_\iota + y_\iota) \leqslant a+b$$

d'où la proposition dans ce cas.

Pour passer de là au cas général, remarquons que, si on pose $z_\iota = x_\iota + y_\iota$, on a $z_\iota^+ - z_\iota^- = (x_\iota^+ - x_\iota^-) + (y_\iota^+ - y_\iota^-)$, d'où $z_\iota^+ + x_\iota^- + y_\iota^- = z_\iota^- + x_\iota^+ + y_\iota^+$ (ce qui est évident lorsque x_ι et y_ι sont finis, et se vérifie encore aisément dans les autres cas) ; on a donc

$$(1) \qquad \sum_{\iota\in I} z_\iota^+ + \sum_{\iota\in I} x_\iota^- + \sum_{\iota\in I} y_\iota^- = \sum_{\iota\in I} z_\iota^- + \sum_{\iota\in I} x_\iota^+ + \sum_{\iota\in I} y_\iota^+$$

Comme $\sum_{\iota\in I} x_\iota$ et $\sum_{\iota\in I} y_\iota$ sont définies, et ne sont pas infinies de signes contraires, on est dans un des deux cas suivants :

1° $\sum_{\iota\in I} x_\iota^+$ et $\sum_{\iota\in I} y_\iota^+$ <u>tous deux finis</u> ;

2° $\sum_{\iota\in I} x_\iota^-$ et $\sum_{\iota\in I} y_\iota^-$ <u>tous deux finis</u>.

Supposons par exemple qu'on soit dans le second cas ; comme $z_\iota^- \leqslant x_\iota^- + y_\iota^-$, on a, d'après la prop. 3 et la prop.5 pour les nombres positifs, $\sum_{\iota\in I} z_\iota^- \leqslant \sum_{\iota\in I} x_\iota^- + \sum_{\iota\in I} y_\iota^- < +\infty$, donc $(x_\iota + y_\iota)$

est sommable au sens large, et, en retranchant des deux membres de (1) le nombre fini $\sum_{\iota\in I} z_\iota^- + \sum_{\iota\in I} x_\iota^- + \sum_{\iota\in I} y_\iota^-$, on obtient la relation

$$\sum_{\iota\in I} z_\iota^+ - \sum_{\iota\in I} z_\iota^- = (\sum_{\iota\in I} x_\iota^+ - \sum_{\iota\in I} x_\iota^-) + (\sum_{\iota\in I} y_\iota^+ - \sum_{\iota\in I} y_\iota^-)$$

d'où la proposition.

<u>Corollaire</u>. <u>Si</u> (x_ι) <u>est une famille quelconque, on a</u>

$$\sum_{\iota\in I} |x_\iota| = \sum_{\iota\in I} x_\iota^+ + \sum_{\iota\in I} x_\iota^-$$

Par suite, pour qu'une famille (x_ι) soit <u>sommable</u>, il faut et il suffit que la famille $(|x_\iota|)$ soit <u>sommable</u>.

<u>Proposition 6</u>. <u>Soit</u> $(x_\iota)_{\iota\in I}$ <u>une famille sommable au sens large</u> ; <u>pour toute partie non vide</u> $J \subset I$, <u>la sous-famille</u> $(x_\iota)_{\iota\in J}$ <u>est sommable au sens large</u>. <u>Si</u> J_1 <u>et</u> J_2 <u>sont deux parties de I formant une partition de cet ensemble, on a</u>

$$(2) \qquad \sum_{\iota\in I} x_\iota = \sum_{\iota\in J_1} x_\iota + \sum_{\iota\in J_2} x_\iota$$

Posons $x'_\iota = x_\iota$ pour $\iota \in J$, $x'_\iota = 0$ pour $\iota \in \complement J$; on a $\sum_{\iota\in I} x'_\iota = \sum_{\iota\in J} x_\iota$. En effet, supposons d'abord tous les x_ι positifs ; si H est une partie finie de I, et $K = H \cap J$, on a, lorsque K n'est pas vide, $\sum_{\iota\in H} x'_\iota = \sum_{\iota\in K} x_\iota$, d'où immédiatement $\sum_{\iota\in I} x'_\iota = \sum_{\iota\in J} x_\iota$; comme $x'_\iota \leqslant x_\iota$ quel que soit ι, on en déduit, d'après la prop. 3, $\sum_{\iota\in J} x_\iota \leqslant \sum_{\iota\in I} x_\iota$.

Si maintenant (x_ι) est une famille sommable au sens large quelconque, on a $\sum_{\iota\in I} x'^+_\iota = \sum_{\iota\in J} x_\iota^+ \leqslant \sum_{\iota\in I} x_\iota^+$, $\sum_{\iota\in I} x'^-_\iota = \sum_{\iota\in J} x_\iota^- \leqslant \sum_{\iota\in I} x_\iota^-$, ce qui montre immédiatement que $\sum_{\iota\in J} x_\iota$ et $\sum_{\iota\in I} x'_\iota$ sont définies et égales.

Soit alors $y_\iota = x_\iota$ pour $\iota\in J_1$, $y_\iota = 0$ pour $\iota \in J_2$, $z_\iota = x_\iota$ pour $\iota \in J_2$, $z_\iota = 0$ pour $\iota\in J_1$; on a, quel que soit ι,

$x_\iota = y_\iota + z_\iota$, et, d'après la prop. 5, comme (y_ι) et (z_ι) sont sommables , $\sum_{\iota \in I} x_\iota = \sum_{\iota \in I} y_\iota + \sum_{\iota \in I} z_\iota$. Comme $\sum_{\iota \in I} y_\iota = \sum_{\iota \in J_1} x_\iota$, $\sum_{\iota \in I} z_\iota = \sum_{\iota \in J_2} x_\iota$, on en déduit la proposition.

On étend immédiatement la dernière partie de cette proposition lorsqu'il s'agit d'une partition <u>finie</u> quelconque, au lieu d'une partition de deux ensembles.

La proposition 6 admet une <u>réciproque</u> : si le second membre de (2) est défini, la somme $\sum_{\iota \in I} x_\iota$ est définie et lui est égale ; il suffit pour le voir de considèrer les sommes $\sum_{\iota \in I} x_\iota^+$ et $\sum_{\iota \in I} x_\iota^-$ et de leur appliquer la proposition 6 ; d'après l'hypothèse sur le second membre de (2), elles ne peuvent être toutes deux infinies.

<u>Proposition 7</u>. <u>Soit</u> $(x_\iota)_{\iota \in I}$ <u>une famille sommable au sens large, et</u> (K_n) <u>une suite croissante de parties de</u> I <u>telle que</u> $I = \bigcup_n K_n$; <u>on a</u> $\sum_{\iota \in I} x_\iota = \lim_{n \to \infty} \sum_{\iota \in K_n} x_\iota$.

Supposons d'abord les x_ι positifs, et soit $a < \sum_{\iota \in I} x_\iota$; il existe une partie finie H de I telle que $a < \sum_{\iota \in H} x_\iota \leqslant \sum_{\iota \in I} x_\iota$; d'autre part, il existe un indice n_0 tel que $H \subset K_{n_0}$, d'où $H \subset K_n$ pour $n \geqslant n_0$, et par suite $a < \sum_{\iota \in K_n} x_\iota \leqslant \sum_{\iota \in I} x_\iota$ pour $n \geqslant n_0$, d'où la proposition.

On passe de là au cas général en utilisant la formule donnant la limite d'une somme de deux fonctions à valeurs dans $\overline{R}$.

<u>Proposition 8</u>. <u>Soit</u> (x_ι) <u>une famille de nombres réels</u> ; <u>pour tout</u> $a > 0$, <u>on désigne par</u> n_a <u>le nombre des indices</u> ι <u>tels que</u> $|x_\iota| \geqslant a$ <u>si l'ensemble de ces indices est fini, et</u> $+\infty$ <u>dans le cas contraire.</u> <u>Si</u> (x_ι) <u>est sommable, il existe un nombre fini</u> k <u>tel que</u> $a.n_a \leqslant k$ <u>quel que soit</u> $a > 0$.

En effet, soit H la partie de I telle que $|x_\iota| \geqslant a$ pour $\iota \in H$; on a $a.n_a \leqslant \sum_{\iota \in H} |x_\iota| \leqslant \sum_{\iota \in I} |x_\iota|$, d'après la prop. 3, d'où la proposition d'après le corollaire de la prop. 5.

Il importe d'observer que cette condition <u>n'est pas suffisante</u> pour que (x_ι) soit sommable. Prenons en effet pour I l'ensemble $\mathbb{N}$, et soit $x_n = 1/n$; on a $n_a \leqslant 1/a$, d'où $a.n_a \leqslant 1$. Mais on a $s = \sum_{n \in \mathbb{N}} 1/n = +\infty$. En effet, d'après les propositions 6, 3 et 4 , on a

$$s = \sum_{n \in \mathbb{N}} 1/n = 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} 1/2n + \sum_{n \in \mathbb{N}} 1/(2n+1) \geqslant 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} 1/2n + $$
$$+ \sum_{n \in \mathbb{N}} 1/(2n+2) = 1/2 + 2. \sum_{n \in \mathbb{N}} 1/2n = 1/2 + s$$

ce qui entraîne $s = +\infty$.

<u>Corollaire 1</u>. <u>Si la famille</u> (x_ι) <u>est sommable, elle est bornée</u>.

En effet, $n_a \leqslant 1/a. \sum_{\iota \in I} |x_\iota|$, donc, si $a \geqslant \sum_{\iota \in I} |x_\iota|$, $n_a = 0$, puisque ce nombre est entier positif.

<u>Corollaire 2</u>. <u>Si la famille</u> (x_ι) <u>est sommable</u>, n_a <u>est fini quel que soit</u> $a > 0$.

<u>Corollaire 3</u>. <u>Si la famille</u> (x_ι) <u>est sommable, l'ensemble des indices</u> ι <u>tels que</u> $x_\iota \neq 0$ <u>est dénombrable</u>.

En effet, cet ensemble est la réunion des ensembles H_n , où H_n désigne l'ensemble des indices ι tels que $|x_\iota| \geqslant 1/n$, et chacun des H_n est <u>fini</u> d'après le corollaire 2.

Ce dernier corollaire montre que le cas de beaucoup le plus important en pratique est celui où I est <u>dénombrable</u>. Lorsqu'en particulier I est l'ensemble $\mathbb{N}$, on note $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ la somme d'une suite (x_n) lorsqu'elle existe. De même, si I est un intervalle de l'ensemble $\mathbb{N}'$ des entiers positifs et négatifs, c'est-à-dire est de l'une des formes $]-\infty, +\infty[$, $]-\infty, p]$, $[p, +\infty[$, $[p,q]$ (p et q entiers quelconques), la somme d'une famille $(x_n)_{n\in I}$ sommable se note respectivement $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=-\infty}^{p} x_n$, $\sum_{n=p}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=p}^{q} x_n$.

