TOPOLOGIE GENERALE
CHAPITRES I ET II (ETAT 3)

Rédaction n° 022

Nombre de pages : 122

Nombre de feuilles : 122

Topologie générale

Chap I Struct^s Topologiques

Chap II Struct^s Uniformes

|Etat 2| |22|

A 22 2

Etat 3

TOPOLOGIE GÉNÉRALE.

CHAPITRE I

STRUCTURES TOPOLOGIQUES.

§ 1. Ensembles ouverts ; voisinages ; ensembles fermés.

Ensembles ouverts.

Définition 1. Un ensemble $\mathfrak{O}$ de parties d'un ensemble E définit sur E une structure topologique (ou plus brièvement une topologie) s'il possède les propriétés suivantes (dites axiomes des structures topologiques) :

O_I . Toute réunion d'ensembles de $\mathfrak{O}$ est un ensemble de $\mathfrak{O}$.

O_{II}. Toute intersection finie d'ensembles de $\mathfrak{O}$ est un ensemble de $\mathfrak{O}$.

Les ensembles de $\mathfrak{O}$ sont appelés ensembles ouverts de la structure topologique définie par $\mathfrak{O}$.

Définition 2. On appelle espace topologique un ensemble muni d'une structure topologique ; ses éléments sont alors appelés points.

Lorsqu'on a défini une structure topologique sur un ensemble E, on dit que cet ensemble est le support de cette structure, ou de l'espace topologique qu'elle définit.

L'axiome O_I implique en particulier que la réunion de la partie vide de $\mathfrak{O}$, c'est-à-dire la partie vide de E (Ensembles ,ch.II § 4) appartient à $\mathfrak{O}$. De même, l'axiome O_{II} implique que l'intersection de la partie vide de $\mathfrak{O}$, c'est-à-dire (loc.cit.) l'ensemble E lui-même, appartient à $\mathfrak{O}$.

Lorsqu'on veut montrer qu'un ensemble $\mathfrak{O}$ de parties de E satisfait à O_{II}, il est souvent commode d'établir séparément qu'il satisfait aux deux axiomes suivants,

...

dont la conjonction est équivalente à O_{II} :

O_{IIa}. <u>L'intersection de deux ensembles de $\mathfrak{O}$ appartient à $\mathfrak{O}$.</u>

O_{IIb}. E <u>appartient à</u> $\mathfrak{O}$.

<u>Exemples de topologies</u>. E étant un ensemble quelconque, l'ensemble de parties de E formé de E et de $\emptyset$ satisfait aux axiomes O_I et O_{II}, et définit donc une topologie sur E. Il en est de même de l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ de toutes les parties de E ; la topologie qu'il définit est dite <u>topologie discrète</u> et l'ensemble E muni de cette topologie est appelé <u>espace discret</u>.

<u>Voisinages</u>. <u>Définition 3</u>. <u>Dans un espace topologique E, on appelle voisinage d'une partie A de E tout ensemble qui contient un ensemble ouvert contenant A.</u>

<u>Les voisinages d'une partie</u> $\{x\}$ <u>réduite à un seul point s'appellent aussi voisinages du point</u> x.

Il est clair que tout voisinage d'une partie A est aussi un voisinage de toute partie $B \subset A$; en particulier, c'est un voisinage de tout point de A. Réciproquement, si un ensemble A est un voisinage de chacun des points d'un ensemble B, à tout $x \in B$ correspond un ensemble ouvert B_x tel que $x \in B_x \subset A$; il en résulte que $B \subset \bigcup_{x \in B} B_x \subset A$; or $\bigcup_{x \in B} B_x$ est un ensemble ouvert d'après O_I, donc A est un voisinage de B. En particulier :

<u>Proposition 1</u>. <u>Pour qu'un ensemble soit un voisinage de chacun de ses points, il faut et il suffit qu'il soit ouvert.</u>

Le mot "voisinage" a, dans le langage courant, un sens tel que beaucoup de propriétés où intervient la notion mathématique que nous avons désignée sous ce nom, apparaissent comme l'expression mathématique de propriétés intuitives ; le choix de ce terme a donc l'avantage de rendre le langage plus imagé. Dans le même but, on peut utiliser aussi les expressions "assez voisin" et "aussi voisin qu'on veut" dans certains énoncés, à condition de préciser chaque fois ce qu'ils signifient. Par exemple, on peut énoncer la proposition 1 sous la forme suivante, qu'on regarde comme lui étant équivalente : pour qu'un ensemble A soit ouvert, il faut et il suffit que, quel que soit $x \in A$, tous les points <u>assez voisins</u> de x appartiennent à A. Plus généralement, on dira qu'une propriété a lieu pour tous les points assez voisins d'un point x, lorsqu'elle a lieu en tous les points d'un voisinage de x.

Nous rencontrerons par la suite d'autres exemples de ce langage imagé ; malheureusement, les phrases qu'on introduit ainsi sont construites de telle sorte que, si on voulait donner aux expressions "assez voisin" et "aussi voisin qu'on veut" qui y figurent un sens indépendant du contexte (comme on a fait ci-dessus pour le mot "voisinage"), on aboutirait rapidement à des contradictions ; d'où la nécessité de préciser la signification de ces termes chaque fois que l'on s'en sert.

Désignons par $\mathfrak{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x. Les ensembles de parties $\mathfrak{V}(x)$ jouissent des propriétés suivantes :

V_I. <u>Tout ensemble qui contient un ensemble de</u> $\mathfrak{V}(x)$ <u>appartient à</u> $\mathfrak{V}(x)$.

Cela résulte immédiatement de la définition 3.

V_{II}. L'intersection de deux ensembles de $\mathfrak{V}(x)$ appartient à $\mathfrak{V}(x)$.

En effet, si V et W sont deux ensembles de $\mathfrak{V}(x)$, il existe deux ensembles ouverts A,B, tels que $x \in A \subset V$ et $x \in B \subset W$, d'où $x \in A \cap B \subset V \cap W$; mais $A \cap B$ est ouvert d'après O_{II}, d'où la proposition.

V_{III}. L'ensemble $\mathfrak{V}(x)$ n'est pas vide, et x appartient à tout ensemble de $\mathfrak{V}(x)$.

La seconde partie de cette proposition résulte de la définition 3, et la première du fait que E appartient à $\mathfrak{V}(x)$ quel que soit x, en vertu de O_{II}.

V_{IV}. Si V appartient à $\mathfrak{V}(x)$, il existe un ensemble W appartenant à $\mathfrak{V}(x)$ et tel que, quel que soit $y \in W$, V appartienne à $\mathfrak{V}(y)$.

En effet, il suffit, d'après la proposition 1, de prendre pour W un ensemble ouvert contenant x et contenu dans V.

> On peut encore exprimer cette propriété en disant qu'un voisinage de x est aussi un voisinage de tous les points assez voisins de x.

Ces quatre propriétés caractérisent les ensembles de voisinages des points d'un espace topologique ; autrement dit :

Proposition 2. Si, à chaque élément x d'un ensemble E, on fait correspondre un ensemble $\mathfrak{V}(x)$ de parties de E de sorte que les propriétés V_I, V_{II}, V_{III} et V_{IV} soient vérifiées, il existe une structure topologique et une seule sur E, dans laquelle $\mathfrak{V}(x)$ est l'ensemble des voisinages de x, quel que soit $x \in E$.

D'après la proposition 1, s'il existe une structure topologique répondant à la question, l'ensemble des ensembles ouverts de cette topologie est nécessairement l'ensemble $\mathfrak{O}$ des parties A telles que, quel que soit $x \in A$, on ait $A \in \mathfrak{V}(x)$; d'où l'<u>unicité</u> de cette topologie.

$\mathfrak{D}$ satisfait bien aux axiomes O_I et O_{II} ; pour O_I, cela résulte immédiatement de V_I, et pour O_{II}, de V_{II}.

Reste à voir que, dans la topologie définie par $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{V}(x)$ est l'ensemble des voisinages de x ; il est immédiat, d'après V_I, que tout voisinage de x appartient à $\mathfrak{V}(x)$. Réciproquement soit V un ensemble de $\mathfrak{V}(x)$, et soit U l'ensemble des points y tels que $V \in \mathfrak{V}(y)$; à chaque $y \in U$ correspond alors, d'après V_{IV}, un ensemble $W_y \in \mathfrak{V}(y)$ tel que, quel que soit $z \in W_y$, $V \in \mathfrak{V}(z)$, autrement dit $z \in U$; par suite $W_y \subset U$, ce qui montre que $U \in \mathfrak{D}$, et par suite que V est un voisinage de x, puisque $x \in U$ et $U \subset V$ d'après V_{III} (fig. 1). C.Q.F.D.

fig. 1

La proposition 2 peut encore s'exprimer en disant qu'on peut définir une structure topologique en se donnant les ensembles $\mathfrak{V}(x)$ des voisinages de ses points, soumis seulement aux axiomes V_I, V_{II}, V_{III} et V_{IV} ; c'est là une seconde manière, souvent employée de définir une topologie sur un ensemble.

<u>Exemple</u>. Dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, soit $\mathfrak{V}(x)$ l'ensemble des parties qui contiennent un intervalle ouvert borné contenant x ; il est immédiat que ces ensembles vérifient V_I, V_{III} et V_{IV} ; quant à V_{II}, cela résulte du fait que, si on considère deux intervalles ouverts $]a,b[$ et $]c,d[$ contenant x, leur intersection est l'intervalle ouvert $]\alpha,\beta[$ où $\alpha = \mathrm{Max}(a,c)$ et $\beta = \mathrm{Min}(b,d)$. L'espace topologique obtenu en munissant $\mathbb{Q}$ de la topologie définie par ces ensembles $\mathfrak{V}(x)$ est appelé <u>droite rationnelle</u>.

*On définit de la même manière une topologie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ; $\mathbb{R}$, muni de cette topologie, est appelé *droite numérique*.*

La proposition 1 montre immédiatement que, sur la droite rationnelle (ou la droite numérique), tout *intervalle ouvert*, borné ou non (c'est-à-dire de l'une des formes $]a,b[$, $]\leftarrow,a[$, $]a,\rightarrow[$ ou $]\leftarrow,\rightarrow[$) est un *ensemble ouvert*.

Ensembles fermés.

Définition 4. Dans un espace topologique E, on appelle ensembles fermés les complémentaires des ensembles ouverts de E.

Par dualité, les axiomes O_I et O_{II} se traduisent en les propriétés suivantes, qui leur sont respectivement équivalentes :

F_I. *Toute intersection d'ensembles fermés est un ensemble fermé.*

F_{II}. *Toute réunion finie d'ensembles fermés est un ensemble fermé.*

L'ensemble vide et l'espace entier E sont fermés (et par suite, *à la fois ouverts et fermés*).

Sur la droite rationnelle, tout intervalle de la forme $[a,\rightarrow[$ est un ensemble fermé, car son complémentaire $]\leftarrow,a[$ est ouvert ; de la même manière on voit que tout intervalle de la forme $]\leftarrow,a]$ est un ensemble fermé, et il en est donc de même de tout intervalle fermé borné $[a,b]$, qui est l'intersection des intervalles $[a,\rightarrow[$ et $]\leftarrow,b[$.

L'ensemble $\mathbb{N}'$ des entiers positifs et négatifs est *fermé* sur la droite rationnelle, car son complémentaire est $\bigcup_{n\in\mathbb{N}'}]n,n+1[$, qui est ouvert.

Intérieur, adhérence, frontière d'un ensemble.

Définition 5. On dit qu'un point x est intérieur à un ensemble A lorsque A est un voisinage de x. L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle intérieur de A et se note $\mathring{A}$.

8

D'après la définition 4, un point x est donc intérieur à A s'il existe un ensemble ouvert contenu dans A et contenant x ; il en résulte que $\mathring{A}$ est la réunion des ensembles ouverts contenus dans A , et par suite <u>est le plus grand ensemble ouvert contenu dans A</u> ; autrement dit, si B est un ensemble ouvert tel que $B \subset A$, on a $B \subset \mathring{A}$. Par suite, si A et B sont deux ensembles tels que $A \subset B$, on a $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

<u>Remarque</u>. L'intérieur d'un ensemble non vide peut être vide ; c'est le cas pour un ensemble réduit à un seul point lorsqu'il n'est pas ouvert, comme sur la droite rationnelle (ou la droite numérique) par exemple.

Il résulte de ce qui précède que tout ensemble ouvert est identique à son intérieur, et réciproquement, ce qui n'est autre que la proposition 1, énoncée sous une autre forme.

La propriété V_{II} peut de même s'énoncer en disant que tout point intérieur à la fois à deux ensembles A et B , est intérieur à $A \cap B$; par suite (1) $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

Tout point intérieur au complémentaire d'un ensemble A est dit <u>extérieur</u> à A ; un tel point x est donc caractérisé par la propriété qu'il existe un voisinage de x ne contenant aucun point de A .

<u>Définition 6</u>. <u>On dit qu'un point x est adhérent à un ensemble A lorsque tout voisinage de x contient au moins un point de A . L'ensemble des points adhérents à A s'appelle adhérence de A et se note $\overline{A}$</u> .

On peut encore énoncer cette définition en disant qu'un point x est adhérent à un ensemble A s'il existe des points de A <u>aussi voisins qu'on veut</u> de x.

Tout point non adhérent à A est extérieur à A ,et réciproquement ; on a donc les formules (duales l'une de l'autre) :

$$(2) \qquad \complement \overline{A} = \overset{\circ}{(\complement A)} \quad , \qquad \complement \overset{\circ}{A} = \overline{(\complement A)}$$

A toute proposition sur l'intérieur d'un ensemble correspond donc par dualité une proposition sur son adhérence. En particulier, on voit que l'adhérence d'un ensemble A est <u>le plus petit ensemble fermé contenant A</u> ; autrement dit, si B est un ensemble fermé tel que $A \subset B$, on a $\overline{A} \subset B$. Si A et B sont deux ensembles tels que $A \subset B$, on a $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Les ensembles fermés peuvent être caractérisés par la propriété d'être <u>identiques à leur adhérence</u>.

A la formule (1) correspond par dualité la formule

$$(3) \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad .$$

Si x est un point adhérent à A , mais n'appartenant pas à A , tout voisinage de x contient un point de A <u>différent de x</u> ; mais si $x \in A$, il peut se faire qu'il existe un voisinage de x ne contenant aucun point de A différent de x ; on dit alors que x est un <u>point isolé de A</u> ; en particulier, on voit qu'un point x ne peut être isolé dans l'espace tout entier que si $\{x\}$ est un ensemble ouvert.

Un ensemblé <u>fermé</u> dont aucun point n'est isolé est appelé ensemble <u>parfait</u>.

<u>Définition 7</u>. <u>Un point x est dit point frontière d'un ensemble A s'il est à la fois adhérent à A et à $\complement A$</u> ; <u>l'ensemble des points frontière de A s'appelle frontière de A</u> .

La frontière de A est donc l'ensemble $\overline{A} \cap \overline{\complement A}$, qui est <u>fermé</u>. Un point frontière x de A est caractérisé par la propriété que tout voisinage de x contient au moins un point de A et au moins un point de $\complement A$; il peut ou non appartenir à A. La frontière de $\complement A$ est identique à celle de A ; l'intérieur de A , l'intérieur de $\complement A$ et la frontière de A constituent une partition de E .

<u>Ensemble dense par rapport à un autre</u>. <u>Ensembles partout denses</u>. <u>Définition 8</u>. <u>Un ensemble A est dit dense par rapport à un ensemble B, si tout point de B est adhérent à A</u> (autrement dit si $B \subset \overline{A}$). <u>Un ensemble est dit partout dense s'il est dense par rapport à l'espace E tout entier</u> (autrement dit si $E = \overline{A}$) .

<u>Exemples</u>. Si l'ensemble des ensembles ouverts de E se compose de E et $\emptyset$, toute partie non vide de E est partout dense. Au contraire, si E est un espace discret il n'existe pas d'ensemble partout dense distinct de E .

On verra au ch.IV que l'ensemble des nombres rationnels et son complémentaire sont partout denses sur la droite numérique.

Si A est dense par rapport à B , et si B est dense par rapport à C , A est dense par rapport à C ; car on a $B \subset \overline{A}$, donc $\overline{B} \subset \overline{A}$, et comme $C \subset \overline{B}$, on a $C \subset \overline{A}$.

<u>Exercices</u>. 1) Si on se donne, pour chaque point x d'un ensemble E , un ensemble $\mathfrak{V}(x)$ de parties de E , satisfaisant aux trois axiomes V_I, V_{II}, V_{III}, on obtient une structure d'une espèce à laquelle est <u>subordonnée</u> l'espèce des structures topologiques ; dans cette structure, on peut encore définir un point intérieur à un ensemble, par la condition que x est intérieur à A si $A \in \mathfrak{V}(x)$. En désignant par $\mathring{A}$ l'intérieur de A , montrer que la proposition "quel que soit A , l'intérieur de $\mathring{A}$ est identique à $\mathring{A}$", est équivalente à V_{IV} , et caractérise donc les structures topologiques parmi les structures de l'espèce précédente.

2) Soit E un ensemble totalement ordonné ; on désigne :

1°) par $\mathfrak{V}_b(x)$ l'ensemble des parties de E qui contiennent un intervalle ouvert contenant x ;

2°) par $\mathfrak{V}_g(x)$ l'ensemble des parties de E qui contiennent un intervalle semi-ouvert de la forme $]z,x]$ $(z < x)$;

3°) par $\mathfrak{V}_d(x)$ l'ensemble des parties de E qui contiennent un intervalle semi-ouvert de la forme $[x,y[$ $(x < y)$.

Montrer que chacun de ces ensembles est l'ensemble des voisinages de x dans une topologie sur E (appelée respectivement topologie <u>bilatère</u>, topologie <u>gauche</u> et topologie <u>droite</u>).

Que sont ces topologies lorsque E est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs ?

3) Que sont l'intérieur, l'adhérence, la frontière d'une partie quelconque d'un ensemble E , lorsqu'on prend sur E la topologie discrète, où la topologie dont les seuls ensembles ouverts sont E et $\emptyset$?

4) Que sont l'intérieur, l'adhérence, la frontière des divers intervalles sur la droite rationnelle (ou la droite numérique) ; mêmes questions pour un ensemble totalement ordonné quelconque, muni d'une des trois topologies définies à l'exercice 2 .

5) Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$, et donner un exemple où $\overline{A \cap B} \neq \bar{A} \cap \bar{B}$

6) Montrer que, si A est <u>ouvert</u>, $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$.

7) Sur la droite rationnelle $\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres <u>dyadiques</u> (c'est-à-dire de la forme $k/2^n$, où k est entier et n entier positif) et son complémentaire sont partout denses.

8) Quels que soient le nombre rationnel $a > 0$ et l'entier $n \geqslant 0$ il existe un entier $u_n \geqslant 0$ tel que $(u_n/2^n)^2 \leqslant a < ((u_n+1)/2^n)^2$; montrer que, $((u_n+1)/2^n)^2 - (u_n \; 2^n)^2 \leqslant (2u_{n_0} + 3)/2^n$; en déduire que, sur la droite rationnelle, l'ensemble des carrés des nombres rationnels est dense par rapport à l'ensemble des nombres rationnels positifs.

§ 2. Comparaison des topologies. Topologie engendrée par un ensemble de parties. Homéomorphie;

Comparaison des topologies.

Sur un même ensemble E, on peut définir des structures topologiques différentes au moyen des différents ensembles de parties de E satisfaisant aux axiomes O_I et O_{II} ; bien entendu, les espaces topologiques ainsi définis sont considérés comme différents.

Définition 1. *De deux structures topologiques $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ définies sur un même ensemble E au moyen de deux ensembles de parties $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, la première sera dite plus fine que la seconde (et la seconde moins fine que la première) si $\mathcal{D}_1 \supset \mathcal{D}_2$; si de plus $\mathcal{D}_1 \neq \mathcal{D}_2$, on dit que $\mathcal{C}_1$ est strictement plus fine que $\mathcal{C}_2$.*

Deux topologies dont l'une est plus fine que l'autre sont dites *comparables* ; si chacune est plus fine que l'autre, il est clair qu'elles sont identiques.

L'ensemble des structures topologiques sur un ensemble quelconque est *ordonné* par la relation " $\mathcal{C}$ est plus fine que $\mathcal{C}'$ " ; la topologie dont les ensembles ouverts sont E et $\emptyset$ est *moins fine* que toutes les autres, autrement dit, est *le plus petit élément* de l'ensemble des topologies ;

la topologie discrète est <u>plus</u> fine que toutes les autres, autrement dit est <u>le plus grand élément</u> de l'ensemble des topologies.

<u>Proposition 1. $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ étant deux topologies sur un ensemble E, les propositions suivantes sont équivalentes</u> :

a) $\mathcal{C}_1$ <u>est plus fine que</u> $\mathcal{C}_2$.

b) <u>Quel que soit</u> $x \in E$, <u>tout voisinage de x dans</u> $\mathcal{C}_2$ <u>est un voisinage de x dans</u> $\mathcal{C}_1$.

Montrons d'abord que a) entraîne b) : si V est un voisinage de x dans la topologie $\mathcal{C}_2$, il existe un ensemble A ouvert dans $\mathcal{C}_2$ tel que $x \in A \subset V$; comme A est aussi ouvert dans $\mathcal{C}_1$, V est un voisinage de x dans $\mathcal{C}_1$.

Inversement, b) entraîne a) : car, si A est un ensemble ouvert dans $\mathcal{C}_2$, c'est un voisinage de chacun de ses points dans $\mathcal{C}_2$, donc aussi dans $\mathcal{C}_1$, ce qui montre (§ 1, prop.1) que A est ouvert dans $\mathcal{C}_1$.

Soient $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ deux topologies sur un ensemble E ; désignons par $\mathring{A}_{(i)}$, $\overline{A}_{(i)}$ $(i = 1,2)$ l'intérieur et l'adhérence d'un ensemble A dans la topologie $\mathcal{C}_i$; si $\mathcal{C}_1$ est <u>plus fine</u> que $\mathcal{C}_2$, on a les relations (duales l'une de l'autre)

$$\mathring{A}_{(1)} \supset \mathring{A}_{(2)} \qquad \overline{A}_{(1)} \subset \overline{A}_{(2)}$$

Considérons un ensemble non vide quelconque $\mathfrak{F}$ de topologie sur un même ensemble E, ou, ce qui revient au même, un ensemble Φ d'ensembles de parties de E satisfaisant à O_I et O_{II} ; et considérons l'ensemble des topologies sur E qui sont <u>moins fines que toutes les topologies de l'ensemble</u> $\mathfrak{F}$. Si $\mathfrak{D}$ est l'ensemble des ensembles ouverts d'une telle topologie, il est contenu dans chaque ensemble de Φ , donc dans l'ensemble $\mathfrak{T}$, intersection des ensembles de Φ (c'est-à dire l'ensemble des parties de E qui appartiennent à chacun des ensembles de Φ). Or il est immédiat que $\mathfrak{T}$ satisfait à O_I et O_{II}; il définit donc une topologie, qu'on appelle <u>topologie intersection</u> des topologies de $\mathfrak{F}$, et qu'on peut caractériser comme <u>la topologie la plus fine de toutes celles qui sont moins fines que les topologies de</u> $\mathfrak{F}$; on peut dire aussi que la topologie intersection est la <u>borne inférieure</u> de $\mathfrak{F}$ dans l'ensemble ordonné des topologies.

<u>Topologie engendrée par un ensemble de parties</u>. Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble <u>quelconque</u> de parties de E , et considérons <u>l'ensemble</u> $\mathfrak{F}$ <u>des topologies sur E pour lesquelles tous les ensembles de</u> $\mathfrak{S}$ <u>sont ouverts</u>. Cet ensemble n'est pas vide, car il contient la topologie discrète ; d'autre part, l'<u>intersection</u> de toutes les topologies de $\mathfrak{F}$ appartient encore à $\mathfrak{F}$ (autrement dit, est le plus petit élément de $\mathfrak{F}$). On peut définir l'ensemble $\mathfrak{O}$ des ensembles ouverts de cette topologie intersection de la manière suivante : comme $\mathfrak{O}$ contient $\mathfrak{S}$, il contient aussi, d'après O_{II}, l'ensemble $\mathfrak{S}'$ des intersections <u>finies</u> d'ensembles de $\mathfrak{S}$; (y compris E , intersection de la partie vide de $\mathfrak{S}$) ; comme $\mathfrak{O}$ contient $\mathfrak{S}_1$, il contient aussi, d'après O_I, l'ensemble $\mathfrak{S}''$ des réunions <u>quelconques</u> d'ensembles de $\mathfrak{S}'$ (y compris la partie vide de E , réunion de la partie vide de $\mathfrak{S}'$). Or $\mathfrak{S}''$ satisfait aux axiomes O_I et O_{II} : c'est évident pour O_I d'après l'associativité de la réunion ; et pour O_{II}, cela résulte de la distributivité de l'intersection <u>finie</u> par rapport à la réunion <u>quelconque</u> (Ensembles, ch. II, §4 , formule) ; d'après sa définition, $\mathfrak{O}$ est donc <u>identique</u> à $\mathfrak{S}''$. On dit que la topologie

définie par $\mathfrak{G}''$ est <u>engendrée</u> par l'ensemble $\mathfrak{G}$, et que $\mathfrak{G}$ est un <u>système de générateurs</u> de cette topologie.

De l'existence d'une topologie engendrée par un ensemble quelconque de parties de E résulte celle d'une topologie <u>borne supérieure</u> (dans l'ensemble ordonné des topologies) d'un ensemble quelconque $\mathfrak{F}$ de topologies : c'est en effet la topologie engendrée par la réunion $\mathfrak{G}$ des ensembles d'ensembles ouverts des topologies de $\mathfrak{F}$.

Dans la topologie engendrée par un ensemble $\mathfrak{G}$ de parties, les voisinages d'un point x peuvent se définir de la façon suivante : ce sont les ensembles qui contiennent un ensemble de $\mathfrak{G}'$ (intersection finie d'ensembles de $\mathfrak{G}$) contenant x. On en déduit d'après la proposition 1, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une topologie donnée soit engendrée par un ensemble $\mathfrak{G}$ de parties : c'est que tout ensemble de $\mathfrak{G}$ soit ouvert, et que, quel que soit $x \in E$, tout voisinage de x contienne une intersection finie d'ensembles de $\mathfrak{G}$ contenant x .

<u>Exemples</u>. 1) La topologie discrète est engendrée par l'ensemble des parties réduites à un seul élément.

2) L'ensemble des <u>intervalles ouverts bornés</u> est un système de générateurs de la topologie de la droite rationnelle, d'après le critère précédent et les définitions et propriétés données au § 1. On a une propriété analogue pour la droite numérique.

On voit aussi, en appliquant la proposition 1, à quelle condition la topologie engendrée par un ensemble de parties $\mathfrak{G}_1$ est <u>plus fine</u> que celle engendrée par un second ensemble de parties $\mathfrak{G}_2$;

si $\mathfrak{S}'_1$ désigne l'ensemble des intersections finies des ensembles de $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}'_2$ l'ensemble des intersections finies des ensembles de $\mathfrak{S}_2$, il faut et il suffit que, quel que soit x, tout ensemble de $\mathfrak{S}'_2$ contenant x contienne un ensemble de $\mathfrak{S}'_1$ contenant x.

Homéomorphie. *Définition 2*. *Un isomorphisme d'un espace topologique E sur un espace E' est une application biunivoque de E sur E' qui transforme l'ensemble des ensembles ouverts de E en l'ensemble des ensembles ouverts de E'.*

Cette définition est bien conforme avec la définition de la notion générale d'isomorphisme de structures (Ensembles, ch.V). On désigne souvent un isomorphisme d'un espace topologique E sur un espace topologique E' sous le nom d'*homéomorphisme*, en particulier lorsque E et E' sont munis d'autres structures, et qu'on veut éviter toute confusion ; on dit de même que E et E' sont *homéomorphes* (ou qu'il y a *homéomorphie* entre ces espaces) lorsqu'il existe un homéomorphisme de E sur E'.

Exemple. Si E et E' sont des ensembles *équipotents*, toute application biunivoque de E sur E' est un homéomorphisme de l'espace *discret* E sur l'espace *discret* E' .

Si f est une application biunivoque de E sur E', et $\mathfrak{S}$ un *système de générateurs* de la topologie de E , *une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un homéomorphisme de E sur E' est que* f($\mathfrak{S}$) *soit un système de générateurs de la topologie de E'*, comme il résulte des formules donnant la réunion et l'intersection d'images de parties par une application biunivoque (Ensembles, ch.II, §§2 et 4).

Exercices. 1) Trouver toutes les topologies sur un ensemble de deux éléments ; même problème sur un ensemble de trois éléments.

2) Sur un ensemble totalement ordonné E , l'ensemble des intervalles semi-ouverts à gauche, l'ensemble des intervalles semi-ouverts à droite, l'ensemble des intervalles ouverts, sont respectivement des systèmes de générateurs des topologies gauche, droite et bilatère (§ 1,exerc.2). L'ensemble des intervalles ouverts <u>illimités</u> (à droite ou à gauche) est aussi un système de générateurs de la topologie bilatère. Quelle est la topologie engendrée par l'ensemble des intervalles fermés illimités ?

