PROJET CARTAN POUR LE DEBUT DE LA TOPOLOGIE

Rédaction n° 020

Nombre de pages : 8

Nombre de feuilles : 8

Topologie générale

Projet Cartan

20

Etat 2 A 20[2]

PROJET CARTAN

POUR LE DEBUT DE LA TOPOLOGIE

---

1. Voisinages.

Un ensemble fondamental $\mathbb{E}$ est muni d'une structure de voisinages et prend le nom d'espace (ses éléments prenant le nom de points) lorsque, pour toute propriété $P(x)$ des éléments de $\mathbb{E}$, et pour tout $x_o \in \mathbb{E}$, on sait donner un sens à la proposition : "quel que soit x suffisamment voisin de x_o, $P(x)$" (Donner des exemples où intervient cette notion ; par exemple, maximum relatif d'une fonction réelle, minimum relatif d'une intégrale en calcul des variations, etc...)

Donner un sens à la proposition précédente, c'est définir la famille des $P(x)$ pour lesquelles elle est considérée comme vraie. Ces propriétés s'appellent propriétés de voisinage pour x_o. Mais la pratique et le langage courant nous amènent à imposer des conditions restrictives à la famille des propriétés de voisi--nage. Tout d'abord si la propriété $P(x)$ entraîne $Q(x)$, on admet que la proposition "quel que soit x suffisamment voisin de x_o, $P(x)$" entraîne la proposition "quel que soit x suffisamment voisin de x_o, $Q(x)$". En particulier, deux propriétés équivalentes (c'est-à-dire qui définissent le même sous-ensemble de $\mathbb{E}$) sont à la fois propriétés de voisinage ou ne le sont pas. Appelons voisinage de x_o tout sous-ensemble de $\mathbb{E}$ qui est défini par une propriété de voisinage pour x_o. On voit que la connaissance des voisinages de x_o entraîne celle des propriétés de voisinage pour x_o, et vice-versa ; en outre, d'après ce qui précède, la famille $\mathfrak{B}(x_o)$ des voisinages de x_o satisfait à l'axiome :

V-I. Tout ensemble qui contient un ensemble de $\mathfrak{V}(x_0)$ appartient à $\mathfrak{V}(x_0)$.

Voilà donc une première condition imposée à la famille $\mathfrak{V}(x_0)$. En voici une autre : on admet généralement que la conjonction de deux propriétés de voisinage (pour x_0) est encore une propriété de voisinage (pour x_0). D'où :

V-II. L'intersection de deux ensembles de $\mathfrak{V}(x_0)$ appartient à $\mathfrak{V}(x_0)$.

Enfin, il serait sans intérêt d'introduire la notion précédente si la famille $\mathfrak{V}(x_0)$ était vide ; de plus, on admet généralement que "$P(x_0)$" est vraie si $P(x)$ est une propriété de voisinage pour x_0. D'où l'axiome :

V-III. La famille $\mathfrak{V}(x_0)$ n'est pas vide, et x_0 appartient à tout ensemble de $\mathfrak{V}(x_0)$.

Nous sommes maintenant en mesure de définir d'une façon précise ce que l'on entend par structure de voisinages sur un fondamental $\mathbb{E}$. $\mathbb{E}$ est muni d'une structure de voisinages si à chaque $x_0 \in \mathbb{E}$ est attachée une famille $\mathfrak{V}(x_0)$ de sous-ensembles satisfaisant à V-I, V-II, V-III. Ces sous-ensembles prennent le nom de voisinages de x_0.

Dans ces conditions, la proposition $\alpha(P)$: "quel que soit x suffisamment voisin de x_0, $P(x)$" est par définition équivalente à : "il existe un $V \in \mathfrak{V}(x_0)$ tel que $x \in V \rightleftarrows P(x)$".

La proposition $\beta(P)$: "il existe un x arbitrairement voisin de x_0 tel que $P(x)$" est par définition, équivalente à : "quel que soit $V \in \mathfrak{V}(x_0)$, il existe x tel que $x \in V$ et $P(x)$". On voit que, $\overline{P}$ désignant la négation de P, la négation de $\alpha(P)$ est $\beta(\overline{P})$.

Voici une autre manière d'exprimer les mêmes choses : au lieu de considérer $P(x)$, considérons l'ensemble A des x tels que $P(x)$. $\alpha(A)$: "quel que soit x suffisamment voisin de x_0, $x \in A$" est équivalent à : "A est un voisinage de x_0" ; on dit que x_0 est *intérieur* à A ; d'après V-III, $x_0 \in A$.