Si I est dénombrable, et qu'on range les termes de la famille sommable au sens large $(x_\iota)_{\iota\in I}$, en une suite (y_n), on a, d'après la prop. 7 ,

$$\sum_{\iota\in I} x_\iota = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} y_p\right)$$

Cette propriété permet souvent d'évaluer la somme d'une suite sommable au sens large (x_n), ou tout au moins d'en trouver des majorants et minorants. Par exemple, considérons la suite (q^n) où q est un nombre réel quelconque ; on a (Algèbre,ch. , §)

$$s_n = \sum_{p=0}^{n} q^p = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

on voit donc (cf.ch. VI, § 2) que, pour $|q|<1$, la suite (q^n) est sommable et a pour somme $1/(1-q)$; pour $q\geqslant 1$, elle est sommable au sens large et a pour somme $+\infty$; pour $q\leqslant -1$, elle n'est pas sommable au sens large, car s_n ne tend vers aucune limite quand n tend vers $+\infty$.

Remarquons encore que, pour une suite (x_n), le corollaire 2 de la prop.8 s'énonce de la manière suivante : <u>pour que</u> (x_n) <u>soit sommable il est nécessaire que</u> $\lim_{n\to\infty} x_n=0$; mais l'exemple de la suite $(1/n)$ montre que cette condition <u>n'est pas suffisante</u>.

La notion de somme d'une famille de nombres réels est un cas particulier d'une notion beaucoup plus générale, celle d'<u>intégrale</u>, que nous étudierons plus tard ; on verra alors que les propositions énoncées ci-dessus sont pour la plupart des cas particuliers de propositions relatives aux intégrales ; de plus, les théorèmes généraux du Calcul intégral nous fourniront de nouvelles propriétés des sommes de nombres réels (notamment une généralisation de la prop.6), qu'il serait beaucoup plus long de démontrer directement.

Exercices. 1) Soit (A_ι) une famille quelconque de parties non vides de $\overline{R}$; montrer que la borne supérieure de l'ensemble $\bigcup_\iota A_\iota$ est la borne supérieure de l'ensemble des nombres $\sup A_\iota$.

2) Soit (x_n) une suite *décroissante* de nombres finis *positifs*. Montrer que les sommes $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ sont à la fois finies ou infinies (critère de condensation de Cauchy).

¶ Application aux suites $(1/n^p)$, $(1/n(\log n)^p)$. ¶

¶ 3) Montrer que, si $p > 1$,

$$\frac{1-2^{-p}}{1-2^{-p+1}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \frac{1}{1-2^{-p+1}}$$ ¶

§ 5. Fonctions numériques.

Définition 1. *Les applications d'un ensemble E dans $\overline{R}$ sont dites fonctions numériques définies dans E ; les applications de E dans R sont appelées fonctions numériques finies, définies dans E* .

Nous avons déjà vu (§ 4) que si la somme $f(x)+g(x)$ des valeurs de deux fonctions numériques f,g , définies dans E , a un sens quel que soit $x \in E$, on note $f+g$ la fonction ayant cette somme pour valeur au point x ; de même on définit les fonctions fg , $1/f$, lorsque les expressions $f(x)g(x)$, resp. $1/f(x)$, ont un sens pour tout $x \in E$.

Si f et g sont deux fonctions numériques définies dans E , la relation $f \leqslant g$ est par définition équivalente à "quel que soit $x \in E$, $f(x) \leqslant g(x)$" ; c'est une *relation d'ordre* dans l'ensemble des fonctions numériques définies dans E (mais si E a plus d'un élément, il est clair que la structure d'ordre qu'elle définit n'est pas une structure d'ensemble totalement ordonné).

<u>Bornes d'une fonction numérique</u>. <u>Définition 2</u>. <u>Soit f une fonction numérique définie dans un ensemble E ; on appelle borne supérieure</u> (resp. <u>borne inférieure</u>) <u>de f dans une partie non vide A de E, et on note</u> $\sup\limits_{x\in A} f(x)$ (resp. $\inf\limits_{x\in A} f(x)$), <u>la borne supérieure</u> (resp. <u>borne inférieure</u>) <u>de l'ensemble</u> $f(A)$.

La fonction f est dite <u>bornée supérieurement</u> (ou <u>majorée</u>) dans A, si $\sup\limits_{x\in A} f(x) < +\infty$ (autrement dit, s'il existe un nombre fini k tel que, pour tout $x\in A$, on ait $f(x) \leqslant k$) ; f est dite <u>bornée inférieurement</u> (ou <u>minorée</u>) dans A, si $\inf\limits_{x\in A} f(x) > -\infty$; enfin, elle est dite <u>bornée</u> tout court, si elle est à la fois bornée inférieurement ~~et~~ supérieurement ; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $|f|$ soit bornée supérieurement.

Le lecteur vérifiera sans peine les propriétés suivantes :

(1) $$\inf_{x\in A} f(x) = -\sup_{x\in A} (-f(x)) \;;$$

(2) $f \leqslant g$ entraîne $\sup\limits_{x\in A} f(x) \leqslant \sup\limits_{x\in A} g(x)$ et $\inf\limits_{x\in A} f(x) \leqslant \inf\limits_{x\in A} g(x)$;

(3) $A\subset B$ entraîne $\sup\limits_{x\in A} f(x) \leqslant \sup\limits_{x\in B} f(x)$ et $\inf\limits_{x\in A} f(x) \geqslant \inf\limits_{x\in B} f(x)$

(4) $$\sup_{x\in A} (f(x)+g(x)) \leqslant \sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A} g(x)$$

lorsque les deux membres de cette inégalité ont un sens ;

(5) $$\sup_{x\in A} f(x)g(x) \leqslant \sup_{x\in A} f(x).\sup_{x\in A} g(x)$$

lorsque $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x\in A$, et que les deux membres ont un sens ;

(5 bis) $$\mathrm{Max}(\sup_{x\in A} f(x),\sup_{x\in A} g(x))=\sup_{x\in A} (\mathrm{Max}(f(x),g(x)))$$

Il faut noter par contre qu'on n'a pas en général

$$\operatorname{Min}(\sup_{x\in A} f(x), \sup_{x\in A} g(x)) = \sup_{x\in A} (\operatorname{Min}(f(x),g(x)))$$

mais que le premier membre est seulement supérieur au second dans tous les cas (d'après (2)).

(6) $$\sup_{x\in A} kf(x) = k.\sup_{x\in A} f(x) \qquad \text{si } 0 < k < +\infty \ ;$$

(7) $$\sup_{x\in A} (1/f(x)) = 1/\inf_{x\in A} f(x)$$

si $f(x) > 0$ dans A ;

(8) $$\sup_{x\in \bigcup_{\iota\in I} A_\iota} f(x) = \sup_{\iota\in I} (\sup_{x\in A_\iota} f(x))$$

(8 bis) Soit φ une application croissante de $\overline{f(A)}$ dans $\overline{R}$, continue au point $a = \sup_{x\in A} f(x)$; alors $\sup_{x\in A} \varphi(f(x)) = \varphi(\sup_{x\in A} f(x))$.

Considérons maintenant une fonction numérique f définie dans un ensemble produit $E_1 \times E_2$; si A_2 est une partie de E_2, on notera $\sup_{x_2\in A_2} f(x_1,x_2)$ la borne supérieure dans A_2 de l'application partielle $x_2 \longrightarrow f(x_1,x_2)$ de E_2 dans $\overline{R}$. Si A est une partie de $E_1 \times E_2$, on a donc, d'après (8)

$$\sup_{x_1\in pr_1 A} (\sup_{x_2\in A(x_1)} f(x_1,x_2)) = \sup_{(x_1,x_2)\in A} f(x_1,x_2)$$

Si $(f_\iota)_{\iota\in I}$ est une famille de fonctions numériques définies dans un même ensemble E, on appelle <u>enveloppe supérieure</u> (resp. <u>enveloppe inférieure</u>) de cette famille la fonction dont la valeur en un point $x \in E$ est $\sup_{\iota\in I} f_\iota(x)$ (resp. $\inf_{\iota\in I} f_\iota(x)$). Lorsque I est fini, et formé par exemple des nombres $1,2,\ldots,n$, l'enveloppe supérieure de $f_1,f_2,\ldots,f_n$ n'est autre que la fonction $\operatorname{Max}(f_1,f_2,\ldots,f_n)$.

<u>Limite supérieure et limite inférieure d'une fonction suivant un filtre.</u> Soit f une fonction numérique définie dans un ensemble E filtré par un filtre $\mathfrak{F}$. Comme $\overline{R}$ est compact, l'ensemble des valeurs d'adhérence de f suivant $\mathfrak{F}$ est fermé et n'est pas vide.

<u>Définition 3. On appelle limite supérieure</u> (resp. <u>limite inférieure</u>) <u>d'une fonction numérique f suivant un filtre</u> $\mathfrak{F}$, <u>la borne supérieure de l'ensemble des valeurs d'adhérence de f suivant</u> $\mathfrak{F}$.

<u>On la désigne par</u> $\lim.\sup_{\mathfrak{F}} f$, <u>ou</u> $\lim.\sup_{\mathfrak{F}} f(x)$ (où x est un argument de E) (resp. $\lim.\inf_{\mathfrak{F}} f$ ou $\lim.\inf_{\mathfrak{F}} f(x)$).

On se dispense parfois d'indiquer le filtre $\mathfrak{F}$, et on écrit simplement $\lim.\sup f$, ou $\lim.\sup f(x)$, lorsqu'il ne peut en résulter de confusion.

On a $\lim.\inf_{\mathfrak{F}} f \leqslant \lim.\sup._{\mathfrak{F}} f$; pour que f converge suivant $\mathfrak{F}$, il faut et il suffit que $\lim.\inf_{\mathfrak{F}} f = \lim.\sup_{\mathfrak{F}} f$ (ch.I, § 10, prop.1), et la valeur commune de ces deux quantités est alors la limite de f suivant $\mathfrak{F}$.

<u>Proposition 1. On a les relations</u>

$$\lim.\sup_{\mathfrak{F}} f = \inf_{X \in \mathfrak{F}} (\sup_{x \in X} f(x)) \ , \quad \lim.\inf f = \sup_{X \in \mathfrak{F}} (\inf_{x \in X} f(x))$$

Posons $a = \lim.\sup_{\mathfrak{F}} f$; quel que soit $X \in \mathfrak{F}$, a est adhérent à f(X), donc $a \leqslant \sup_{x \in X} f(x)$. D'autre part, si $b > a$, l'intersection des ensembles $[b, +\infty]$ et $\bigcap_{X \in \mathfrak{F}} \overline{f(X)}$ est vide ; comme les ensembles $\overline{f(X)}$ sont compacts, ainsi que $[b, +\infty]$, il existe un ensemble $X \in \mathfrak{F}$ tel que $f(X) \subset [-\infty, b[$, donc $\sup_{x \in X} f(x) < b$, ce qui démontre la proposition pour la limite supérieure ; démonstration analogue pour la limite inférieure.