3) Sur un ensemble E totalement ordonné, les topologies gauche et droite ne sont comparables que lorsqu'elles sont toutes deux identiques à la topologie discrète. Montrer que la topologie intersection des topologies droite et gauche est la topologie bilatère.

§ 3. Structure topologique induite.

<u>Image réciproque d'une topologie</u>. Soient E,E' deux ensembles, et f une application de E dans E'. Supposons donnée sur E' une topologie, dont $\mathfrak{D}'$ soit l'ensemble des ensembles ouverts ; l'<u>image réciproque</u> $\overset{-1}{f}(\mathfrak{D}')$ de cet ensemble par f est un ensemble de parties de E satisfaisant à O_I et O_{II}, car si $\mathfrak{F}$ est une partie quelconque de $\mathfrak{D}'$, on a

$$(1) \qquad \bigcup_{A'\in\mathfrak{F}} \overset{-1}{f}(A') = \overset{-1}{f}\Big(\bigcup_{A'\in\mathfrak{F}} A'\Big), \quad \bigcap_{A'\in\mathfrak{F}} \overset{-1}{f}(A') = \overset{-1}{f}\Big(\bigcap_{A'\in\mathfrak{F}} A'\Big)$$

$\overset{-1}{f}(\mathfrak{D}')$ définit donc sur E sune topologie, qu'on appelle <u>image réciproque par f de la topologie de E'</u>.

On remarquera que l'image *directe* d'un ensemble d'ensembles ouverts par une application quelconque ne satisfait pas, en général, à l'axiome O_{II}, la seconde des relations (1) n'étant pas vérifiée ; elle ne définit donc pas en général une topologie.

D'après la relation $\complement \overset{-1}{f}(A') = \overset{-1}{f}(\complement A')$, on voit que les images réciproques par f des ensembles fermés de E' sont les ensembles fermés de l'image réciproque de la topologie de E'. De même, si x est un point quelconque de E, l'image réciproque $\overset{-1}{f}(V')$ d'un voisinage quelconque V' de $x' = f(x)$, est un voisinage de x dans l'image réciproque de la topologie de E'.

Considérons maintenant trois ensembles E, E', E″, et soit f une application de E dans E', g une application de E' dans E″. Supposons donnée sur E″ une topologie dont $\mathfrak{D}''$ soit l'ensemble des ensembles ouverts ; si $h = g \circ f$, on a $\overset{-1}{h}(\mathfrak{D}'') = \overset{-1}{f}(\overset{-1}{g}(\mathfrak{D}''))$; donc *l'image réciproque par h de la topologie de E″ est identique à l'image réciproque par f de l'image réciproque par g de la topologie de E″* (*transitivité* des images réciproques).

Topologie induite. *Définition 1*. *On appelle topologie induite sur une partie A d'un espace topologique E par la topologie de E, l'image réciproque de la topologie de E par l'application canonique de A dans E*.

L'ensemble A, muni de cette topologie, est appelé un sous-espace de E.

Les ensembles ouverts de la topologie induite sur A sont donc les *traces* sur A des ensembles ouverts de E.

Exemple. La topologie induite par celle de la droite rationnelle sur l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers, est la topologie *discrète*, car la trace de l'intervalle ouvert $]n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}[$ sur $\mathbf{N}$ est l'ensemble $\{n\}$.

D'après les remarques générales faites ci-dessus, si $B \subset A \subset E$, le sous-espace B de E est identique au sous-espace B du sous-espace A de E (transitivité de la topologie induite).

Si $\mathfrak{S}$ est un système de générateurs de la topologie de E, sa trace $\mathfrak{S}_A$ sur A est un système de générateurs de la topologie induite sur A.

Dans toutes les questions où interviennent des éléments ou des parties de A, il faut soigneusement distinguer entre leurs propriétés en tant que points (resp. parties) de l'espace E, et leurs propriétés en tant que points (resp. parties) du sous-espace A. On opérera cette distinction en utilisant les locutions "dans A", "par rapport à A" ou "relativement à A" pour préciser les propriétés de la seconde catégorie (éventuellement en les opposant aux locutions "dans E", "par rapport à E", "relativement à E").

Ensembles ouverts et ensembles fermés dans un sous-espace.

Un ensemble ouvert dans un sous-espace A n'est pas ouvert dans E, en général : une condition nécessaire et suffisante pour que tout ensemble ouvert dans A soit ouvert dans E, est que A soit ouvert dans E. En effet, la condition est nécessaire, puisque A est ouvert par rapport à A ; et elle est suffisante, en vertu de O_{II} et de la définition des ensembles ouverts dans A.

Les ensembles fermés dans A sont les traces sur A des ensembles fermés dans E. En général, un ensemble fermé dans A n'est pas fermé dans E ; on voit comme ci-dessus que, pour que tout ensemble fermé dans A soit fermé dans E, il faut et il suffit que A soit fermé dans E.

Les voisinages d'un point $x \in A$ <u>par rapport à A</u> sont les <u>traces</u> sur A des voisinages de x <u>par rapport à E</u> ; pour que tout voisinage par rapport à A, d'un point quelconque de A, soit aussi voisinage de ce point par rapport à E, il faut et il suffit que A soit <u>ouvert</u> dans E.

<u>Exercices</u>. 1) Si A et B sont deux parties d'un espace E telles que $B \subset A$, montrer que :

1°-l'intérieur de B par rapport à E est contenu dans l'intérieur de B par rapport au sous-espace A ; donner un exemple où ces deux ensembles sont distincts ;

2°-l'adhérence de B par rapport à A est la trace sur A de l'adhérence de B par rapport à E ;

3°-la frontière de B par rapport à A est contenue dans la trace sur A de la frontière de B par rapport à E ; donner un exemple où ces deux ensembles sont distincts.

2) Si tout point d'une partie A d'un espace E est isolé, la topologie induite sur A par celle de E est la topologie discrète, et réciproquement.

3) Soit A un intervalle quelconque dans un ensemble totalement ordonné E ; montrer que la topologie induite sur A par la topologie droite (resp. gauche, bilatère) (voir §1, exerc.2) est la topologie droite (resp. gauche, bilatère) sur A, considéré comme muni de la structure d'ensemble totalement ordonné induite par celle de E.

4) Soit E un ensemble totalement ordonné, formé des nombres rationnels, avec la relation d'ordre usuelle entre ces nombres, et de deux éléments α, β, avec les relations d'ordre suivantes:

$\alpha < 0 < \beta$, $\alpha < a$ et $\beta < a$ pour tout rationnel $a > 0$, $b < \alpha$ et $b < \beta$ pour tout rationnel $b < 0$ (on vérifie immédiatement que les axiomes des ensembles totalement ordonnés sont satisfaits). La topologie induite sur l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels par la topologie bilatère sur E n'est pas la topologie de la droite rationnelle (c'est-à-dire la topologie bilatère sur $\mathbb{Q}$, muni de la structure d'ensemble totalement ordonné induite par celle de E).

§ 4. Fonctions continues.

Grossièrement parlant, une fonction continue est une fonction dont la valeur varie peu lorsqu'on donne une petite variation à l'argument : pour qu'on puisse donner un sens précis à cette notion vague, il faut qu'on en ait donné un à la notion de voisinage, c'est-à-dire que l'argument et la valeur de la fonction se trouvent dans deux espaces topologiques. Nous poserons la définition suivante :

Définition 1. Une fonction f définie dans un espace topologique E , et prenant ses valeurs dans un espace topologique E' , distinct ou non de E (autrement dit, une application de E dans E') est dite continue en un point $x \in E$ si, quel que soit le voisinage V' de f(x), il existe un voisinage V de x tel que $f(y) \in V'$ quel que soit $y \in V$.

Une fonction qui n'est pas continue en un point est dite discontinue en ce point.

On peut énoncer la définition 1 sous la forme plus imagée suivante, qu'on considère comme équivalente : f est continue au point x si f(y) est aussi voisin qu'on veut de f(x), dès que y est assez voisin de x .

La condition "$f(y) \in V'$ quel que soit $y \in V$" s'écrit aussi $f(V) \subset V'$ ou $V \subset \overset{-1}{f}(V')$; d'après la propriété V_I , on peut donc dire encore qu'une fonction f est continue en x si, quel que soit le voisinage V' de f(x) , $\overset{-1}{f}(V')$ est un voisinage de x .

Exemples. 1) L'application identique de l'espace E sur lui-même est continue en tout point de E. L'application canonique d'un sous-espace A de E dans E est continue en tout point de A.

2) Une fonction constante dans E est continue en tout point de E , car si $f(E) = \{a\}$, on a, pour tout ensemble V' contenant a , $\overset{-1}{f}(V')=E$, qui est un voisinage de tout point de E .

Proposition 1. Si x est adhérent à une partie A de l'espace E , et si la fonction f est continue au point x , f(x) est adhérent à l'image f(A) de A par f .

En effet, si f(x) n'était pas adhérent à f(A), il existerait un voisinage V' de f(x) ne contenant aucun point de f(A) ; donc $\overset{-1}{f}(V')$ qui est un voisinage de x , ne contiendrait aucun point de A , contrairement à l'hypothèse.

Théorème 1 (théorème des fonctions (ou applications) composées). Soient E,E',E" trois espaces topologiques ; f une application de E dans E' , continue au point $x \in E$; g une application de E' dans E", continue au point f(x). L'application composée $h = g \circ f$ de E dans E" est continue au point x .

En effet, soit V" un voisinage quelconque de $h(x) = g(f(x))$; g étant continue au point f(x) , $\overset{-1}{g}(V")$ est un voisinage de f(x) dans E' ; f étant continue au point x , $\overset{-1}{f}(\overset{-1}{g}(V")) = \overset{-1}{h}(V")$ est un voisinage de x dans E , d'où la proposition.

Définition 2. Une application d'un espace topologique E dans un espace topologique E' est dite continue dans E (ou sur E) si elle est continue en tout point de E.

Théorème 2. Soit f une application d'un espace E dans un espace E' ; les trois propositions suivantes sont équivalentes :

a) f est continue dans E ;

b) l'image réciproque par f de tout ensemble ouvert de E' est un ensemble ouvert de E ;

c) l'image réciproque par f de tout ensemble fermé de E' est un ensemble fermé de E .

En vertu de la relation $\complement \overset{-1}{f}(A) = \overset{-1}{f}(\complement A)$, on voit d'abord que b) et c) sont équivalentes.

Supposons que f vérifie b) ; si x est un point quelconque de E , et V' un voisinage de f(x), il y a un ensemble ouvert A' tel que $f(x) \in A' \subset V'$; donc $x \in \overset{-1}{f}(A') \subset \overset{-1}{f}(V')$, et comme $\overset{-1}{f}(A')$ est ouvert, $\overset{-1}{f}(V')$ est un voisinage de x , autrement dit f est continue au point x. Réciproquement, supposons a) vérifiée ; soit A' un ensemble ouvert quelconque de E' , x un point quelconque de $\overset{-1}{f}(A')$; comme f est continue en x , et que A' est un voisinage de f(x), $\overset{-1}{f}(A')$ est un voisinage de x ; par suite (§ 1, prop.1) $\overset{-1}{f}(A')$ est un ensemble ouvert.

Remarques. 1) Si $\mathfrak{S}$ est un système de générateurs de la topologie de E' , il faut et il suffit (en vertu des formules donnant les images réciproques de réunions et d'intersections), pour que f soit continue dans E , que l'image réciproque par f de tout ensemble de $\mathfrak{S}$ soit un ensemble ouvert de E .

<u>Exemples</u>. Soit a un nombre rationnel quelconque ; l'application $x \to a+x$ de la droite rationnelle $\mathbb{Q}$ sur elle-même est continue dans $\mathbb{Q}$, car l'image réciproque par cette application de l'intervalle ouvert $]b,c[$ est l'intervalle ouvert $]b-a,c-a[$. De même, l'application $x \to ax$ est continue dans $\mathbb{Q}$; c'est évident si $a = 0$, puisqu'alors $ax=0$ quel que soit x ; si $a \neq 0$, l'image réciproque par cette application de l'intervalle ouvert $]b,c[$ est l'intervalle ouvert d'extrêmités b/a et c/a .

2) L'image <u>directe</u> d'un ensemble ouvert (resp.fermé) de E par une application continue de E dans E' n'est pas en général un ensemble ouvert (resp. fermé) de E'.

<u>Exemple</u>. E étant un espace topologique quelconque, considérons un espace E' formé de deux points a,b, et où les ensembles ouverts sont la partie vide, l'ensemble $\{a\}$ et E'. Si f est constante dans E et égale à a , $f(A) = \{a\}$, quel que soit $A \subset E$; en particulier, si A est fermé, f(A) ne l'est pas. De même, si f est constante et égale à b , $f(A) = \{b\}$, ensemble qui n'est pas ouvert dans E' .

Le théorème 1 entraîne immédiatement, comme corollaire, le théorème analogue pour les fonctions continues dans tout l'espace :

<u>Théorème 3</u>. <u>Si f est une application continue de E dans E' , et g une application continue de E' dans E"</u> , $g \circ f$ <u>est une application continue de E dans E"</u>.

<u>Changement de topologies. Homéomorphismes.</u> Le théorème 2 peut s'énoncer de la manière suivante : <u>pour qu'une application f de E dans E' soit continue dans E , il faut et il suffit que la topologie de E soit plus fine que l'image réciproque par f de la topologie de E'</u> .

Il en résulte que f reste continue si on remplace la topologie de E par une topologie <u>plus fine</u>, et la topologie de E' par une topologie <u>moins fine</u>.

Considérons deux espaces topologiques E_1, E_2 ayant pour support le <u>même</u> ensemble E ; pour que l'application <u>identique</u> de E_1 sur E_2 soit continue dans E_1, il faut et il suffit que la topologie de E_2 soit <u>moins fine</u> que celle de E_1. Si nous posons la définition suivante :

<u>Définition 3</u>. <u>Une application biunivoque d'un espace sur un autre est dite bicontinue si elle est continue ainsi que son application réciproque</u>,

on voit que pour que les espaces E_1 et E_2 soient <u>identiques</u>, il faut et il suffit que l'application identique de E_1 sur E_2 soit <u>bicontinue</u>.

Ce dernier résultat se généralise aisément :

<u>Théorème 4</u>. <u>Pour qu'une application biunivoque d'un espace E sur un espace E' soit un homéomorphisme, il faut et il suffit qu'elle soit bicontinue</u>.

En effet, soient $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ les ensembles d'ensembles ouverts de E et E' respectivement ; soit f une application biunivoque de E sur E', $g = \overset{-1}{f}$ son application réciproque. Si f est un homéomorphisme de E sur E', on a $f(\mathfrak{D}) = \overset{-1}{g}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D}'$, et $g(\mathfrak{D}') = \overset{-1}{f}(\mathfrak{D}') = \mathfrak{D}$, ce qui montre que f et g sont continues, d'après le théorème 2 ; réciproquement, si f et g sont continues, le même théorème montre que $\overset{-1}{g}(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{D}'$ et $\overset{-1}{f}(\mathfrak{D}') \subset \mathfrak{D}$; donc $\mathfrak{D}' \subset f(\mathfrak{D}) = \overset{-1}{g}(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{D}'$, ce qui montre que $f(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D}'$, autrement dit que f est un homéomorphisme.

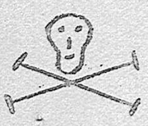
<u>Remarque</u>. Il peut fort bien exister une application <u>biunivoque</u> d'un espace topologique sur un autre, qui soit <u>continue</u> mais non <u>bicontinue</u>;

c'est ce que montre l'exemple des espaces E_1 et E_2 définis sur un même ensemble, lorsque la topologie de l'un est strictement plus fine que celle de l'autre.

Continuité par rapport à un sous-ensemble. Soit A une partie non vide quelconque d'un espace topologique E ; une fonction f , définie dans une partie de E contenant A , est dite continue relativement à A en un point $x \in A$, si sa restriction f_A est continue au point x du sous-espace A ; f est dite continue relativement à A si f_A est continue dans A .

De ces définitions, et des résultats établis ci-dessus, on déduit immédiatement des critères pour la continuité d'une fonction f relativement à A ; si E' est l'espace des valeurs de f , pour que f soit continue relativement à A en un point $x \in A$, il faut et il suffit que, quel que soit le voisinage V' de f(x), la trace sur A de $\overset{-1}{f}(V')$ soit un voisinage de x par rapport à A . De même, pour que f soit continue relativement à A , il faut et il suffit que la trace sur A de l'image réciproque par f de tout ensemble ouvert dans E' soit un ensemble ouvert dans A.

Si une fonction est continue relativement à E en un point de A , elle est aussi continue relativement à A en ce point : cela résulte des critères qui précèdent, et aussi du théorème des fonctions composées, puisque f_A est composée par f de l'application canonique de A dans E , qui est continue. Mais il faut bien se garder en général de



conclure, inversement, de la continuité relativement à A , à la continuité relativement à E ;,il se peut en effet, qu'une fonction ne soit continue relativement à E en aucun point de E , et soit cependant continue relativement à une partie A de E en tout point de A .

Il suffit de considérer une partie A partout dense dans E , ainsi que son complémentaire ; la fonction égale 1 en tout point de A , à 0 en tout point de $\complement A$, est continue (puisque constante) relativement à A , mais n'est continue relativement à E en aucun point de E .

Il y a cependant un cas important où toute fonction continue <u>relativement à A</u> en un point $x \in A$ est aussi continue <u>relativement à E</u> en ce point ; c'est celui où A est un <u>voisinage de x</u> dans E , puisqu'alors tout voisinage de x par rapport à A est aussi un voisinage de x par rapport à E .

Si f est une application continue d'un espace E <u>dans</u> un espace E' l'application $x \longrightarrow f(x)$ de E <u>sur le sous-espace</u> f(E) de E' est encore continue. Si cette application est bicontinue, c'est-à-dire est un homéomorphisme de E sur f(E), on dit que f est un <u>homéomorphisme de E dans E'</u>.

Si f est un homéomorphisme de E dans E', et A une partie de E , l'application $x \longrightarrow f(x)$ du <u>sous-espace</u> A sur le <u>sous-espace</u> f(A) est un homéomorphisme.

<u>Exercices</u>. 1) Toute application d'un espace discret dans un espace quelconque, est continue.

2) Si f est une application d'un espace E dans un espace E', les propositions suivantes sont équivalentes :

a) f est continue dans E ;

b) quelle que soit la partie $A' \subset E'$, $\overset{-1}{f}(\mathring{A'}) \subset \overset{\circ}{\overline{\overset{-1}{f}(A')}}$;

c) quelle que soit la partie $A' \subset E'$, $\overline{\overset{-1}{f}(A')} \subset \overset{-1}{f}(\overline{A'})$.

Montrer , par un exemple, que les ensembles $\overset{-1}{f}(\overline{A'})$ et $\overline{\overset{-1}{f}(A')}$ ne sont pas identiques en général.

3) Montrer que l'application $x \to x^2$ de la droite rationnelle $\mathbb{Q}$ dans elle-même est continue dans $\mathbb{Q}$.

§ 5. La notion de filtre.

Nous consacrons ce paragraphe à l'étude des propriétés de certains ensembles de parties d'un ensemble quelconque, qui comprennent comme cas particuliers les ensembles des voisinages d'un point dans une structure topologique, et qui interviendront très fréquemment par la suite.

Définition 1. On appelle filtre sur un ensemble E un ensemble $\mathfrak{F}$ de parties de E qui possède les propriétés suivantes :

FI_I. Tout ensemble contenant un ensemble de $\mathfrak{F}$ appartient à $\mathfrak{F}$.

FI_{II}. L'intersection de deux ensembles de $\mathfrak{F}$ appartient à $\mathfrak{F}$.

FI_{III}. $\mathfrak{F}$ contient E et ne contient pas la partie vide de E.

De ces deux dernières propriétés, on déduit que toute intersection finie d'ensembles de $\mathfrak{F}$ est non vide.

Un filtre sur E définit sur cet ensemble une structure, dont les axiomes sont FI_I, FI_{II} et FI_{III} ; cette structure est dite structure d'ensemble filtré, et l'ensemble E , muni de cette structure, est dit ensemble filtré.

Exemples de filtres. 1) L'ensemble de parties réduit au seul élément E est un filtre sur E .

2) Si E est infini, les complémentaires des parties finies de E sont les éléments d'un filtre. En particulier, lorsque E est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs, on obtient ainsi un filtre qui joue un rôle important en Analyse, et qu'on appelle filtre primordial.

Etant donnée sur un ensemble E une structure topologique quelconque les axiomes V_I, V_{II} et V_{III} montrent que <u>l'ensemble</u> $\mathfrak{V}(x)$ <u>des voisinages</u> d'un point quelconque $x \in E$ dans cette topologie est un <u>filtre</u> ; il en est de même de l'ensemble des voisinages d'une partie non vide quelconque de E.

<u>Comparaison de deux filtres.</u> <u>Filtre intersection.</u> <u>Définition 2. Etant donnés deux filtres</u> $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ <u>sur un même ensemble E, on dit que</u> $\mathfrak{F}'$ <u>est plus fin que</u> $\mathfrak{F}$, <u>ou que</u> $\mathfrak{F}$ <u>est moins fin que</u> $\mathfrak{F}'$, <u>si</u> $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}'$. <u>Si de plus</u> $\mathfrak{F}' \neq \mathfrak{F}$, <u>on dit que</u> $\mathfrak{F}$ <u>est strictement plus fin que</u> $\mathfrak{F}$.

Deux filtres dont l'un est plus fin que l'autre sont dits <u>comparables</u> ; si chacun d'eux est plus fin que l'autre, ils sont identiques.

<u>Exemple</u>. La proposition 1 du §2 peut encore s'énoncer de la manière suivante : pour qu'une topologie $\mathcal{C}_1$ sur un ensemble E soit <u>plus fine</u> qu'une topologie $\mathcal{C}_2$, il faut et il suffit que, quel que soit $x \in E$, le filtre des voisinages de x dans $\mathcal{C}_1$ soit <u>plus fin</u> que le filtre des voisinages de x dans $\mathcal{C}_2$.

L'ensemble de tous les filtres sur E est <u>ordonné</u> par la relation " $\mathfrak{F}'$ plus fin que $\mathfrak{F}$ " ; cette structure d'ordre est d'ailleurs la structure induite par celle de $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$, ordonné par la relation d'inclusion.

Soit Φ un ensemble non vide quelconque de filtres sur E ; considérons l'ensemble des filtres sur E qui sont <u>moins fins que tous les filtres de</u> Φ. Cet ensemble n'est pas vide, car il contient le filtre $\{E\}$, qui est le plus petit élément de l'ensemble de tous les filtres sur E. D'autre part, si $\mathfrak{F}$ est un filtre moins fin que tous les filtres de Φ, il est contenu dans l'intersection $\mathfrak{J}$ des ensembles de Φ ; or, on voit immédiatement que $\mathfrak{J}$ satisfait aux axiomes FI_{I}, FI_{II}, FI_{III} ; c'est donc un filtre, qu'on appelle filtre intersection des filtres de l'ensemble Φ, et qu'on peut caractériser comme le plus fin des filtres moins fins que tous les filtres de Φ, ou encore la borne inférieure de Φ dans l'ensemble ordonné des filtres ~~de~~ sur E.

Filtre engendré par un ensemble de parties.

Etant donné un ensemble quelconque $\mathfrak{S}$ de parties de E, cherchons s'il existe des filtres sur E contenant $\mathfrak{S}$. Si un tel filtre existe, il contient aussi, d'après FI_{II}, l'ensemble $\mathfrak{S}'$ des intersections finies d'ensembles de $\mathfrak{S}$ (y compris E, intersection de la partie vide de $\mathfrak{S}$); une condition nécessaire pour que le problème soit possible est donc que $\mathfrak{S}'$ ne contienne pas la partie vide de E. Montrons que cette condition est suffisante : en effet, tout filtre contenant $\mathfrak{S}'$ (s'il en existe) contient aussi, d'après FI_{I}, l'ensemble $\mathfrak{S}''$ des parties de E qui contiennent un ensemble de $\mathfrak{S}'$; or $\mathfrak{S}''$ satisfait évidemment à FI_{I} ; il satisfait à FI_{II} d'après la définition de $\mathfrak{S}'$; enfin, il satisfait à FI_{III} puisque $\mathfrak{S}'$ ne contient pas la partie vide de E. $\mathfrak{S}''$ est donc un filtre contenant $\mathfrak{S}$, et tout filtre contenant $\mathfrak{S}$ est plus fin que $\mathfrak{S}''$. Ainsi :

Théorème 1. Pour qu'il existe un filtre contenant un ensemble $\mathfrak{S}$ de parties de E, il faut et il suffit qu'aucune des intersections finies d'ensembles de $\mathfrak{S}$ ne soit vide.

On dit que le filtre $\mathfrak{S}''$ est *engendré* par $\mathfrak{S}$, et que $\mathfrak{S}$ est un *système de générateurs* de $\mathfrak{S}''$.

Exemple. Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble quelconque de parties de E, et considérons la *topologie sur E engendrée par* $\mathfrak{S}$. D'après la définition des voisinages d'un point dans cette topologie (voir §2), le *filtre* des voisinages de x est *engendré* par l'ensemble $\mathfrak{S}(x)$ des ensembles de $\mathfrak{S}$ *contenant x*.

Base d'un filtre. Si $\mathfrak{S}$ est un système de générateurs d'un filtre $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}$ n'est pas identique, en général, à l'ensemble des parties de E contenant un ensemble de $\mathfrak{S}$; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, d'après la manière dont $\mathfrak{F}$ s'obtient à partir de $\mathfrak{S}$, que toute intersection finie d'ensembles de $\mathfrak{S}$ contienne un ensemble de $\mathfrak{S}$. Il en résulte que, *si* $\mathfrak{S}$ *est un ensemble de parties de E, pour que l'ensemble des parties de E contenant un ensemble de* $\mathfrak{S}$ *soit un filtre, il faut et il suffit que* $\mathfrak{S}$ *possède les propriétés suivantes* :

B_I. *L'intersection de deux ensembles de* $\mathfrak{S}$ *contient un ensemble de* $\mathfrak{S}$.

B_{II}. $\mathfrak{S}$ *n'est pas vide, et ne contient pas l'ensemble vide*.

Définition 3. On dit qu'un ensemble de parties de E qui satisfait aux axiomes B_I *et* B_{II} *est une base du filtre qu'il engendre. Deux bases de filtre sont dites équivalentes si elles engendrent le même filtre*.

Si $\mathfrak{S}$ est un système de générateurs d'un filtre $\mathfrak{F}$, l'ensemble $\mathfrak{S}'$ des *intersections finies* d'ensembles de $\mathfrak{S}$ est donc une *base* de $\mathfrak{F}$.

<u>Exemples</u> : <u>filtre des sections sur un ensemble ordonné vasculaire ; filtre des sections d'un filtre donné</u>.

On dit qu'un ensemble E , ordonné par une relation qu'on écrit "$x \leqslant y$" , est un <u>ensemble ordonné vasculaire</u>, si la proposition suivante est vraie :

W. <u>Quels que soient</u> x, y, <u>il existe z tel que</u> $z \leqslant x$ <u>et</u> $z \leqslant y$.

Un ensemble totalement ordonné est un ensemble vasculaire <u>dans les deux sens</u>, c'est-à-dire aussi bien pour la relation d'ordre "$x \leqslant y$" que pour son opposée "$x \geqslant y$". Il en est de même de l'ensemble des parties $\mathfrak{P}(E)$ d'un ensemble quelconque E , ordonné par inclusion ; les résultats du § 2 montrent que l'ensemble ordonné des topologies sur un même ensemble est aussi vasculaire dans les deux sens. Une <u>base de filtre</u>, ordonnée par inclusion, est un ensemble vasculaire en vertu de B_I.

Soit E un ensemble ordonné vasculaire, et a un élément quelconque de E ; on appellera <u>section</u> de E relative à l'élément a l'ensemble S_a des x tels que $x \leqslant a$. L'<u>ensemble</u> $\mathfrak{S}$ <u>des sections</u> de E est une <u>base de filtre</u> ; il satisfait en effet à B_{II} de manière évidente, et d'autre part, si a et b sont deux éléments quelconques de E , et c un élément tel que $c \leqslant a$ et $c \leqslant b$ (élément qui existe en vertu de W), on a $S_c \subset S_a \cap S_b$, ce qui démontre B_I. Le filtre engendré par $\mathfrak{S}$ sera dit <u>filtre des sections</u> sur E .

Par exemple, le filtre <u>primordial</u> sur $\mathcal{N}$ est le filtre des sections sur cet ensemble, ordonné par "$x \geqslant y$" .

Soit maintenant $\mathfrak{F}$ un filtre quelconque sur un ensemble E ;

comme c'est un ensemble vasculaire quand on l'ordonne par inclusion, on peut définir sur $\mathfrak{F}$ un *filtre des sections*, une section relative à un ensemble $A \in \mathfrak{F}$ étant ici l'ensemble des ensembles X de $\mathfrak{F}$ tels que $X \subset A$. Ce filtre est appelé *filtre des sections du filtre* $\mathfrak{F}$, et se note $\mathfrak{F}^*$.