$\beta(A)$: "il existe un x arbitrairement voisin de x_0 tel que $x \in A$" est équivalent à : "quel que soit $V \in \mathfrak{B}(x_0)$, $A \cap V \neq \emptyset$" ; on dit que x_0 est *adhérent* à A ; d'après V-III, tout point de A est adhérent à A. La négation de "x_0 est intérieur à A" est "x_0 est adhérent à $\complement A$" .

Appelons *intérieur* de A, et notons $\mathring{A}$, l'ensemble des points intérieurs à A ; on a $\mathring{A} \subset A$. Appelons *adhérence* de A, et notons $\overline{A}$, l'ensemble des points adhérents à A ; on a $\overline{A} \supset A$. On voit que $\mathring{A}$ a pour complémentaire $\overline{\complement A}$.

On appelle *frontière* de A l'ensemble

(1) $$\overline{A} - \mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{\complement A} \ ;$$

un point de la frontière s'appelle point frontière. Un point frontière peut ou non appartenir à A. Un point frontière x est caractérisé par la propriété : "tout voisinage de x contient au moins un point de A et un point de $\complement A$" : c'est ce que prouve en effet le second membre de (1).

Un ensemble A est dit *ouvert* si $\mathring{A} = A$, c'est-à-dire si tous ses points sont intérieurs, ou encore *si A est voisinage de chacun de ses points*. Un ensemble A est dit *fermé* si $\overline{A} = A$, c'est-à-dire si tout point adhérent de A appartient à A, ou encore si le complémentaire de A est ouvert.

5

2. *Structures topologiques*.

Une structure de voisinages prend le nom de *structure topolo-gique*, et l'espace prend le nom *d'espace topologique*, lorsque cette structure satisfait à l'axiome supplémentaire suivant :

V-IV. *L'adhérence d'un ensemble quelconque est un ensemble fermé*.

Par passage au complémentaire, cette condition est équivalente à :

V-IV'. *L'intérieur d'un ensemble quelconque est un ensemble ouvert*.

Or, V-IV' entraîne :

I-IV". *Si V est un voisinage de x_0, V contient un ensemble ouvert contenant* x_0.

En effet, $\overset{\circ}{V}$ est ouvert et contient x_0.

Nous allons voir que V-IV" est équivalent à V-IV et V-IV'.

Montrons d'abord que V-IV" entraîne :

V-IV"'. *Si V est un voisinage de x_0, il existe* $V' \in \mathfrak{V}(x_0)$ *tel que V soit voisinage de chaque point de* V'.

En effet, il suffit de prendre $V' = \overset{\circ}{V}$.

Or, V-IV"' entraîne V-IV ; en effet, soit A un ensemble quelconque, et x_0 un point de l'adhérence de $\bar{A}$. Montrons que $x_0 \in \bar{A}$. Il faut montrer que, si $V \in \mathfrak{V}(x_0)$, V contient au moins un point de A ; or, d'après V-IV'", il existe $V' \in \mathfrak{V}(x_0)$ tel que V soit voisinage de chaque point de V' ; puisque x_0 appar-tient à l'adhérence de $\bar{A}$, V' contient un point $x \in \bar{A}$, et puis-que V est voisinage de x, V contient un point de A .

C.Q.F.D.

Finalement, les quatre axiomes V-IV, V-IV', V-IV", V-IV'" sont équivalents entre eux. Pour vérifier qu'une structure de voisinages définit une topologie, on pourra à volonté, suivant la nature du problème, s'assurer que l'un de ces quatre axiomes est vérifié.

Définition d'une topologie par les ensembles ouverts.

$\mathcal{E}$ étant muni d'une structure topologique, la connaissance des ensembles ouverts détermine la topologie, car les voisinages de x_0 sont caractérisés par la propriété de contenir un ensemble ouvert contenant x_0. En effet, cette condition est nécessaire d'après V-IV" ; elle est suffisante, en vertu de V-I et du fait qu'un ensemble ouvert est voisinage de chacun de ses points. Ceci conduit à se demander à quelles conditions doit satisfaire une famille $\mathcal{D}$ d'ensembles pour que ce soient les ensembles ouverts d'une topologie convenable.

Théorème. Pour qu'une famille $\mathcal{D}$ d'ensembles soit la famille des ensembles ouverts d'une topologie, il faut et il suffit qu'elle satisfasse aux deux conditions suivantes :

O-I. Toute réunion (y compris la réunion vide) d'ensembles de $\mathcal{D}$ appartient à $\mathcal{D}$.

