TOPOLOGIE GENERALE
CHAPITRES I-II-III
(Original)

Rédaction n° 019

Nombre de pages : 110

Nombre de feuilles : 109

Topologie générale
Mandelbrojt
Chap I. II. III
19

Etat ~~B~~ 1

CHAPITRE I

Ensembles ouverts

§ 1 Axiomes des ensembles ouverts et quelques définitions.

Soit E un ensemble fondamental quelconque. Nous dirons que les parties de E, constituant une famille $\mathcal{O}$, sont des ensembles ouverts si elles satisfont à l'axiome suivant:

$\mathcal{O}$-I. Toute réunion d'ensembles de $\mathcal{O}$ est un ensemble de $\mathcal{O}$. L'ensemble vide est un ensemble de $\mathcal{O}$.

Un ensemble E dans lequel est définie une famille $\mathcal{O}$ d'ensembles ouverts est appelé espace topologique, ou, parfois, lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre, espace, tout court. Ses éléments sont alors appelés points. On dira aussi que la famille $\mathcal{O}$ définit une topologie dans E.

Le plus souvent on ne considère que les espaces topologiques E dont la famille d'ensembles ouverts, $\mathcal{O}$, satisfait, outre à l'axiome précité, aux axiomes suivants:

$\mathcal{O}$-II. Si A et B sont deux ensembles de $\mathcal{O}$, $A \cap B$ est un ensemble de $\mathcal{O}$.

$\mathcal{O}$-III. L'ensemble E appartient à $\mathcal{O}$.

En procédant par récurrence, on voit que si $\mathcal{O}$-II a lieu, toute intersection d'ensembles ouverts en nombre fini est un ensemble ouvert.

Exemples. La famille composée de toutes les parties de E constitue évidemment une famille d'ensembles ouverts: la topologie définie par cette famille est appelée topologie discrète dans E.

La famille composée de E et de l'ensemble vide constitue également une famille d'ensembles ouverts.

Exercice Les deux familles ainsi définies satisfont aux axiomes $\mathcal{O}$-I, $\mathcal{O}$-II, $\mathcal{O}$-III.

Soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ deux familles d'ensembles ouverts. Si

 3

$\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$, on dit que la première famille d'ensembles ouverts définit une topologie plus forte que la seconde (ou encore que la seconde famille définit une topologie plus faible que la première). Ainsi la topologie définie dans le premier exemple est plus forte que toutes celles qu'on peut définir dans E ; par contre, le second exemple fournit la topologie la plus faible vérifiant O-III , qu'on puisse définir dans E .

Exercices Quelle est la topologie la plus faible qu'on puisse définir dans E ?

Montrer qu'il existe une topologie plus forte que chacune de celles définies par les familles respectives d'ensembles ouverts $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}''$ et qui soit plus faible que toute autre topologie jouissant de la même propriété.

Montrer aussi qu'il existe une topologie plus faible que chacune de celles définies par $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}''$ et qui soit plus forte que toute autre topologie jouissant de la même propriété.

Montrer que si $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}''$ satisfont à O-III , la première des deux topologies qu'on vient de définir satisfait également à O-III

Montrer que si $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}''$ satisfont à O-II , la seconde des deux topologies qu'on vient de définir satisfait également à O-II.

Un ensemble F est dit fermé si son complémentaire $\complement F = E - F$ est ouvert.

Il résulte de O-I que:

Toute intersection d'ensembles fermés est un ensemble fermé. L'ensemble E est un ensemble fermé.

On voit de même que si O-II est vérifié, toute réunion d'ensembles fermés est un ensemble fermé et que si O-III est vérifié l'ensemble vide est un ensemble fermé.

Si toute réunion finie d'ensembles fermés est un ensemble fermé O-II a lieu; si l'ensemble vide est fermé O-III a lieu.

Un ensemble A est dit connexe si, quels que soient les deux ensembles fermés F_1 et F_2, tels que A est contenu dans leur réunion, leur intersection possède au moins un point de A

En vertu de cette définition, un espace topologique E est dit connexe, si deux ensembles fermés quelconques dont la réunion couvre E ont un élément commun.