La proposition suivante résulte immédiatement des définitions 2 et 3

Proposition 1. *Si* $\mathfrak{B}$ *et* $\mathfrak{B}'$ *sont respectivement des bases de deux filtres* $\mathfrak{F}$ *et* $\mathfrak{F}'$ *sur un ensemble E , pour que* $\mathfrak{F}'$ *soit plus fin que* $\mathfrak{F}$, *il faut et il suffit que tout ensemble de* $\mathfrak{B}$ *contienne un ensemble de* $\mathfrak{B}'$.

Corollaire. *Pour que deux bases de filtre,* $\mathfrak{B}$ *et* $\mathfrak{B}'$, *sur un ensemble E , soient équivalentes, il faut et il suffit que tout ensemble de* $\mathfrak{B}$ *contienne un ensemble de* $\mathfrak{B}'$, *et que tout ensemble de* $\mathfrak{B}'$ *contienne un ensemble de* $\mathfrak{B}$.

Cherchons la condition pour qu'une partie $\mathfrak{B}$ d'un filtre $\mathfrak{F}$ soit une *base* de $\mathfrak{F}$; une condition nécessaire est évidemment que tout ensemble de $\mathfrak{F}$ contienne un ensemble de $\mathfrak{B}$; mais réciproquement, si cette condition est satisfaite, il en résulte que $\mathfrak{B}$ vérifie B_I , puisque l'intersection de deux ensembles de $\mathfrak{B}$ appartient à $\mathfrak{F}$; d'autre part, il en résulte aussi que $\mathfrak{B}$ n'est pas vide, et comme $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{F}$, $\mathfrak{B}$ ne contient pas la partie vide de E . $\mathfrak{B}$ est donc une base de filtre, et le corollaire de la prop. 1 montre qu'elle est équivalente à $\mathfrak{F}$, autrement dit engendre $\mathfrak{F}$. Donc :

Proposition 2. *Pour qu'une partie* $\mathfrak{B}$ *d'un filtre* $\mathfrak{F}$ *soit une base de ce filtre, il faut et il suffit que tout ensemble de* $\mathfrak{F}$ *contienne un ensemble de* $\mathfrak{B}$.

Dans un espace topologique E , la notion de base d'un filtre permet de poser la définition suivante :

Définition 4. Toute base du filtre des voisinages d'un point d'un espace topologique est appelée système fondamental de voisinages de ce point.

Exemples. 1) Dans un espace discret, un système fondamental de voisinages d'un point quelconque x est formé du seul ensemble $\{x\}$.

2) Sur la droite rationnelle $\mathbb{Q}$, l'ensemble des intervalles ouverts contenant un point x est un système fondamental de voisinages de x , d'après la proposition 2. Il en est de même de l'ensemble des intervalles ouverts $]x-1/n, x+1/n[$, où n prend toutes les valeurs entières ou seulement une suite de valeurs entières strictement croissante. En effet, si $]a,b[$ est un intervalle ouvert contenant x , l'intervalle $]x-1/n, x+1/n[$ est contenu dans $]a,b[$ pourvu que n soit supérieur aux deux nombres $1/(x-a)$ et $1/(b-x)$.

De la même manière, on montre que l'ensemble des intervalles fermés $[x-1/n, x+1/n]$ est un système fondamental de voisinages de x .

On a des résultats analogues pour la droite numérique.

Borne supérieure d'un ensemble de filtres. Si Φ est un ensemble de filtres sur E , une condition nécessaire et suffisante pour que Φ admette une borne supérieure dans l'ensemble ordonné des filtres sur E , est qu'il existe un filtre plus fin que tous les filtres de Φ ; car si cette condition est remplie, le filtre intersection des filtres plus fins que ceux de Φ sera la borne supérieure de Φ .

Or, un filtre plus fin que tous les filtres de Φ est un filtre contenant la réunion $\mathcal{G}$ de tous les filtres de Φ . Le théorème 1 entraîne donc les conséquences suivantes :

Proposition 3. Pour qu'un ensemble fini Φ de filtres sur E admette une borne supérieure, il faut et il suffit que, lorsqu'on prend arbitrairement un ensemble dans chaque filtre de Φ , l'intersection de ces ensembles ne soit jamais vide.

Proposition 4. Pour qu'un ensemble quelconque Φ de filtres sur E admette une borne supérieure, il faut et il suffit que toute partie finie de Φ admette une borne supérieure.

Remarques. 1) Si E contient au moins deux éléments a,b , il n'existe pas de filtre plus fin que les deux filtres ayant respectivement pour bases $\{\{a\}\}$ et $\{\{b\}\}$; l'ensemble ordonné des filtres sur E n'est donc pas un ensemble vasculaire dans les deux sens ; en particulier, il ne possède pas de plus grand élément.

2) On peut remplacer la condition nécessaire et suffisante énoncée dans la proposition 3 par la suivante : lorsqu'on prend arbitrairement un ensemble dans une base de chaque filtre de Φ , l'intersection de ces ensembles n'est jamais vide.

Ultrafiltres. La proposition 4 entraîne immédiatement que tout ensemble totalement ordonné de filtres sur E admet une borne supérieure, autrement dit que l'ensemble ordonné des filtres sur E est inductif.

Définition 5. On appelle ultrafiltre sur E un filtre tel qu'il n'existe aucun filtre strictement plus fin que lui (c'est-à-dire un élément maximal de l'ensemble ordonné des filtres sur E) .

Le théorème de Zorn montre alors que

<u>Théorème 2</u>. <u>Quel que soit le filtre $\mathfrak{F}$ sur un ensemble E, il existe un ultrafiltre plus fin que $\mathfrak{F}$</u>.

On peut caractériser de plusieurs manières les ultrafiltres :

<u>Proposition 5</u>. <u>Pour qu'un ensemble $\mathfrak{F}$ de parties d'un ensemble E soit un ultrafiltre sur E, il faut et il suffit qu'il possède la propriété suivante</u> :

UL. <u>La propriété</u> "$X \in \mathfrak{F}$" <u>est équivalente à "quel que soit</u> $Y \in \mathfrak{F}$, $X \cap Y \neq \emptyset$" .

La condition est <u>nécessaire</u> ; en effet, si $\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre et si X rencontre tous les ensembles de $\mathfrak{F}$, le théorème 1 montre qu'il existe un filtre plus fin que $\mathfrak{F}$ et contenant X ; ce filtre étant nécessairement identique à $\mathfrak{F}$, on a bien $X \in \mathfrak{F}$.

La condition est <u>suffisante</u> ; en effet, elle montre tout d'abord que $\mathfrak{F}$ engendre un filtre ; d'autre part, s'il existait un filtre $\mathfrak{G}$, contenant $\mathfrak{F}$ et un ensemble au moins n'appartenant pas à $\mathfrak{F}$, cet ensemble rencontrerait tout ensemble de $\mathfrak{F}$, contrairement à la propriété UL . $\mathfrak{F}$ est donc bien un ultrafiltre.

<u>Proposition 6</u>. <u>Pour qu'un ensemble $\mathfrak{F}$ de parties d'un ensemble E soit un ultrafiltre sur E, il faut et il suffit qu'il satisfasse aux deux conditions suivantes</u> :

UL'_I . <u>L'intersection de deux ensembles de $\mathfrak{F}$ n'est jamais vide</u>.

UL'_{II}. <u>Quel que soit $X \subset E$, l'un des deux ensembles X, $\complement X$ appartient à $\mathfrak{F}$</u>.

Ces conditions sont <u>nécessaires</u> ; en effet, si $\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre et si $X \notin \mathfrak{F}$, il existe, d'après UL , un ensemble $Y \in \mathfrak{F}$ tel que $X \cap Y = \emptyset$, autrement dit, tel que $Y \subset \complement X$; d'après FI_I, $\complement X$ appartient donc à $\mathfrak{F}$.

Ces conditions sont suffisantes ; il suffit de montrer qu'elles entraînent UL ; où si X rencontre tout ensemble de $\mathfrak{F}$, on a nécessairement $X \in \mathfrak{F}$, sans quoi on aurait $\complement X \in \mathfrak{F}$, et comme $X \cap \complement X = \emptyset$, cela contredirait l'hypothèse.

Corollaire. Si $\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre sur un ensemble E , et si $(A_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est un recouvrement fini de E , il existe un indice i tel que A_i appartienne à $\mathfrak{F}$.

En effet, si aucun des A_i n'appartenait à $\mathfrak{F}$, $\complement A_i$ appartiendrait à $\mathfrak{F}$ quel que soit i , et par suite aussi $\bigcap_{i=0}^{n} (\complement A_i) = \complement (\bigcup_{i=0}^{n} A_i) = \emptyset$, contrairement au fait que $\mathfrak{F}$ est un filtre.

Exemple d'ultrafiltre. L'ensemble des parties d'un ensemble E qui contiennent un élément quelconque x de E est un ultrafiltre, car cet ensemble satisfait évidemment aux conditions UL'_I et UL'_{II}.

Filtre induit. Soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur un ensemble E , et A une partie non vide de E .

Proposition 7. Pour que la trace $\mathfrak{F}_A$ de $\mathfrak{F}$ sur A soit un filtre sur A , il faut et il suffit que $\mathfrak{F}_A$ ne contienne pas la partie vide de A (autrement dit, que tout ensemble de $\mathfrak{F}$ rencontre A).

La condition est évidemment nécessaire ; inversement, si elle est remplie, $\mathfrak{F}_A$ satisfait à FI_{III} ; comme $(X \cap Y) \cap A = (X \cap A) \cap (Y \cap A)$ $\mathfrak{F}_A$ vérifie FI_{II} ; enfin, si $X \cap A \subset Z \subset A$, on a $Z = (X \cup Z) \cap A$ ce qui montre que $\mathfrak{F}_A$ vérifie FI_I .

Définition 6. Si la trace, sur une partie A d'un ensemble E , d'un filtre $\mathfrak{F}$ sur E , est un filtre sur A , on dit que ce filtre est induit par $\mathfrak{F}$ sur A .

Si un filtre $\mathfrak{F}$ sur E induit un filtre sur A , la trace sur A d'une base de $\mathfrak{F}$ est une base de $\mathfrak{F}_A$, d'après la proposition 2.

Considérons inversement une base de filtre $\mathfrak{B}$ *sur A* ; c'est aussi évidemment une base de filtre *sur E* ; soit $\mathfrak{G}$ le filtre qu'elle engendre sur A , $\mathfrak{F}$ le filtre qu'elle engendre sur E ; on voit immédiatement que $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_A$.

Proposition 8. *Pour qu'un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ sur E induise un filtre sur une partie A de E , il faut et il suffit que* $A \in \mathfrak{U}$; *si cette condition est remplie,* $\mathfrak{U}_A$ *est un ultrafiltre sur A* .

En effet, si $A \notin \mathfrak{U}$, $\complement A \in \mathfrak{U}$, et $A \cap \complement A = \emptyset$, par suite $\mathfrak{U}_A$ n'est pas un filtre sur A . Si au contraire $A \in \mathfrak{U}$, et si B est une partie quelconque de A , B ou $\complement B$ appartient à $\mathfrak{U}$, donc B ou $(\complement B) \cap A$ appartient à $\mathfrak{U}_A$, ce qui montre que $\mathfrak{U}_A$ est un ultrafiltre sur A .

Inversement, *tout ultrafiltre sur A engendre un ultrafiltre sur E*; en effet, soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur A , $\mathfrak{F}$ le filtre qu'il engendre sur E. Si X est une partie quelconque de E , ou bien $X \cap A \in \mathfrak{U}$, d'où $X \in \mathfrak{F}$; ou bien $(\complement X) \cap A \in \mathfrak{U}$, d'où $\complement X \in \mathfrak{F}$, ce qui montre que $\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre.

Exemple. La proposition 7 montre que, pour que la trace sur un ensemble A du *filtre des voisinages* $\mathfrak{V}$ d'un point x d'un espace topologique E , soit un filtre sur A , il faut et il suffit que tout voisinage de x rencontre A , autrement dit (§ 1, déf.6) que x soit *adhérent à A* .

L'intérêt de cet exemple de filtre induit réside d'une part dans le fait qu'il intervient dans la définition de la notion de <u>limite</u> (voir § 6), et d'autre part, que <u>tout filtre peut être défini de cette manière</u>. En effet, soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur un ensemble quelconque E ; soit E' l'ensemble obtenu en adjoignant à E un nouvel élément ω , et soit $\mathfrak{F}'$ le filtre sur E' formé des ensembles $X \cup \{\omega\}$, où X parcourt $\mathfrak{F}$. Soit $\mathfrak{V}(x)$ l'ensemble des parties de E' contenant x , si $x \neq \omega$, et prenons $\mathfrak{V}(\omega) = \mathfrak{F}'$; ces ensembles de parties satisfont visiblement aux axiomes V_I, V_{II}, V_{III} et V_{IV}, dont définissent sur E' une topologie dont ils sont les filtres de voisinages ; enfin, ω est adhérent à E dans cette topologie, car tout ensemble de $\mathfrak{F}'$ rencontre E , d'après FI_{III}. Cette topologie est dite <u>topologie associée</u> au filtre $\mathfrak{F}$.

<u>Image d'une base de filtre ; image d'un filtre.</u> Soient E,F deux ensembles, et $X \longrightarrow C(X)$ une <u>correspondance de E à F</u>.

<u>Proposition 9</u>. <u>Pour que l'image</u> $C(\mathfrak{B})$ <u>d'une base de filtre</u> $\mathfrak{B}$ <u>sur E soit une base de filtre sur F , il faut et il suffit que</u> $C(X) \neq \emptyset$ <u>quel que soit</u> $X \in \mathfrak{B}$. <u>Si</u> $\mathfrak{B}$ <u>et</u> $\mathfrak{B}'$ <u>sont deux bases de filtre sur E , telles que le filtre de base</u> $\mathfrak{B}'$ <u>soit plus fin que le filtre de base</u> $\mathfrak{B}$, <u>et si</u> $C(\mathfrak{B}')$ <u>est une base de filtre sur F</u> , $C(\mathfrak{B})$ <u>est une base de filtre sur F , et le filtre de base</u> $C(\mathfrak{B}')$ <u>est plus fin que le filtre de base</u> $C(\mathfrak{B})$. <u>Si</u> $\mathfrak{B}$ <u>et</u> $\mathfrak{B}'$ <u>sont deux bases de filtre équivalentes sur E ,et si</u> $C(\mathfrak{B})$ <u>est une base de filtre sur F</u> , $C(\mathfrak{B}')$ <u>est une base de filtre équivalente à</u> $C(\mathfrak{B})$.

Tout cela découle immédiatement de la définition 3 , de la proposition 1 , et de la proposition : "$X \subset Y$ entraîne $C(X) \subset C(Y)$".
En particulier, si f est une <u>application de E dans F</u> , l'image $f(\mathfrak{B})$ d'une base de filtre $\mathfrak{B}$ sur E est une base de filtre sur F.
De même, si f est une <u>application de E sur F</u> , <u>l'image réciproque</u> $\overset{-1}{f}(\mathfrak{B}')$ d'une base de filtre $\mathfrak{B}'$ sur F est une base de filtre sur E.

Si f est une <u>application de E dans F</u> , l'image réciproque $\overset{-1}{f}(\mathfrak{B}')$ d'une base de filtre sur F n'est pas toujours une base de filtre sur E ; si on remarque que $\overset{-1}{f}(\mathfrak{B}') = \overset{-1}{f}(\mathfrak{B}'_A)$, où $A = f(E)$, on voit que pour que $\overset{-1}{f}(\mathfrak{B}')$ soit une base de filtre sur E , il faut et il suffit que $\mathfrak{B}'_A$ soit une base de filtre sur A , c'est-à-dire que tout ensemble de $\mathfrak{B}'$ rencontre A .

Cette dernière condition est vérifiée en particulier si $\mathfrak{B}' = f(\mathfrak{B})$ où $\mathfrak{B}$ est une base de filtre sur E ; de plus, dans ce cas, $\overset{-1}{f}(f(\mathfrak{B}))$ est la base d'un filtre <u>moins fin</u> que le filtre de base $\mathfrak{B}$.

<u>Proposition 10</u>. <u>Si f est une application de E sur F , l'image</u> $f(\mathfrak{F})$ <u>d'un filtre sur E est un filtre sur F</u>.

Il suffit de montrer que $f(\mathfrak{F})$ satisfait à FI_I. Or, si X est un ensemble de $\mathfrak{F}$, et X' une partie de F telle que $f(X) \subset X'$, on a $X \subset \overset{-1}{f}(X')$, donc $\overset{-1}{f}(X')$ appartient à $\mathfrak{F}$, et comme $X' = f(\overset{-1}{f}(X'))$, X' appartient à $f(\mathfrak{F})$.

<u>Proposition 11</u>. <u>Si f est une application de E sur F , l'image</u> $f(\mathfrak{U})$ <u>d'un ultrafiltre sur E est un ultrafiltre sur F</u>.

Soit en effet X' une partie quelconque de F ; si $\overset{-1}{f}(X')$ appartient à $\mathfrak{U}$, $X' = f(\overset{-1}{f}(X'))$ appartient à $f(\mathfrak{U})$; sinon $\complement \overset{-1}{f}(X') = \overset{-1}{f}(\complement X')$ appartient à $\mathfrak{U}$, et par suite $\complement X' = f(\overset{-1}{f}(\complement X'))$

appartient à $f(\mathcal{U})$ ce qui montre que $f(\mathcal{U})$ est un ultrafiltre.

Filtres élémentaires. Soit (x_n) une suite d'éléments d'un ensemble E ; on appelle filtre élémentaire associé à la suite (x_n) le filtre ayant pour base l'ensemble des parties S_n $(n \in \mathbb{N})$, S_n désignant l'ensemble des x_p tels que $p \geqslant n$. On peut encore dire qu'un filtre élémentaire sur E est un filtre engendré par l'image du filtre primordial par une application de $\mathbb{N}$ dans E.

Le filtre élémentaire associé à une suite extraite d'une suite (x_n) est plus fin que le filtre associé à (x_n).

Tout filtre élémentaire possède, par définition, une base dénombrable. Inversement :

Proposition 12. Si un filtre $\mathcal{F}$ possède une base dénombrable, il existe un filtre élémentaire plus fin que $\mathcal{F}$, et $\mathcal{F}$ est le filtre intersection de tous les filtres élémentaires plus fins que $\mathcal{F}$.

En effet, rangeons la base dénombrable de $\mathcal{F}$ en une suite (A_n) ; si on pose $B_n = \bigcap_{p=0}^{n} A_p$, les B_n forment encore une base de $\mathcal{F}$ et on a $B_{n+1} \subset B_n$. Soit a_n un point quelconque de B_n ; $\mathcal{F}$ est moins fin que le filtre associé à la suite (a_n).

Si le filtre intersection $\mathcal{J}$ des filtres élémentaires plus fins que $\mathcal{F}$ était strictement plus fin que $\mathcal{F}$, il existerait un ensemble $H \in \mathcal{J}$ tel que $B_n \cap \complement H \neq \emptyset$ quel que soit n ; si b_n est un point de $B_n \cap \complement H$, le filtre associé à la suite (b_n) serait plus fin que $\mathcal{F}$, et H n'appartiendrait pas à ce filtre, contrairement à l'hypothèse.

Remarque. Un filtre moins fin qu'un filtre à base dénombrable peut fort bien ne pas possèder de base dénombrable ; par exemple, si E a une puissance supérieure au dénombrable, le filtre des complémentaires des parties finies n'a pas de base dénombrable (sans quoi l'ensemble des parties finies de E serait dénombrable, ce qui est contraire à l'hypothèse), bien que ce filtre soit moins fin que tout filtre élémentaire sur E , associé à une suite dont tous les termes sont distincts

Exercices. 1) Quels sont les ensembles de parties de E qui satisfont aux axiomes FI_I et FI_{II}, mais non à FI_{III} ?

2) Définir tous les filtres sur un ensemble fini.

3) Montrer que tout filtre strictement moins fin que le filtre des complémentaires des parties finies sur un ensemble infini E , peut être défini de la manière suivante : c'est l'ensemble des parties de E qui contiennent une partie non vide A de E , et dont le complémentaire est fini.

4) Sur un ensemble infini E , le filtre des complémentaires des parties finies est le filtre intersection des filtres élémentaires associés aux suites d'éléments de E dont les termes sont tous distincts.

5) Si, à tout filtre sur un ensemble E , on fait correspondre la topologie associée à ce filtre sur un même ensemble $E' = E \cup \{\omega\}$, on a les propriétés suivantes :

1°- Si une topologie sur E' est plus fine qu'une topologie associée à un filtre $\mathfrak{F}$, c'est la topologie discrète, ou la topologie associée à un filtre plus fin que $\mathfrak{F}$. Réciproque.

2°- L'intersection des topologies associées aux filtres d'un ensemble Φ de filtres sur E , est la topologie associée au filtre intersection des filtres de Φ .

3°- $\mathfrak{S}$ étant un ensemble de parties de E , on considère l'ensemble $\mathfrak{S}'$ des parties de E' de la forme $X \cup \{\omega\}$, où X parcourt $\mathfrak{S}$, et l'ensemble $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}' \cup \mathfrak{P}(E)$. Si $\mathfrak{S}$ engendre un filtre $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ engendre sur E' la topologie associée à $\mathfrak{F}$. Quelle topologie engendre $\mathfrak{H}$ lorsque $\mathfrak{S}$ n'est pas un système de générateurs d'un filtre ?

6) Dans un espace topologique E , le filtre intersection des filtres de voisinages de tous les points d'une partie A de E est le filtre des voisinages de A .

7) Si on considère, sur un ensemble E , la topologie intersection d'un ensemble Φ de topologies sur E , le filtre des voisinages d'un point quelconque $x \in E$, dans cette topologie, est moins fin que le filtre intersection des filtres de voisinages de x dans les topologies de l'ensemble Φ ; donner un exemple où ces deux filtres sont distincts.

8) Dans un espace topologique E , si $\mathfrak{F}(x)$ désigne un système fondamental de voisinages <u>ouverts</u> de x , pour tout point $x \in E$, la réunion des ensembles de parties $\mathfrak{F}(x)$ lorsque x parcourt E , engendre la topologie de E .

9) Quel est le filtre engendré par la partie vide de $\mathfrak{P}(E)$?

10) L'intersection des ensembles d'un ultrafiltre contient au plus un point ; si elle est réduite à un point, l'ultrafiltre est formé des ensembles contenant ce point ; si elle est vide l'ultrafiltre est plus fin que le filtre des complémentaires des parties finies de l'ensemble fondamental (ce qui suppose donc que ce dernier est infini).

11) Si une partie A d'un ensemble E n'appartient pas à un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ sur E , la trace de $\mathfrak{U}$ sur A est l'ensemble de toutes les parties de A .

12) Sur un ensemble infini, un filtre associé à une suite dont tous les termes sont distincts ne peut être un ultrafiltre.

13) Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Pour que, quelle que soit la base de filtre $\mathfrak{B}$ sur E , $\overset{-1}{f}(f(\mathfrak{B}))$ soit une base de filtre équivalente à $\mathfrak{B}$, il faut et il suffit que f soit une application biunivoque dans F .

14) Soit $n \rightarrow f(n)$ une application de $\mathbb{N}$ sur lui-même, telle que $\overset{-1}{f}(\{m\})$ soit <u>fini</u> quel que soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que les filtres associés aux suites (x_n) et (y_n), où $y_n = x_{f(n)}$, sont identiques.

En déduire que, si (a_n) et (b_n) sont deux suites d'éléments d'un ensemble E telles que le filtre associé à (b_n) soit plus fin que le filtre associé à (a_n), le filtre associé à (b_n) est identique au filtre associé à une suite extraite de (a_n).

15) Si Φ est un ensemble dénombrable totalement ordonné de filtres à base dénombrable, il existe un filtre élémentaire plus fin que tous les filtres de Φ .

§ 6. La notion de limite.

<u>Définition 1</u>. <u>Sur un espace topologique E , on dit qu'un point x est point limite</u> (ou simplement <u>limite</u>) <u>d'un filtre</u> $\mathfrak{F}$, <u>si</u> $\mathfrak{F}$ <u>est plus fin que le filtre</u> $\mathfrak{V}(x)$ <u>des voisinages de x</u> . <u>On dit aussi que</u> $\mathfrak{F}$ <u>converge</u> (ou <u>est convergent</u>) <u>vers x</u> .

<u>On dit que x est point limite d'une base de filtre</u> $\mathfrak{B}$ <u>sur E</u> (ou que $\mathfrak{B}$ <u>converge vers x</u>) <u>si le filtre de base</u> $\mathfrak{B}$ <u>converge vers x</u> .

45

Cette définition et la prop. 1 du § 5 donnent le critère suivant :

Proposition 1. Pour qu'une base de filtre $\mathfrak{B}$ converge vers un point x, il faut et il suffit que tout ensemble d'un système fondamental de voisinages de x contienne un ensemble de $\mathfrak{B}$.

En accord avec la terminologie introduite aux §§ 1 et 4, on peut convenir de considérer comme équivalent à cette proposition l'énoncé suivant : pour que $\mathfrak{B}$ converge vers x ; il faut et il suffit qu'il existe des ensembles de $\mathfrak{B}$ aussi voisins que l'on veut de x.

Si un filtre $\mathfrak{F}$ converge vers x, tout filtre plus fin que $\mathfrak{F}$ converge aussi vers x, d'après la définition 1.

Proposition 2. $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ étant deux topologies sur un même ensemble E, pour que $\mathcal{C}_1$ soit plus fin que $\mathcal{C}_2$, il faut et il suffit que tout filtre sur E, convergent dans la topologie $\mathcal{C}_1$, converge vers le même point dans la topologie $\mathcal{C}_2$.

En effet, si $\mathcal{C}_1$ est plus fine que $\mathcal{C}_2$, le filtre des voisinages de tout point $x \in E$, dans la topologie $\mathcal{C}_1$, est plus fin que le filtre des voisinages de x dans la topologie $\mathcal{C}_2$, tout filtre qui converge vers x dans la topologie $\mathcal{C}_1$ converge donc encore vers x dans la topologie $\mathcal{C}_2$. Inversement, si cette condition est réalisée, le filtre des voisinages de x dans $\mathcal{C}_1$, qui converge vers x dans $\mathcal{C}_1$, converge aussi vers x dans $\mathcal{C}_2$, donc est plus fin que le filtre des voisinages de x dans $\mathcal{C}_2$, ce qui montre que $\mathcal{C}_1$ est plus fine que $\mathcal{C}_2$ (§ 2, prop. 1).

Le lecteur retiendra aisément cette proposition sous la forme condensée suivante : plus une topologie est fine, moins il y a de filtres convergents dans cette topologie. En particulier, dans la topologie discrète, les seuls filtres convergents ...

sont les filtres de voisinages, puisque ces derniers sont des ultrafiltres.

Si Φ est un ensemble de filtres sur E , qui convergent tous vers un même point x , le *filtre intersection* des filtres de Φ converge aussi vers x , puisque $\mathfrak{V}(x)$ est moins fin que tous les filtres de Φ ; on peut donc dire qu'*une condition nécessaire et suffisante pour que tous les filtres d'un ensemble de filtres* Φ *convergent vers un point x* , *est que le filtre intersection des filtres de* Φ *converge vers x* .

Unicité de la limite. *L'axiome de Hausdorff.* La notion de limite n'est d'un emploi commode que si on se trouve dans des conditions telles qu'un filtre *ne peut avoir plus d'un point limite*.

Or, il est facile d'énoncer ces conditions : si un filtre $\mathfrak{F}$ admet deux points limites distincts, x et y, $\mathfrak{F}$ est plus fin que $\mathfrak{V}(x)$ et $\mathfrak{V}(y)$, donc (§ 5, prop.3), *un ensemble arbitraire de* $\mathfrak{V}(x)$ *et un ensemble arbitraire de* $\mathfrak{V}(y)$ *ont toujours une intersection non vide* ; et réciproquement, s'il en est ainsi, il existe un filtre plus fin que $\mathfrak{V}(x)$ et $\mathfrak{V}(y)$. Donc :

Proposition 3. *E étant un espace topologique, la proposition* : "*un filtre quelconque sur E ne peut avoir plus d'un point limite*" *est équivalente à la suivante* (axiome de Hausdorff) :

H . *Quels que soient les points distincts x,y de E , il existe un voisinage de x et un voisinage de y sans point commun*.

L'exemple de la topologie la moins fine sur E , pour laquelle l'axiome H n'est pas vérifié, montre que cet axiome n'est pas une conséquence de O_I et O_{II}. Aussi pose-t-on la définition suivante :

Définition 2. Un espace topologique pour lequel l'axiome H est vérifié est dit espace séparé (ou de Hausdorff) ; sa topologie est dite séparée (ou de Hausdorff).

Par exemple, tout espace discret est séparé.

L'axiome H est équivalent au suivant :

H'. L'intersection des voisinages fermés d'un point quelconque de E est l'ensemble réduit à ce point.

En effet, H entraîne que, si x et y sont des points distincts il existe un voisinage de x auquel y est extérieur ; l'intersection des adhérences des voisinages de x ne peut donc contenir d'autre point que x . Inversement, H' entraîne que tout point y distinct de x est extérieur à un voisinage V de x ; donc, il existe un voisinage de y sans point commun avec V .

De H', il résulte en particulier que, dans un espace séparé, tout ensemble réduit à un point est fermé.