Si $\mathfrak{F}^*$ est le <u>filtre des sections</u> de $\mathfrak{F}$ (ch.I, §5), le théorème de la limite monotone (§4,th.1), joint à l'inégalité (3) permet encore d'écrire

$$\text{lim.sup}_{\mathfrak{F}} f = \lim_{\mathfrak{F}^*}(\sup_{x\in X} f(x)) \ , \quad \text{lim.inf}_{\mathfrak{F}} f = \lim_{\mathfrak{F}^*}(\inf_{x\in X} f(x))$$

<u>Corollaire</u>. <u>La proposition</u> " $a<\text{lim.sup}_{\mathfrak{F}} f$ " <u>entraîne</u> "<u>quel que soit</u> $X \in \mathfrak{F}$, <u>il existe</u> $x\in X$ <u>tel que</u> $a<f(x)$" ; <u>la proposition</u> " $a > \text{lim.sup}_{\mathfrak{F}} f$ " <u>entraîne</u> "<u>il existe</u> $X \in \mathfrak{F}$ <u>tel que, pour tout</u> $x\in X$, $f(x) < a$ ". <u>Réciproquement, la proposition</u> "<u>quel que soit</u> $X \in \mathfrak{F}$, <u>il existe</u> $x\in X$ <u>tel que</u> $a \leqslant f(x)$" <u>entraîne</u> "$a\leqslant\text{lim.sup}_{\mathfrak{F}} f$ "; <u>la proposition</u> "<u>il existe</u> $X \in \mathfrak{F}$ <u>tel que, pour tout</u> $x\in X$, $f(x) \leqslant a$ " <u>entraîne</u> " $a \geqslant \text{lim.sup}_{\mathfrak{F}} f$ ".

On peut remarquer que, dans la proposition 1 et son corollaire, il suffit de faire décrire à l'ensemble X , dans tous les énoncés où il figure, une <u>base</u> quelconque du filtre $\mathfrak{F}$.

On a les propriétés suivantes :

$$\text{lim.inf } f = - \text{ lim.sup}(-f)$$

Cette relation permet de n'étudier systématiquement que les limites inférieures ou les limites supérieures de fonctions ; de tout énoncé contenant des limites inférieures et des limites supérieures, on peut en déduire un autre équivalent en remplaçant les signes lim.inf par lim.sup , et vice-versa, et en changeant le signe des fonctions sur lesquelles portent ces limites, ainsi que le signe des limites.

(10) $\quad \text{lim.sup } kf = k.\text{lim.sup } f \qquad \text{si } \ 0 < k < +\infty$

(10 bis) $\lim.\sup(\mathrm{Max}(f,g))=\mathrm{Max}(\lim.\sup f,\lim.\sup g)$

(11) $\lim.\sup f + \lim.\inf g \leqslant \lim.\sup(f+g) \leqslant \lim.\sup f+\lim.\sup g$

lorsque ces inégalités portent sur des expressions qui ont un sens ;

(12) $\lim.\sup f \,.\, \lim.\inf g \leqslant \lim.\sup fg \leqslant \lim.\sup f \,.\, \lim.\sup g$

lorsque $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) \geqslant 0$ dans E, et que les expressions qui figurent dans ces inégalités ont un sens ;

(13) $\lim.\sup(1/f) = 1/\lim.\inf f$

si $f(x) > 0$ dans E ;

(14) $f \leqslant g$ entraîne $\lim.\sup f \leqslant \lim.\sup g$ et $\lim.\inf f \leqslant \lim.\inf g$;

En particulier, si f et g ont chacune une limite suivant le filtre $\mathfrak{F}$, la relation $f \leqslant g$ entraîne $\lim_{\mathfrak{F}} f \leqslant \lim_{\mathfrak{F}} g$; c'est ce qu'on appelle le <u>principe de prolongement des inégalités</u>, qui, sous cette forme et la forme plus générale (14), est une des propositions les plus fréquemment employées en Analyse.

On remarquera que, même en supposant $f(x) < g(x)$ en tout point $x \in E$, <u>on ne peut pas en conclure</u> $\lim f < \lim g$; lorsqu'on désire démontrer cette dernière inégalité, il faut donc faire des hypothèses supplémentaires sur f et g, et la seule application du principe de prolongement des inégalités ne suffit pas à la démonstration.

(15) si $\mathfrak{F}_1$ est un filtre plus fin que $\mathfrak{F}$, $\lim.\sup_{\mathfrak{F}_1} f \leqslant \lim.\sup_{\mathfrak{F}} f$;

si A est un ensemble de $\mathfrak{F}$, $\lim.\sup_{\mathfrak{F}_A} f_A = \lim.\sup_{\mathfrak{F}} f$.

En raison de ce fait, lorsque f n'est définie que sur une partie A de E appartenant à $\mathfrak{F}$, on écrit souvent $\lim.\sup_{\mathfrak{F}} f$ au lieu de $\lim.\sup_{\mathfrak{F}_A} f$, par abus de langage.

(16) Si φ est une fonction numérique croissante et continue dans un voisinage V de l'ensemble L des valeurs d'adhérence de f suivant $\mathfrak{F}$, on a

$$\lim.\sup \varphi \circ f = \varphi\,(\lim.\sup f)$$

Démontrons par exemple les inégalités (11) et la relation (16) ; le lecteur établira sans peine de manière analogue les autres propositions que nous venons d'énoncer.

Supposons $\lim.\sup f > -\infty$, $\lim.\inf g > -\infty$; soit $a < \lim.\sup f$, $b < \lim.\inf g$; d'après le corollaire de la prop.1, il existe $X_0 \in \mathfrak{F}$ tel que, quel que soit $x \in X_0$, $b < g(x)$; et d'autre part, quel que soit $X \in \mathfrak{F}$, il existe $x \in X$ tel que $a < f(x)$; donc si X est un ensemble quelconque de $\mathfrak{F}$, comme $X \cap X_0 \in \mathfrak{F}$, il existe $x \in X \cap X_0$ tel que $a+b < f(x)+g(x)$, ce qui entraîne

$a+b \leqslant \lim.\sup(f+g)$, d'où la première inégalité (11)

En second lieu, supposons $\lim.\sup f < +\infty$, $\lim.\sup g < +\infty$, et soit $c > \lim.\sup f$, $d > \lim.\sup g$. D'après le corollaire de la prop.1, il existe $X \in \mathfrak{F}$ tel que, pour tout $x \in X$, $f(x) < c$, et il existe $Y \in \mathfrak{F}$ tel que, pour tout $x \in Y$, $g(x) < d$; on a donc, pour tout $x \in X \cap Y$, $f(x)+g(x) < c+d$, et comme $X \cap Y \in \mathfrak{F}$ on en tire $\lim.\sup(f+g) \leqslant c+d$, d'où la seconde inégalité (11).

Pour démontrer (16), remarquons d'abord que, si V est un voisinage de l'ensemble L des valeurs d'adhérence de f suivant $\mathfrak{F}$, V appartient au filtre engendré par $f(\mathfrak{F})$; car si on a $a < \lim.\inf f$, $b > \lim.\sup f$, il existe $X \in \mathfrak{F}$ tel que $f(x) > a$ pour tout $x \in X$, et $Y \in \mathfrak{F}$ tel que $f(x) < b$ pour tout $x \in Y$; par suite $f(X \cap Y) \subset \left]a,b\right[$. On a donc $\overset{-1}{f}(V) \in \mathfrak{F}$, ce qui d'après (15) permet de se limiter au cas où φ est continue et croissante dans $\overline{f(E)}$. Or, on a alors d'après

(8 bis) $\sup\limits_{x\in X} \varphi(f(x)) = \varphi(\sup\limits_{x\in X} f(x))$, puis, φ étant continue

$$\lim_{\mathfrak{F}^*} \varphi(\sup_{x\in X} f(x)) = \varphi(\lim_{\mathfrak{F}^*}(\sup_{x\in X} f(x)))$$

d'où (16).

Lorsque $\mathfrak{F}$ est le filtre des voisinages d'un point a dans un <u>espace topologique</u> E , on écrit $\limsup\limits_{x\to a} f(x)$ (resp. $\liminf\limits_{x\to a} f(x)$) au lieu de $\limsup_{\mathfrak{F}} f$ (resp. $\liminf_{\mathfrak{F}} f$) ; on a évidemment

$$\liminf_{x\to a} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \limsup_{x\to a} f(x)$$

Lorsque E est un sous-espace d'un espace topologique F , et que $\mathfrak{F}$ est la trace sur E du filtre des voisinages d'un point $a \in \bar{E}$, on écrit $\limsup\limits_{x\to a, x\in E} f(x)$ (resp. $\liminf\limits_{x\to a, x\in E} f(x)$) au lieu de $\limsup_{\mathfrak{F}} f$, (resp. $\liminf_{\mathfrak{F}} f$) ; si E n'est autre que le complémentaire de $\{a\}$, on remplace, dans ces notations, "$x\in E$" par "$x \neq a$" .

Si A est une partie de E , telle que $a\in\bar{A}$, on a

$$\limsup_{x\to a, x\in A} f(x) \leqslant \limsup_{x\to a, x\in E} f(x)$$

Si V est un voisinage de a dans F , on a, d'après (15)

$$\limsup_{x\to a, x\in V\cap E} f(x) = \limsup_{x\to a, x\in E} f(x)$$

Autrement dit, les notions de limite supérieure et limite inférieure en un point d'un espace topologique, ont comme celle de limite, un caractère <u>local</u>.

Enfin, lorsque $\mathfrak{F}$ est le <u>filtre de Fréchet</u> sur $\mathbb{N}$, l'application f de $\mathbb{N}$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ définissant donc une <u>suite</u> (u_n) de nombres réels, la limite supérieure (resp. inférieure) de f suivant $\mathfrak{F}$ se note $\limsup\limits_{n\to\infty} u_n$ (resp. $\liminf\limits_{n\to\infty} u_n$) et s'appelle <u>limite supérieure</u> (resp. <u>limite inférieure</u>) <u>de la suite</u> (u_n) .

L'égalité $a = \limsup_{n \to \infty} u_n$ est donc équivalente à la propriété suivante (en supposant par exemple a fini) : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $u_n < a+\varepsilon$ pour tout $n > n_0$, et $u_n > a-\varepsilon$ pour une infinité de valeurs de n. Propriété analogue si a est infini, ainsi que pour la limite inférieure.