Cette notion de connexion jouera plus tard un rôle important.

On peut définir une topologie dans E en partant d'une famille $\mathcal{B}$ de parties de E et en considérant comme ensemble ouvert toute réunion d'ensembles de $\mathcal{B}$ ainsi que l'ensemble vide.

La famille $\mathcal{O}$ d'ensembles ainsi définis satisfait évidemment à O-I. Cette famille peut ne pas vérifier les axiomes O-II et O-III. La famille $\mathcal{B}$ est dite base de la famille d'ensembles ouverts qu'on vient de définir, ou encore base de la topologie ainsi définie.

La topologie dont $\mathcal{B}$ est la base, est évidemment la topologie la plus faible admettant tous les ensembles de la famille $\mathcal{B}$ comme ensembles ouverts.

Il nous arrivera souvent, éventuellement sans le mentionner explicitement, de faire état de la remarque suivante:

Si on féfinit dans E deux topologies de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, si les ensembles de ces deux familles sont ouverts dans chacune des topologies ainsi définies, les deux topologies sont identiques, c'est-à-dire que les familles d'ensembles ouverts dans les deux topologies sont composées des mêmes ensembles.

Il résulte immédiatement de la relation

$$E - \bigcup_\lambda B_\lambda = \bigcap_\lambda [\complement B_\lambda]$$

que dans la topologie dont $\mathcal{B}$ est la base, les ensembles fermés sont ceux qui sont les intersections des ensembles complémentaires aux ensembles appartenant à $\mathcal{B}$.

Considérons, par exemple, le cas où E est un ensemble <u>ordonné</u>. On a vu (Ensembles II. §1.) qu'un tel ensemble jouit, par définition, des propriétés suivantes: il existe une relation d'ordre entre éléments x, y de E qui se note $x < y$ (x plus petit que y, ou $y > x$, y plus grand que x), cette relation satisfaisant aux axiomes suivants:

1°) si $a \in E$, $b \in E$, une et une seule relation

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a$$

est vraie;

2°) de $a < b$ et $b < c$ résulte $a < c$.

(On écrit souvent $a \leq b$ pour désigner qu'une des deux relations a lieu: $a < b$ ou $a = b$).

On appelle <u>intervalle ouvert (a, b)</u> l'ensemble de tous les éléments x de E vérifiant les deux relations à la fois: $x > a$, $x < b$. On appelle <u>intervalle fermé $[a, b]$</u> l'ensemble de tous les éléments x de E vérifiant les deux relations à la fois: $x \geq a$, $x \leq b$; on appelle <u>intervalle demi-ouvert: $[a, b)$</u> (fermé à gouche et ouvert à droite) l'ensemble de tous les éléments de E vérifiant les deux inégalités à la fois $x \geq a$, $x < b$; l'ensemble de tous les éléments vérifiant les deux inégalités $x > a$, $x \leq b$ s'appelle <u>intervalle demi-ouvert $(a, b]$</u> (ouvert à gauche et fermé à droite)

On appelle aussi <u>intervalle ouvert $(\leftarrow, a)$</u> l'ensemble des éléments vérifiant la relation $x < a$, <u>intervalle ouvert $(a, \rightarrow)$</u> l'ensemble des éléments vérifiant la relation $x > a$, <u>intervalle</u>

demi-ouvert $(\leftarrow, a]$ l'ensemble des éléments $x \leq a$, intervalle demi-ouvert $[a, \rightarrow)$ l'ensemble des éléments $x \geq a$. L'ensemble fondamental E lui-même peut-être considéré comme un intervalle ouvert et noté $(\leftarrow, \rightarrow)$.

L'ensemble E étant ordonné, on peut former une famille d'ensembles ouverts $\mathcal{O}$ en considérant la famille $\mathcal{B}$ de tous les intervalles ouverts définis dans E , comme base de la famille c'est-à-dire en constituant $\mathcal{O}$ par la réunion de tous les ensembles faisant partie de $\mathcal{B}$ (l'ensemble vide en fait d'ailleurs partie: c'est tout intervalle ouvert (a, b) où $a > b$).