La définition des voisinages dans un sous-espace montre immédiatement que tout sous-espace d'un espace séparé est séparé. Inversement, on a la proposition suivante :

Proposition 4. Si, pour tout point x d'un espace topologique E , il existe un voisinage fermé de x qui soit un sous-espace séparé de E , E est un espace séparé.

En effet, si V est un voisinage fermé de x , tout voisinage de x dans V est un voisinage de x dans E , et tout ensemble fermé dans V est fermé dans E. Si V est séparé, l'intersection des voisinages fermés de x dans V est l'ensemble réduit à x , donc il en est de même de l'intersection des voisinages fermés de x dans E .

Il existe des espaces *non séparés* dans lesquels tout point possède un voisinage qui est un sous-espace séparé (ce voisinage n'étant pas fermé pour un point au moins).

Remarquons encore que, s'il existe une application *biunivoque et continue* f d'un espace E sur un espace *séparé* E' , E est aussi *séparé* car, si x et y sont deux points distincts de E , $f(x) \neq f(y)$, et il existe un voisinage V de $f(x)$ et un voisinage W de $f(y)$ sans point commun ; $\overset{-1}{f}(V)$ et $\overset{-1}{f}(W)$ sont des voisinages de x et y respectivement, et n'ont aucun point commun, d'où la proposition. En particulier, toute topologie *plus fine* qu'une topologie séparée est séparée.

Sauf mention expresse du contraire, nous supposerons toujours désormais, quand nous parlerons du point limite d'un filtre, que l'espace sur lequel est défini ce filtre est séparé.

Point adhérent à un filtre. *Définition 3*. *Sur un espace topologique E* , *on dit qu'un point x est adhérent à un filtre $\mathfrak{F}$* , *s'il est adhérent à tous les ensembles de $\mathfrak{F}$* . *On dit que x est adhérent à une base de filtre $\mathfrak{B}$ s'il est adhérent au filtre de base $\mathfrak{B}$* .

On déduit immédiatement de cette définition, et de la définition d'un point adhérent à un ensemble, que :

Proposition 5. *Pour qu'un point x soit adhérent à une base de filtre $\mathfrak{B}$* , *il faut et il suffit que tout ensemble d'un système fondamental de voisinages de x rencontre chacun des ensembles de $\mathfrak{B}$* .

Cette proposition, et la prop. 3 du § 5 , montre que la propriété "x est adhérent au filtre $\mathfrak{F}$ " est équivalente à la propriété "il existe un filtre plus fin que $\mathfrak{F}$ et que le filtre $\mathfrak{V}(x)$ des voisinages de x " . Autrement dit :

Proposition 6. *Pour qu'un point x soit adhérent à un filtre* $\mathfrak{F}$, *il faut et il suffit qu'il existe un filtre plus fin que* $\mathfrak{F}$ *et qui converge vers x*.

Si x est adhérent à un filtre $\mathfrak{F}$, il est aussi adhérent à tout filtre *moins fin* que $\mathfrak{F}$; de même, si on remplace la topologie de E par une topologie *moins fine*, x reste adhérent à $\mathfrak{F}$ dans cette topologie.

L'ensemble des points adhérents à un filtre $\mathfrak{F}$ est appelé *adhérence* de $\mathfrak{F}$; c'est l'*intersection des adhérences* des ensembles de $\mathfrak{F}$, et par suite c'est un ensemble *fermé*.

D'après la proposition 6, tout point limite d'un filtre est aussi adhérent à ce filtre ; en outre

Proposition 7. *Dans un espace séparé, l'adhérence d'un filtre convergent se réduit au point limite de ce filtre*.

En effet, si $\mathfrak{F}$ converge vers x , tout voisinage de x appartient à $\mathfrak{F}$, et d'après H' , l'intersection des adhérences des voisinages de x se réduit au point x .

Si $\mathfrak{B}$ est une base de filtre sur une partie A d'un espace E , l'adhérence de $\mathfrak{B}$ (considérée comme base de filtre sur E) est contenue dans $\overline{A}$; inversement, tout point de $\overline{A}$ est point limite d'une base de filtre sur A , à savoir la trace sur A du filtre des voisinages de ce point.

Remarque. Un filtre sur un espace topologique n'a pas nécessairement de point adhérent (ni a fortiori de point limite) : par exemple, sur un *espace discret infini*, le filtre des complémentaires des parties finies n'a pas de point adhérent. Les espaces sur lesquels tout filtre a un point adhérent jouent un rôle très important en Analyse ; nous les étudierons au § 10 .

Valeur limite et valeur d'adhérence d'une fonction. Définition 4. Soit f une application d'un ensemble E dans un espace topologique E' , et soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur E ; on dit qu'un point $y \in E'$ est valeur limite (ou simplement limite) de f suivant le filtre $\mathfrak{F}$, si la base de filtre $f(\mathfrak{F})$ converge vers y . On dit que y est valeur d'adhérence de f suivant le filtre $\mathfrak{F}$ si y est un point adhérent à la base de filtre $f(\mathfrak{F})$.

La relation "y est limite de f suivant le filtre $\mathfrak{F}$ " s'écrit aussi "$\lim_{\mathfrak{F}} f = y$ " .

De ces définitions et des propositions 1 et 5 , on déduit les critères suivants :

Proposition 8. Pour que y soit limite de f suivant le filtre $\mathfrak{F}$, il faut et il suffit que, quel que soit le voisinage V de y , il existe un ensemble $X \in \mathfrak{F}$ tel que $f(X) \subset V$.

Pour que y soit valeur d'adhérence de f suivant $\mathfrak{F}$, il faut et il suffit que, quels que soient le voisinage V de y et l'ensemble X de $\mathfrak{F}$, il existe un point $x \in X$ tel que $f(x) \in V$.

Exemple. La donnée d'une suite de points (x_n) d'un espace topologique E équivaut à celle de l'application $n \to x_n$ de $\mathbb{N}$ dans E. On a très souvent à considérer, en Analyse, la notion de limite ou de valeur d'adhérence d'une telle application suivant le filtre primordial sur $\mathbb{N}$; si y est limite de cette application suivant ce filtre, on dit simplement que y est limite de la suite (x_n) lorsque n croît indéfiniment (ou que x_n tend vers y lorsque n croît indéfiniment) et on écrit $\lim_{n \to \infty} x_n = y$. On appelle de même valeur d'adhérence de la suite (x_n) une valeur d'adhérence de l'application $n \to x_n$ suivant le filtre primordial.

On peut encore dire qu'un point y est valeur limite (resp. valeur d'adhérence) d'une suite (x_n) s'il est point limite du filtre élémentaire associé à (x_n) (resp. point adhérent à ce filtre).

La proposition 8 montre que, pour que y soit limite de la suite (x_n), il faut et il suffit que, quel que soit le voisinage V de y, tous les points de la suite à l'exception d'un nombre fini soient dans V, ou encore qu'il existe un entier n_o tel que, quel que soit $n \geqslant n_o$, $x_n \in V$. De même, pour que y soit valeur d'adhérence de la suite (x_n) il faut et il suffit que, quels que soient le voisinage V de y et l'entier n_o, il existe un entier $n \geqslant n_o$ tel que $x_n \in V$.

Il importe de distinguer soigneusement la notion de valeur d'adhérence d'une suite de celle de point adhérent à l'ensemble des points de la suite ; toute valeur d'adhérence est un point adhérent à l'ensemble des points de la suite, mais la réciproque est inexacte.

Une application f d'un ensemble E dans un espace topologique E' ne peut avoir qu'une seule limite suivant un filtre $\mathfrak{F}$ sur E, lorsque E' est un espace séparé. Sauf mention expresse du contraire, nous supposerons toujours désormais, lorsque nous parlerons de limite d'une fonction, qu'elle prend ses valeurs dans un espace séparé.

E' étant un espace séparé, si une application f de E dans E' possède une limite y suivant un filtre $\mathfrak{F}$ sur E, y est la seule valeur d'adhérence de f suivant $\mathfrak{F}$.

Si y est valeur limite (resp. valeur d'adhérence) d'une application f de E dans E' suivant un filtre $\mathfrak{F}$, y reste valeur limite (resp. valeur d'adhérence) de f suivant ce même filtre quand on remplace la topologie de E' par une topologie moins fine.

Définition 5. Soient A une partie d'un espace topologique E , et f une application de A dans un espace topologique E'. On dit qu'un point $y \in E'$ est limite de f en un point $a \in \bar{A}$, relativement à A , et on écrit $y = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$, si y est limite de f suivant la trace $\mathfrak{V}_A$ sur A du filtre des voisinages de a . (On dit aussi que f(x) tend vers y lorsque x tend vers a en restant dans A).

On dit que y est valeur d'adhérence de f au point a , relativement à A , si y est valeur d'adhérence de f suivant le filtre $\mathfrak{V}_A$.

Soit B une partie de A telle que $a \in \bar{B}$; si f a une limite y au point a , relativement à A , elle a la même limite au point a , relativement à B ; la réciproque est inexacte.

Si A et B sont deux voisinages de a , et si f a une limite au point a , relativement à un de ces ensembles, elle a la même limite relativement à l'autre ; on écrit alors simplement $\lim_{x \to a} f(x)$ au lieu de $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$. On a une propriété analogue si A et B ne contiennent pas a , mais sont tels que $A \cup \{a\}$ et $B \cup \{a\}$ soient des voisinages de a ; la limite se note alors $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$. Dans ces deux cas, on dit simplement que f a une limite au point a.

L'ensemble des valeurs d'adhérence de f en un point $a \in \bar{A}$, relativement à A , s'appelle adhérence de f au point a , relativement à A ; cet ensemble est l'intersection des ensembles $\overline{f(V \cap A)}$, V parcourant le filtre des voisinages de a (ou un système fondamental de voisinages de a) ; c'est un ensemble fermé contenu dans $\overline{f(A)}$: en particulier, si f a une limite en un point de $\bar{A}$, relativement à A , cette limite appartient à $\overline{f(A)}$.

Si B est une partie de A telle que $a \in \overline{B}$, toute valeur d'adhérence de f au point a , relativement à B , est aussi valeur d'adhérence de f au point a , relativement à A ; la réciproque est inexacte.

Toute valeur d'adhérence reste valeur d'adhérence lorsqu'on remplace la topologie de l'espace des arguments E par une topologie moins fine toute valeur limite reste valeur limite si on remplace la topologie de E par une topologie plus fine.

Remarque. La notion de valeur limite (resp. valeur d'adhérence) d'une fonction suivant un filtre $\mathfrak{F}$ peut se ramener à la notion de limite (resp. valeur d'adhérence) d'une fonction en un point d'un espace topologique, relativement à un ensemble auquel ce point est adhérent. Il suffit de considérer la topologie associée au filtre $\mathfrak{F}$, sur l'ensemble obtenu en adjoignant un point ω à E (§5) ; une limite (resp. valeur d'adhérence) de f suivant le filtre $\mathfrak{F}$ est une limite (resp. valeur d'adhérence) de f au point ω , relativement à E. En particulier, si $\mathfrak{F}$ est le filtre primordial sur $\mathbb{N}$, on appelle point à l'infini et on note ∞ le point qu'on adjoint à $\mathbb{N}$ pour former la topologie associée à $\mathfrak{F}$; c'est pourquoi on note $\lim_{n \to \infty} x_n$ la limite d'une suite.

Limites et continuité. La continuité peut se définir en partant de la notion de limite : dire qu'une fonction f est continue en un point a (par rapport à l'espace tout entier, cas auquel on peut toujours se limiter) équivaut à dire que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Il en résulte que, si f est une application d'un espace E dans un espace E' , continue au point $a \in E$, et si $\mathfrak{B}$ est une base de filtre sur E qui converge vers a , $f(\mathfrak{B})$ est une base de filtre sur E' , qui converge vers f(a).

On en déduit immédiatement la proposition suivante :

Proposition 9. Soit f une application d'un ensemble E dans un espace topologique E', telle que $\lim_{\mathcal{F}} f = y$, où $\mathcal{F}$ est un filtre sur E si g est une application de E' dans un espace topologique E'', continue au point y, l'application composée $h = g \circ f$ de E dans E'' admet une limite suivant le filtre $\mathcal{F}$, égale à $g(y)$.

Soit f une application d'une partie A non fermée d'un espace topologique E, dans un espace E', et supposons qu'elle admette une limite y relativement à A, en un point a, adhérent à A mais n'appartenant pas à A ; si on considère le prolongement $\overline{f}$ de f à l'ensemble $A \cup \{a\}$, tel que $\overline{f}(a) = y$, c'est une fonction continue au point a, relativement à l'ensemble $A \cup \{a\}$. On dit que $\overline{f}$ s'obtient en prolongeant par continuité f au point a.

Considérons maintenant une application f d'un espace E dans un espace E', continue dans E, et soit A une partie partout dense de E.

Les valeurs de f dans E sont déterminées par la connaissance de ses valeurs dans A. On a, en effet, en tout point a de E (point adhérent à A par hypothèse)

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$$

Les valeurs dans A d'une application continue f de E dans E' ne peuvent être prises arbitrairement, puisqu'elles doivent être telles, d'après ce qui précède, que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$ existe, quel que soit $a \in E$.

Inversement, lorsqu'on se donne une application g d'une partie partout dense A de E, dans un espace séparé E', telle que

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} g(x)$ existe en tout point $a \in E$, cherchons si le prolongement f de g à E, défini par la relation $f(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} g(x)$, pour tout $a \in E$ une application continue de E dans E'.

Considérons pour cela un voisinage quelconque V' de $f(a)$ dans E'; par hypothèse, il existe un voisinage *ouvert* V de a tel que $g(V \cap A) \subset V'$; d'autre part, comme V est un voisinage de chacun de ses points, on a, quel que soit $b \in V$, $f(b) = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x \in V \cap A}} g(x)$, et par suite $f(b) \in \overline{g(V \cap A)} \subset \overline{V'}$; autrement dit $f(V) \subset \overline{V'}$. On en déduit le théorème suivant :

Théorème 1. Soit E' un espace séparé satisfaisant à l'axiome suivant :

O_{III}. L'ensemble des voisinages fermés d'un point quelconque de l'espace est un système fondamental de voisinages de ce point.

Si f est une application d'une partie partout dense A d'un espace topologique quelconque E, dans l'espace E', telle que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$ *existe quel que soit* $a \in E$, *il existe un prolongement et un seul de f à E, qui soit une application continue de E dans E'* (cette application est dite obtenue en prolongeant f par continuité).

Remarque. Il existe des espaces séparés *ne satisfaisant pas à* O_{III} ; à tout espace E' de cette nature, on peut associer un autre espace E, une partie partout dense A de E, et une application g de A dans E', telle que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} g(x)$ existe quel que soit $a \in E$, mais que le prolongement f de g à E, défini par $f(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} g(x)$

ne soit pas une application continue de E dans E' (voir). Autrement dit, on ne peut, dans l'énoncé du théorème 1, remplacer la condition O_{III} par une condition moins restrictive, sans faire d'hypothèses supplémentaires sur E , A ou f.

Les espaces réguliers. Définition 6. Un espace topologique est dit régulier s'il est séparé et satisfait à l'axiome O_{III} ; sa topologie est dite régulière.

L'axiome O_{III} est équivalent au suivant :

O'_{III}. Quels que soient l'ensemble fermé A et le point $x \in \complement A$, il existe un voisinage de x et un voisinage de A sans point commun.

En effet, tout d'abord O_{III} entraîne O'_{III} : car $\complement A$, étant un voisinage de x , contient un voisinage fermé V de x , d'après O_{III} ; or, $\complement V$ est un voisinage de A , et $V \cap \complement V = \emptyset$.

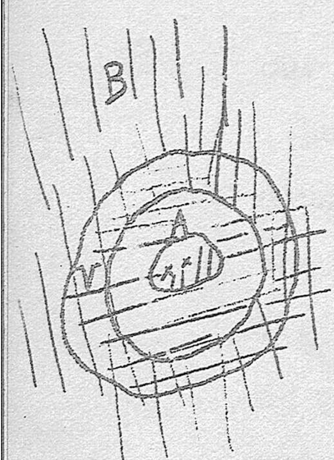


fig. 2 -

Réciproquement, O'_{III} entraîne O_{III} ; car, si V est un voisinage ouvert quelconque de x , il existe, d'après O'_{III} , deux ensembles ouverts A , B , tels que $x \in A$, $\complement V \subset B$, et $A \cap B = \emptyset$ (fig. 2) ; autrement dit $x \in A \subset \complement B \subset V$, ce qui montre que $\complement B$ est un voisinage fermé de x , contenu dans V.

Tout sous-espace d'un espace régulier est régulier, car, si A est une partie quelconque d'un espace régulier E , et x un point quelconque de A , la trace sur A de l'ensemble des voisinages fermés de x dans E est l'ensemble des voisinages fermés de x dans A .

<u>Corollaire</u>. <u>Pour qu'une partie d'un produit d'espaces séparés soit un ensemble relativement compact, il faut et il suffit que chacune de ses projections soit un ensemble relativement compact dans l'espace facteur correspondant</u>.

La condition est <u>nécessaire</u> d'après le corollaire 1 du th.1. Elle est <u>suffisante</u>, car si la projection A_ι de l'ensemble A sur F_ι est relativement compacte dans F_ι quel que soit ι , on a $A \subset \prod_\iota \bar{A}_\iota$, et d'après le th. 2 , $\prod_\iota \bar{A}_\iota$ est compact, donc A est relativement compact.

<u>Espace quotient d'un espace compact</u>. <u>Proposition 6</u>. <u>Si l'espace quotient E/R d'un espace compact par une relation d'équivalence R est séparé, il est compact</u>.

C'est une conséquence du th.1, car l'application canonique de E sur E/R est continue.

Le th. 1 montre aussi que, si f est une application continue d'un espace compact E dans un espace séparé E' l'application biunivoque g de l'espace quotient E_f de E par la relation d'équivalence $f(x)=f(y)$ sur le sous-espace f(E) de E' est un <u>homéomorphisme</u> : en effet, g étant continue et f(E) séparé, E_f est séparé ; E_f est donc compact d'après la prop.6 , et par suite g est biconti-nue (cor. 2 du th. 1).

<u>Régularité d'un espace compact</u>. <u>Proposition 7</u>. <u>Tout espace compact est régulier</u>

En effet, soit E un espace compact ; s'il n'était pas régulier, il existerait un point p et un voisinage ouvert U de p tel que l'adhérence de tout voisinage V de p rencontre $\complement U$; les ensembles $\bar{V} \cap \complement U$ formeraient donc une famille d'ensembles fermés dont l'intersection serait vide (d'après l'axiome H'), mais toute intersection finie d'ensembles de cette famille serait non vide, contrairement à l'axiome C" .

Espaces localement compacts. Définition 4. On dit qu'un espace séparé E est localement compact, si tout point de E possède un voisinage compact

Il est clair que tout espace compact est aussi localement compact mais la réciproque est inexacte : par exemple, tout espace discret est localement compact, mais non compact s'il est infini.

D'après la prop. 7 et la prop. 10 du § 6, tout espace localement compact est régulier. On en déduit immédiatement que, dans un espace localement compact, tout voisinage d'un point quelconque contient un voisinage compact de ce point.

Proposition 8. Dans un espace localement compact, tout ensemble ouvert ou fermé est un sous-espace localement compact.

Pour les ensembles ouverts, c'est une conséquence de ce qui vient d'être dit. D'autre part, si A est un ensemble fermé dans un espace E localement compact, la trace sur A d'un voisinage compact dans E d'un point $x \in A$ est un voisinage de x dans A , qui est compact, puisque fermé et contenu dans un ensemble compact.

La proposition 1, le théorème 1 et ses corollaires ne s'étendent pas aux espaces localement compacts.

Par exemple, sur un espace discret infini, le filtre des ensembles contenant un point x et dont le complémentaire est fini, admet le point x comme seul point adhérent, mais ne converge pas vers x . De même, une application quelconque d'un espace discret infini dans un espace séparé étant continue, l'image par cette application d'un ensemble quelconque de l'espace discret (ensemble qui est fermé) ne sera pas en général un ensemble fermé dans l'espace des valeurs.

La proposition correspondant au théorème 2 est la suivante :

Proposition 9. Pour qu'un produit d'espaces topologiques soit localement compact, il faut et il suffit que tous les espaces facteurs à l'exception d'un nombre fini, soient compacts, et que les espaces facteurs non compacts soient localement compacts.

La condition est nécessaire ; en effet, si $E = \prod_\iota F_\iota$ est localement compact, tout point $x=(x_\iota)$ de E possède un voisinage compact V ; or la projection de V sur F_ι est identique à F_ι sauf pour un nombre fini d'indices ; et, pour ces derniers, la projection de V sur F_ι est en tout cas un voisinage de x_ι, d'où la proposition d'après le corollaire du th. 2.

Ce même corollaire montre que la condition est suffisante, car si V_ι est un voisinage compact de x_ι, pour ceux des indices ι tels que F_ι soit localement compact, et si on pose $V_\iota = F_\iota$ pour les autres indices $\prod_\iota V_\iota$ est un voisinage compact de $x=(x_\iota)$.

Un espace quotient d'un espace localement compact, même s'il est séparé, n'est pas localement compact en général ; on peut seulement démontrer que l'espace quotient d'un espace localement compact E par une relation d'équivalence ouverte R est localement compact s'il est séparé : en effet, si f est l'application canonique de E sur E/R, l'image d'un voisinage compact d'un point x de E est un voisinage compact de f(x), d'après l'hypothèse sur R et le corollaire du th. 1.

Le théorème d'Alexandroff. La proposition 5 montre que, dans un espace séparé non compact E les complémentaires des ensembles relativement compacts forment un filtre que nous désignerons par $\mathfrak{C}$. De plus, soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur E n'ayant pas de point adhérent : si C est un ensemble compact quelconque dans E , il existe au moins un ensemble de $\mathfrak{F}$ sans point commun avec C , sans quoi la trace $\mathfrak{F}_C$ serait un filtre sur C et aurait un point adhérent ; il en serait donc de même de $\mathfrak{F}$ contrairement à l'hypothèse. Autrement dit, <u>tout filtre sur E n'ayant pas de point adhérent est plus fin que</u> $\mathfrak{G}$.

On voit alors qu'il est possible d'adjoindre à E un point ω et de définir sur $E' = E \cup \{\omega\}$ une structure topologique telle que <u>tout filtre sur E' ait un point adhérent</u> et que la topologie induite sur E soit identique à la topologie donnée ; il suffit de prendre pour filtre des voisinages de ω le filtre formé des ensembles $K \cup \{\omega\}$ où K parcourt $\mathfrak{G}$, les voisinages dans E' d'un point quelconque $x \in E$ étant de la forme V ou $V \cup \{\omega\}$, où V parcourt le filtre des voisinages de x dans E . On voit immédiatement que l'axiome V_{IV} est satisfait tout ensemble de $\mathfrak{G}$ contenant un ensemble ouvert non vide de E ; d'autre part, si la trace sur E d'un filtre $\mathfrak{F}'$ sur E' n'est pas un filtre ayant un point adhérent dans E , il résulte de ce qui précède que $\mathfrak{F}'$ converge vers ω.

D'après la prop.8, E' ne peut cependant être compact que si E est <u>localement compact</u> ; inversement, si E est localement compact, E' est <u>séparé</u>, et donc compact d'après ce qui précède : car tout point de E possède un voisinage compact V , et $\complement V$ est un voisinage de ω sans point commun avec V .

En outre, lorsque E est localement compact il n'est pas possible de définir sur E' une autre topologie d'espace compact telle que la topologie induite sur E soit encore la topologie donnée ; en effet, le filtre des voisinages de ω dans cette seconde topologie aurait sur E une trace qui serait un filtre sans point adhérent, donc plus fin que $\mathfrak{G}$; autrement dit, cette seconde topologie serait une topologie d'espace compact plus fine que la première, ce qui n'est possible que si ces topologies sont identiques.

En résumé, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

<u>Théorème 3</u> (Alexandroff). <u>A tout espace localement compact et non compact E , on peut associer un espace compact E' tel que E soit homéomorphe à un sous-espace de E' dont le complémentaire soit réduit à un seul point. De plus, E' est déterminé à une isomorphie près</u>

<u>Exercices</u>. 1) Démontrer le théorème 1 en utilisant l'axiome C.

2) Dans un espace séparé, l'ensemble formé des points d'une suite convergente et de son point limite, est compact.

3) Pour qu'une partie A d'un espace séparé E soit un ensemble relativement compact, il faut et il suffit que $\bar{A}$ soit un sous-espace régulier et que tout filtre sur A ait au moins un point adhérent dans E (la nécessité de la condition résulte des propositions 4 et 7 ; pour démontrer la suffisance, prendre un filtre $\mathfrak{F}$ sur $\bar{A}$, considérer la base de filtre $\mathfrak{G}$ formée des ensembles ouverts contenant au moins un ensemble de $\mathfrak{F}$, et prendre sa trace sur A).

4) Soit E un espace compact, A un ensemble partout dense dans E ainsi que son complémentaire. On considère l'ensemble des parties de E composé de A et de tous les ensembles ouverts dans E . La topologie engendrée par cet ensemble de parties n'est pas régulière ; montrer que, dans cette topologie, tout filtre sur A admet un point adhérent dans E.

5) Soit E un espace régulier non compact. Montrer qu'on peut adjoindre un point ω à E , et former sur $E' = E \cup \{\omega\}$

une topologie <u>séparée</u> induisant sur E la topologie donnée, et telle que E ne soit pas fermé dans E' (prendre sur E un filtre $\mathfrak{F}$ sans point adhérent, et considérer le filtre $\mathfrak{G}$ engendré par les ensembles ouverts contenant au moins un ensemble de $\mathfrak{F}$ puis définir la topologie de E' de sorte que $\mathfrak{G}$ soit le filtre induit sur E par le filtre des voisinages de ω).

6) Démontrer, en utilisant l'axiome C' , que toute topologie séparée moins fine qu'une topologie d'espace compact, lui est nécessairement identique.

7) Soient E,F,G trois espaces séparés, A un ensemble relativement compact dans $E \times F$, B un ensemble relativement compact dans $F \times G$; montrer que le composé BA est relativement compact dans $E \times G$.

8) Soit E un espace compact, F un espace topologique quelconque ; montrer que, si A est fermé dans $E \times F$, la projection de A sur F est un ensemble fermé dans F .

9) Avec les mêmes hypothèses que dans l'exerc.8 , montrer que, si $\mathfrak{B}$ est une base de filtre sur E formée d'ensembles <u>fermés</u> on a

$$\bigcap_{X \in \mathfrak{B}} A(X) = A\Big(\bigcap_{X \in \mathfrak{B}} X\Big)$$

10) Soit E un espace séparé, F un espace compact, A un ensemble fermé dans $E \times F$. $\mathfrak{V}(x)$ désignant le filtre des voisinages d'un point quelconque x de E , démontrer que

$$\bigcap_{V \in \mathfrak{V}(x)} \overline{A(V)} = A(x)$$

11) Soient E,F,G trois espaces séparés, A un ensemble fermé dans $E \times F$, tel que sa projection sur F soit <u>relativement compacte</u>, B un ensemble fermé dans $F \times G$. Montrer (en utilisant les exerc.9 et 10) que le composé BA est un ensemble fermé dans $E \times G$.

12) Soit E un espace compact, R une relation d'équivalence dans E telle que l'espace quotient E/R soit séparé. Soit A une classe d'équivalence suivant R ; montrer que les voisinages de A invariants par R forment une base du filtre des voisinages de A .

13) Démontrer la prop. 7 à l'aide de l'axiome C"'.

14) Soit E un espace séparé, A un ensemble compact dans E , x un point de E n'appartenant pas à A. Montrer qu'il existe un voisinage V de A et un voisinage W de x sans point commun.

15) Soit E un espace régulier, A un ensemble compact dans E , B un ensemble fermé dans E tels que $A \cap B = \emptyset$. Montrer, soit directement, soit en se ramenant à l'exercice précédent (au moyen de l'exerc.8 du § 9 et du th.1 du § 10), qu'il existe un voisinage V de A et un voisinage W de B sans point commun.

16) Montrer que, dans l'espace non séparé défini dans l'exerc. 3 du § 6, tout point possède un voisinage compact.

17) Un ensemble <u>bien ordonné</u> muni de la topologie gauche (§ 1, exerc.2) est localement compact ; il est compact s'il possède un plus grand élément.

18) Soit E un espace localement compact. Les voisinages compacts d'un ensemble compact dans E forment une base du filtre des voisinages de cet ensemble. Si A et B sont deux ensembles compacts dans E , sans point commun, il existe un voisinage compact de A et un voisinage compact de B sans point commun.

19) Soit A un sous-espace localement compact d'un espace localement compact E ; montrer que l'ensemble $\bar{A} \cap \complement A$ est fermé. En déduire que, pour qu'une partie d'un espace localement compact soit un sous-espace localement compact, il faut et il suffit qu'elle soit l'intersection d'un ensemble ouvert et d'un ensemble fermé.

20) Montrer que, sur un espace séparé non compact, le filtre des complémentaires des ensembles relativement compacts n'est jamais convergent.

§ 11. La notion de connexion.

Espaces et ensembles connexes. Définition 1. On dit qu'un espace topologique E est connexe si, en dehors de E et de l'ensemble vide, il n'existe aucun sous-ensemble de E qui soit à la fois ouvert et fermé.