Propriétés des fonctions continues numériques. Les deux propositions qui suivent sont connues sous le nom de théorème de Weierstrass ; leur importance est fondamentale dans toutes les questions où interviennent des fonctions continues numériques ; elles sont d'ailleurs des conséquences presque immédiates de théorèmes énoncés antérieurement.

Théorème 1. Soit f une fonction numérique, définie et continue dans un espace connexe E. Si a et b sont deux points quelconques de E , et c un nombre quelconque de l'intervalle fermé de bornes f(a) et f(b), il existe au moins un point $x \in E$ tel que $f(x) = c$.

C'est une conséquence immédiate du cor. 2 de la prop.1 du §4 ; le cas particulier des fonctions continues finies a déjà été énoncé au §2 (cor. 2 du th.3). On exprime souvent ce théorème en disant qu'une fonction numérique continue sur un espace connexe ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.

Il ne faudrait pas croire que cette propriété n'appartienne qu'aux fonctions continues ; on peut former des fonctions discontinues en tout point, qui la possèdent (*).

Théorème 2. Soit f une fonction numérique, définie et continue dans un espace compact E ; il existe au moins un point $a \in E$ tel que $f(a) = \sup_{x \in E} f(x)$, et au moins un point $b \in E$ tel que $f(b) = \inf_{x \in E} f(x)$.

En effet, $f(E)$ est compact (ch.I, § 10, th.1), donc fermé, et par suite contient ses bornes.

On énonce souvent le théorème précédent en disant qu'une fonction numérique continue sur un espace compact y atteint ses bornes. En particulier, si f est continue et finie dans un espace compact E, elle est bornée dans E.

Fonctions semi-continues. Définition 4. Une fonction numérique f, définie dans un espace topologique E, est dite semi-continue inférieurement (resp. semi-continue supérieurement) en un point $a \in E$, si on a $\lim\inf_{x \to a} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim\sup_{x \to a} f(x) = f(a)$). Elle est dite semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) dans E si elle est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) en tout point de E.

Comme les relations $\lim\inf_{x \to a} f(x) = \lim\sup_{x \to a} f(x) = f(a)$ sont équivalentes à $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, pour qu'une fonction numérique soit continue en un point, il faut et il suffit qu'elle soit à la fois semi-continue supérieurement et inférieurement en ce point.

Si f est semi-continue inférieurement en un point, $-f$ est semi-continue supérieurement en ce point, et vice-versa ; aussi nous bornerons-nous dans ce qui suit à considérer les propriétés des fonctions semi-continues inférieurement ; les propriétés correspondantes des fonctions semi-continues supérieurement s'obtiendront en changeant les fonctions considérées en leurs opposées.

En vertu de la relation $\lim\inf_{x \to a} f(x) \leqslant f(a)$, la condition pour que f soit semi-continue inférieurement en a est équivalente à $\lim\inf_{x \to a} f(x) \geqslant f(a)$. Par suite, f est semi-continue inférieurement en a si $f(a) = -\infty$. En outre, d'après le corollaire de la prop.1 :

Proposition 2. Pour qu'une fonction numérique f soit semi-continue inférieurement en un point a où $f(a) > -\infty$, il faut et il suffit qu'à tout nombre $k < f(a)$ corresponde un voisinage V de a tel qu'en tout point $x \in V$, on ait $f(x) > k$.

On peut encore dire qu'en un point a où $f(a) > -\infty$, f est semi-continue inférieurement si, pour tout nombre $k < f(a)$, $\overset{-1}{f}(\left]k,+\infty\right])$ est un voisinage de a. D'où immédiatement le théorème suivant :

Théorème 3. Pour qu'une fonction numérique f soit semi-continue inférieurement dans un espace topologique E, il faut et il suffit que, pour tout nombre fini k, $\overset{-1}{f}(\left]k,+\infty\right])$ soit ouvert (ou, ce qui revient au même, $\overset{-1}{f}(\left[-\infty,k\right])$ fermé).

On en tire aussitôt une importante généralisation du second théorème de Weierstrass :

Théorème 4. Soit f une fonction numérique semi-continue inférieurement dans un espace compact E ; il existe au moins un point $a \in E$ tel que $f(a) = \inf_{x \in E} f(x)$ (autrement dit, f atteint sa borne inférieure sur E). En effet, posons $m = \inf_{x \in E} f(x)$; pour tout $k > m$ (en supposant $m < +\infty$ sans quoi le théorème est évident), $\overset{-1}{f}(\left[-\infty,k\right])$ est fermé et non vide ; les ensembles $\left[-\infty,k\right]$ formant une base de filtre sur $\overline{R}$, il en est de même des ensembles $\overset{-1}{f}(\left[-\infty,k\right])$ sur E. L'intersection de ces ensembles, qui n'est autre que $\overset{-1}{f}(\left[-\infty,m\right])$ n'est donc pas vide, d'où le théorème, d'après la définition de m.

En particulier, si $f(x) > -\infty$ dans E, f est bornée inférieurement dans E.

Proposition 3. Soient f et g deux fonctions numériques semi-continues inférieurement en un point a de E (resp. dans E). Les fonctions $\mathrm{Min}(f,g)$, et $f+g$ (si elle est définie dans E) sont semi-continues inférieurement au point a (resp. dans E). Il en est de même de fg si $f(x)$ et $g(x)$ sont $\geqslant 0$ en tout point de E , et si le produit fg est défini.

Ce sont en effet des conséquences immédiates de la définition 4 et des formules (10 bis), (11) et (12).

On voit de même que, si k est une constante >0 , et si f est semi-continue inférieurement dans E , il en est de même de kf ; en outre si $f(x)>0$ dans E , $1/f$ est semi-continue supérieurement dans E .

Si φ est une fonction numérique continue et croissante dans un voisinage V de l'ensemble L des valeurs d'adhérence d'une fonction f en un point $a\in E$, et si f est semi-continue inférieurement en a , il en est de même de $\varphi\circ f$ (fonction définie dans un voisinage de a par hypothèse).

Théorème 5. L'enveloppe supérieure d'une famille (f_ι) de fonctions semi-continues inférieurement dans E est semi-continue inférieurement dans E .

En effet, soit g cette enveloppe supérieure ; pour tout nombre fini k , l'ensemble $\overset{-1}{g}(]k,+\infty])$ est la réunion des ensembles $\overset{-1}{f_\iota}(]k,+\infty])$; comme ces derniers sont ouverts d'après le th.3 , $\overset{-1}{g}(]k,+\infty])$ est aussi ouvert, d'où la proposition par application du th. 3 .

Corollaire. L'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions continues dans E est semi-continue inférieurement dans E .

<u>Proposition 4. Soit f une fonction numérique quelconque définie dans une partie partout dense A d'un espace topologique E ; si, en tout point</u> $x \in E$, <u>on pose</u> $g(x) = \liminf_{y \to x, y \in A} f(y)$, g <u>est semi-continue inférieurement dans E</u> .

Pour voir que g est semi-continue inférieurement en un point x , on peut se borner au cas où $g(x) > -\infty$; soit alors a un nombre quelconque $< g(x)$; il existe un voisinage <u>ouvert</u> V de x tel que, pour tout $z \in V \cap A$, $f(z) > a$; or, V est un voisinage d'un quelconque de ses points y ; on a donc $\liminf_{z \to y, z \in A} f(z) = g(y) \geqslant a$, d'où $\liminf_{y \to x} g(y) \geqslant a$, et, comme a est quelconque, $\liminf_{y \to x} g(y) \geqslant g(x)$ ce qui démontre la proposition.

Il est clair que g est l'<u>enveloppe supérieure</u> des fonctions h , semi-continues inférieurement dans E , et telles que $h(x) \leqslant f(x)$ en tout point de A . Si f est <u>semi-continue inférieurement dans A</u> , g est un <u>prolongement</u> de f à E .

§ 5. Approximation des nombres irrationnels. Puissance de $\mathbb{R}$.

(Ce paragraphe peut être passé en première lecture).

Soit ε un nombre rationnel > 0 ; on dit qu'un nombre rationnel r est une <u>valeur approchée à</u> ε <u>près</u> d'un nombre réel x si on a $|x-r| \leqslant \varepsilon$; r est dit valeur approchée <u>par défaut</u> si $x-r > 0$, <u>par excès</u> si $x-r < 0$. Soit (ε_n) une suite de nombres rationnels > 0 tendant vers 0 ; comme l'ensemble des nombres rationnels est partout dense dans $\mathbb{R}$, on voit que, pour tout n, il existe une valeur approchée de x à ε_n près.

L'application de l'axiome du choix permet aussitôt d'en déduire l'existence d'une suite (r_n) de nombres rationnels ayant pour limite x ; mais, comme nous allons le voir, on peut ici se passer de cet axiome, et définir, de bien des manières, une telle suite par un procédé de récurrence.

Nous commencerons par exposer une première catégorie de tels procédés, parmi lesquels rentre en particulier celui dont on fait le plus souvent usage dans le calcul numérique.

Soit x un nombre réel quelconque ; $\mathbb{R}$ étant archimédien, il existe un plus grand entier n tel que $n \leqslant x$; on l'appelle partie entière de x , et on le note $[x]$. On a donc

$$[x] \leqslant x < [x] + 1$$

autrement dit, tout nombre réel peut se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme $n+y$, où n est entier, et $0 \leqslant y < 1$. Pour étudier l'approximation des nombres réels par les nombres rationnels, on peut donc se borner à considérer les nombres x de l'intervalle $[0,1[$.