La famille $\mathcal{O}$ ainsi formée satisfait, évidemment, à l'axiome O-I (comme d'ailleurs toute famille $\mathcal{O}$ formée à partir d'une base donnée) et O-III (car l'ensemble fondamental E est lui-même, par définition, un ensemble ouvert : $(\leftarrow, \rightarrow)$. Mais on a aussi la proposition suivante:

Proposition 1 . La famille d'ensembles ouverts $\mathcal{O}$ admettant comme base la famille de tous les intervalles ouverts satisfait à O-II

A et B étant deux ensembles appartenant à $\mathcal{O}$, on a :

$$A = \bigcup_\lambda I_\lambda , \quad B = \bigcup_\mu I'_\mu$$

où I_λ et I'_μ sont des intervalles ouverts; on a par conséquent (voir Ensembles I).

$$A \cap B = (\bigcup_\lambda I_\lambda) \cap (\bigcup_\mu I'_\mu) = \bigcup_{\lambda,\mu} (I_\lambda \cap I'_\mu),$$

et il suffit de démontrer que l'intersection de deux intervalles ouverts est un intervalle ouvert.

Or, si $I = (a, b)$, $I' = (a', b')$ on voit que l'ensemble $L = I \cap I' = (a, b) \cap (a', b')$ est composé de tous les éléments x qui sont à la fois plus grands que a et a', et plus petits que b et b' . Si α désigne celui des éléments a et a' qui est plus grand que l'autre, et β celui des éléments b et b' qui est plus petit que l'autre, on a $I=(\alpha,\beta)$, ce qui est un intervalle ouvert; d'où la conclusion cherchée.

Exercice Démontrer que si l'on prend pour base la famille d'intervalles fermés, O-II n'est pas satisfait.

Si la base est la famille d'intervalles ouverts, les ensembles fermés sont ceux qui sont de la forme:

$$\bigcap_\lambda \{(\leftarrow,\alpha_\lambda] \cup [\beta_\lambda,\rightarrow)\}.$$

En particulier, les intervalles fermés sont des ensembles fermés.

L'ensemble des nombres rationnels, E^1, étant ordonné par la convention $p/q < r/s$, si $qr-ps$* est un entier positif, tout ce qui précède s'applique à cet ensemble. Remarquons d'ailleurs que dans le cas présent la famille $\mathcal{B}$, base de la famille d'ensembles ouverts est dénombrable: en effet, la famille d'intervalles (a,b) $(b>a)$ est en correspondance biunivoque avec les couples de nombres rationnels tels que le second nombre soit plus grand que le premier, l'ensemble de ces couples étant (comme l'ensemble de tous les couples de nombres rationnels) dénombrable.

Introduisons, maintenant, une notation qui nous rendra des services appréciables.

Considérons un ensemble composé de tous les nombres rationnels et de deux nouveaux éléments que nous désignerons par les symboles $-\infty, +\infty$. On ordonnera cet ensemble de la manière suivante: si a et b sont des nombres rationnels on posera, comme dans l'ensemble E^1 des rationnels, $a<b$, si $b-a$ est positif; quel que soit le nombre rationnel a on posera $-\infty<a$, $a<+\infty$; on posera, enfin, $-\infty<+\infty$.

8

Les axiomes des ensembles ordonnés sont évidemment vérifiés. Nous conviendrons d'écrire $(-\infty, a)$, $[-\infty, a)$, $[-\infty, a]$, $(-\infty, a]$ (a, ∞), $(a, +\infty]$, $[a, +\infty)$, $[a, +\infty]$ respectivement les ensembles suivants: tous les rationnels $< a$, tous les rationnels $< a$ et $-\infty$, tous les rationnels $< a$ et a, tous les rationnels $< a$, a et $-\infty$, tous les rationnels $> a$, tous les rationnels $> a$ et $+\infty$, tous les rationnels $> a$ et a, tous les rationnels $> a$, a et $+\infty$. On peut définir une topologie dans cet ensemble $\hat{E}^1$ (c'est ainsi que nous le noterons dorénavant) composé des rationnels et des éléments $-\infty, +\infty$, en partant comme d'une base de la famille $\mathcal{B}$, qui a servi de base pour la topologie dans E^1, en y ajoutant préalablement les ensembles $(a, +\infty]$, $[-\infty, a)$.