On peut encore dire qu'un espace est connexe s'il n'existe pas de partition de l'espace formée de deux ensembles ouverts non vides, ou de deux ensembles fermés non vides ; si E est connexe, et si A et B sont deux ensembles ouverts non vides (ou deux ensembles fermés non vides) tels que $A \cup B = E$, on a $A \cap B \neq \emptyset$.

Exemples. Si on munit un ensemble E de la topologie la moins fine, on a un espace connexe ; au contraire, un espace discret comprenant plus d'un point n'est jamais connexe.

On montrera au ch.IV que la droite numérique est connexe, et la droite rationnelle non connexe.

Définition 2. On dit qu'une partie A d'un espace topologique E est un ensemble connexe, si le sous-espace A de E est connexe. On appelle domaine un ensemble ouvert connexe.

On déduit de cette définition que, pour que A soit un ensemble connexe, il faut et il suffit que, pour tout recouvrement de A composé de deux ensembles B,C ouverts (ou fermés) et tels que $A \cap B$ et $A \cap C$ soient non vides, on ait $A \cap B \cap C \neq \emptyset$.

Exemples. Dans tout espace topologique, un ensemble réduit à un seul point est connexe ; dans un espace séparé, tout ensemble fini comprenant plus d'un point, et plus généralement tout ensemble non réduit à un point et qui possède au moins un point isolé, n'est pas connexe.

Si un ensemble connexe A est partout dense, l'espace tout entier est connexe : car si M et N étaient deux ensembles ouverts non vides sans point commun tels que $E = M \cup N$, $M \cap A$ et $N \cap A$ seraient, dans A , deux ensembles ouverts sans point commun, dont la réunion serait A , et qui seraient non vides d'après l'hypothèse sur A . Autrement dit :

Proposition 1. Si A est un ensemble connexe, tout ensemble B tel que $A \subset B \subset \bar{A}$, est connexe.

Considérons une famille $(A_\iota)_{\iota \in I}$ d'ensembles connexes contenant tous un même point x , et soit $A = \bigcup_{\iota \in I} A_\iota$; montrons que A est connexe. Sinon, il existerait deux ensembles ouverts B,C tels que $B \cap A$ et $C \cap A$ soient non vides, que $A \subset B \cup C$, et que $A \cap B \cap C = \emptyset$; x est contenu dans l'un des ensembles B,C , supposons par exemple que $x \in B$; d'autre part, il existe un indice ι tel que $C \cap A_\iota \neq \emptyset$; on aurait donc $A_\iota \subset B \cup C$, $A_\iota \cap B \cap C = \emptyset$ et $B \cap A_\iota$ et $C \cap A_\iota$ non vides, contrairement a l'hypothèse que les A_ι sont connexes. Autrement dit :

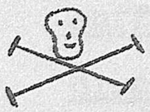
Proposition 2. La réunion d'une famille d'ensembles connexes dont l'intersection n'est pas vide, est un ensemble connexe.

Cette proposition permet de poser la définition suivante :

Définition 3. On appelle composante connexe d'un point le plus grand ensemble connexe contenant ce point.

La proposition 1 montre que toute composante connexe est un ensemble fermé ; d'autre part, la définition 3 et la prop. 2 montrent que la relation "y appartient à la composante connexe de x" est une relation d'équivalence ; autrement dit, les composantes connexes des points d'un espace topologique forment une partition de cet espace.

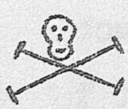
On dit qu'un espace est *totalement discontinu* lorsque la composante connexe de chacun de ses points est l'ensemble réduit à ce point.



Un espace *discret* est totalement discontinu, mais il faut bien prendre garde de ne pas confondre ces deux notions : nous verrons par exemple, au ch.IV, que la droite rationnelle, qui n'est pas un espace discret, est totalement discontinue.

Lorsqu 'au contraire un espace est connexe, il est identique à la composante connexe de chacun de ses points ; on peut dire encore que *si quels que soient les points x,y d'un espace topologique il existe un ensemble connexe contenant x et y, l'espace est connexe.*

Remarquons encore qu'un ensemble *à la fois ouvert et fermé* contient la composante connexe de chacun de ses points ; on peut aussi exprimer cela en disant que *la composante connexe d'un point est contenue dans l'intersection des ensembles à la fois ouverts et fermés contenant ce point.*

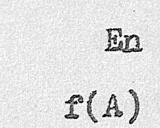


Il ne faut pas croire que cette intersection soit en général identique à la composante connexe du point considéré.

Image d'un ensemble connexe par une application continue.

Proposition 3. Soit A une partie connexe d'un espace topologique E , f une application continue de E dans un espace E' ; l'image f(A) est connexe.

En effet, s'il existait deux ensembles non vides M,N , ouverts *dans* f(A) et formant une partition de f(A), $A \cap \overset{-1}{f}(M)$ et $A \cap \overset{-1}{f}(N)$ seraient non vides, ouverts *dans A* et formeraient une partition de A , autrement dit A ne serait pas connexe, contrairement à l'hypothèse.



Il importe de remarquer qu'en général l'*image réciproque* d'un ensemble connexe par une application continue n'est pas connexe il suffit de considérer, par exemple, une application *constante* d'un espace discret dans un espace topologique quelconque.

On déduit de la proposition 3 une nouvelle caractérisation des espaces non connexes :

Proposition 4. Pour qu'un espace E soit non connexe, il faut et il suffit qu'il existe une application continue de E sur un espace discret comprenant plus d'un point.

La condition est évidemment suffisante, d'après la proposition 3. Elle est aussi nécessaire, car si A,B sont deux ensembles ouverts non vides formant une partition de E, l'application f de E sur un espace discret $\{a,b\}$ de deux éléments, telle que $f(A)=\{a\}$, $f(B)=\{b\}$ est continue dans E (§4, th.2).

Produit d'espaces connexes. Proposition 5. Pour qu'un espace produit $E=\prod_\iota F_\iota$ soit connexe, il faut et il suffit que chacun des espaces facteurs F_ι soit connexe.

La condition est nécessaire d'après la proposition 3. Pour voir qu'elle est suffisante, supposons tous les F_ι connexes, et E non connexe ; d'après la prop.4, il existerait une application continue f de E sur un espace discret E' comprenant plus d'un point. Soit $a=(a_\iota)$ un point quelconque de E, $\varkappa$ un indice quelconque ; l'application partielle $f_\varkappa$ de $F_\varkappa$ dans E', définie par $f_\varkappa(x_\varkappa)=f((y_\iota))$, avec $y_\iota=a_\iota$ pour $\iota\neq\varkappa$, $y_\varkappa=x_\varkappa$, est continue dans $F_\varkappa$; comme $F_\varkappa$ est connexe $f_\varkappa$ est constante dans $F_\varkappa$. Ce résultat montre immédiatement par récurrence, que $f(a)=f(b)$ pour tout couple de points $a=(a_\iota)$, $b=(b_\iota)$ dont les coordonnées de même indice, à l'exception d'un nombre fini, sont identiques. Par hypothèse, il existe deux points $p=(p_\iota)$, $q=(q_\iota)$ tels que $f(p)\neq f(q)$; comme f est continue au point p et prend ses valeurs dans un espace discret, il existe un ensemble élémentaire $\prod_\iota V_\iota$ contenant p et tel que $f(x)=f(p)$ quel que soit $x\in\prod V_\iota$.

68

Or, soit $r=(r_\iota)$ le point tel que $r_\iota = q_\iota$ pour les indices tels que $V_\iota = F_\iota$, et $r_\iota = p_\iota$ pour les autres indices (en nombre <u>fini</u>). On a $r \in \prod_\iota V_\iota$, donc $f(r)=f(p)$; d'autre part, d'après ce qui précède, $f(r)=f(q)$, on aboutit donc à une contradiction.

<u>Corollaire</u>. <u>Dans un espace produit, la composante connexe d'un point $x=(x_\iota)$ est le produit des composantes connexes des points x_ι</u>.

En effet, cet ensemble est connexe, d'après ce qui précède. D'autre part, si un ensemble connexe A contient x , $pr_\iota(A)$ est un ensemble connexe contenant x_ι , d'après la prop.3 ; comme $A \subset \prod_\iota pr_\iota(A)$, A est bien contenu dans le produit des composantes connexes des x_ι .

<u>Espace quotient d'un espace connexe</u>. <u>Proposition 6</u>. <u>Tout espace quotient d'un espace connexe est connexe</u>.

C'est une conséquence immédiate de la prop. 3.

De même, si on considère un espace quotient E/R d'un espace quelconque E , l'image canonique dans E/R d'un ensemble connexe dans E est un ensemble connexe.

Soit E un espace quelconque, et désignons par R la relation d'équivalence "y appartient à la composante connexe de x" ; les classes d'équivalence suivant R sont donc les composantes connexes de E. Nous allons voir que l'espace quotient E/R est <u>totalement discontinu</u>. Supposons en effet que, dans E/R , il existe un ensemble fermé connexe A , contenant deux points distincts au moins son image réciproque $\overset{-1}{f}(A)$ dans E , par l'application canonique de E sur E/R , serait un ensemble fermé, invariant par R , et contenant au moins deux composantes connexes, donc un ensemble <u>non connexe</u>. Il existerait donc deux ensembles fermés non vides B,C tels que $B \cap C = \emptyset$ et $B \cup C = \overset{-1}{f}(A)$; mais, comme la composante connexe <u>dans</u> $\overset{-1}{f}(A)$ d'un point quelconque de cet ensemble est identique à la composante connexe de ce point <u>dans E</u>, B et C, qui sont à la fois ouverts et fermés <u>dans</u> $\overset{-1}{f}(A)$, sont invariants par R ; f(B) et f(C) seraient donc fermés dans E/R, tels que $f(B) \cup f(C) = A$ et $f(B) \cap f(C) = \emptyset$, et A ne serait donc pas connexe, contrairement à l'hypothèse.

<u>Exercices</u>. 1) Dans un espace connexe, tout ensemble non vide et différent de l'espace tout entier possède au moins un point frontière.

2) Quand on remplace la topologie d'un espace E par une topologie moins fine, tout ensemble connexe dans la topologie initiale reste connexe dans la nouvelle topologie.

3) Soit E un espace connexe, A une partie de E partout dense dans E ainsi que son complémentaire. On considère l'ensemble de parties de E formé de A et des ensembles ouverts de E. Montrer que E, muni de la topologie engendrée par cet ensemble de parties, est encore connexe.

4) Un ensemble totalement ordonné, muni de la topologie droite ou de la topologie gauche (§ 1, exerc.2) est totalement discontinu.

5) Dans le plan numérique $\mathbb{R}^2$, on désigne par S_a l'ensemble $x=a$, $0 < y \leqslant 1$ si a est rationnel, l'ensemble $x=a$, $-1 \leqslant y \leqslant 0$ si a est irrationnel ; soit E la réunion de tous les S_a, lorsque a parcourt $\mathbb{R}$. Montrer que E est un ensemble connexe.

6) Dans l'espace défini à l'exerc.3 du § 6, montrer que la composante connexe de tout point se réduit à ce point, mais que l'intersection des ensembles à la fois ouverts et fermés contenant le point α se compose des points α et β.

7) Dans le plan numérique R^2, on désigne par A_n l'ensemble défini par $x = 1/n$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, par B l'ensemble $x=0$, $0 < y \leqslant 1$, par C l'ensemble $x=0$, $-1 \leqslant y < 0$, et on pose $E = B \cup C \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$. Montrer que, dans le sous-espace E de R^2, les ensembles B, C et A_n $(n=1,2,\ldots)$ sont les composantes connexes, et que l'intersection des ensembles à la fois ouverts et fermés dans E, qui contiennent un point de B, est l'ensemble $B \cup C$.

8) Soit E un espace compact, $\mathfrak{F}$ une famille d'ensembles à la fois ouverts et fermés dans E, dont l'intersection se compose de la réunion $A \cup B$ de deux ensembles fermés sans point commun. Montrer qu'il existe deux voisinages V, W de A et B respectivement, qui sont à la fois ouverts et fermés et n'ont aucun point commun (on commencera par établir (voir § 10, exerc. 15) qu'il existe deux voisinages fermés M, N de A et B respectivement, tels que $M \cup N = E$ et que $A \cap N = B \cap M = \emptyset$; puis on montrera qu'il existe un ensemble K de la famille $\mathfrak{F}$ tel que $M \cap N \cap K = \emptyset$).

9) Déduire de l'exercice précédent que, dans un espace compact la composante connexe d'un point est l'intersection de tous les ensembles à la fois ouverts et fermés qui contiennent le point.

10) On considère l'espace quotient d'un espace topologique E par la relation d'équivalence : "tout ensemble à la fois ouvert et fermé qui contient x contient y". Montrer que, dans cet espace quotient, l'intersection des ensembles à la fois ouverts et fermés contenant un point est l'ensemble réduit à ce point.

CHAPITRE II

STRUCTURES UNIFORMES.

§ 1. La notion de structure uniforme.

L'introduction de la notion de structure uniforme répond au but suivant : définir une notion mathématique aussi générale que possible, qui corresponde à la notion vulgaire de "proximité" de deux points de l'espace. On se rend compte immédiatement que la présence, sur un ensemble fondamental E , d'une structure topologique, ne suffit pas à elle seule pour formuler une telle définition, faute d'un procédé permettant de comparer les voisinages des divers points de l'espace. * Or, dans l'espace sensible, nous pouvons faire cette comparaison grâce à la notion expérimentale de distance de deux points ; la première idée qui vient à l'esprit est donc de définir sur le produit $E \times E$, une fonction $d(x,y)$ à valeurs réelles, possédant des propriétés analogues à celles qu'on attribue à la distance de deux points, de dire ensuite que x et y sont "distants de moins de ε " lorsque $d(x,y) < \varepsilon$, puis de considérer, pour chaque point x_0 , l'ensemble $S_\varepsilon(x_0)$ des points x distants de x_0 de moins de ε , et de prendre pour système fondamental de voisinages de x_0 la famille des $S_\varepsilon(x_0)$, où ε prend toutes les valeurs strictement positives.

Mais on s'aperçoit vite qu'il y a des problèmes importants où une notion de "proximité" de deux points, fournie naturellement par les données du problème, ne saurait être définie de la manière qui vient d'être dite ; et par ailleurs, on s'explique mal le rôle essentiel que semble jouer l'ensemble des nombres réels dans cette définition.

Pour éliminer cet ensemble auxiliaire, et arriver au degré de généralité désirable, on procède alors de la manière suivante : on considère pour chaque $\varepsilon > 0$, dans le produit $E \times E$, l'ensemble V_ε des couples (x,y) tels que $d(x,y) < \varepsilon$; lorsque ε varie, on a une famille d'ensembles dont on constate que certaines propriétés peuvent s'exprimer sans utiliser la notion de nombre réel ; abandonnant alors la fonction $d(x,y)$, on considère d'une façon générale une famille de parties de $E \times E$, soumise à la seule condition de posséder ces propriétés ; et la "proximité" de deux points x,y sera évaluée par l'ensemble de la famille à laquelle appartient le couple (x,y) *.

De façon précise, nous posons la définition suivante : $\mathfrak{F}$ étant une famille de parties de $E \times E$, V un ensemble de $\mathfrak{F}$, la relation "x et y sont voisins d'ordre V" sera par définition synonyme de "$(x,y) \in V$", et nous supposerons que la famille $\mathfrak{F}$ remplit les conditions suivantes :

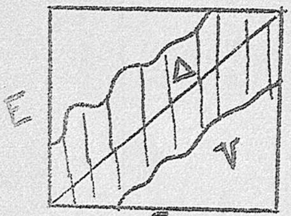
1° quels que soient $x \in E$ et $V \in \mathfrak{F}$, x et x sont voisins d'ordre V ;

2° l'intersection de deux ensembles de $\mathfrak{F}$ appartient à $\mathfrak{F}$;

3° quel que soit $V \in \mathfrak{F}$, il existe $V' \in \mathfrak{F}$ tel que, si x et y sont voisins d'ordre V', y et x sont voisins d'ordre V ;

4° quel que soit $V \in \mathfrak{F}$, il existe $W \in \mathfrak{F}$ tel que, si x et z sont voisins d'ordre W, et z et y voisins d'ordre W, x et y sont voisins d'ordre V.

Ces conditions peuvent s'exprimer autrement : 1° et 2° montrent que $\mathfrak{F}$ engendre un <u>filtre</u> $\mathfrak{U}$ sur $E \times E$; en faisant usage du calcul des correspondances, il revient donc au même de dire que



(fig. 1)

ce filtre vérifie les trois axiomes :

U_I. <u>Tout ensemble de</u> $\mathfrak{U}$ <u>contient la diagonale</u> Δ (fig. 1)

U_{II}. $V \in \mathfrak{U}$ <u>entraîne</u> $\overset{-1}{V} \in \mathfrak{U}$.

U_{III}. <u>Quel que soit</u> $V \in \mathfrak{U}$, <u>il existe</u> $W \in \mathfrak{U}$ <u>tel que</u> $WW \subset V$.

On dit qu'un filtre $\mathfrak{U}$ sur $E \times E$ qui vérifie ces axiomes définit une <u>structure uniforme</u> sur E ; les ensembles de $\mathfrak{U}$ sont appelés <u>entourages</u>, et $\mathfrak{U}$ le <u>filtre des entourages</u>, de cette structure uniforme (on n'oubliera jamais qu'un entourage est une partie de $E \times E$, et non une partie de E).

Pour rendre le langage plus imagé, on pourra employer les termes "x et y sont assez voisins" et "x et y sont aussi voisins qu'on veut" dans certains énoncés, mais il ne faudra jamais manquer d'en donner dans chaque cas une traduction précise ; car, si on essaie de donner une fois pour toutes un sens fixe à ces locutions, on risque de tomber dans de graves erreurs :

Par exemple, R étant une relation quelconque, il est naturel d'interpréter "si x et y sont assez voisins, R " comme synonyme de "il existe V tel que, si $(x,y) \in V$, R" ; "x et y sont assez voisins" devrait donc être synonyme de "quel que soit V, $(x,y) \in V$ ". D'autre part, on interprète de même "si R, x et y sont aussi voisins qu'on veut" comme synonyme de "quel que soit V, si R, $(x,y) \in V$", ce qui revient à dire que "x et y sont aussi voisins qu'on veut" devrait <u>également</u> être synonyme de "quel que soit V , $(x,y) \in V$ " ;

ce qui serait déjà une fâcheuse confusion. Mais il y a plus grave : en admettant l'interprétation précédente, la relation "il existe x,y tels que (R, et x et y sont aussi voisins qu'on veut)" devrait être synonyme de "il existe x,y tels que, quel que soit V , $(x,y) \in V$ et R " ; alors que, manifestement sous la forme contractée "il existe x et y aussi voisins qu'on veut tels que R" , on a tendance à la considérer comme synonyme de "quel que soit V, il existe x,y tels que $(x,y) \in V$ et R " ; on serait ainsi amené à intervertir un "quel que soit" et un "il existe " !!

Les structures uniformes les plus importantes sont celles qui vérifient l'axiome suivant, plus restrictif que U_I :

U_{Ia}. <u>L'intersection des ensembles de $\mathfrak{U}$ est la diagonale</u> Δ . Autrement dit, si $x \neq y$, il existe $V \in \mathfrak{U}$ tel que x et y ne soient pas voisins d'ordre V ; on exprime ce fait en disant que la structure uniforme est <u>séparée</u>.

Dans une structure uniforme, une <u>base</u> $\mathfrak{B}$ du filtre d'entourages prend le nom de <u>système fondamental d'entourages</u>. On voit immédiatement que, pour qu'une <u>base de filtre</u> $\mathfrak{B}$ sur $E \times E$ soit un système fondamental d'entourages d'une structure uniforme sur E , il faut et il suffit qu'elle satisfasse aux axiomes :

U'_I . <u>Tout ensemble de</u> $\mathfrak{B}$ <u>contient la diagonale</u> Δ .

U'_{II} . <u>Quel que soit</u> $V \in \mathfrak{B}$, <u>il existe</u> $V' \in \mathfrak{B}$ <u>tel que</u> $V' \subset \overset{-1}{V}$.

U'_{III}. <u>Quel que soit</u> $V \in \mathfrak{B}$, <u>il existe</u> $W \in \mathfrak{B}$ <u>tel que</u> $WW \subset V$.

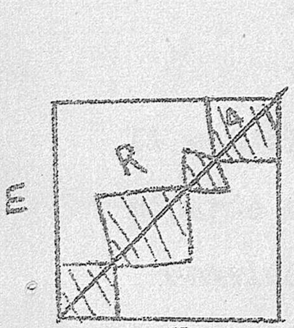
Pour que la structure uniforme définie par un système fondamental d'entourages $\mathfrak{B}$ soit <u>séparée</u>, il faut et il suffit que $\mathfrak{B}$ vérifie en outre l'axiome

U'_{Ia}. <u>L'intersection des ensembles de $\mathfrak{B}$ est la diagonale</u> Δ .

L'axiome U_{III} montre que, dans une structure uniforme quelconque, la famille des ensembles $\overset{n}{V}$, où n est un entier positif fixe, et V parcourt le filtre des entourages, est un système fondamental d'entourages.

De même, appelons entourages <u>symétriques</u> les entourages V tels que $\overset{-1}{V}=V$; il résulte immédiatement de l'axiome U_{II} et du fait que $\mathfrak{U}$ est un filtre, que la famille des entourages symétriques est un système fondamental d'entourages.

<u>Exemples de structures uniformes</u>.* 1) la structure uniforme la plus importante est la <u>structure additive</u> de la droite numérique $\mathbb{R}$, définie de la manière suivante : pour chaque $\alpha > 0$, on considère, dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, l'ensemble des couples (x,y), tels que $|x-y| < \alpha$, et on prend comme système fondamental d'entourages la famille de ces ensembles. On définit de la même manière une structure uniforme sur l'ensemble des nombres rationnels ; les chapitres III et IV sont en grande partie consacré~~e~~s à l'étude de ces structures, et des structures plus générales qu'on peut définir de la même manière sur certains <u>groupes</u>.*



(fig. 2)

2) E étant un ensemble quelconque , $\rho\{x,y\}$ une <u>relation d'équivalence</u> dans E , R la partie de $E \times E$ formée des couples (x,y) équivalents par ρ (fig.2), il est immédiat que $\Delta \subset R$, et que $RR = \overset{-1}{R} = R$; la famille formée du <u>seul</u> ensemble R est donc un système fondamental d'entourages ; le seul cas où la structure uniforme qu'elle définit est <u>séparée</u> est celui où $R = \Delta$, c'est-à-dire où ρ est la relation

d'<u>égalité</u> ; la structure uniforme correspondante est alors appelée structure uniforme <u>discrète</u>.

3) Sur l'ensemble des entiers $\mathbb{Z}$, on définit de la manière suivante une structure uniforme importante en Théorie des Nombres : p étant un nombre premier $\neq 1$, posons $|0|_p = 0$, et , pour tout entier $x \neq 0$, $|x|_p = p^{-\rho}$, si p^{ρ} est la plus grande puissance de p qui divise x ; on considère alors, pour chaque entier n, l'ensemble W_n des points (x,y) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $|x-y|_p \leq p^{-n}$, et on vérifie aisément que la famille de ces ensembles forme un système fondamental d'entourages ; la structure uniforme qu'elle définit est dite structure uniforme p-<u>adique</u> sur $\mathbb{Z}$.

<u>Comparaison des structures uniformes</u>. Si deux structures uniformes sur un <u>même</u> ensemble E ont respectivement pour filtres d'entourages $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}'$, la seconde sera dite <u>plus fine</u> que la première si $\mathfrak{U}'$ est un filtre <u>plus fin</u> que $\mathfrak{U}$ (et <u>strictement plus fine</u> si de plus $\mathfrak{U}' \neq \mathfrak{U}$) ; autrement dit, tout entourage de la première structure est aussi un entourage de la seconde. Deux structures uniformes dont l'une est plus fine que l'autre sont dites <u>comparables</u>.

La structure uniforme discrète est évidemment <u>la plus fine</u> de toutes les structures uniformes sur un même ensemble.

Il est clair que toute structure plus fine qu'une structure uniforme séparée est également séparée.

Considérons maintenant une famille Φ de structures uniformes (ou, ce qui revient au même, de filtres d'entourages $\mathfrak{U}$) sur un même ensemble E ; le filtre intersection des filtres de la famille Φ n'est pas en général un filtre d'entourages, en raison de l'axiome U_{III} ; par contre, on a la proposition suivante :

Proposition 1. La famille $\mathcal{F}$ *, réunion de tous les filtres de la famille* Φ *, engendre un filtre d'entourages* $\mathcal{U}_0$ *, qui définit la moins fine des structures uniformes plus fines que toutes les structures uniformes de la famille* Φ .

En vertu de U_I, il est immédiat que $\mathcal{F}$ engendre un filtre ; le seul point à vérifier est que ce filtre $\mathcal{U}_0$ satisfait à U_{III}. Or, si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont deux filtres de la famille Φ , V et W deux ensembles de $\mathcal{U}$ tels que $WW \subset V$, V' et W' deux ensembles de $\mathcal{U}'$ tels que $W'W' \subset V'$, cela résulte des relations

$$(W \cap W') \circ (W \cap W') \subset (WW) \cap (W'W') \subset V \cap V'$$

Exemple. Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une *partition finie* quelconque de E ; on sait qu'il lui correspond une relation d'équivalence dans E, et par suite aussi (ci-dessus, exemple 2) une structure uniforme sur E , dont le filtre d'entourages a pour base l'unique ensemble $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \times A_i$. Si on considère la famille de *toutes* les partitions finies de E , il lui correspond, d'après la proposition 1, une structure uniforme qu'on appelle la *structure des partitions finies*.

Exercice. Former un système fondamental d'entourages de cette structure ; montrer qu'elle est *séparée*, et que, si E est *infini*, elle est strictement moins fine que la structure uniforme discrète.

<u>Image réciproque d'une structure uniforme.</u> <u>Structure uniforme induite.</u> Soient E, E' deux ensembles fondamentaux, f une application quelconque de E dans E', $g(f,f)$ l'application de $E \times E$ dans $E' \times E'$ qu'on en déduit par extension. Supposons qu'on ait défini sur E' une structure uniforme dont $\mathfrak{U}$ soit le filtre d'entourages : <u>l'image réciproque</u> $\overset{-1}{g}(\mathfrak{U})$ <u>de ce filtre est la base d'un filtre d'entourages sur</u> $E \times E$. En effet, d'après U_I, aucun des ensembles de $\overset{-1}{g}(\mathfrak{U})$ n'est vide, donc cette famille est bien une base de filtre ; et la vérification des axiomes U' pour cette famille est immédiate, si on remarque que la relation $(x,y) \in \overset{-1}{g}(V)$ est équivalente à $(f(x),f(y)) \in V$.

Cette structure uniforme est dite <u>l'image réciproque par f</u> de la structure uniforme de E' ; en général, même si la structure uniforme de E' était <u>séparée</u>, son image réciproque par f <u>ne l'est pas</u> : la condition pour que cette structure soit aussi séparée est que, si Δ et Δ' désignent les diagonales de $E \times E$ et $E' \times E'$ respectivement, on ait $\overset{-1}{g}(\Delta') = \Delta$. En particulier, si E est une partie de E', considérée comme nouvel ensemble fondamental, et f l'application <u>canonique</u> de E dans E' la structure uniforme sur E, image réciproque par f de la structure uniforme de E', est dite structure <u>induite</u> sur E par celle de E' ; comme g est l'application canonique de $E \times E$ dans $E' \times E'$ la condition $\overset{-1}{g}(\Delta) = \Delta$ est vérifiée, donc si la structure de E' est séparée, il en est de même de celle de E.

<u>Structure uniforme séparée associée à une structure uniforme quelconque.</u> L'image <u>directe</u> d'un filtre d'entourages par une application f ne

constitue pas en général un système fondamental d'entourages ; elle forme cependant un tel système dans un cas très important que nous allons examiner.

Considérons, sur un ensemble E , une structure uniforme <u>non séparée</u> dont $\mathfrak{U}$ est le filtre d'entourages ; et soit $R \neq \Delta$ l'intersection de tous les ensembles de $\mathfrak{U}$. D'après U_I , on a $\Delta \subset R$; comme intersection de tous les entourages symétriques, $R = \overset{-1}{R}$; enfin, quel que soit $V \in \mathfrak{U}$, $RR \subset VV$, donc, d'après U_{III}, $RR \subset R$, et comme $\Delta \subset R$, $RR = R$. La relation $(x,y) \in R$, que nous désignerons par ρ , est donc une <u>relation d'équivalence</u>. Considérons alors, sur l'ensemble quotient $E' = E/\rho$, l'image directe de la structure uniforme de E par l'application canonique de E sur E' : c'est-à-dire que, si V est un ensemble quelconque de $\mathfrak{U}$, nous lui faisons correspondre l'ensemble $\dot{V}$ des couples $(\dot{x},\dot{y})$ des classes d'équivalence telles qu'il y ait <u>un</u> point $x \in \dot{x}$ et <u>un</u> point $y \in \dot{y}$ voisins d'ordre V ; nous allons voir que la famille des ensembles $\dot{V}$ forme un <u>système fondamental d'entourages d'une structure séparée sur</u> E' .