Considérons une suite quelconque (a_n) $(n \geqslant 1)$ d'entiers $\geqslant 1$; x étant un nombre quelconque de $[0,1[$, nous allons définir par récurrence une suite d'entiers (u_n), et une suite de nombres réels (x_n), de la façon suivante :

$$u_1 = [a_1 x] \quad , \quad x_1 = a_1 x - u_1$$

et en général

(1) $$u_n = [a_n x_{n-1}] \quad , \quad x_n = a_n x_{n-1} - u_n$$

On a $0 \leqslant x_n < 1$, d'où $0 \leqslant a_n x_{n-1} < a_n$, et par suite $0 \leqslant u_n < a_n$, et, comme u_n est entier $0 \leqslant u_n \leqslant a_n - 1$. On voit aussitôt par récurrence, qu'on a

$$x_n = a_1 a_2 \dots a_n \left(x - \frac{u_1}{a_1} - \frac{u_2}{a_1 a_2} - \dots - \frac{u_n}{a_1 a_2 \dots a_n}\right)$$

ou, si on pose

$$(2) \qquad r_n = \frac{u_1}{a_1} + \frac{u_2}{a_1 a_2} + \dots \frac{u_n}{a_1 a_2 \dots a_n}$$

$$(3) \qquad x = r_n + x_n / a_1 a_2 \dots a_n$$

Or, comme $a_n > 1$, c'est-à-dire, puisque a_n est entier, $a_n \geqslant 2$, on a $a_1 a_2 \dots a_n \geqslant 2 a_1 a_2 \dots a_{n-1} \geqslant a_1 a_2 \dots a_{n+1} + 1$, et, par récurrence, $a_1 a_2 \dots a_n \geqslant n$; d'où

$$0 \leqslant x - r_n \leqslant 1/n$$

et comme r_n est rationnel, on voit que la suite (r_n) est une suite de nombres rationnels tendant vers x, r_n étant valeur approchée de x par défaut, à $1/a_1 a_2 \dots a_n$ près. En outre, d'après la prop. 7 du § 4, on a

$$(4) \qquad x = \sum_{n=1}^{\infty} u_n / a_1 a_2 \dots a_n$$

La somme du second membre de (4) est appelée <u>représentation</u> (ou <u>développement</u>) <u>de x dans la base</u> (a_n) (la suite (a_n) étant donc appelée <u>base</u> ou <u>suite de base</u> de cette représentation). D'après la forme des relations de récurrence (1), on a aussi, pour tout entier $p > 0$

$$(5) \qquad x_p = \sum_{n=p+1}^{\infty} u_n / a_{p+1} a_{p+2} \dots a_n$$

Nous allons en déduire que, dans la représentation de x, il y a <u>une infinité</u> de nombres u_n tels que $0 \leqslant u_n < a_n - 1$. Sinon, on aurait $u_n = a_n - 1$ pour $n \geqslant p$, p étant un certain entier > 0. Or, comme $(a_n - 1)/a_{p+1} a_{p+2} \dots a_n = 1/a_{p+1} \dots a_{n-1} - 1/a_{p+1} \dots a_n$, on a, pour $q > p$

$$\sum_{n=p+1}^{q} (a_n-1)/a_{p+1}\dots a_n = 1-1/a_{p+1}\dots a_q$$

et, comme $a_{p+1}\dots a_q$ tend vers 0 quand q tend vers $+\infty$, on aurait donc, d'après (5), $x_p=1$, ce qui est contraire à la définition des x_n .

La suite de base (a_n) étant donnée, à tout nombre x de $[0,1[$ correspond donc une suite (u_n) d'entiers tels que $0 \leqslant u_n \leqslant a_n-1$, l'inégalité $u_n < a_n-1$ ayant lieu pour une infinité de valeurs de n. Réciproquement, donnons-nous une suite d'entiers (u_n) satisfaisant à ces conditions ; nous allons voir que la somme $x = \sum_{n=1}^{\infty} u_n/a_1a_2\dots a_n$ est un nombre appartenant à $[0,1[$, et que si $\sum_{n=1}^{\infty} v_n/a_1a_2\dots a_n$ est la représentation de x dans la base (a_n), on a $u_n = v_n$ quel que soit n .

En effet, on a (§4, prop. 3) ,

$$0 \leqslant x < \sum_{n=1}^{\infty} (a_n-1)/a_1a_2\dots a_n = 1$$

d'après le calcul fait ci-dessus ; puis

$$a_1x = u_1 + \sum_{n=2}^{\infty} u_n/a_2a_3\dots a_n$$

donc (même raisonnement)

$$u_1 \leqslant a_1x < u_1+1$$

ce qui montre que $v_1 = u_1$, d'où

$$0 \leqslant x_1 = a_1x-v_1 = \sum_{n=2}^{\infty} u_n/a_2a_3\dots a_n < 1$$

et le raisonnement se poursuit de la même manière par récurrence. La représentation des nombres dans une base (a_n) donnée permet de les <u>comparer</u> aisément. En effet, soient $x = \sum_{n=1}^{\infty} u_n/a_1a_2\dots a_n$ et $y = \sum_{n=1}^{\infty} v_n/a_1a_2\dots a_n$ deux nombres de $[0,1[$, et supposons qu'on ait $v_i = u_i$ pour $1 \leqslant i < p$, et $v_p > u_p$; si r_p et s_p sont des valeurs approchées à $1/a_1a_2\dots a_p$ de x et y respectivement, on a (en vertu de ce que $v_p \geqslant u_p+1$, ces nombres étant entiers) l'inégalité

$$s_p \geqslant r_p + 1/a_1a_2\ldots a_p$$

Mais $s_p \leqslant y$, et $x < r_p + 1/a_1a_2\ldots a_p$, donc $x < y$. La réciproque est évidente.

Il en résulte en particulier que, pour tout nombre $z = \sum_{n=1}^{\infty} w_n/a_1a_2\ldots a_n$ tel que $x<z<y$, on a $w_i = u_i = v_i$ pour $1 \leqslant i < p$.

Cherchons à quelle condition la représentation de x dans la base (a_n) est <u>limitée</u>, c'est-à-dire que $u_n=0$ pour $n > p$; on a alors $x = r_p = k/a_1a_2\ldots a_p$, où k est un entier $< a_1a_2\ldots a_p$. Réciproquement, tout nombre rationnel de cette forme a un développement limité dans la base (a_n) ; en effet, (3) s'écrit

$$a_1a_2\ldots a_n x = a_1a_2\ldots a_n r_n + x_n$$

et comme $a_1a_2\ldots a_n r_n$ est entier et que $0 \leqslant x_n < 1$, on voit que $a_1a_2\ldots a_n r_n$ est la partie entière de $a_1a_2\ldots a_n x$; donc, si $x = k/a_1a_2\ldots a_p$, avec k entier, on a $x_p = 0$, ce qui entraîne $u_n = 0$ pour $n > p$.

Un nombre rationnel sera de la forme $k/a_1a_2\ldots a_p$ si, une fois mis sous forme irréductible, son dénominateur divise $a_1a_2\ldots a_p$; en particulier si, pour tout entier n, il existe un entier p tel que $a_1a_2\ldots a_p$ soit multiple de n, tout nombre rationnel a un développement limité dans la base (a_n). C'est le cas en particulier si $a_n = n$ (développements de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} u_n/n!$ avec $u_n \leqslant n-1$).

Les suites de base (a_n) les plus importantes sont celles où $a_n=a$ quel que soit n (a entier >1) ; on dit alors que a est le <u>nombre de base</u> (ou encore la <u>base</u>) des développements considérés ; un tel développement est encore dit développement <u>a-mal</u>

(pour a=10, qui est la base utilisée en pratique, on dit "développement <u>décimal</u>", pour a=2 , "développement <u>dyadique</u>").

Nous n'avons parlé jusqu'ici que de développements de nombres de l'intervalle $\left[0,1\right[$; si x est un nombre réel quelconque, et $y = x-[x]$, et si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n/a_1a_2\ldots a_n$ est le développement de y dans la base (a_n), le développement de x dans cette même base est par définition la somme $[x]+\sum_{n=1}^{\infty} u_n/a_1a_2\ldots a_n$.

Dans le cas des développements de base un nombre a , on emploie le symbolisme suivant pour représenter les valeurs approchées r_n d'un nombre $x \geqslant 0$; on désigne chaque entier y tel que $0 \leqslant y < a$ par un signe particulier ; si $r_n = [x] + \sum_{p=1}^{n} u_p/a^p$, on écrit d'abord, à l'aide de ces signes, la représentation a-male de l'entier $[x]$ (Algèbre, ch. §), puis on place une virgule , et on écrit ensuite successivement les signes représentant les nombres $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Par abus de langage, on écrit souvent des égalités où figurent, dans un des membres le nombre x , dans l'autre une de ses valeurs approchées r_n , écrite dans le symbolisme précédent, et suivie de points ; il doit être entendu une fois pour toutes qu'une telle relation n'est qu'une manière abrégée d'indiquer que le symbole écrit au second membre est la valeur approchée de x à $1/a^n$ près par défaut.

Pour les nombres négatifs, l'usage établi est différent : on écrit, dans le symbolisme précédent, une valeur approchée de $-x$, en la faisant précéder du signe - ; c'est donc en réalité une valeur approchée de x <u>par excès</u> à $1/a^n$ près qu'on désigne ainsi.

Nous renvoyons au fascicule de cet ouvrage consacré au Calcul numérique pour l'exposé des règles permettant d'obtenir les valeurs approchées d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient quand on connaît des valeurs approchées des nombres auxquels on applique ces opérations.

<u>Puissance de</u> $\mathbb{R}$. On a $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n,n+1[$, et tous les intervalles $[n,n+1[$ sont équipotents à $[0,1[$; on en conclut (Ens.R. §7) que $\mathbb{R}$ <u>est équipotent à l'intervalle</u> $[0,1[$.

Si nous considérons la représentation <u>dyadique</u> des nombres de $[0,1[$, nous voyons, d'après ce qui précède, que cet intervalle est équipotent à l'ensemble S' des applications $n \rightarrow u_n$ de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble A formé des deux nombres 0 et 1, telles que $u_n = 0$ pour une infinité de valeurs de n .

L'ensemble S' est une partie de l'ensemble S de <u>toutes</u> les applications de $\mathbb{N}$ dans A ; or, S <u>est équipotent à</u> $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$, car à toute partie X de $\mathbb{N}$ on peut faire correspondre l'application $n \rightarrow u_n$ telle de $u_n=0$ dans X , $u_n=1$ dans $\complement X$, et réciproquement, à toute application $n \rightarrow u_n$ de $\mathbb{N}$ dans A correspond la partie X de $\mathbb{N}$ telle que $u_n=0$ dans X . Soit S" le complémentaire de S' par rapport à S ; une application $n \rightarrow u_n$ appartient à S" s'il existe un entier p tel que $u_n=1$ pour $n \geqslant p$; on sait alors que la somme $\sum_{n=1}^{\infty} u_n/2^n$ est <u>rationnelle</u>, d'où il résulte que S" a une puissance inférieure à celle de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels, autrement dit est <u>dénombrable</u>.

Comme S' est un ensemble infini, on en conclut que S' <u>est équipotent à S</u> (Ens. R. § 7). Rassemblant tous ces résultats, on a finalement le théorème suivant :

<u>Théorème 1</u> (Cantor). <u>L'ensemble des nombres réels est équipotent à l'ensemble des parties d'un ensemble dénombrable finfini</u>.

Il en résulte en particulier que $\mathbb{R}$ <u>n'est pas dénombrable</u>.

D'un ensemble équipotent à $\mathbb{R}$, on dit encore qu'il a la <u>puissance du continu</u>.

Tout <u>intervalle</u> de $\mathbb{R}$ a la puissance du continu (§ 3, prop. 1) ; de même, comme l'ensemble des rationnels est dénombrable, <u>l'ensemble des nombres irrationnels a la puissance du continu</u>.