Une topologie étant définie dans E par l'intermédiaire de la famille $\mathcal{O}$ d'ensembles ouverts, nous introduisons maintenant la notion importante de voisinage.

Un ensemble V est dit voisinage d'un point p, s'il contient au moins un ensemble ouvert contenant p. On dit, alors, aussi que p est un point intérieur de V. Tout ensemble ouvert est évidemment un voisinage de chacun de ses points.

La définition même du point intérieur fournit la proposition suivante:

Proposition 2 . L'ensemble Ω de tous les points intérieurs d'un ensemble A est la réunion de tous les ensembles ouverts contenus dans A .

Ω est donc un ensemble ouvert et notamment le plus grand ensemble ouvert contenu dans A .

Cet ensemble sera appelé l'intérieur de l'ensemble A.

Un point de A qui ~~lui n'est~~ ne lui est pas intérieur, est dit point

 9

adhérent de A . L'ensemble de tous les points adhérents de A est appelé adhérence de A .

Il résulte en particulier de la proposition 2 que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble soit ouvert est que tous ses points lui soient intérieurs, ou encore qu'il coïncide avec son intérieur.

On voit aussi immédiatement que: Si O-II a lieu, tout point p intérieur à la fois à A et B est aussi intérieur à $A \cap B$

Exercice Démontrer que réciproquement: si, quels que soient les ensembles A et B , tout point intérieur à la fois à A et à B est aussi intérieur à $A \cap B$, la condition O-II est satisfaite.

Un point intérieur à $\complement A$ est dit extérieur à A.

L'ensemble complémentaire de l'ensemble des points extérieurs à A est dit support fermé de l'ensemble A . Nous le désignerons par $\bar{A}$.

Proposition 3 . Le support fermé d'un ensemble est le plus petit ensemble fermé le contenant.

Le fait que $\bar{A}$ contient A et est fermé, résulte de sa définition. Si F est un ensemble fermé quelconque contenant A, l'ensemble $\complement F$ est ouvert et est contenu dans $\complement A$, et d'après la proposition 2, on voit que $\complement F \subset \complement \bar{A}$, c'est-à-dire que $\bar{A} \subset F$.

Il est évident que le support fermé d'un ensemble fermé est l'ensemble lui-même.

Proposition 4 . Si O-II a lieu: $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

En effet, en posant $C = A \cup B$, l'ensemble fermé $\bar{C}$ contenant C, contient A et par conséquent, d'après la proposition 3, $\bar{A}$; $\bar{C}$ contient aussi $\bar{B}$, donc $\bar{C} \supset \bar{A} \cup \bar{B}$; mais si O-II est satisfait $\bar{A} \cup \bar{B}$ est fermé, il contient C , et par conséséquent $\bar{C}$; d'où : $\bar{C} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exercice. Démontrer que, quels que soient les ensembles A et B on a $(\bar{A} \cap \bar{B}) \supset (\overline{A \cap B})$, mais que ~~l'inégalité~~ la relation $(\overline{A \cap B}) \supset (\bar{A} \cap \bar{B})$ n'a pas lieu en général.

Proposition 5 . La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point p appartienne au support fermé $\bar{A}$ d'un ensemble A , est que tout ensemble ouvert Ω contenant p contienne au moins un point de A .

En effet, pour qu'un ensemble ouvert ne contienne aucun point de A , il faut et il suffit, d'après la proposition 2, qu'il ne contienne que des points extérieurs à A (points intérieurs à $\complement A$), c'est-à-dire qu'il ne contienne pas de points de $\bar{A}$, d'où la conclusion cherchée.

Si p appartient à $\bar{A}$ deux cas sont à distinguer: 1°- tout ensemble ouvert contenant p contient un point de A distinct de p, le point p sera dit point d'accumulation de A . 2°- il existe un ensemble ouvert contenant p et ne contenant aucun point de A différent de p ; le point p appartient alors lui-même à A , et sera dit point isolé de A . L'ensemble des points d'accumulation de A est appelé ensemble dérivé de A et on le désigne souvent par A'.