O-II. Toute intersection finie (y compris l'intersection vide) d'ensembles de $\mathcal{D}$ appartient à $\mathcal{D}$.

Remarque. En vertu de O-I, l'ensemble vide appartient à la famille $\mathcal{D}$; en vertu de O-II, l'ensemble plein appartient à $\mathcal{D}$.

Montrons d'abord que, dans une structure topologique, la famille des ensembles ouverts satisfait à O-I et à O-II. Elle satisfait à O-I, car si $B = \bigcup_{\iota} A_{\iota}$ (A_{ι} ouverts) et si $x \in B$, B est voi--sinage de x ; en effet, il existe ι tel que $x \in A_{\iota}$, donc A_{ι}

est un voisinage de x ; d'après V-I, B, qui contient A_i , est un voisinage de x. La famille des ouverts satisfait à O-II, car si on a des ouverts A_i en nombre fini, et si $x \in \bigcap_i A_i$, alors $x \in A_i$ quel que soit i, donc les A_i sont des voisinages de x ; donc leur intersection est un voisinage de x .

Montrons que, réciproquement, toute famille $\mathfrak{D}$ satisfaisant à O-I et O-II est la famille des ouverts d'une certaine topologie. Pour celà, définissons la famille $\mathfrak{V}(x_0)$ des voisinages de x_0 comme celle des ensembles qui contiennent au moins un ensemble de $\mathfrak{D}$ contenant x_0. Les familles $\mathfrak{V}(x_0)$ ainsi définies satis-font bien à V-I, V-II, V-III. Je dis que, dans la structure de voisinages ainsi définie, la famille $\mathfrak{D}$ est identique à celle des ensembles ouverts. En effet, si $A \in \mathfrak{D}$, et si $x \in A$, A est un voisinage de x ; donc A est ouvert. ~~Réciproquement, si A est un voisinage de x ; donc A est ouvert~~. Réciproquement, si A est ouvert, A est réunion d'ensembles de $\mathfrak{D}$ (car si $x \in A$, A est voisinage de x, donc contient un ensemble de $\mathfrak{D}$ conte-nant x), donc $A \in \mathfrak{D}$ en vertu de O-I .

Il reste à montrer que V-IV" est satisfait, ce qui est clair d'après la définition des voisinages de x_0.

Ainsi une structure topologique peut être définie par une famille d'ensembles satisfaisant à O-I et O-II ; ces ensembles sont dits <u>ouverts</u>. Il n'est pas mauvais de récapituler les notions essentielles (voisinages, intérieur, adhérence, etc...) de ce nouveau point de vue :

<u>voisinage de x_0</u> : ensemble qui contient un ouvert contenant x_0 ;

x_0 <u>intérieur à A</u> : x_0 appartient à un ouvert contenu dans A ;

x_0 <u>adhérent à A</u> : quel que soit l'ensemble ouvert contenant x_0, son intersection avec A n'est pas vide ;

<u>ensemble fermé</u> : complémentaire d'un ensemble ouvert ;

<u>point frontière de A</u> : tout ouvert contenant ce point contient au moins un point de A et un point de $\complement A$.

<u>Remarques.</u> 1°) L'intérieur d'un ensemble A est "le plus grand" ensemble ouvert contenu dans A ; c'est-à-dire : si B est ouvert et si $B \subset A$, alors $B \subset \overset{\circ}{A}$.

2°) L'adhérence d'un ensemble A est "le plus petit" ensemble fermé contenant A ; c'est-à-dire : si B est fermé, et si $B \supset A$, alors $B \supset \bar{A}$.

3°) La famille des ensembles fermés jouit des propriétés qui se déduisent de O-I et O-II par dualité ; d'où :

F-I . <u>Toute intersection (y compris l'intersection de la famille vide) de fermés est un fermé</u>.

F-II. <u>Toute réunion finie (y compris la réunion vide) de fermés est un fermé</u>.

4°) La frontière d'un ensemble A est un ensemble fermé ; car c'est $\bar{A} \cap \overline{\complement A}$, c'est-à-dire l'intersection de deux ensembles fermés.

<u>Exercices</u>. 1) Définir une structure topologique par la famille des fermés.

2) Si A est ouvert, et si $B \subset A$ est fermé, alors A-B est ouvert ; si A est fermé et si $B \subset A$ est ouvert, alors A-B est fermé.