<u>Fractions continuelles</u>. Nous allons maintenant considérer une seconde méthode permettant de former par récurrence une suite de nombres rationnels tendant vers un nombre réel donné ; contrairement à la méthode précédente, elle ne nécessite pas l'intervention d'une suite auxiliaire donnée à l'avance, et est à cet égard, plus "naturelle". Elle est moins bien adaptée que la première méthode au Calcul numérique, mais constitue par contre un instrument puissant pour l'étude des propriétés arithmétiques des nombres réels.

Soit x un nombre réel quelconque ; nous définirons par récurrence deux suites (finies ou infinies suivant les cas), l'une (a_n) formée d'entiers, l'autre (α_n) de nombres réels, de la manière suivante :

$$(6) \qquad \alpha_0 = x \quad , \qquad a_0 = [\alpha_0]$$

puis, pour $n > 0$,

$$(7) \qquad \alpha_n = \frac{1}{\alpha_{n-1} - a_{n-1}} \quad , \qquad a_n = [\alpha_n]$$

Cette définition n'ayant pas de sens lorsqu'un des α_n est <u>entier</u>, il est entendu que les suites (a_n) et (α_n) <u>se terminent</u> pour la première valeur de n telle que α_n soit entier (autrement dit, si p est cette valeur , α_n et a_n ne sont pas définis pour $n > p$).

Les nombres α_n sont dits <u>quotients complets</u> de x , les nombres a_n <u>quotients incomplets</u> ; il est immédiat, d'après (7), que, pour $n > 0$, $\alpha_n > 1$, et que a_n est un entier $\geqslant 1$.

La suite (a_n), finie ou infinie, des quotients incomplets de x , est appelée *développement* (ou *représentation*) *de x en fraction continuelle ordinaire*.

Cherchons d'abord dans quel cas la suite des quotients incomplets est *finie*. Remarquons, d'après (7) que, si α_n est rationnel, il en est de même de $\alpha_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{\alpha_n}$; en particulier, si α_n est entier pour une valeur de n , x est *rationnel*. Réciproquement, *la suite des quotients incomplets d'un nombre rationnel est finie*. La proposition est évidente si x est entier ; sinon, soit $x=p/q$ avec p et q premiers entre eux, et $q > 1$. On a $p = qa_0 + q/\alpha_1$, avec qa_0 entier, et $0 < q/\alpha_1 < q$; donc $r_1 = q/\alpha_1$ est le *reste* de la division de p par q . De façon générale, posons, tant que α_n est défini, $r_n = r_{n-1}/\alpha_n$, et supposons démontré que pour $n < k$, r_n est un entier égal au reste de la division de r_{n-2} par r_{n-1} (en posant $r_{-1}=p$, $r_0=q$) ; on a alors d'après (7)

$$r_{k-2} = a_{k-1}r_{k-1} + r_{k-1}/\alpha_k$$

et, comme $a_{k-1}r_{k-1}$ est entier, et $0<r_{k-1}/\alpha_k < r_{k-1}$ (puisqu'on suppose que α_{k-1} n'est pas entier), on voit que r_k est bien le reste de la division de r_{k-2} par r_{k-1}. Autrement dit, les nombres r_n sont les *restes successifs de l'algorithme d'Euclide* pour la formation du p.g.c.d. de p et q . Si r_m est le dernier reste (égal à 1), on a donc α_m entier et >1 , et le développement de x en fraction continuelle s'arrête au terme d'indice m.

Considérons la suite de fractions rationnelles $R_n(x_0, x_1, \dots, x_n)$ (fonction de $n+1$ variables), définies par récurrence par les conditions

$$R_0(x_0) = x_0 \ ,$$

$$R_n(x_0, \dots, x_{n-1}, x_n) = R_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-2}, x_{n-1} + 1/x_n) \quad (n > 0) \tag{8}$$

On a $x = R_o(a_o)$, puis $x = a_o + 1/a_1 = R_1(a_o, a_1)$; d'une façon générale,

$$x = R_n(a_o, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) \tag{9}$$

comme le montrent aussitôt les formules (7) et la définition de R_n. On appelle <u>réduite d'indice n</u> (ou <u>n^e réduite</u>) de x , le nombre rationnel $\rho_n = R_n(a_o, a_1, \dots, a_n)$; si le développement de x se termine au quotient incomplet d'indice m (x rationnel), x est égal à sa m^e réduite. De façon générale, nous allons étudier la suite (ρ_n) des réduites de x , et montrer que, lorsque x est irrationnel elle <u>converge vers x</u> .

Tout d'abord, on a

$$R_n(x_o, x_1, \dots, x_n) = \frac{P_n(x_o, \dots, x_n)}{Q_n(x_o, \dots, x_n)}$$

où P_n et Q_n sont des polynomes définis par les relations

$$(10) \quad \begin{cases} P_o(x_o) = x_o \quad , & P_1(x_o, x_1) = x_o x_1 + 1 \\ Q_o(x_o) = 1 \quad , & Q_1(x_o, x_1) = x_1 \end{cases}$$

et, pour $n \geqslant 2$,

$$(11) \quad \begin{cases} P_n = x_n P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_n = x_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{cases}$$

comme on le voit immédiatement par récurrence, et tenant compte de (8) ; on a donc $Q_n(x_o, x_1, \dots, x_n) = P_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Des formules (11), on déduit

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = -(P_{n-1} Q_{n-2} - P_{n-2} Q_{n-1})$$

d'où, par récurrence

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1} \tag{12}$$

Posons $p_n = P_n(a_o, a_1, \dots, a_n)$, $q_n = Q_n(a_o, a_1, \dots, a_n)$;

il est clair, d'après (10) et (11), que p_n et q_n sont des entiers ($q_n > 0$), et d'après (12), que ce sont des entiers <u>premiers entre eux</u> ; ce sont donc le numérateur et le dénominateur de la n^e réduite de x , mise sous forme irréductible.

D'après (9), on a

$$x = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} \tag{13}$$

d'où (14)

$$x - \rho_n = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n}$$

De cette formule, on tire les conclusions essentielles 1 les facteurs du dénominateur du second membre étant positifs, on voit que ρ_n est une valeur approchée de x <u>par défaut</u> si n est <u>pair, par excès</u> si n est <u>impair</u> ; en outre, comme $a_{n+1} < \alpha_{n+1} < a_{n+1}+1$, on a, d'après (11) appliqué à q_{n+1} ,

$$\frac{1}{(q_{n+1}+q_n)q_n} < \left| x - \rho_n \right| < \frac{1}{q_{n+1}q_n} \tag{15}$$

D'ailleurs, d'après (11), appliqué à q_n , on a $q_n > q_{n-1}+q_{n-2}$, et, comme $q_n \geqslant 1$, puisque c'est un entier positif, on a à fortiori $q_n > q_{n-1}+1$, d'où par récurrence, $q_n > n$;,la seconde inégalité (15) montre donc que la suite (ρ_n) tend vers x lorsque x est irrationnel.

A tout nombre irrationnel x correspond donc, en le développant en fraction continuelle, une suite (a_n) d'entiers tels que $a_n \geqslant 1$ pour $n > 0$ (a_o étant quelconque). Réciproquement, montrons que, si on se donne une suite d'entiers (b_n) soumise à ces seules conditions, il existe un nombre irrationnel x dont les b_n sont les quotients incomplets.

Pour cela, formons les fractions $\rho_n = p_n/q_n$, en posant $p_n = P_n(b_0,b_1,\ldots,b_n)$, $q_n = Q_n(b_0,b_1,\ldots,b_n)$. Les relations (11) donnent

(16) $$\frac{p_n}{q_n} = \frac{b_n p_{n-1} + p_{n-2}}{b_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$

et comme $b_n \geqslant 1$, on voit que ρ_n est contenu dans l'intervalle ouvert de bornes ρ_{n-1} et ρ_{n-2} ; par récurrence, on en déduit que cet intervalle contient ρ_m, quel que soit $m \geqslant n$; comme

$$\left| \rho_{n-1} - \rho_{n-2} \right| = \frac{1}{q_{n-1}\, q_{n-2}}$$

et que $q_n > n$, la suite (ρ_n) est une suite de Cauchy, et converge donc vers un nombre x, qui est contenu dans l'intervalle ouvert de bornes ρ_n et ρ_{n-1}, quel que soit $n \geqslant 1$.

De cette dernière remarque, on déduit d'abord que

$$b_0 < x < b_0 + 1/b_1$$

et comme b_0 est entier, et $b_1 \geqslant 1$, on a $b_0 = [x] = a_0$. Supposons démontré que b_n est égal au quotient incomplet a_n de x pour $n < m$; on en déduit que la $n^{è}$ réduite de x est égale à p_n/q_n pour $n < m$; puis comme

$$x = \frac{\alpha_m p_{m-1} + p_{m-2}}{\alpha_m q_{m-1} + q_{m-2}}$$

(α_n, n^e quotient complet de x) est contenu dans l'intervalle ouvert de bornes

$$\rho_m = \frac{b_m p_{m-1} + p_{m-2}}{b_m q_{m-1} + q_{m-2}} \quad \text{et} \quad \rho_{m+1} = \frac{(b_m + \frac{1}{b_{m+1}})\, p_{m-1} + p_{m-2}}{(b_m + \frac{1}{b_{m+1}})\, q_{m-1} + q_{m-2}}$$

on a $b_m < \alpha_m < b_m + 1/b_{m+1}$, d'où, comme les b_n sont $\geqslant 1$, $b_m = [\alpha_m] = a_m$, ce qui établit la proposition.

On démontrerait de même que toute suite finie (b_n) d'entiers supérieurs à 1, sauf b_0, et dont le dernier est strictement supérieur à 1 , est la suite des quotients incomplets du développement en fraction continuelle d'un nombre rationnel.

On remarquera que, si x est un nombre rationnel, et $(a_n)_{0 \leqslant n \leqslant m}$ son développement en fraction continuelle, on a $x = R_m(a_0, a_1, \ldots, a_m)$; comme $a_m > 1$, on a aussi, d'après (8),

$$x = R_{m+1}(a_0, a_1, \ldots, a_m - 1, 1)$$

Aussi la suite $(a_0, a_1, \ldots, a_m - 1, 1)$ est-elle encore considérée, par un abus de langage, comme un développement de x en fraction continuelle, dit développement <u>impropre</u> (par opposition au développement proprement dit, qu'on désigne sous le nom de développement <u>propre</u>). Les réduites formées avec ce développement jouissent de toutes les propriétés énoncées précédemment.