$\bar{A}$ est la somme de l'ensemble des points isolés de A et de l'ensemble dérivé de A . D'après la définition, tout point isolé de A est un point de A , on peut donc écrire: $\bar{A} = A \cup A'$.

Un ensemble fermé dont tous les points sont points d'accumulation, c'est-à-dire un ensemble A tel que $\bar{A} = A = A'$, est dit ensemble parfait.

L'ensemble des points qui ne sont ni intérieurs ni extérieurs à A est appelé frontière de A . Cet ensemble est évidem-

Un ensemble A est dit partout dense, si $\bar{A} = E$. C'est à dire lorsque le voisinage de chaque point p de E contient un point de A.

ment égal à l'ensemble $\bar{A} \cap \overline{(\complement A)}$; il est donc fermé si O-$\underline{II}$ est vérifié.

Exercices. Démontrer que si aucun ensemble ouvert n'est composé d'un seul élément et si O-$\underline{II}$ est vérifié, tout point intérieur d'un ensemble quelconque A est un point d'accumulation de A.

Démontrer qu'en désignant par $\mathcal{E}^*$ l'ensemble de tous les entiers rationnels et en appelant ensemble ouvert dans $\mathcal{E}^*$ tout ensemble composé d'au moins deux éléments, ou l'ensemble vide, O-$\underline{II}$ n'est pas vérifié (O-$\underline{III}$ l'étant) et que, dans ces mêmes conditions, toutes les parties finies A de E ayant plus d'un élément admettent des points intérieurs qui sont des points isolés de A.

Démontrer que tout ensemble A qui n'est pas fermé possède au moins un point d'accumulation.

Soit $\mathcal{V}$ une famille de voisinages V_α d'un point p. Il est évident que tout ensemble A contenant un V_α quelconque est aussi un voisinage de p. Si la famille des V_α est telle que la réciproque a lieu, c'est-à-dire que tout voisinage de p contient un voisinage V_α appartenant à $\mathcal{V}$, la famille $\mathcal{V}$ de voisinages V_α sera dite système fondamental de voisinages attaché au point p ; ou encore lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre: système de voisinages attaché à p. Il est évident que la famille d'ensembles ouverts contenant p est un système de voisinages pour p.

Par contre, il importe de remarquer que la famille de tous les ensembles fermés contenant le point p ne constitue pas, en général, un système fondamental de voisinages de p. Autrement dit, il existe des espaces admettant des points jouissant de la propriété suivante: il existe un ensemble ouvert contenant q et ne contenant aucun ensemble fermé contenant lui-même un ensemble ouvert contenant q.

<u>Exemple.</u> Ainsi l'espace composé de deux éléments a, b où les ensembles ouverts sont les suivants: $\{a\}$, l'ensemble composé des éléments a, b et l'ensemble vide, est tel que la famille d'ensembles fermés ne constitue pas un système de voisinages pour a.

<u>Exercice.</u> Montrer que si la famille de tous les ensembles fermés contenant un point p constitue un système fondamental pour p, tout ensemble ouvert est une réunion d'ensembles fermés.

La proposition suivante résulte de la définition du système de voisinages.

<u>Proposition 6</u>. <u>Si l'on a deux systèmes de voisinages V_α et W_β attaché au point p, tout V_α contient un W_β et tout W_β contient un V_α. En particulier, la condition nécessaire et suffisante pour que la famille de voisinages V_α de p forme un système fondamental pour p est que tout ensemble ouvert contenant p contienne un V_α.</u>

Ainsi, en tenant compte de la proposition 2, on voit que, <u>si à chaque point p correspond un système de voisinages, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble A soit ouvert est qu'il ne contienne aucun point p sans contenir l'un des voisinages du système fondamental de p.</u>

<u>Exemples.</u> Si $\mathcal{B}$ est une famille de parties de E constituant la base de la famille d'ensembles ouverts, la sous-famille d'ensembles de $\mathcal{B}$ contenant chacun le point p constitue un système de voisinages pour p, car tout ensemble ouvert contenant p est une réunion d'ensembles de $\mathcal{B}$ et doit contenir un des ensembles de $\mathcal{B}$ contenant p.