En effet, la relation $(\dot{x},\dot{y}) \in \dot{V}$ signifie encore que, pour <u>tout</u> point $x \in \dot{x}$, et pour <u>tout</u> point $y \in \dot{y}$, on a $(x,y) \in RVR$; il en résulte d'abord que $(\dot{x},\dot{x}) \in \dot{V}$ quel que soit $\dot{V}$, et qu'inversement, si $(\dot{x},\dot{y}) \in \dot{V}$ quel que soit $\dot{V}$, on a, pour tout $x \in \dot{x}$, et tout $y \in \dot{y}$, $(x,y) \in RVR$ quel que soit V , donc $(x,y) \in \overset{3}{R} = R$, d'où résulte $\dot{x} = \dot{y}$. Comme $\overset{-1}{\widehat{RVR}} = \overset{-1}{R}\overset{-1}{V}\overset{-1}{R} = R\overset{-1}{V}R$, on voit immédiatement que la famille des $\dot{V}$ vérifie U_{II} ; enfin, V étant un ensemble quelconque de $\mathfrak{U}$, si $W \in \mathfrak{U}$ est tel que $\overset{6}{W} \subset V$, les relations $(\dot{x},\dot{y}) \in \dot{W}$ et $(\dot{y},\dot{z}) \in \dot{W}$

entraînent que $(x,y) \in RWR$ et $(y,z) \in RWR$ quels que soient $x \in \dot{x}$, $y \in \dot{y}$ et $z \in \dot{z}$ d'où $(x,z) \in (RWR)\circ(RWR) \subset \overset{6}{W} \subset V$, ce qui montre que $\ddot{W}\dot{} \subset \dot{V}$, ~~EX~~ et achève de démontrer la proposition.

On dit que la structure uniforme séparée ainsi définie sur E' est la structure séparée <u>associée</u> à celle de E ; comme les ensembles RVR forment (en vertu de $RVR \subset \overset{3}{V}$) un système fondamental d'entourages de la structure de E, cette dernière est l'<u>image réciproque</u> de sa structure associée par l'application canonique de E sur E'.

§ 2 . Espaces uniformes.

La donnée d'une structure uniforme sur un ensemble E permet d'y définir une structure <u>topologique</u>. En effet, x_0 étant un point quelconque de E , considérons la famille $\mathfrak{V}(x_0)$ des ensembles $V(x_0)$ où V parcourt le filtre des entourages ($V(x_0)$ est donc l'ensemble des points x tels que x_0 et x soient voisins d'ordre V) ; montrons que les familles $\mathfrak{V}(x_0)$ sont les filtres de voisinages d'une structure topologique. En effet, $V(x_0)$ est la coupe de V relative à x_0 (fig.3) donc $\mathfrak{V}(x_0)$ est un filtre ; en vertu de U_I, $x_0 \in V(x_0)$, donc l'axiome V_{III} est vérifié. Enfin, soit W un entourage tel que $WW \subset V$; $x \in W(x_0)$ entraîne $W(x) \subset V(x_0)$,

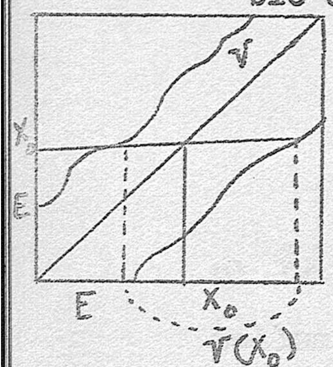


fig. 3

car la première de ces relations signifie que x_0 et x sont voisins d'ordre W ; donc, pour tout $y \in W(x)$, c'est-à-dire tel que x et y soient voisins d'ordre W , x_0 et y sont voisins d'ordre WW , donc aussi d'ordre V. On a donc $V(x_0) \in \mathfrak{V}(x)$ quel que soit $x \in W(x_0)$, ce qui montre que les filtres $\mathfrak{V}(x_0)$ vérifient l'axiome V_{IV}.

On dit que la topologie dont les filtres $\mathfrak{V}(x_0)$ sont les filtres de voisinages est celle qui est <u>déduite</u> de la structure uniforme donnée.

L'ensemble E, muni de la structure uniforme donnée et de la structure topologique qui en est déduite, prend le nom d'<u>espace uniforme</u> ; quand on parlera par la suite de la topologie d'un tel espace, il faudra toujours entendre, sauf avis contraire, la topologie déduite de sa structure uniforme.

<u>Exemples</u>. * 1) La topologie déduite de la structure additive de l'ensemble des nombres réels est la topologie de la droite numérique dont nous avons parlé au ch. I ; de même la topologie déduite de la structure additive de l'ensemble des nombres rationnels est la topologie de la droite rationnelle. *

2) Sur un ensemble quelconque E, la topologie déduite de la structure uniforme discrète est la topologie discrète.

3) Sur un ensemble quelconque E, la topologie déduite de la structure uniforme des partitions finies est encore la topologie discrète, car, quel que soit $x \in E$, les ensembles $\{x\}$ et $\complement \{x\}$ forment une partition finie de E.

<u>Exercice</u>. Quels sont les voisinages d'un point dans la topologie déduite de la structure uniforme p-adique sur $\mathbb{Z}$?

Si $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$ sont deux structures uniformes sur un même ensemble E telles que $\mathcal{U}'$ soit <u>plus fine</u> que $\mathcal{U}$, la topologie déduite de $\mathcal{U}'$ est aussi <u>plus fine</u> que la topologie déduite de $\mathcal{U}$ (voir ch. I, § 2, prop. 1). Mais il peut se faire que la <u>même</u> topologie soit déduite de deux structures uniformes <u>distinctes</u>.

Lorsque E est <u>infini</u>, c'est ce que montrent les exemples 2 et 3 ci-dessus.

82

*On verra de même, au ch.V, que, sur l'ensemble des nombres strictement positifs, la même topologie est déduite de la structure uniforme <u>additive</u> et de la structure uniforme <u>multiplicative</u>, qui <u>ne sont pas comparables</u> *.

Conformément aux définitions générales, une application biunivoque f d'un espace uniforme E sur un espace uniforme E' est appelée un <u>isomorphisme</u>, si son extension g = (f,f), application biunivoque de $E \times E$ sur $E' \times E'$, applique le filtre des entourages de E sur celui de E' ; s'il existe un isomorphisme de E sur E', ces deux espaces uniformes sont dits <u>isomorphes</u>. Deux espaces uniformes isomorphes sont aussi <u>homéomorphes</u> ; mais les exemples qui précèdent montrent que la réciproque est inexacte.

Soit f une application d'un ensemble E dans un espace uniforme E'; il résulte immédiatement des définitions que l'image réciproque par f de la <u>topologie</u> de E' est identique à la topologie <u>déduite</u> de la <u>structure uniforme</u> image réciproque par f de la structure uniforme de E'. En particulier, sur un sous-ensemble A d'un espace uniforme E la topologie déduite de la structure uniforme induite est identique à la topologie induite ; A, muni de la structure uniforme et de la topologie induites par celles de E, est appelé <u>sous-espace uniforme</u> de E.

<u>Etude de la topologie d'un espace uniforme.</u> E étant un espace uniforme, nous considérons dans ce qui suit, sur l'ensemble $E \times E$, la topologie produit de la topologie de E par elle-même.

Soit M une partie quelconque de $E \times E$, V un entourage <u>symétrique</u> et considérons l'ensemble VMV. Pour que $(x,y) \in VMV$, il faut et il suffit qu'il existe $(p,q) \in M$ tel que $(x,p) \in V$ et $(q,y) \in V$, autrement dit (V étant symétrique) que $x \in V(p)$ et $y \in V(q)$, ou encore que $(x,y) \in V(p) \times V(q)$. Or, $V(p) \times V(q)$ est un voisinage de (p,q) ; donc VMV <u>contient un ensemble ouvert contenant $\overline{M}$</u> .

D'autre part, les relations $(x,p) \in V$, $(y,q) \in V$ s'écrivent aussi $p \in V(x)$, $q \in V(y)$, ou encore $(p,q) \in V(x) \times V(y)$. Or, lorsque V parcourt la famille $\mathfrak{S}$ des entourages symétriques, les ensembles $V(x) \times V(y)$ constituent un système fondamental de voisinages de (x,y) car, si U et W sont deux entourages quelconques, il existe un entourage symétrique $V \subset U \cap W$, et par suite $V(x) \times V(y) \subset U(x) \times W(y)$. Si donc $V(x) \times V(y)$ rencontre M quel que soit $V \in \mathfrak{S}$ on a $(x,y) \in \overline{M}$ et réciproquement ; autrement dit $\overline{M} = \bigcap_{V \in \mathfrak{S}} VMV$.

En particulier, soit A une partie quelconque de E , et posons $M = A \times A$; on a alors $VMV = V(A) \times V(A)$, car les relations $(x,p) \in V$ et $p \in A$ équivalent à $x \in V(A)$ par définition. Donc $V(A)$ contient un ensemble ouvert contenant $\overline{A}$: on dit que $V(A)$ est le <u>voisinage d'ordre V</u> de l'ensemble A ; de plus, comme $\overline{M} = \overline{A} \times \overline{A}$, $\overline{A}$ <u>est l'intersection de tous les voisinages symétriques de A</u> .

Soit maintenant V un entourage quelconque, W un entourage symétrique tel que $\overset{3}{W} = WWW \subset V$; d'après ce qui précède, $\overset{3}{W}$ contient un ensemble ouvert contenant $\overline{W}$; par suite, <u>les intérieurs des entourages forment un système fondamental d'entourages</u>.

De même, on a $W \subset \overline{W} \subset \overset{3}{W} \subset V$, donc <u>les adhérences des entourages forment un système fondamental d'entourages</u>.

On déduit de ce dernier résultat que la famille des ensembles $V(x)$ qui sont des voisinages <u>fermés</u> de x (comme coupes d'ensembles fermés) est un système fondamental de voisinages ; autrement dit, E <u>vérifie l'axiome O_{IV}</u> .

Remarquons maintenant que, si la structure uniforme de E <u>n'est pas séparée</u>, il existe deux points <u>distincts</u> x, y de E qui sont voisins d'ordre V quel que soit V ; autrement dit, tout voisinage de x contient y, et inversement. A fortioti, E ne peut alors vérifier l'axiome de Hausdorff (ni même l'axiome Q). Mais inversement, si E est un espace uniforme <u>séparé</u>, Δ, intersection des entourages est aussi l'intersection des adhérences des entourages d'après ce qui précède, donc est <u>fermé</u> dans $E \times E$, ce qui équivaut à dire que E est un espace de Hausdorff (ch.I, § 8) ; on a donc la proposition suivante :

<u>Proposition 1</u>. <u>Pour qu'un espace uniforme soit de Hausdorff, il est nécessaire qu'il soit séparé ; réciproquement, tout espace uniforme séparé est régulier</u>.

<u>Fonctions uniformément continues</u>. Soient E, E' deux espaces uniformes, f une application de E dans E' ; on dit que f est une <u>application uniformément continue</u> de E dans E' (ou une <u>fonction uniformément continue</u> définie dans E, à valeurs dans E') <u>si ses valeurs en deux points quelconques sont aussi voisines que l'on veut dès que les deux points sont assez voisins</u> : ou, de façon précise, si à tout entourage V' de E' correspond un entourage V de E tel que, si x et y sont voisins d'ordre V, $f(x)$ et $f(y)$ sont voisins d'ordre V'.

Si $g=(f,f)$ est l'extension de f (application de $E \times E$ dans $E' \times E'$) on peut encore exprimer la définition précédente en disant que $\overset{-1}{g}(V')$ <u>est un entourage de</u> E, <u>quel que soit l'entourage</u> V' <u>de</u> E'. Enfin, cette dernière manière de formuler la définition signifie aussi que <u>l'image réciproque par f de la structure uniforme de</u> E' <u>est moins fine que la structure uniforme de</u> E.

Il en résulte en particulier que l'application canonique d'un espace non séparé sur l'espace séparé associé est uniformément continue.

Proposition 2. Toute fonction uniformément continue dans E est continue dans E.

La démonstration est une conséquence immédiate de la définition.

La réciproque de cette proposition est inexacte : il suffit de considérer deux espaces uniformes formés en prenant sur un même ensemble fondamental deux structures uniformes distinctes, mais telles que les deux espaces soient homéomorphes (voir ci-dessus) ; l'application identique de l'un de ces espaces sur l'autre est un contre-exemple.

Comme pour les fonctions continues, on a un théorème des fonctions composées, dont la démonstration est triviale :

Proposition 3. Soient E, E', E'' trois espaces uniformes, f une application uniformément continue de E' dans E'', g une application uniformément continue de E' dans E'' ; l'application composée $g \circ f$ de E dans E'' est uniformément continue.

On a également la proposition suivante, concernant l'isomorphie de deux espaces uniformes :

Proposition 4. Pour qu'une application biunivoque d'un espace uniforme E sur un espace uniforme E' soit un isomorphisme, il faut et il suffit que cette application et l'application réciproque soient uniformément continues.

En effet, soit f une application biunivoque de E sur E', $g=(f,f)$ son extension, V un entourage quelconque de E, V' un entourage quelconque de E' ; si f est un isomorphisme, g(V) est un entourage de E', $\overset{-1}{g}(V')$ un entourage de E, ce qui montre que f et $\overset{-1}{f}$ sont uniformément continues ; le même raisonnement, repris en sens inverse montre que, si f et $\overset{-1}{f}$ sont uniformément continues, f est un isomorphisme. C.Q.F.D.

Soit A une partie quelconque d'un espace uniforme E, f une fonction définie dans une partie de E contenant A, et prenant ses valeurs dans un espace uniforme E' ; on dit que f est <u>uniformément continue dans A</u> si sa restriction f_A est uniformément continue dans le sous-espace uniforme A. Il est clair que toute fonction uniformément continue dans E est aussi uniformément continue dans toute partie de E.

<u>Exercices</u>. 1) Soit E un espace uniforme non séparé, E' l'espace uniforme séparé associé à E ; montrer que la structure uniforme de E' est la plus fine pour laquelle l'application canonique de E sur E' est uniformément continue.

*2) Sur la droite numérique R, la fonction $|x|$ est uniformément continue ; la fonction $1/x$ est uniformément continue dans tout intervalle $(a, \longrightarrow)$ où $a > 0$; elle est continue, mais non uniformément, dans $(0, \longrightarrow)$ *.

3) Dans R^2, la fonction $x+y$ est uniformément continue.

§3. Espaces complets.

Lorsqu'on a muni un ensemble E d'une structure uniforme, on peut définir ce qu'on entend par un sous-ensemble "petit" de E (relativement à cette structure) : ce sera un ensemble dont les points sont très voisins deux à deux ; de façon précise, V étant un entourage quelconque, on dira qu'une partie A de E est un <u>ensemble petit d'ordre V</u> lorsque deux quelconques de ses points sont voisins d'ordre V, ou, ce qui revient au même, si $A \times A \subset V$.

Notons tout de suite la proposition suivante :

Proposition 1. Si deux ensembles A et B sont petits d'ordre V et se rencontrent, leur réunion est un ensemble petit d'ordre $\overset{2}{V}$.

En effet, soient x et y deux points quelconques de $A \cup B$, et z un point de $A \cap B$ (qui n'est pas vide par hypothèse) ; x et z appartiennent tous deux à l'un des ensembles A, B, donc sont voisins d'ordre V ; de même, z et y sont voisins d'ordre V , donc x et y sont voisins d'ordre $\overset{2}{V}$.

Ici encore, on peut rendre le langage plus imagé en ~~ix~~ utilisant les expressions "ensemble assez petit" et "ensemble aussi petit qu'on veut", à condition de préciser toujours, suivant le contexte, le sens qu'il convient de leur attacher ; par exemple :

On dira qu'une famille $\mathfrak{F}$ de parties de E contient des ensembles aussi petits qu'on veut si, quel que soit V , $\mathfrak{F}$ contient des ensembles petits d'ordre V .

Proposition 2. Tout filtre convergent sur un espace uniforme contient des ensembles aussi petits qu'on veut.

En effet, quel que soit $x_0 \in E$, $V(x_0)$ est petit d'ordre $\overset{2}{V}$; si $\mathfrak{F}$ est un filtre convergent vers x_0, il existe un ensemble de $\mathfrak{F}$ contenu dans $V(x_0)$ donc petit d'ordre $\overset{2}{V}$.

On remarquera que, dans cette proposition, ainsi que dans tout ce paragraphe, nous parlons de filtres convergents, bien qu'un espace uniforme ne soit pas un espace de Hausdorff si sa structure n'est pas séparée ; c'est le cas d'exception important que nous avons signalé au ch. I, §6 .

On s'aperçoit aisément que la <u>réciproque</u> de la proposition 2 est <u>inexacte</u> : sur un espace uniforme convenablement choisi, un filtre peut contenir des ensembles aussi petits qu'on veut <u>sans avoir de point limite</u>.

<u>Exemples</u>. 1) Considérons, sur la droite rationnelle $\mathbb{Q}$, la suite (u_n) où $u_n = \sum_{p=1}^{n} 2^{-p(p+1)/2}$; si $m > n$, on a

$$(1) \qquad |u_m - u_n| < 2^{-n(n+3)/2}$$

donc le filtre élémentaire associé à la suite (u_n) est un filtre qui contient des ensembles aussi petits qu'on veut. Mais la suite (et par suite le filtre associé) n'a pas de limite ; car si le nombre rationnel a/b était limite de (u_n), on aurait, d'après (1), quel que soit n

$$\left| a/b - h/2^{n(n+1)/2} \right| \leqslant 1/2^{n(n+3)/2}$$

où h est un entier (dépendant de n) ; ou encore

$$\left| a.2^{n(n+1)/2} - bh \right| \leqslant 2^{-n}$$

quel que soit n, ce qui entraîne que le premier membre est nul, puisque c'est un entier ; mais on aurait alors $a/b = u_n$ quel que soit n, ce qui est absurde.

2) Soit E un ensemble infini, et considérons sur E la structure uniforme des partitions finies ; tout ultrafiltre $\mathfrak{U}$ sur E contient des ensembles aussi petits qu'on veut : car si (A_i) est une partition finie de E, $V = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \times A_i$ l'entourage correspondant, il existe un des A_i qui appartient à $\mathfrak{U}$ car sinon, les ensembles $\complement A_i$ appartiendraient à $\mathfrak{U}$ ce qui n'est pas possible, puisque leur intersection est vide. Comme d'autre part E est un espace discret infini, donc non compact, il existe des ultrafiltres sur E qui ne convergent pas.

Nous poserons les définitions suivantes :

<u>On appelle filtre de Cauchy sur un espace uniforme</u> E <u>tout filtre qui contient des ensembles aussi petits qu'on veut</u>.

<u>On appelle espace complet un espace uniforme tel que tout filtre de Cauchy sur cet espace soit convergent</u>.

De ces définitions et de la proposition 2 on déduit immédiatement la proposition suivante, connue sous le nom de <u>critère de Cauchy</u> :

<u>Proposition 3</u>. <u>Soit</u> $\mathfrak{F}$ <u>un filtre sur un ensemble</u> E , f <u>une application de</u> E <u>dans un espace complet</u> E' ; <u>pour que f admette une limite suivant</u> $\mathfrak{F}$, <u>il faut et il suffit que l'image de</u> $\mathfrak{F}$ <u>par f engendre un filtre de Cauchy</u>.

On voit par là l'intérêt que présentent les espaces complets dans toutes les questions où intervient la notion de limite : si une fonction prend ses valeurs dans un espace complet, il est possible de démontrer l'<u>existence</u> de sa limite, <u>sans connaître au préalable la valeur de cette limite</u>, ce qui serait impossible si on ne disposait que de la définition de la limite comme critère de convergence.

<u>Exemple</u>. Soit (u_n) une suite de points d'un espace uniforme E ; on dit que c'est une <u>suite de Cauchy</u> si l'image par u du filtre fondamental (ch.I, § 5) engendre un filtre de Cauchy sur E . La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est qu'à tout entourage V corresponde un entier n_0 tel que, quels que soient $n \geqslant n_0$, $m \geqslant n_0$, on ait $(u_m, u_n) \in V$. Si E est complet, on voit donc que les notions de suite convergente et de suite de Cauchy sont identiques.

<u>Propriétés des filtres de Cauchy</u>. Nous groupons ci-dessous un certain nombre de propriétés élémentaires des filtres de Cauchy.

Il est clair que tout filtre <u>plus fin</u> qu'un filtre de Cauchy est un filtre de Cauchy. De même, si on remplace la structure uniforme de l'espace considéré par une structure <u>moins fine</u>, tout filtre de Cauchy reste filtre de Cauchy relativement à cette nouvelle structure ; on retiendra aisément ce fait sous la forme suivante : <u>plus une structure uniforme est fine, moins il y a de filtres de Cauchy</u>.

C'est ainsi que, pour la structure uniforme discrète, les seuls filtres de Cauchy sont les ultrafiltres formés des ensembles contenant un point.

Pour qu'une base de filtre engendre un filtre de Cauchy, il faut et il suffit qu'elle contienne des ensembles aussi petits qu'on veut

<u>Proposition 4</u>. <u>Tout point adhérent à un filtre de Cauchy est point limite de ce filtre</u>.

Soit en effet $\mathfrak{F}$ un filtre de Cauchy, x_0 un point adhérent à $\mathfrak{F}$. Quel que soit V, $\mathfrak{F}$ contient un ensemble A petit d'ordre V ; or $A \cap V(x_0)$ contient au moins un point p ; donc, quel que soit $x \in A$, on a $(p,x) \in V$ et $(x_0,p) \in V$, d'où $(x_0,x) \in VV$; autrement dit, $A \subset \overset{2}{V}(x_0)$, ce qui établit la proposition.

<u>Corollaire</u>. <u>Tout filtre de Cauchy moins fin qu'un filtre convergent vers x_0 converge également vers x_0</u>.

En effet, x_0 est un point adhérent au filtre de Cauchy considéré.

<u>Proposition 5</u>. <u>Soit f une application uniformément continue d'un espace uniforme E dans un espace uniforme E' ; l'image par f d'un filtre de Cauchy sur E engendre un filtre de Cauchy sur E'</u>.

Cela revient à dire que l'image par f d'un ensemble assez petit est un ensemble aussi petit qu'on veut : en effet, si $g = (f,f)$ est l'extension de f, et V' un entourage quelconque de E', $\overset{-1}{g}(V')$ est un entourage de E , et l'image par f d'un ensemble petit d'ordre $\overset{-1}{g}(V')$ est un ensemble petit d'ordre V' .

De la même manière, on voit que si f est une application d'un ensemble E dans un espace uniforme E' , et si l'image réciproque par f d'un filtre de Cauchy sur E' engendre un filtre sur E , ce filtre est un filtre de Cauchy dans *la structure uniforme image inverse par f de celle de* E'. En particulier, si la *trace* d'un filtre de Cauchy sur une partie A d'un espace uniforme E est un filtre sur A , c'est un filtre de Cauchy sur le *sous-espace* A .

Enfin, d'après ce qui précède, si f est l'application *canonique* d'un espace uniforme *non séparé* E sur l'espace séparé *associé* E', l'image directe par f d'un filtre de Cauchy sur E est un filtre de Cauchy sur E' engendre un filtre de Cauchy sur E . Par suite, *pour qu'un espace uniforme non séparé soit complet, il faut et il suffit que l'espace séparé associé soit complet*.

Propriétés des espaces complets. *Proposition 6*. *Tout sous-espace fermé d'un espace complet est complet ; tout sous-espace complet d'un espace uniforme séparé* (complet ou non) *est fermé*.

En effet, soit E un espace complet et A fermé dans E . Si $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy sur A , il engendre un filtre de Cauchy $\mathfrak{G}$ sur E, filtre qui converge donc vers un point p ; comme p est adhérent à $\mathfrak{G}$, il appartient aux adhérences de tous les ensembles de $\mathfrak{F}$; mais comme A est fermé, cela entraîne $p \in A$, et par suite (prop.4) $\mathfrak{F}$ converge vers p.

Soit maintenant A un ensemble non fermé dans un espace uniforme séparé E , et soit $p \in \bar{A}-A$; $\mathfrak{V}_A$, trace sur A du filtre des voisinages de p , est un filtre de Cauchy sur A ; or, il ne peut converger vers un point $q \in A$, car $\mathfrak{V}$ convergerait aussi vers $q \neq p$, ce qui est absurde, E étant un espace de Hausdorff. A n'est donc pas un sous-espace complet de E . C.Q.F.D.

Il est possible d'apporter d'importants compléments au théorème (ch.I, § 6,th.1) sur le prolongement par continuité d'une fonction f, définie sur une partie A d'un espace topologique E , lorsque l'espace E' des valeurs de f est un espace séparé complet.

Proposition 7. Pour que f puisse être prolongée par continuité dans $\bar{A}$, il faut et il suffit que, pour tout point $p \in \bar{A}$, l'image par f de la trace sur A du filtre des voisinages de p engendre un filtre de Cauchy sur E' .

C'est en effet une conséquence du théorème de prolongement, si on remarque que E' est régulier et qu'il y a identité entre filtres convergents et filtres de Cauchy sur E'.

Lorsque E est un espace uniforme, on a de plus le théorème suivant :

Théorème 1. Soit f une fonction définie sur une partie A d'un espace uniforme E , prenant ses valeurs dans un espace complet et séparé E' , et uniformément continue dans A . Il est possible de la prolonger par continuité dans $\bar{A}$, et la fonction prolongée est uniformément continue dans $\bar{A}$.

L'existence de la fonction prolongée $\bar{f}$ est une conséquence immédiate des propositions 5 et 7. Montrons que $\bar{f}$ est uniformément continue dans $\bar{A}$.

Soit V' un entourage quelconque de E', V un entourage de E tel que, lorsque x et y sont dans A et voisins d'ordre V , f(x) et f(y) soient voisins d'ordre V'. Soit W un entourage de E tel ~~que~~ que $\overset{3}{W} \subset V$, et soient x,y deux ~~pòints~~ points de $\bar{A}$ voisins d'ordre W . L'image par f de l'ensemble $A \cap W(x)$ est un ensemble petit d'ordre V' ; comme $\bar{f}(x)$ est adhérent à cet ensemble, $\bar{f}(x)$ et $f(x_1)$ sont voisins d'ordre $\overset{2}{V'}$, quel que soit $x_1 \in A \cap W(x)$; de même, $\bar{f}(y)$ et $f(y_1)$ sont voisins d'ordre $\overset{2}{V'}$, quel que soit $y_1 \in A \cap W(y)$. Mais alors x_1 et y_1 sont voisins d'ordre $\overset{3}{W}$, donc d'ordre V (fig.4), et par suite $f(x_1)$ et $f(y_1)$ sont voisins d'ordre $\overset{5}{V'}$. c.q.f.d.

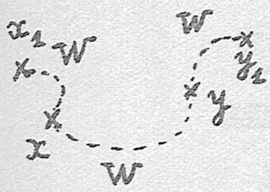


fig. 4

Rappelons qu'il résulte en outre du théorème général de prolongement par continuité du ch.I que le prolongement d'une fonction uniformément continue dans A est <u>unique</u>.

<u>La complétion d'un espace uniforme</u>. Nous nous proposons de montrer qu'on peut toujours "plonger" un espace uniforme <u>quelconque</u> dans un espace uniforme <u>complet</u> ; de façon précise, si E est un espace uniforme nous voulons établir qu'on peut définir un espace <u>complet</u> $\tilde{E}$ dont un sous-espace G soit <u>isomorphe</u> à E . S'il en est ainsi, $\bar{G}$, sous-espace de $\tilde{E}$, est aussi un espace complet (porp. 6) contenant G ; nous pouvons donc nous borner à considérer le cas où $\bar{G} = \tilde{E}$. Nous allons donc démontrer le théorème suivant :

<u>Théorème 2</u>. <u>Etant donné un espace uniforme</u> E , <u>il est possible de définir un espace complet</u> $\tilde{E}$ <u>tel que</u> E <u>soit isomorphe à un sous-espace partout dense de</u> $\tilde{E}$. <u>De plus, si</u> E <u>est séparé, il est possible de définir, d'une manière et d'une seule</u> (à un isomorphisme près) <u>un espace complet séparé</u> $\tilde{E}$ <u>possédant la propriété précédente</u>.

Nous diviserons en plusieurs parties la démonstration assez longue de ce théorème.

1) <u>Existence de</u> $\tilde{E}$ (cas général). Nous nous appuierons sur le lemme suivant :

<u>Lemme</u>. <u>Soit</u> E <u>un espace uniforme, A une partie partout dense de</u> E <u>telle que tout filtre de Cauchy sur A engendre un filtre convergent sur</u> E ; <u>dans ces conditions,</u> E <u>est complet</u>.