La relation entre un nombre x et la suite (finie ou infinie) de ses quotients incomplets (a_n) se note

$$x = a_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty} \frac{1|}{|a_n}$$

si la suite (a_n) est infinie, et

$$x = a_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{m} \frac{1|}{|a_n}$$

lorsque la suite (a_n) est finie et s'arrête à l'indice m . C'est encore cette notation qu'on emploie pour désigner la relation entre un nombre rationnel et la suite des quotients incomplets de son développement en fraction continuelle impropre.

Lorsque x est rationnel et qu'on a les valeurs explicites de ses quotients incomplets (dans son développement propre ou impropre), on remplace encore, dans cette notation, le symbole $\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{m} \frac{1|}{|a_n}$

par les symboles $+\frac{1|}{|a_n}$ écrits successivement. Par exemple, on a

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{1|}{|7} + \frac{1|}{|15} + \frac{1|}{|1}$$

Enfin, quand on égale un nombre x à un symbole de cette dernière espèce, suivi de points, cela signifie que les nombres qui figurent dans ce symbole sont les premiers quotients incomplets de x ; par exemple, on a , pour le nombre désigné par π , que nous définirons plus tard,

$$\pi = 3 + \frac{1|}{|7} + \frac{1|}{|15} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|292} + \dots$$

Les réduites du développement en fraction continuelle d'un nombre x constituent en un certain sens les meilleures valeurs approchées de x ; de façon précise, on a la proposition suivante :

Proposition 1. *Soit x un nombre réel, $\rho_n = p_n/q_n$ une réduite de son développement en fraction continuelle telle que $n > 0$; si p/q est un nombre rationnel tel que $|x-p/q| < |x-\rho_n|$, on a $q > q_n$.*

En effet, $|x-\rho_{n-1}| > |x-\rho_n|$, d'après (15) et l'inégalité $q_{n+1} > q_n+q_{n-1}$ donc, puisque x est compris dans l'intervalle ouvert de bornes ρ_{n-1} et ρ_n , il en est de même de p/q ; on en tire que

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \frac{|pq_{n-1} - qp_{n-1}|}{qq_{n-1}} < \frac{1}{q_n q_{n-1}}$$

Or, le nombre entier $|pq_{n-1}-qp_{n-1}|$ n'est pas nul ; il est donc supérieur à 1 , d'où $qq_{n-1} > q_n q_{n-1}$, c'est-à-dire $q > q_n$.

Approximation simultanée des nombres réels. La seconde inégalité (15) montre que, pour x réel quelconque, et t entier >1, il existe toujours un couple (p,q) d'entiers tels que $0 < q \leqslant t$, et $|qx-p| < 1/t$; il suffit de prendre pour p/q la réduite de plus grand indice telle que $q \leqslant t$. Cette proposition se généralise à un système fini quelconque de nombres réels :

Théorème 2 (Kronecker). Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ n nombres réels quelconques, t un entier >1 ; il existe un système $(p_1, \dots, p_n, q)$ de n+1 entiers, tel que $0 < q \leqslant t^n$, et qu'on ait les inégalités

$$(17) \qquad \left| qx_i - p_i \right| < 1/t \qquad (i = 1,2,\dots,n)$$

La démonstration s'appuie sur une proposition très utile dans ce genre de questions, et qu'on désigne sous le nom de principe des tiroirs. On peut l'énoncer de la manière suivante : soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F ; si la puissance de F est strictement inférieure à celle de F , il existe deux éléments a,b de E tels que $a \neq b$ et $f(a) = f(b)$.

Considérons ici l'ensemble E des entiers y tels que $1 \leqslant y \leqslant t^n$; à chaque $y \in E$, faisons correspondre les parties entières des n nombres $z_i = t(x_i y - [x_i y])$; on a $0 \leqslant z_i < t$, donc, si on désigne par I l'ensemble des entiers $0,1,\dots,t-1$, l'application $y \longrightarrow ([z_i])$ prend ses valeurs dans l'ensemble I_n , qui est équipotent à E . S'il existe une valeur de $y \in E$ telle que $[z_i] = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, le théorème est démontré ; sinon, l'ensemble des valeurs de cette application est de puissance strictement inférieure à E , donc, d'après le principe des tiroirs, il existe deux nombres y', y'' de E tels que

$$\left[t(x_i y' - [x_i y']) \right] = \left[t(x_i y'' - [x_i y'']) \right] \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

ce qui entraîne

$$\left| t(x_i(y'-y'') - [x_i y'] + [x_i y'']) \right| < 1 \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

On peut évidemment supposer $y' > y''$; en prenant $q = y' - y''$, et $p_i = [x_i y'] - [x_i y'']$, on satisfait bien aux conditions du théorème.

Remarque. Lorsque t croît indéfiniment, il en est de même des valeurs de q correspondantes ; autrement dit, quel que soit $a > 0$, il existe un entier $t > 0$ tel que toutes les valeurs de q satisfaisant aux inégalités (17) soient $> a$; en effet, si tous les x_i

sont <u>rationnels</u>, il suffit de prendre pour q un multiple $> a$ de leur dénominateur commun. Si un des x_i , par exemple x_1, est irrationnel, aucun des nombres $x_1 y - [x_1 y]$ n'est nul, quel que soit l'entier y ; soit ε_n le minimum > 0 de ceux de ces nombres pour lesquels $y \leqslant n$; si $t > 1/\varepsilon_n$, tout entier q satisfaisant à (17) est nécessairement $> n$.

<u>Exercices</u>. 1) Soit x un nombre réel tel que $0 < x \leqslant 1$. Montrer qu'il existe une suite croissante (k_n) d'entiers > 1, et une seule, telle que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} 1/k_1 k_2 \ldots k_n$$

Pour que x soit rationnel, il faut et il suffit que tous les k_n soient égaux à partir d'un certain rang.

2) Démontrer les formules

$$P_{m+n-1}(x_0,x_1,\ldots,x_{m+n-1}) = P_{m-1}(x_0,\ldots,x_{m-1})P_{n-1}(x_m,\ldots,x_{m+n-1}) + P_{m-2}(x_0,\ldots,x_{m-2})P_{n-2}(x_{m+1},\ldots,x_{m+n-1})$$

(avec $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$) ;

$$P_n(x_0,x_1,\ldots,x_n) = P_n(x_n,x_{n-1},\ldots,x_0) ;$$

$$\frac{P_n(x_0,x_1,\ldots,x_n)}{P_{n-1}(x_0,\ldots,x_{n-1})} = R_n(x_n,x_{n-1},\ldots,x_0)$$

3) Montrer que $P_n(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ est identique à la somme de ceux des termes du produit

$$x_0 x_1 \ldots x_n (1+1/x_0 x_1)(1+1/x_1 x_2)\ldots(1+1/x_{n-1}x_n)$$

qui ne contiennent pas de puissances négatives des x_i.

4) Démontrer la formule

$$P_n(x_o,x_1,\ldots x_n) = \begin{vmatrix} a_o & -1 & 0 & 0 \ldots\ldots & 0 \\ 1 & a_1 & -1 & 0 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & -1 \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & & 1 & a_{n-1} & -1 \\ \ldots\ldots\ldots & & 0 & 1 & a_n \end{vmatrix}$$

5) Soient $a_o,a_1,\ldots,a_n$, n entiers tels que $a_i \geqslant 1$ pour $i > 0$, et w un nombre réel > 1. Montrer que, si on pose

$$x = R_{n+1}(a_o,a_1,\ldots,a_n,w)$$

les a_i sont les premiers quotients incomplets de x (jusqu'à l'indice n) et w le quotient complet d'indice $n+1$.

6) On suppose que les développements de deux nombres réels, x, y en fraction continuelle (développement propre s'il s'agit de nombres rationnels) ont les mêmes quotients incomplets jusqu'à l'indice n inclus, le quotient incomplet d'indice n+1 existant dans les deux développements, et celui de x étant supérieur à celui de y . Montrer que $x \geqslant y$ si n est pair, $x \leqslant y$ si n est impair. Réciproque. En déduire que, si z appartient à l'intervalle ouvert de bornes x et y , les quotients incomplets du développement de z en fraction continuelle sont identiques à ceux de x et y jusqu'à l'indice n.

7) Soient p,q,r,s quatre entiers tels que $0 < s < q$, et $ps-qr = \pm 1$; démontrer que r/s est l'avant-dernière réduite dans le développement (propre ou impropre suivant les cas) de p/q en fraction continuelle.

8) Soient p,q,r,s quatre entiers satisfaisant aux conditions de l'exercice 7 , et w un nombre réel > 1 ; montrer que, si

$$x = (pw + r)/(qw + s)$$

r/s et p/q sont deux réduites consécutives de x, et w le quotient complet dont l'indice est supérieur d'une unité à celui de la réduite p/q (voir exerc. 5 et 7).

9) Pour que les quotients incomplets de même indice des développements en fraction continuelle de deux nombres irrationnels x et y soient égaux à partir d'un certain rang, il faut et il suffit qu'il existe quatre entiers a,b,c,d, tels que $ad-bc = \pm 1$, et

$$y = (ax+b)/(cx+d)$$

(Pour démontrer que la condition est suffisante, exprimer y en fonction du quotient complet α_n de x, et montrer que, pour n assez grand, on peut appliquer l'exercice précédent).

10) Soit p_n/q_n la réduite d'indice $n > 1$, du développement en fraction continuelle d'un nombre x (développement propre si x est rationnel). Montrer qu'on a

$$\left| x-p_n/q_n \right| < 1/2\, q_n^2 \quad \underline{\text{ou}} \quad \left| x-p_{n-1}/q_{n-1} \right| < 1/2\, q_{n-1}^2$$

(raisonner par l'absurde).

11) On appelle <u>suite de Fibonacci</u> la suite (u_n) des dénominateurs des réduites de la fraction continuelle dont tous les quotients incomplets sont égaux à 1 ; on a donc $u_0=1$, $u_1=1$,

$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ $(n > 1)$

Démontrer les formules

$$u_n = 1 + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots \binom{n-k}{k}$$

($k = n/2$ si n est pair, $k=(n-1)/2$ si n est impair)

$$u_0^2 + u_1^2 + \ldots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$$

$$u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^{n+1}$$

$$u_0u_1 + u_1u_2 + \ldots\ldots + u_{n-1}u_n = u_n^2 + \frac{1+(-1)^n}{2}$$

$$u_{2n+1} = u_{2n} + u_{2n-2} + \dots + u_2 + u_0$$

$$u_{n-1}^2 + u_n^2 = u_{2n}$$

12) Si p_n/q_n est la réduite d'indice n d'un nombre irrationnel x , on a $q_n \geqslant u_n$, u_n désignant le terme d'indice n de la suite de Fibonacci. Si α_n est le quotient complet d'indice n de x , on a

$$\alpha_i \alpha_{i+1} \dots \alpha_{i+k-1} > u_k \qquad (i > 0,\ k > 0)$$

Appendice.

Ensembles ordonnés achevés.

On peut parvenir directement à la définition et à certaines propriétés topologiques de la droite achevée $\overline{R}$ à partir de l'ensemble ordonné Q des rationnels, sans passer par l'intermédiaire de la structure de groupe additif sur Q , par une méthode générale, dont le principe remonte à Dedekind (voir Note historique).

Définition 1. On dit qu'un ensemble totalement ordonné E est achevé si toute partie non vide de E admet une borne supérieure. Il en résulte que toute partie non vide de E admet aussi une borne inférieure, et réciproquement. Par exemple, tout ensemble bien ordonné est achevé.

Sur un ensemble totalement ordonné quelconque E , on voit immédiatement qu'on définit une topologie régulière en prenant la topologie engendrée par l'ensemble des intervalles ouverts de E ; pour abréger, nous appellerons espace totalement ordonné un ensemble totalement ordonné muni de cette topologie.

Il est clair qu'un isomorphisme de la structure d'ordre d'un ensemble totalement ordonné E sur celle d'un ensemble totalement ordonné E' (c'est-à-dire une application strictement croissante de E sur E') est aussi un homéomorphisme de E sur E', lorsqu'on munit ces deux ensembles de leur structure d'espace totalement ordonné.

Ceci posé, nous allons voir qu'on peut toujours "plonger" un ensemble totalement ordonné <u>quelconque</u> dans un ensemble totalement ordonné <u>achevé</u>. De façon précise, on a le théorème suivant :

<u>Théorème 1. Etant donné un ensemble totalement ordonné E, il est possible de définir un ensemble totalement ordonné achevé $\tilde{E}$, et un isomorphisme de structure d'ordre de E sur une partie $\dot{E}$ de $\tilde{E}$, partout dense dans $\tilde{E}$ considéré comme espace totalement ordonné.</u>

Nous prendrons pour $\tilde{E}$ l'ensemble des parties X de E possédant les propriétés suivantes :

a) Les relations $x \in X$ et $y \leqslant x$ entraînent $y \in X$.

b) Si X possède une borne supérieure, cette borne appartient à X.

Nous ordonnerons $\tilde{E}$ <u>par inclusion</u>, la relation $X \leqslant Y$ étant donc équivalente à $X \subset Y$ par définition ; la partie vide de E et E lui-même appartiennent à $\tilde{E}$, et en sont respectivement le plus petit et le plus grand élément.

$\tilde{E}$ est <u>totalement ordonné</u> ; soit en effet $X \neq Y$; il existe donc, par exemple, un élément $x \in E$ tel que $x \in Y$ et $x \notin X$; quel que soit $y > x$, on a $y \notin X$ d'après a) ; il en résulte que x est un <u>majorant</u> de X ; mais alors, d'après a), tout élément de X appartient à Y, puisque $x \in Y$, autrement dit on a $X \subset Y$. On verrait de même que, s'il existait un élément x' tel que $x' \in X$ et $x' \notin Y$, on aurait $Y \subset X$.

Montrons maintenant que E est achevé. En effet, soit $\mathfrak{F}$ une partie non vide quelconque de $\tilde{E}$; nous allons montrer qu'elle admet une borne supérieure dans $\tilde{E}$. Soit $A = \bigcup_{X \in \mathfrak{F}} X$; si A n'admet pas de borne supérieure dans E, il est clair que A est la borne supérieure de $\mathfrak{F}$ dans $\tilde{E}$; il en est encore de même si A admet une borne supérieure a dans E , et si $a \in A$; enfin, si $a \notin A$, considérons l'ensemble $A' = A \cup \{a\}$; A' appartient à $\tilde{E}$ et est un majorant de $\mathfrak{F}$, d'autre part, si B est un majorant quelconque de $\mathfrak{F}$ dans $\tilde{E}$, B contient nécessairement A , et il ne peut être identique à A , en raison de la condition b) ; il contient donc nécessairement A' , ce qui prouve que A' est le plus petit majorant de $\mathfrak{F}$.

Faisons maintenant correspondre à tout $x \in E$, l'ensemble $\mathring{x}$ formé des $y \leqslant x$; c'est une partie de E qui appartient visiblement à $\tilde{E}$. Il est clair que, si $x < y$, on a aussi $\mathring{x} < \mathring{y}$; l'application $x \to \mathring{x}$ de E dans $\tilde{E}$ est donc un isomorphisme de structure d'ordre de E sur son image $\mathring{E}$.

Montrons maintenant que $\mathring{E}$ est partout dense dans l'espace totalement ordonné $\tilde{E}$. En effet, soit $]X,Y[$ un intervalle ouvert non vide de $\tilde{E}$; soit $Z \in \tilde{E}$ tel que $X < Z < Y$; il existe $x \in E$ tel que $x \notin X$ et $x \in Z$; on aura donc $X < \mathring{x} \leqslant Z < Y$, ce qui achève de démontrer le théorème.

Il importe de remarquer qu'un ensemble totalement ordonné achevé n'est pas déterminé à une isomorphie près par la condition de contenir une partie partout dense isomorphe à un ensemble totalement ordonné donné. Prenons par exemple pour E l'ensemble des points $\pm 1/n$ de Q $(n \geqslant 1)$; on peut l'achever, soit en lui adjoignant le nombre 0 de Q , soit en lui adjoignant deux éléments α, β tels que $-1/n < \alpha < \beta < 1/n$ quel que soit n , et les deux ensembles ordonnés ainsi obtenus ne sont évidemment pas isomorphes.

On remarquera aussi que, sur l'ensemble $\mathring{E}$ défini ci-dessus, la <u>topologie induite</u> par celle de $\widetilde{E}$ est identique à sa topologie <u>d'espace totalement ordonné</u>. En effet, soit $\mathring{x} \in \mathring{E}$, et soit $]X, Y[$ un intervalle ouvert de $\widetilde{E}$ contenant $\mathring{x}$; si $]X, \mathring{x}[$ n'est pas vide, il existe $Z \in \widetilde{E}$ tel que $X < Z < \mathring{x}$; il existe donc $y \in E$ tel que $y \notin X$, $y \in Z$ et $y < x$; par suite $X < \mathring{y} < \mathring{x}$. Si au contraire $]X, \mathring{x}[$ est vide, X, comme partie de E, a un plus grand élément y ; sinon, en effet, comme il n'existe pas de majorant z de X tel que $z < x$, x serait la borne supérieure de X et lui appartiendrait d'après b), contrairement à l'hypothèse. On a donc dans ce cas $X = \mathring{y}$; on prouverait de même l'existence d'un élément $y' \in E$ tel que $\mathring{x} < \mathring{y}' \leqslant Y$, ce qui montre que la trace de $]X, Y[$ sur $\mathring{E}$ contient l'intervalle ouvert $]\mathring{y}, \mathring{y}'[$, et établit par suite la proposition. Grâce à ce fait, il n'y a pas d'inconvénient à <u>identifier</u> E et $\mathring{E}$.

Si on applique le procédé du théorème 1 lorsque E est l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels, on retrouve pour $\widetilde{E}$ un ensemble isomorphe à $\overline{\mathbb{R}}$; en effet, à chaque partie X de $\mathbb{Q}$ satisfaisant aux conditions a) et b), on peut faire correspondre de façon biunivoque la borne supérieure de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ si X n'est pas vide, et le nombre $-\infty$ si $X = \emptyset$, et on établit ainsi une correspondance biunivoque conservant l'ordre, entre $\widetilde{E}$ et $\overline{\mathbb{R}}$.

On peut encore caractériser les ensembles totalement ordonnés achevés de la manière suivante :

<u>Proposition 1</u>. <u>Pour qu'un ensemble totalement ordonné soit achevé, il faut et il suffit que l'espace totalement ordonné correspondant soit compact</u>.

1° La condition est <u>nécessaire</u>. Soit E un ensemble totalement ordonné achevé, et $\mathfrak{F}$ un <u>recouvrement ouvert</u> quelconque de E . Soit F la partie de E formée des points x tels qu'il existe un recouvrement <u>fini</u> et contenu dans $\mathfrak{F}$ de l'intervalle $]\leftarrow, x]$; F n'est pas vide, puisqu'il contient le plus petit élément de E . Soit a la borne supérieure de F ; remarquons d'abord que $a \in F$; en effet, soit X un ensemble ouvert appartenant à $\mathfrak{F}$ et contenant a ; X contient un intervalle $]x, a]$; si cet intervalle est réduit au point a , $a \in F$ par définition de la borne supérieure ; sinon, il contient un point $y \in F$; alors, l'intervalle $]\leftarrow, y]$ possédant un recouvrement fini $\mathfrak{S}$ contenu dans $\mathfrak{F}$, l'ensemble $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S} \cup \{X\}$ est un recouvrement fini et contenu dans $\mathfrak{F}$ de l'intervalle $]\leftarrow, a]$, ce qui montre que l'on a encore $a \in F$ dans ce cas. Supposons maintenant que $F \neq E$, donc que a ne soit pas le plus grand élément de E ; X contient un intervalle $[a, z[$ avec $z > a$; soit Y un ensemble de $\mathfrak{F}$ contenant z , et $\mathfrak{S}$ un recouvrement fini et contenu dans $\mathfrak{F}$ de l'intervalle $]\leftarrow, a]$; $\mathfrak{S} \cup \{Y\}$ est un recouvrement fini et contenu dans $\mathfrak{F}$ de l'intervalle $]\leftarrow, z]$, autrement dit $z \in F$, contrairement à la définition de a , d'où la proposition.

2° La condition est <u>suffisante</u>. Soit en effet E un espace totalement ordonné <u>compact</u> ; si E n'était pas achevé, on pourrait former un espace totalement ordonné achevé $\tilde{E}$ où E serait partout dense ; mais E , étant compact, est fermé dans $\tilde{E}$, et par suite identique à $\tilde{E}$, d'où la proposition.

<u>Remarques</u>. 1) La proposition précédente, jointe au théorème 1, montre que tout espace totalement ordonné est <u>uniformisable</u>.

2) Pour le groupe additif $\mathbb{R}$ de la droite numérique, la formation de l'ensemble totalement ordonné achevé correspondant se réduit à l'adjonction à $\mathbb{R}$ d'un plus petit et d'un plus grand élément. Mais il ne faudrait pas croire que ce soit le cas général pour un groupe ordonné, même <u>complet</u>. On peut en effet former de tels groupes E , dont aucun point n'admet de voisinage compact (*); il en résulte que, lorsqu'on plonge E dans l'ensemble totalement ordonné achevé $\tilde{E}$ correspondant, le complémentaire de E dans $\tilde{E}$ est <u>partout dense</u>.