En effet, soit $\mathfrak{F}$ un filtre de Cauchy sur E ; à chaque ensemble $M \in \mathfrak{F}$ et à chaque entourage V de E, associons le voisinage d'ordre V de M, $V(M)$. La famille de ces ensembles est la base d'un filtre $\mathfrak{G}$, car si M et M' sont deux ensembles de $\mathfrak{F}$, V et V' deux entourages quelconques, et $W = V \cap V'$, on a

$$W(M \cap M') \subset V(M) \cap V'(M')$$

$\mathfrak{G}$ est un filtre de Cauchy, car si M est petit d'ordre V, $V(M)$ est petit d'ordre $\overset{3}{V}$. Cela étant, comme A est partout dense dans E, la trace de $V(M)$ sur A n'est jamais vide, donc la trace $\mathfrak{G}_A$ de $\mathfrak{G}$ est un filtre de Cauchy sur A. Par hypothèse, $\mathfrak{G}_A$ engendre sur E un filtre convergent $\mathfrak{H}$; comme $\mathfrak{H}$ est plus fin que $\mathfrak{G}$, et que $\mathfrak{G}$ est un filtre de Cauchy, $\mathfrak{G}$ est convergent (corollaire de la prop.4) ; enfin, $\mathfrak{F}$, qui est plus fin que $\mathfrak{G}$, est convergent. C.Q.F.D.

Ce lemme étant établi, considérons <u>l'ensemble</u> $\tilde{E}$ <u>des filtres de Cauchy de</u> E (partie de $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$) ; en le munissant d'une structure uniforme convenable, nous allons voir qu'il répond aux conditions du théorème.

Nous procéderons de la manière suivante : à chaque entourage symétrique V de E, nous faisons correspondre dans $E \times E$, l'ensemble $\widetilde{V}$ des <u>couples</u> ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$) <u>de filtres de Cauchy ayant en commun un ensemble petit d'ordre V.</u> La famille des ensembles $\widetilde{V}$ est la base d'un filtre d'entourages $\widetilde{\mathfrak{U}}$ sur $\widetilde{E}$; en effet :

1° ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}$) $\in \widetilde{V}$ quels que soient $\mathfrak{X} \in \widetilde{E}$ et $\widetilde{V}$, puisque $\mathfrak{X}$ est un filtre de Cauchy ; d'où U'_I .

2° D'après cela, $\widetilde{V}$ n'est pas vide ; les $\widetilde{V}$ constituent la base d'un filtre, car si V et V' sont deux entourages symétriques de E , on a évidemment, en posant $W = V \cap V'$, $\widetilde{W} \subset \widetilde{V} \cap \widetilde{V'}$.

3° Les ensembles $\widetilde{V}$ sont symétriques, donc U'_{II} est vérifié.

4° V étant un entourage symétrique de E , soit W un entourage symétrique tel que $WW \subset V$, et considérons trois filtres de Cauchy, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ tels que ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$) $\in \widetilde{W}$ et ($\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$) $\in \widetilde{W}$; il existe donc deux ensembles petits d'ordre W , A et B, tels que A appartienne à $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$, et B à $\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{Z}$. Comme A et B appartiennent à $\mathfrak{Y}$, $A \cap B \neq \emptyset$; donc (prop.1) $A \cup B$ est petit d'ordre WW , et appartient d'autre part à $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Z}$, ce qui prouve que $\widetilde{\widetilde{W}\widetilde{W}} \subset \widetilde{V}$; d'où U'_{III}.

Dans l'espace uniforme à $\widetilde{E}$. Pour cela, faisons correspondre à tout $x \in E$, le filtre $\dot{x} = \mathfrak{F}_x$ ayant pour base $\{x\}$; c'est évidemment un filtre de Cauchy, et on définit ainsi une application biunivoque de E sur une partie $\dot{E}$ de $\widetilde{E}$; montrons que cette application est un <u>isomorphisme</u>. En effet, on a un système fondamental d'entourages de la structure uniforme de $\dot{E}$ en prenant, pour chaque entourage symétrique V de E , l'ensemble des couples $(\dot{x},\dot{y})$ tels que $(\dot{x},\dot{y}) \in \widetilde{V}$, c'est-à-dire l'ensemble correspondant à celui des couples (x,y) tels que

$$(1) \qquad (\mathfrak{F}_x , \mathfrak{F}_y) \in \widetilde{V}$$

Or cette relation signifie qu'il existe un ensemble A petit d'ordre V , et qui contient x et y ; autrement dit, elle est équivalente à

$$(2) \qquad (\dot{x},\dot{y}) \in \dot{V}$$

ce qui montre bien que E et $\dot{E}$ sont isomorphes.

Cherchons maintenant la trace sur $\dot{E}$ du voisinage $\tilde{V}(\mathfrak{X})$ d'un point quelconque $\mathfrak{X} \in \tilde{E}$; ce sera l'ensemble des images $\dot{x}$ des points $x \in E$ tels que $(\mathfrak{X}, \mathfrak{F}_x) \in \tilde{V}$. Or cette relation signifie que x appartient à un ensemble A petit d'ordre V et appartenant au filtre $\mathfrak{X}$; si $V(\mathfrak{X})$ est la réunion de tous les ensembles du filtre $\mathfrak{X}$ qui sont petits d'ordre V , la trace de $\tilde{V}(\mathfrak{X})$ sur $\dot{E}$ est l'image $\dot{V}(\mathfrak{X})$ de $V(\mathfrak{X})$ par l'application $\dot{x}$. Comme $\mathfrak{X}$ est un filtre de Cauchy, $V(\mathfrak{X})$ n'est pas vide ; donc $\dot{E}$ <u>est partout dense dans</u> $\tilde{E}$. De plus, soit $\dot{\mathfrak{X}}$ le <u>filtre</u> sur $\dot{E}$, image par $\dot{x}$ du filtre $\mathfrak{X}$ sur E ; $\dot{\mathfrak{X}}$ engendre sur $\tilde{E}$ un filtre qui <u>converge vers le point</u> $\mathfrak{X}$. En effet, chacun des ensembles $\dot{V}(\mathfrak{X})$ appartient au filtre $\dot{\mathfrak{X}}$, car si A est un ensemble petit d'ordre V du filtre $\mathfrak{X}$, $A \subset V(\mathfrak{X})$ par définition donc $V(\mathfrak{X}) \in \mathfrak{X}$, et par suite $\dot{V}(\mathfrak{X}) \in \dot{\mathfrak{X}}$; donc $\dot{\mathfrak{X}}$ est plus fin que la trace sur $\dot{E}$ du filtre des voisinages de $\mathfrak{X}$, ce qui montre sa convergence.

En résumé, $\dot{E}$ est partout dense dans $\tilde{E}$, et tout filtre de Cauchy sur $\dot{E}$ engendre sur $\tilde{E}$ un filtre convergent ; l'application du lemme achève donc la démonstration.

2) <u>Existence d'un $\tilde{E}$ séparé lorsque E est séparé</u>. Formons l'espace $\tilde{E}$ comme il vient d'être dit; il n'est pas séparé en général. Soit alors F l'espace séparé qui lui est associé ;

comme $\tilde{E}$ est complet, il en est de même de F . Comme E est séparé par hypothèse, si $\dot{x} \neq \dot{y}$, il existe V tel que $(\dot{x},\dot{y}) \notin \tilde{V}$; il en résulte que l'application canonique de $\tilde{E}$ sur F applique <u>biunivoquement</u> $\dot{E}$ sur une partie partout dense E' de F ; de plus, il est immédiat que E' est isomorphe à $\dot{E}$, donc aussi à E , ce qui achève de démontrer la proposition.

3) <u>Unicité</u>. La propriété d'unicité énoncée dans le th.2, peut encore s'exprimer de la manière suivante : <u>si E_1 et E_2 sont deux espaces séparés complets, G_1 et G_2 deux parties partout denses de E_1 et E_2 respectivement, et s'il existe un isomorphisme</u> f <u>de G_1 sur G_2 , il se prolonge en un isomorphisme de E_1 sur E_2</u>

En effet, f est uniformément continue dans G_1 (§ 2, prop. 4), donc (th.1) on peut la prolonger dans $\overline{G}_1 = E_1$, et la fonction prolongée $\bar{f}$ est uniformément continue dans E_1 ; de même, si g est la fonction réciproque de f, on peut la prolonger dnas $\overline{G}_2 = E_2$, et la fonction prolongée $\bar{g}$ est uniformément continue dans E_2 .

La fonction $\bar{g} \circ \bar{f}$ est alors une application uniformément continue de E_1 <u>dans</u> E_1 , qui coïncide avec la fonction identique dans G_1 , donc qui est égale au prolongement de cette fonction dans E_1 , autrement dit $\bar{g} \circ \bar{f}$ est l'application identique de E_1 sur E_1 ; de même, $\bar{f} \circ \bar{g}$ est l'application identique de E_2 sur E_2 ; par suite (Ensembles ch. §) $\bar{f}$ est une application biunivoque de E_1 sur E_2 , et $\bar{g}$ son application réciproque; comme $\bar{f}$ et $\bar{g}$ sont uniformément continues, $\bar{f}$ est bien un isomorphisme.

Le théorème 2 est donc entièrement démontré. La plupart du temps, on ne l'applique qu'aux espaces *séparés* ; l'espace $\tilde{E}$ séparé, déterminé alors de façon unique, est appelé l'*espace complété* (ou plus brièvement le *complété*) de E. Lorsqu'on a introduit, dans un raisonnement, le complété d'un espace uniforme E, on *identifie* E à la partie partout dense E' de l'espace complété qui lui est isomorphe, c'est-à-dire qu'on poursuit le raisonnement sur E', en donnant à tout objet mathématique construit à partir de E' le même nom qu'à l'objet construit suivant le même schéma à partir de E.

Corollaire. *Soit A une partie quelconque d'un espace uniforme séparé E. Si $\tilde{E}$ est le complété de E, B la partie de $\tilde{E}$ isomorphe à A, le complété du sous-espace A est isomorphe au sous-espace $\bar{B}$ de $\tilde{E}$.*

Cela résulte en effet de ce que $\bar{B}$ est un sous-espace complet séparé de $\tilde{E}$ (prop. 6) dans lequel B est partout dense.

La complétion d'un espace uniforme doit être considérée comme une des opérations les plus importantes de l'Analyse : car elle est, d'une part, à la base de la définition des nombres réels et des nombres p-adiques, comme nous le verrons aux chapitres suivants ; et d'autre part, elle joue un rôle essentiel dans la théorie de l'Intégration, intervenant ainsi dans les définitions des outils fondamentaux du mathématicien.

Exercice. Soit E un espace uniforme non séparé, F l'espace séparé associé, $\tilde{E}$ l'espace complet non séparé formé en munissant l'ensemble des filtres de Cauchy sur E de la structure définie dans la démonstration du th.2; enfin, soit $\tilde{F}$ l'espace complété de F. Montrer que $\tilde{F}$ est isomorphe à l'espace séparé associé à $\tilde{E}$.

§ 4. Relations entre espaces uniformes et espaces compacts.

Uniformité des espaces compacts. Dans tout ce paragraphe, il n'est question que d'espaces uniformes séparés : lorsqu'on parlera d'un espace uniforme il sera donc toujours sous-entendu qu'il est séparé.

Nous avons vu que la topologie d'un espace uniforme n'est pas quelconque, puisque tout espace uniforme est régulier. Le problème se pose donc de déterminer à quelle condition un espace topologique (de Hausdorff) E est susceptible d'être muni d'une structure uniforme compatible avec sa topologie (c'est-à-dire telle que la topologie déduite de cette structure uniforme soit identique à celle de E) ou, comme on dit encore, à quelle condition un espace topologique est uniformisable.

Ce n'est qu'au chapitre VI que nous serons en mesure de donner une réponse complète à cette question. Dans ce paragraphe, nous n'examinerons qu'un cas particulier (d'ailleurs le plus important), celui où E est compact. On a alors le théorème fondamental suivant:

Théorème 1. Il existe une structure uniforme et une seule compatible avec la topologie d'un espace compact E ; l'espace uniforme qu'elle définit est complet.

La dernière partie du théorème est immédiate : si E est un espace uniforme et compact, tout filtre de Cauchy sur E a au moins un point adhérent, donc (§ 3, prop.4) est convergent, autrement dit E est complet.

En second lieu, montrons que s'il existe une structure uniforme compatible avec la topologie d'un espace compact, cette structure est unique. Soit en effet $\mathfrak{U}$ le filtre des entourages de cette structure ; nous allons montrer que <u>les ensembles ouverts de</u> $E \times E$ <u>qui contiennent la diagonale</u> Δ <u>forment une base de</u> $\mathfrak{U}$.

Comme l'intérieur de tout entourage est un ensemble ouvert contenant Δ , il suffit d'établir qu'inversement, tout ensemble ouvert Ω contenant Δ appartient à $\mathfrak{U}$. Or, soit $\mathfrak{G}$ la famille des entourages <u>fermés</u> ; on a

$$\bigcap_{V \in \mathfrak{G}} (V \cap \complement \Omega) = (\complement \Omega) \cap \bigcap_{V \in \mathfrak{G}} V = (\complement \Omega) \cap \Delta = \emptyset$$

Comme les ensembles $V \cap \complement \Omega$ sont <u>fermés</u> dans l'espace <u>compact</u> $E \times E$, il existe une famille <u>finie</u> $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$ telle que $(\complement \Omega) \cap \bigcap_{V \in \mathfrak{F}} V = \emptyset$ c'est-à-dire que $U = \bigcap_{V \in \mathfrak{F}} V \subset \Omega$; or, comme $\mathfrak{F}$ est finie, U est un entourage, donc aussi Ω .

Il reste à montrer qu'effectivement, si E est compact, la famille $\mathfrak{D}$ des ensembles ouverts de $E \times E$ contenant Δ est la base du filtre des entourages d'une structure uniforme compatible avec la topologie de E . Pour cela, il suffit de montrer que c'est la base d'un filtre d'entourages d'une structure uniforme <u>séparée</u>, car s'il en est ainsi, la topologie déduite de cette structure sera une topologie de Hausdorff <u>moins fine</u> que celle de E , donc nécessairement <u>identique</u> à celle de E (ch.I, § 10, cor.2 du th.1). $\mathfrak{D}$ vérifie U'_{Ia} , car si $x \neq y$, le complémentaire de $\{(x,y)\}$ est un ensemble ouvert contenant Δ .

$\mathfrak{D}$ vérifie U'_{II} de façon évidente, car si Ω est ouvert et contient Δ , il en est de même de $\overset{-1}{\Omega}$.

Montrons enfin que $\mathfrak{D}$ vérifie U'_{III}. Soit donc A un ensemble quelconque de $\mathfrak{D}$: il faut établir qu'il existe un ensemble $B \in \mathfrak{D}$ tel que $BB \subset A$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi : quel que soit $\Omega \in \mathfrak{D}$, l'ensemble $\Omega\Omega$ aurait une intersection non vide avec $\complement A$; il en serait de même à fortioti de l'<u>adhérence</u> de $\Omega\Omega$. Or, la famille $\mathfrak{F}$ des adhérences des ensembles $\Omega\Omega$ est une famille d'ensembles fermés telle que l'intersection d'un nombre fini d'ensembles de $\mathfrak{F}$ contienne un ensemble de $\mathfrak{F}$. Comme $\complement A$ est également un ensemble fermé, et que $E \times E$ est compact, l'hypothèse faite entraînerait donc qu'il existe un point (x,y) commun à tous les ensembles de $\mathfrak{F}$ et tel que $x \neq y$. Or, E étant <u>régulier</u>, soient U_1, U_2 deux voisinages <u>ouverts</u> de x et y respectivement, tels que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, et V_1, V_2 deux voisinages <u>fermés</u> de x et y respectivement, tels que $V_1 \subset U_1$, $V_2 \subset U_2$. Posons alors $U_3 = E - (V_1 \cup V_2)$, et considérons l'ensemble $\Omega = \bigcup_{i=1,2,3} (U_i \times U_i)$; il est clair que cet ensemble appartient à $\mathfrak{D}$. Or (fig. 5), on voit immédiatement, d'après la définition de Ω , que $\Omega\Omega$ n'est autre que le complémentaire de l'ensemble $(V_1 \times V_2) \cup (V_2 \times V_1)$; comme ce dernier est un voisinage du point (x,y), on aboutit à une contradiction.

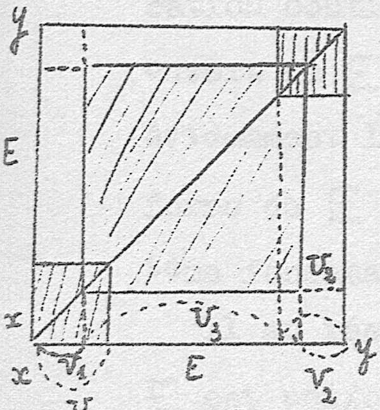


fig. 5

C.Q.F.D.

De ce premier résultat, on tire immédiatement qu'<u>un sous-espace d'un espace compact est uniformisable</u> ; c'est la <u>réciproque</u> de cette proposition que nous démontrerons au ch. VI. En particulier, d'après le théorème d'Alexandroff, <u>tout espace localement compact est uniformisable</u> ; mais il peut alors y avoir plusieurs structures uniformes distinctes compatibles avec la topologie.

Par exemple, tout espace infini discret est localement compact, et nous avons vu au § 2 qu'on peut y définir plusieurs structures uniformes compatibles avec sa topologie.

Cependant, l'unicité de la structure uniforme compatible avec la topologie d'un espace uniformisable E est une propriété qui ne caractérise pas les espaces compacts : on peut donner des exemples d'espaces localement compacts qui la possèdent également.

Du théorème 1 découle l'importante conséquence suivante :

Théorème 2. Toute application continue d'un espace compact E dans un espace uniforme E' est uniformément continue dans E .

Soit f une telle application ; son extension g = (f,f) est une application continue de $E \times E$ dans $E' \times E'$; si V' est un entourage ouvert de E', $\overset{-1}{g}(V')$ est un ensemble ouvert dans $E \times E$, qui contient évidemment la diagonale ; c'est donc un entourage de la structure uniforme de E , et comme les entourages ouverts de E' forment un système fondamental d'entourages, la proposition est démontrée.

Il en résulte que la restriction de f à une partie quelconque A de E est uniformément continue dans A ; donc (§ 3,th.1) :

Corollaire. Soit f une fonction définie dans une partie A d'un espace compact E , prenant ses valeurs dans un espace complet E' ; pour qu'on puisse la prolonger par continuité dans $\bar{A}$, il faut et il suffit qu'elle soit uniformément continue dans A (relativement à la structure uniforme induite par celle de E) .

Compacité des espaces uniformes. Le théorème 1 pose le problème de savoir à quelle condition un espace uniforme est compact ; la réponse est fournie par le théorème suivant :

Théorème 3. Pour qu'un espace uniforme E soit compact, il faut et il suffit qu'il soit complet et que, pour tout entourage V , il existe un recouvrement fini de E dont tous les ensembles soient petits

<u>d'ordre</u> V (autrement dit, qu'il existe des recouvrements finis dont les ensembles soient aussi petits qu'on veut). D'après le théorème 1, il est évidemment nécessaire que E soit complet ; de plus, si E est compact et si W est un entourage tel que $WW \subset V$, il existe un nombre fini de points x_i $(i=1,2,\dots,n)$ tels que les voisinages $W(x_i)$ forment un recouvrement de E, et ces ensembles sont petits d'ordre V.

Pour voir que la condition est suffisante, nous allons montrer que, si elle est remplie, <u>tout ultrafiltre $\mathfrak{F}$ sur E est convergent</u>; E étant complet par hypothèse, il suffit de voir que $\mathfrak{F}$ est un <u>filtre de Cauchy</u>. Or, soit V un entourage quelconque, et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un recouvrement fini de E par des ensembles petits d'ordre V ; comme $\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre, un au moins des A_i appartient à $\mathfrak{F}$ sans quoi $\complement A_i$ serait un ensemble de $\mathfrak{F}$ quel que soit i, et l'intersection $\bigcap_{i=1}^{n} (\complement A_i)$ appartiendrait aussi à $\mathfrak{F}$, ce qui est contradictoire puisque c'est l'ensemble vide. Il existe donc dans $\mathfrak{F}$ un ensemble petit d'ordre V, d'où le théorème.

On peut obtenir une proposition correspondante pour les espaces uniformes non complets, en posant la définition suivante : un espace uniforme E sera dit <u>précompact</u> si on complété $\tilde{E}$ est compact. Alors:

<u>Théorème 4</u>. <u>Pour qu'un espace uniforme E soit précompact, il faut et il suffit que, pour tout entourage V, il existe un recouvrement fini de E dont tous les ensembles soient petits d'ordre V.</u>

E peut être considéré comme une partie <u>partout dense</u> de son complété $\tilde{E}$. Un entourage V de E est la trace sur $E \times E$ d'un entourage $\tilde{V}$ de $\tilde{E}$; si $\tilde{E}$ est compact, on peut le recouvrir par un nombre fini d'ensembles petits d'ordre $\tilde{V}$, dont les traces sur E

sont des ensembles petits d'ordre V, qui constituent un recouvrement de E.

Inversement, considérons un entourage <u>fermé</u> $\tilde{V}$ de $\tilde{E}$, et soit (A_i) un recouvrement fini de E par des ensembles petits d'ordre $\tilde{V}$ (et contenus dans E). Comme $A_i \times A_i \subset \tilde{V}$ et que $\tilde{V}$ est fermé, on a aussi $\bar{A}_i \times \bar{A}_i \subset \tilde{V}$, donc les $\bar{A}_i$ sont petits d'ordre $\tilde{V}$; comme d'autre part E est partout dense dans $\tilde{E}$, on a $\tilde{E} = \bar{E} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i$, les $\bar{A}_i$ forment un recouvrement fini de $\tilde{E}$; les entourages fermés de $\tilde{E}$ formant un système fondamental d'entourages, on peut appliquer le th. 3 à $\tilde{E}$, qui est donc compact.

> <u>Exercice</u>. $\mathfrak{D}$ étant un recouvrement ouvert d'un espace compact E, il existe un entourage V de E tel que, pour tout $x \in E$, $V(x)$ soit contenu dans un des ensembles de la famille $\mathfrak{D}$.

§ 5. Une méthode générale de définition d'une structure uniforme.

F étant un espace uniforme (séparé ou non), E un fondamental quelconque, f une application de E dans F, il est clair (§ 2) que l'<u>image réciproque</u> par f de la structure uniforme de F est la structure uniforme <u>la moins fine</u> sur E, parmi toutes celles qui rendent f <u>uniformément continue</u>.

Plus généralement, soient F_ι des espaces uniformes (ι parcourant un ensemble d'indices quelconque) et pour chaque ι, soit f_ι une application de E dans F_ι. <u>Parmi les structures uniformes sur E qui rendent uniformément continues toutes les f_ι, il en existe une moins fine que toutes les autres</u> ; en effet, si une structure uniforme rend uniformément continue f_ι, elle est plus fin que l'image réciproque par f_ι de la structure uniforme de F_ι, et réciproquement ; la proposition résulte alors de la prop. 1 du § 1.

Nous dirons que la structure dont nous venons de démontrer l'existence est <u>déterminée</u> par les espaces F_ι et les fonctions f_ι. D'après la construction d'un filtre engendré par une famille d'ensembles (ch. I, § 5), on aura un système fondamental d'entourages de cette structure de la façon suivante : on prend arbitrairement un nombre <u>fini</u> d'indices $\iota_1, \iota_2, \dots, \iota_n$, et, pour chacun de ces indices ι_k on prend arbitrairement un entourage V_{ι_k} de F_{ι_k} ; on considère alors l'ensemble $U(V_{\iota_1}, V_{\iota_2}, \dots, V_{\iota_n})$ des couples (x,y) de points de E tels que $f_{\iota_k}(x)$ et $f_{\iota_k}(y)$ soient <u>voisins d'ordre</u> V_{ι_k} pour $k = 1,2,\dots,n$: ce sont ces ensembles (pour tous les choix possibles des indices ι et des entourages V_ι) qui forment un système fondamental d'entourages de la structure considérée.

On a immédiatement la condition pour que cette structure soit <u>séparée</u> : il faut et il suffit que, pour tout couple (x,y) tel que $x \neq y$, il existe un indice ι et un entourage V_ι tels que $(f_\iota(x), f_\iota(y)) \notin V_\iota$; si les F_ι sont eux-mêmes <u>séparés</u>, cette condition se réduit à la suivante : <u>il faut et il suffit que, pour tout couple</u> (x,y) <u>tel que</u> $x \neq y$, <u>il existe un</u> ι <u>tel que</u> $f_\iota(x) \neq f_\iota(y)$.

D'autre part, <u>la topologie déduite de la structure uniforme sur</u> E <u>déterminée par les espaces</u> F_ι <u>et les fonctions</u> f_ι <u>est la moins fine de celles qui rendent continues les fonctions</u> f_ι : c'est ce qui résulte de la définition des voisinages dans cette topologie (voir § 2 et ch. I, § 7).

Supposons maintenant que E soit déjà muni d'une topologie $\mathcal{C}$, et cherchons à quelle condition cette topologie est identique à celle déduite de la structure uniforme déterminée sur E par les f_ι et les F_ι. Une première condition nécessaire est que les f_ι soient continues dans E, d'après ce qui précède ; si cette condition est remplie, la topologie définie par les f_ι est moins fine que la topologie initiale de E ; enfin, en comparant les voisinages d'un point quelconque dans ces deux topologies, on arrive à la conclusion suivante : il faut et il suffit que les f_ι soient continues dans E (muni de la topologie $\mathcal{C}$) et qu'à tout voisinages W d'un point quelconque $x_0 \in E$ (dans la topologie $\mathcal{C}$) corresponde un nombre fini d'indices $\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_n$ et des entourages $V_{\iota_1}, V_{\iota_2}, \ldots, V_{\iota_n}$ tels que l'ensemble des points x où on a simultanément les n relations $(f_{\iota_k}(x), f_{\iota_k}(x_0)) \in V_{\iota_k}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ soit contenu dans W. On peut encore exprimer cette condition en disant que la famille des ensembles $\overset{-1}{f_\iota}(V_\iota(f_\iota(x_0)))$ (ι et V_ι arbitraires) engendre le filtre des voisinages de x_0.

Produit d'espaces uniformes. Appliquons ce qui précède au cas où E est l'ensemble produit des F_ι, et les f_ι sont les fonctions coordonnées. La structure uniforme ainsi définie sur E est dite la structure produit des structures uniformes des F_ι, et l'ensemble E, muni de cette structure, est appelé espace uniforme produit des F_ι : sa topologie est donc la topologie produit de celles des F_ι. Comme une topologie produit n'est de Hausdorff que si les topologies facteurs le sont, on voit que pour qu'un produit d'espaces uniformes soit séparé, il faut et il suffit que chacun des espaces facteurs le soit.

<u>Proposition 1. Soit</u> E <u>un espace uniforme,</u> $E' = \prod_\iota F_\iota$ <u>un produit d'espaces uniformes,</u> $f = (f_\iota)$ <u>une application de</u> E <u>dans</u> E' <u>; pour que f soit uniformément continue, il faut et il suffit que</u> f_ι <u>soit uniformément continue quel que soit</u> ι .

Il résulte du théorème des fonctions composées (§ 2,prop. 3) que la condition est nécessaire. Pour voir qu'elle est suffisante, prenons un nombre fini d'indices $\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_n$, et des entourages $V_{\iota_1}, \ldots, V_{\iota_n}$ arbitraires ; si f_ι est uniformément continue quel que soit ι, à V_{ι_k} correspond dans E un entourage W_k tel que, si x et y sont voisins d'ordre W_k , $(f_{\iota_k}(x), f_{\iota_k}(y)) \in V_{\iota_k}$; si $W = \bigcap_{k=1}^{n} W_k$, les n relations précédentes auront lieu lorsque x et y seront voisins d'ordre W , ce qui montre que f est uniformément continue.

Comme pour le produit d'espaces topologiques (ch.I, § 8), on déduit de là que le produit d'espaces uniformes est <u>associatif</u>, et que, si A_ι est un sous-espace de F_ι , le produit des sous-espaces A_ι est isomorphe au sous-espace $\prod_\iota A_\iota$ de $\prod_\iota F_\iota$.

Si E_1 , E_2 sont deux espaces uniformes, a_1 un point de E_1 , il est immédiat que la fonction (a_1, x_2) est uniformément continue dans E_2 ; par suite

<u>Proposition 2.</u> f <u>étant une application uniformément continue du produit</u> $E_1 \times E_2$ <u>dans un espace uniforme</u> E', <u>toute application partielle</u> f_{a_1} <u>de</u> E_2 <u>dans</u> E' <u>associée à f est uniformément continue.</u>

On exprime encore ce fait en disant qu'une fonction uniformément continue de deux arguments est uniformément continue par rapport à chacun d'eux. La réciproque est inexacte.

<u>Proposition 3. Pour qu'un filtre $\mathfrak{F}$ sur un produit $\prod_\iota F_\iota$ d'espaces uniformes soit un filtre de Cauchy, il faut et il suffit que sa projection sur F_ι soit un filtre de Cauchy, quel que soit ι</u> .

La condition est nécessaire en vertu de la prop. 5 du § 3. Pour voir qu'elle est suffisante, prenons n indices $\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_n$ et des entourages $V_{\iota_1}, \ldots, V_{\iota_n}$ arbitraires ; dans la projection de $\mathfrak{F}$ sur F_{ι_k} , il existe par hypothèse un ensemble A_k petit d'ordre V_{ι_k} ; or, le produit des A_k et des F_ι pour les indices différents des ι_k est un ensemble de $\mathfrak{F}$, d'où la proposition.

<u>Proposition 4. Pour qu'un produit d'espaces uniformes soit complet il faut et il suffit que chacun des espaces facteurs le soit</u>.

C'est suffisant d'après la proposition précédente, et le théorème fondamental sur la convergence des filtres dans un espace produit (ch.I, § 8,th.1). C'est aussi nécessaire, car chacun des F_ι est isomorphe à un sous-espace <u>fermé</u> du produit $\prod_\iota F_\iota$.

<u>Corollaire</u>. <u>Soit</u> $E = \prod_\iota F_\iota$ <u>un produit d'espaces uniformes séparés Si $\tilde{E}$ est l'espace complété de E , $\tilde{F}_\iota$ l'espace complété de F_ι, $\tilde{E}$ est isomorphe au produit $\prod_\iota \tilde{F}_\iota$</u>..

En effet, soit G_ι la partie partout dense de $\tilde{F}_\iota$ qui est isomorphe à F_ι ; $\prod_\iota G_\iota$ est isomorphe à E , et comme $\overline{\prod_\iota G_\iota} = \prod_\iota \overline{G}_\iota = \prod_\iota \tilde{F}_\iota$, $\prod_\iota G_\iota$ est partout dense dans $\prod_\iota \tilde{F}_\iota$, d'où la proposition, en vertu de l'unicité de l'espace complété.

Enfin, on a vu (ch.I, § 8) que, si les f_ι sont des applications d'un ensemble E dans des espaces <u>topologiques</u> F_ι , l'application $y = (f_\iota(x))$ de l'espace topologique E (ensemble E muni de la topologie déterminée par les f_ι) sur une partie du produit $\prod_\iota F_\iota$ est un <u>homéomorphisme</u> si, quels que soient x,y dans E tels que $x \neq y$, il existe ι tel que $f_\iota(x) \neq f_\iota(y)$. Le même raisonnement montre que, si les F_ι sont des espaces uniformes, cette application est un <u>isomorphisme</u> de l'espace uniforme E (avec la structure déterminée par les f_ι) sur une partie du produit $\prod_\iota F_\iota$, la même condition étant remplie (si les F_ι sont séparés, nous avons vu que c'est la condition pour que E soit séparé). En particulier (en vertu du corollaire de la prop. 4) on a la proposition suivante :

<u>Proposition 5</u>. <u>Si les espaces uniformes</u> F_ι <u>sont (séparés et) précompacts, et si, quels que soient</u> x, y <u>dans</u> E <u>tels que</u> $x \neq y$, <u>il existe un</u> f_ι <u>tel que</u> $f_\iota(x) \neq f_\iota(y)$, <u>la structure uniforme déterminée sur</u> E <u>par les</u> f_ι <u>en fait un espace uniforme précompact</u>.

<u>Exercice</u>. Démontrer cette proposition directement, en utilisant le critère de précompacité des espaces uniformes (§ 4 , th. 4).

COMPLÉMENTS AU § 4 DU CHAPITRE II.

Applications : I. Propriétés des voisinages d'une partie d'un espace compact. Proposition 1. Soit A un ensemble fermé dans un espace compact E ; lorsque V parcourt le filtre des entourages de la structure uniforme de E, les ensembles $V(A)$ forment une base du filtre des voisinages de A.

Supposons en effet qu'il existe un voisinage U de A ne contenant aucun ensemble $V(A)$; les ensembles $V(A) \cap \complement U$ formeraient alors une base de filtre sur E, qui aurait au moins un point adhérent x_0 n'appartenant pas à A ; il en résulte qu'on aurait $x_0 \in \overset{2}{V}(A)$ quel que soit l'entourage symétrique V, ce qui entraîne $x_0 \in A$, contrairement à l'hypothèse.

Proposition 2. Soient A et B deux ensembles fermés sans point commun dans un espace compact E ; il existe un entourage V tel que $V(A)$ et $V(B)$ n'aient aucun point commun.

Sinon les ensembles $V(A) \cap V(B)$ formeraient une base de filtre sur E, qui aurait un point adhérent x_0 ; il en résulte qu'on aurait $x_0 \in \overset{2}{V}(A)$ et $x_0 \in \overset{2}{V}(B)$ quel que soit l'entourage symétrique V, d'où, comme A et B sont fermés, $x_0 \in A \cap B$, ce qui contredit l'hypothèse.

II. Propriétés des ensembles connexes dans un espace compact. Définition 3. Dans un espace uniforme E, soit V un entourage quelconque ; on dit qu'une famille finie $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de points de E forme une V-chaîne si, pour tout indice i tel que $1 \leq i \leq n-1$, x_i et x_{i+1} sont voisins d'ordre V ; les points x_1 et x_n sont appelés les extrêmités de la V-chaîne. On dit que deux points peuvent être joints par une V-chaîne s'il existe une V-chaîne dont ils sont les extrêmités.

<u>Proposition 3.</u> <u>Dans un espace uniforme E , l'ensemble</u> $A_{x,V}$ <u>des points y qui peuvent être joints à un point donné x par une V-chaîne est à la fois ouvert et fermé</u>.

En effet, s'il existe une V-chaîne $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ telle que $x_1=x$, $x_n=y$, et si z est un point quelconque de V(y), la famille $(z_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ telle que $z_i=x_i$ pour $i\leqslant n$, et $z_{n+1}=z$, est une V-chaîne d'extrémités x et z , autrement dit $V(y)\subset A_{x,V}$, ce qui montre que $A_{x,V}$ est <u>ouvert</u>. D'autre part, si z est un point adhérent à $A_{x,V}$, il existe un point y de $A_{x,V}$ tel que y et z soient voisins d'ordre V ; et le même raisonnement montre que $z\in A_{x,V}$, donc que $A_{x,V}$ est <u>fermé</u>.

Désignons par A_x l'intersection des ensembles $A_{x,V}$ lorsque V parcout le filtre des entourages de E : c'est donc l'ensemble des points y tels que, <u>quel que soit V</u>, il existe une V-chaîne qui joigne x et y.

<u>Proposition 4.</u> <u>Si E est compact,</u> A_x <u>est connexe</u>.

Supposons en effet que A_x ne soit pas connexe ; comme c'est un ensemble <u>fermé</u>, il existerait deux ensembles <u>fermés</u> non vides et sans point commun, B et C , tels que $B\cup C=A_x$. D'après la proposition 2 , il existe un entourage U tel que $U(B)\cap U(C)=\emptyset$; soit W un entourage ouvert tel que $\overset{2}{W}\subset U$, et désignons par H le complémentaire de l'ensemble $W(B)\cup W(C)$. Supposons par exemple que $x\in B$ et considérons un point $y\in C$; pour tout entourage $V\subset W$, une V-chaîne joignant x et y a au moins un point dans H , d'après ce qui précède. Comme par hypothèse, x et y peuvent être joints par une V-chaîne quel que soit V , on voit que, pour $V\subset W$, l'ensemble fermé $H \cap A_{x,V}$ n'est pas vide. D'autre part, si $V' \subset V$, on a évidemment $A_{x,V'} \subset A_{x,V}$; il s'en suit que, lorsque V parcourt le filtre des entourages, la famille des ensembles $H \cap A_{x,V}$ est une base de filtre, et par suite qu'il existe un point commun à tous ces ensembles, autrement dit un point commun à H et A_x, contrairement à la définition de H, ce qui démontre la proposition.

Il en résulte que A_x est contenu dans la composante connexe de x ; mais d'autre part, cette composante est contenue dans chacun des $A_{x,V}$, qui sont à la fois ouverts et fermés. Autrement dit :

Proposition 5. Dans un espace compact, la composante connexe d'un point x est identique à l'ensemble des points qui, pour tout entourage V, peuvent être joints à x par une V-chaîne ; cet ensemble est aussi l'intersection des voisinages du point x qui sont à la fois ouverts et fermés.

Exercices. 1) Soit $\mathfrak{H}$ un recouvrement ouvert d'un espace compact E ; il existe un entourage V de E tel que, quel que soit $x \in E$, V(x) soit contenu dans un des ensembles de $\mathfrak{H}$.

2) Un ensemble infini, muni de la structure uniforme des partitions finies (§1), est précompact.

3) Pour qu'un espace complet soit compact, il faut et il suffit que toute suite de points de l'espace possède une valeur d'adhérence.

4) Soit E un espace uniforme, V un entourage quelconque ; montrer que la réunion des ensembles $\overset{n}{V}$ (pour toutes les valeurs entières de n) est à la fois ouvert et fermé dans E x E.

5) Soit E un espace localement compact, muni d'une structure uniforme telle qu'il existe un entourage V tel que V(x)

soit relativement compact quel que soit $x \in E$; montrer que, si W est un entourage tel que $\overset{2}{W} \subset V$, et A un ensemble relativement compact dans E , $W(A)$ est relativement compact. En déduire (en utilisant l'exercice précédent) que, si E est en outre <u>connexe</u>, E est réunion dénombrable d'ensembles compacts.

6) Soit E un espace localement compact, muni d'une structure uniforme compatible avec sa topologie. Montrer que, si A est un ensemble compact dans E , les ensembles $V(A)$, où V parcourt le filtre des entourages de E , constituent une base du filtre des voisinages de A . Dans les mêmes conditions, montrer que, si A et B sont deux ensembles compacts sans point commun, il existe un entourage V tel que $V(A)$ et $V(B)$ n'aient aucun point commun.

7) Soit E un espace localement compact totalement discontinu. Montrer que tout voisinage d'un point quelconque x contient un voisinage de x qui est à la fois ouvert et fermé.

§ 5. Une méthode générale de définition d'une structure uniforme.

Soit F un espace uniforme (séparé ou non), E un ensemble quelconque

....

OBSERVATIONS CARTAN-WEIL
SUR LA REDACTION DES ESPACES UNIFORMES.

I. Structures uniformes et relations d'équivalence.

Il y a intérêt à ne pas poser tout d'abord l'axiome U-I des structures uniformes. Définir une structure uniforme par :

U-I. Tout ensemble du filtre $\mathfrak{U}$ contient la diagonale Δ.

U-II et U-III comme chez Dieudonné (en supprimant bien entendu la correspondance $V_1 = \rho(V)$ et le recours à l'axiome du choix, parfaitement scurrile ici).

Modifier en conséquence les axiomes des sytèmes fondamentaux d'entourages (p. 97).

Remarque : une relation d'équivalence est un cas particulier d'une structure uniforme ($\mathfrak{U}$ a pour base un ensemble unique R, contenant Δ , et satisfaisant à $R = \overset{-1}{R} = R^2$).

Inversement, une structure uniforme définit une relation d'équivalence R = intersection de tous les V de $\mathfrak{U}$. E désignant l'ensemble initial, soit $\tilde{E}$ l'ensemble des classes d'équivalence. Considérons la famille des $R \circ V \circ R$ où V parcourt $\mathfrak{U}$; elle constitue une base de $\mathfrak{U}$ (système fondamental d'entourages), car soit V donné et V_1 tel que $(V_1)^3 \subset V$; alors $R \circ V_1 \circ R \subset V$,

c.q.f.d.

Or chaque $R \circ V \circ R$ définit une relation $\tilde{V}$ dans $\tilde{E}$. D'où un filtre $\tilde{\mathfrak{U}}$ sur $\tilde{E} \times \tilde{E}$, et une structure uniforme sur $\tilde{E}$. Cette structure satsifait à l'axiome de séparation :

U-I bis. L'intersection des ensembles de $\tilde{\mathfrak{U}}$ se réduit à la diagonale $\tilde{\Delta}$.

Cela posé ; lorsqu'on aborde (p. 100) la structure topologique définie par une structure uniforme, on remarquera que l'axiome U-Ibis est <u>nécessaire</u> pour que l'axiome de séparation T_1 (Fréchet) soit vérifié ; et elle est <u>suffisante</u> pour que l'espace soit de Hausdorff et même régulier (p. 103).

Dorénavant, un E étant donné, on n'astreindra pas une structure uniforme sur E à satisfaire à U-I bis, mais il sera entendu, lorsqu'on parlera d'un E comme <u>espace uniforme</u>, que c'est de l'espace des classes d'équivalence qu'il s'agit (A. W. n'aime pas ces manières de parler). Par exemple, c'est ce qu'on fera lorsqu'il s'agira de <u>complèter</u> un E uniforme : on définira l'ensemble $\mathfrak{F}$ des filtres de Cauchy sur E, et on dotera $\mathfrak{F}$ d'une structure uniforme convenable ; l'espace complété sera <u>l'espace uniforme</u> $\mathfrak{F}$, donc l'espace $\mathfrak{E}$ des classes d'équivalence de $\mathfrak{F}$ doué de la structure uniforme envisagée. C'est encore ce qu'on fera, dans la théorie de l'intégration, lorsqu'on parlera de l'espace L^p des fonctions sommables ; il s'agira de l'espace des classes d'équivalence.

II. <u>Démonstration du théorème fondamental</u> (p. 117 et suivantes de la rédaction).

<u>Unicité</u> : comme rédigé. Pour l'<u>existence</u>, commencer par le lemme :

<u>Lemme</u>. <u>Soit E un espace uniforme, E' un sous-ensemble partout dense tel que tout filtre de Cauchy Φ' sur E' engendre sur E un filtre convergent</u>. <u>Alors E est complet</u>.

En effet, soit Φ un filtre de Cauchy sur E. A chaque entourage V de la structure uniforme et à chaque $A \in \Phi$, associons l'ensemble $V(A)$. Ces ensembles constituent la base d'un filtre Ψ, car soient A, A', V, V', et $W = V \cap V'$; on a

$$W(A \cap A') \subset V(A) \cap V'(A') .$$

Le filtre Ψ est un filtre de Cauchy, car étant donné V arbitraire, prenons V_1 tel que $V_1^3 \subset V$, puis $A \in \Phi$ tel que $A \times A \subset V_1$;

alors $\qquad V_1(A) \times V_1(A) \subset V$

et comme $V_1(A) \in \Psi$, Ψ est bien un filtre de Cauchy. Celà étant, la trace de Ψ sur E' est un filtre Ψ', car chaque V(A) a sur E' une trace non vide, E' étant partout dense dans E . Par hypothèse, le filtre Ψ' engendre sur E un filtre convergent ; a fortiori Ψ est convergent (note Dieudonné : ce point n'est pas aussi évident que semble dire Cartan, car le filtre engendré par Ψ' est plus fin que Ψ ; c'est le fait que Ψ est un filtre de Cauchy, et la prop. 3, p. 112 qui entraînent la proposition ; on s'est d'ailleurs déjà servi de cette proposition p. 113, prop. 5 ; il serait bon de l'énoncer explicitement). Donc, Φ , qui est plus fin que Ψ , est convergent. c.q.f.d.

Ce lemme étant établi, nous allons définir un $\mathcal{E}$ uniforme tel que E soit isomorphe à un sous-ensemble partout dense de $\mathcal{E}$, et que tout filtre de Cauchy sur E engendre sur $\mathcal{E}$ un filtre convergent. Cela démontrera le théorème.

Considérons l'ensemble $\mathfrak{F}$ des filtres de Cauchy sur E . Nous allons mettre sur $\mathfrak{F}$ une structure uniforme convenable, de façon que l'espace cherché soit l'espace des classes d'équivalence de $\mathfrak{F}$ avec la structure uniforme correspondante.

Nous prenons sur $\mathfrak{F}$ la structure uniforme suivante : deux filtres de Cauchy Φ_1 et Φ_2 (sur E) sont "voisins" s'ils contiennent tous deux un même ensemble de E qui soit "petit". D'une façon précise : à chaque entourage symétrique V (du filtre $\mathfrak{U}$ sur $E \times E$) associons l'ensemble $\tilde{V}$ des couples (Φ_1 , Φ_2) tels qu'il existe un $A \subset E$ satisfaisant à $A \times A \subset V$, $A \in \Phi_1$, $A \in \Phi_2$.

Les $\tilde{V}$ constituent, sur l'ensemble $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$, la base d'un filtre satisfaisant aux axiomes U-I, U-II, U-III des structures uniformes. En effet :

1°) $(\Phi, \Phi) \in \tilde{V}$ quels que soient Φ et $\tilde{V}$, parce que Φ est un filtre de Cauchy. D'où U-I.

2°) D'après cela, $\tilde{V}$ n'est pas vide ; les $\tilde{V}$ constituent la base d'un filtre, car soient $\tilde{V}$ et $\tilde{V'}$: si $V'' = V \cap V'$; on a évidemment

$$\tilde{V''} \subset \tilde{V} \cap \tilde{V'} .$$

3°) Les ensembles $\tilde{V}$ sont symétriques, donc U-II est vérifié.

4°) Si $\tilde{V}$ est donné, il existe $\tilde{V}_1$ tel que $(\tilde{V}_1)^2 \subset \tilde{V}$; il suffit pour cela que $V_1^2 \subset V$; en effet, si l'on a $(\Phi_1, \Phi_2) \in \tilde{V}_1$, $(\Phi_2, \Phi_3) \in \tilde{V}_1$ il existe A et B tels que $A \times A \subset V_1$, $B \times B \subset V_1$, $A \in \Phi_1$, $A \in \Phi_2$, $B \in \Phi_2$, $B \in \Phi_3$, donc $A \cap B \in \Phi_2$, et par suite $A \cap B \neq \emptyset$; mais alors (voir remarques Weil ci-après), $(A \cup B) \times (A \cup B) \subset V_1^2 \subset V$, et $A \cup B \in \Phi_1$, $A \cup B \in \Phi_3$; donc $(\Phi_1, \Phi_3) \in \tilde{V}$. c.q.f.d.

<u>Remarques Weil</u>.

Il ne faut pas abuser du calcul des correspondances. En particulier (cf. démonstration de Cartan) le calcul avec les formules $A \times A \subset V$ est encombrant. Voici une remarque qui le simplifie :

Si $A \times A \subset V$, $B \times B \subset V'$, <u>et si</u> $A \cap B \neq \emptyset$, on a $(A \cup B) \times (A \cup B) \subset VV' \cup V'V$.

La vérification est immédiate ; mais la démonstration suivante n'est pas sans intérêt :

On a évidemment $(A \cup B) \times (A \cup B) = (A \times A) \cup (A \times B) \cup (B \times A) \cup (B \times B)$. Mais on a d'autre part :

$$(A \times A).(B \times B) = A \times B \quad \text{si} \quad A \cap B \neq \emptyset$$
$$= \emptyset \quad \text{si} \quad A \cap B = \emptyset .$$

En réalité, ce qui intervient dans le théorème de "complétion" (je trouve ce vocable barbare) est la famille $\mathcal{F}_V$ des ensembles A tels que $A \times A \subset V$ (ensembles "petits d'ordre V") ; autrement dit, c'est la généralisation de la notion "ensemble de diamètre $< \varepsilon$ " qui intervient, la notion qui généralise le "couple de points de distance $< \varepsilon$ " n'intervenant qu'à titre d'intermédiaire parfois encombrant. Cela donne une généralisation des espaces uniformes, à laquelle je suis en train de réfléchir. Pour l'instant, les remarques ci-dessus doivent permettre de simplifier un peu la rédaction.

Soit donc $\mathfrak{F}$ l'ensemble des filtres de Cauchy sur E, muni de la structure uniforme $\tilde{\mathcal{U}}$ ci-dessus. A chaque $x \in E$ associons le filtre Φ_x ayant pour base $\{x\}$; c'est un élément $\dot{x}$ de $\mathfrak{F}$. On définit ainsi une application biunivoque de E sur une partie $\dot{E}$ de $\mathfrak{F}$; je dis que c'est une <u>isomorphie</u> des espaces uniformes E et $\dot{E}$ (ce dernier défini par la structure uniforme induite sur $\dot{E}$ par celle de $\mathfrak{F}$). En effet, on a une base pour la structure uniforme de $\dot{E}$ en prenant pour chaque V l'ensemble formé des couples $(\dot{x}, \dot{y})$ tels que $(\dot{x},\dot{y}) \in \tilde{V}$, c'est-à-dire l'ensemble correspondant aux couples (x,y) tels que

(1) $$(\Phi_x, \Phi_y) \in \tilde{V}$$

Or cette relation signifie l'existence d'un $A \subset E$ tel que

$$x \in A \quad , \quad y \in A \quad , \quad A \times A \subset V$$

Pour cela, il faut et il suffit que

(2) $$(x, y) \in V$$

les relations (1) et (2) sont donc équivalentes.

Cela étant, cherchons la trace sur E des voisinages d'un élément Φ de $\mathfrak{F}$. A chaque V on associe les $x \in E$ tels que $(\Phi_x, \Phi) \in \tilde{V}$; cette relation signifie : x appartient à un A tel que $A \times A \subset V$, $A \in \Phi$; appelons $V(\Phi)$ la réunion des A satisfaisant à ces deux conditions : la trace, sur $\dot{E}$, du filtre des voisinages de Φ, a pour base les images $\dot{V}(\Phi)$ des $V(\Phi)$. D'ailleurs aucun des $V(\Phi)$

n'est vide, puisque Φ est un filtre de Cauchy ; donc $\dot{E}$ <u>est partout dense dans</u> $\mathfrak{F}$. En outre, l'image $\dot{\Phi}$ de Φ , considéré comme famille de parties de $\dot{E}$, engendre un filtre sur $\mathfrak{F}$ qui <u>converge vers l'élément</u> Φ de $\mathfrak{F}$. En effet tout voisinage de Φ dans $\mathfrak{F}$, contient un $\dot{V}(\Phi)$; et chaque $\dot{V}(\Phi)$ appartient au filtre $\dot{\Phi}$ car si $A \in \Phi$ et $A \times A \subset V$, alors $V(\Phi) \supset A$, donc $V(\Phi) \in \Phi$ et par suite $\dot{V}(\Phi) \in \dot{\Phi}$.

En résumé, $\dot{E}$ est partout dense dans $\mathfrak{F}$, et tout filtre de Cauchy sur $\dot{E}$ engendre sur $\mathfrak{F}$ un filtre convergent ; cela achève la démonstration. (Note Dieudonné : c'est un peu vite dit, car la démonstration nécessite encore les points suivants (triviaux d'ailleurs): 1°- l'application canonique de $\mathfrak{F}$ sur l'ensemble $\mathcal{E}$ des classes d'équivalence de $\mathfrak{F}$ applique biunivoquement $\dot{E}$ sur une partie E' de $\mathcal{E}$; 2°- E', comme sous-espace uniforme de $\mathcal{E}$, est isomorphe à $\dot{E}$; E' est partout dense dans $\mathcal{E}$).

III. <u>Uniformité des compacts</u>.

Soit E un compact ; on va montrer que la famille des ouverts $\Omega \subset E \times E$ qui contiennent la "diagonale" Δ définit une structure uniforme sur E. Tout revient à montrer qu'à tout Ω correspond un Ω' tel que $\Omega'^2 \subset \Omega$. Sinon, toute fermeture $\overline{\Omega}'^2$ aurait avec le complémentaire F de Ω dans $E \times E$ une intersection non vide ; F est compact, toute intersection finie d'ensembles $\overline{\Omega}'^2$ contient un $\overline{\Omega}'^2$, donc les $\overline{\Omega}'^2$ auraient tous un élément commun (x,y) avec $x \neq y$. Or, soient, dans E : ω_1, ω_2 , respectivement, des voisinages ouverts de x, y ; f_1, f_2, des voisinages fermés de x, y ; de telle sorte que $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$, $f_1 \subset \omega_1$, $f_2 \subset \omega_2$; soit $\omega_3 = E - f_1 - f_2$; on prend $\Omega' = \bigcup_{i=1,2,3} (\omega_i \times \omega_i')$.

(On peut encore un peu simplifier, par divers procédés ; en particulier, on définira la structure par les <u>fermés</u> Φ dans $E \times E$ tels que tout point de Δ soit intérieur à Φ. Il faut alors qu'on ait démontré dans les compacts le théorème, d'ailleurs facile et intéressant par lui-même : si E, E', E'' sont trois espaces, si F est compact dans $E \times E'$, F' compact dans $E' \times E''$, alors FF' est compact dans $E \times E''$. Il y a un autre théorème intéressant : F étant encore compact, si F' est seulement supposé fermé (non compact), FF' est fermé) .

IV. <u>Compacité des uniformes</u> (p. 130 et suiv. de la rédaction).

Pour qu'un E uniforme soit <u>compact</u>, il faut qu'il soit complet, car tout filtre de Cauchy sur un compact possède au moins un point adhérent, donc est convergent (prop. 3, p. 112). Inversement, à quelle condition un uniforme complet est-il compact ? Plus généralement : <u>Etant donné un uniforme E, à quelle condition l'espace complété $\bar{E}$ est-il compact ?</u> Nous dirons dans ce cas que l'espace uniforme E est <u>relativement compact</u>.

<u>Théorème 3</u>. <u>Pour qu'un uniforme E soit relativement compact, il faut et il suffit qu'à tout entourage V on puisse associer un recouvrement de E avec un nombre fini de E_i satisfaisant à $E_i \times E_i \subset V$.</u>

1°- La condition est <u>nécessaire</u>. Car soit $\bar{V}$ un entourage (sur $\bar{E} \times \bar{E}$) dont la trace sur $E \times E$ soit contenue dans V. A chaque $x \in \bar{E}$, attachons un ouvert U contenant x, tel que $U \times U \subset \bar{V}$, puis recouvrons $\bar{E}$ avec un nombre <u>fini</u> de tels ouverts U_i, ce qui est possible puisque $\bar{E}$ est compact par hypothèse. Si E_i est la trace de U_i sur E, on aura bien

$$(1) \qquad E = \bigcup_i E_i \, , \qquad E_i \times E_i \subset V .$$

2^o- La condition est suffisante. Pour montrer que E est relativement compact, il suffit de montrer que tout ultrafiltre Φ sur E engendre un filtre convergent sur $\bar{E}$ (cf. p. 83 de la rédaction). Pour cela, il suffit, $\bar{E}$ étant complet, de montrer que tout ultrafiltre Φ sur E est de Cauchy. Or, soit donné V, et prenons un recouvrement satisfaisant à (1). Si on montre que l'un au moins des E_i appartient à Φ, on aura montré que Φ est de Cauchy. Or, si on avait $E_i \notin \Phi$ pour tout i, on aurait, Φ étant un ultrafiltre $\complement E_i \in \Phi$ d'où $\bigcap_i \complement E_i \neq \emptyset$, ce qui est contradictoire avec $\bigcup_i E_i = E$.

V. Mode général de définition d'une structure uniforme.

Cartan demande qu'on reporte à cette rubrique la structure uniforme induite et le produit d'espaces uniformes (dont on bloquera les propriétés, au lieu de les éparpiller au cours du chapitre). Tout cela viendrait après la compacité des uniformes (note Dieudonné : il n'y a pas d'objection pour le produit d'espaces uniformes, mais c'est impossible pour la structure induite, dont on se sert à plusieurs reprises dans le cours du chapitre).

La notion essentielle est la suivante :

Soit, sur un E, une famille de fonctions f_ι à valeurs respectivement dans des F_ι uniformes. Parmi les structures uniformes de E qui rendent ces f_ι uniformément continues, il en est une plus grossière que toutes les autres. On l'obtient en prenant arbitrairement un nombre fini de f_ι, et, pour chaque f_ι, un entourage V_ι sur $F_\iota \times F_\iota$; on considère l'ensemble des couples (x, y) ($x \in E$, $y \in E$) tels que l'on ait $(f_\iota(x), f_\iota(y)) \in V_\iota$, pour chacun des ι considérés (en nombre fini) ; ces ensembles forment la base d'un filtre $\mathfrak{U}$ sur $E \times E$, et ce filtre définit la structure uniforme cherchée.

En particulier, si on a <u>une</u> application f de E dans un F uniforme on trouve sur E ce qu'on peut appeler la structure uniforme induite. le filtre $\mathfrak{U}$ sur $E \times E$ est l'image inverse du filtre $\mathfrak{V}$ sur $F \times F$ (note Dieudonné : la dénomination "structure uniforme image inverse de celle de F par f" me paraît préférable). Cas plus particulier : E est sous-ensemble d'un F uniforme.

Si E est un produit d'uniformes F_ι , on obtient la structure uniforme de E en rendant uniformément continues les applications de E dans chacun des F_ι (coordonnées).

D'autre part, on a le théorème important (dans le cas général d'une famille de f_ι) :

<u>Si les F_ι sont relativement compacts, l'espace uniforme E est relativement compact</u>. (Conséquence immédiate du critère de compacité des uniformes).

Dans le cas général, supposons E doué initialement d'une topologie (T), les f_ι étant continues (à valeurs dans des uniformes F_ι). Ces fonctions définissent une structure uniforme sur E ; la topologie correspondante est <u>plus grossière</u> que la topologie initiale. Elle est identique à cette dernière dans le <u>seul</u> cas où à chaque $x_0 \in E$ et à chaque voisinage $A(x_0)$ de la topologie (T), on peut associer une f_ι et un entourage V_ι dans $F_\iota \times F_\iota$, tels que l'ensemble des $x \in E$ défini par $(f_\iota(x), f_\iota(x_0)) \in V_\iota$ soit contenu dans $A(x_0)$. Dans un chapitre ultérieur, on montrera que cette condition est remplie si E est uniformisable et si on prend pour f_ι la famille des fonctions continues réelles, à valeurs entre 0 et 1. E, muni de la structure uniforme correspondante, sera relativement compact.