En particulier, lorsque E est un ensemble ordonné, la famille de tous les intervalles ouverts contenant un point p est un système de voisinages pour p.

D'après ce qui précède lorsqu'on considère l'ensemble des nombres rationnels, la famille d'intervalles ouverts contenant un élément α constitue un système de voisinages pour α. Mais on voit immédiatement que la famille d'intervalles fermés (ou demi-ouverts) contenant α constitue également un système de voisinages pour α.

De même, dans la topologie définie dans l'ensemble $\hat{E}^1$ composé de tous les rationnels et des éléments $-\infty, +\infty$, la famille de tous les intervalles ouverts (fermes, ou demi-ouverts) contenant un rationnel α est un système de voisinages pour α. La famille de tous les intervalles $(a, +\infty]$ (ou $[a, +\infty]$) où a est un nombre rationnel quelconque, constitue un système de voisinages pour le point $+\infty$; la famille de tous les intervalles $[-\infty, a)$ (ou $[-\infty, a]$) est un système de voisinages pour $-\infty$.

Remarquons que les points $-\infty, +\infty$ appartiennent, dans la topologie de $\hat{E}^1$ au support fermé de l'ensemble composé de tous les nombres rationnels.

Tout intervalle ouvert $I = (\beta, \gamma)$ contenant un nombre rationnel α contient tous les intervalles ouverts de la forme $(\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n})$, où n est un entier positif ~~lorsque n est~~ suffisamment grand; il suffit pour cela que $n > 1/(\alpha - \beta)$, $n > 1/(\gamma - \alpha)$ car alors $\beta < \alpha - \frac{1}{n}$, $\alpha + \frac{1}{n} < \gamma$. La famille d'intervalles $V_n(\alpha) = (\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n})$ constitue, par conséquent, un système de voisinages pour α. On voit ainsi, d'après ce que nous avons dit plus haut, que, pour qu'un ensemble Ω de nombres rationnels soit ouvert (dans la topologie définie dans $\hat{E}^1$), il faut et il suffit qu'à chacun de ses éléments α corresponde un entier n tel que l'intervalle $(\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n})$ soit contenu dans Ω.

Remarquons, enfin, que dans la topologie définie dans $\hat{E}^1$ la famille $(n, +\infty)$, où n est un entier quelconque, constitue un système de voisinages pour $+\infty$; et la famille $[-\infty, a)$ est un système de voisinages pour $-\infty$.

<u>Exercice.</u> Montrer que si l'on définit dans l'ensemble de tous les entiers rationnels comme ensemble ouvert toute réunion d'intervalles ouverts (a,b), a et b étant des entiers tels que $a<b$, et l'ensemble vide, la famille d'intervalles fermés contenant un point p ne constitue pas un système fondamental de voisinages pour p.

Les derniers exemples de systèmes de voisinages incitent à penser que, d'une manière générale, lorsqu'on définit pour chaque point p d'un ensemble fondamental E un système d'ensembles contenant p, qu'on appellera <u>système attaché à p</u>, on peut définir une topologie dans E de la manière suivante: un ensemble Ω sera dit ouvert s'il est de la forme $\Omega = \bigcup\limits_{p\in\Omega} V(p)$, $V(p)$ étant un des ensembles du système attaché à p. La famille $\mathcal{O}$ de ces ensembles vérifie bien O-I, ainsi d'ailleurs que O-III.

Supposons qu'on ait attaché à chaque point de E deux systèmes, celui des ensembles $V(p)$ et celui des $W(p)$. ~~, on~~ On voit immédiatement que si chaque $V(p)$ contient un $W(p)$ on a, si Ω est un ensemble ouvert défini par les systèmes $V(p)$:

$$\Omega = \bigcup_{p\in\Omega} V(p) \supset \bigcup_{p\in\Omega} W(p) \supset \Omega,$$

où $W(p) \subset V(p)$. Ω est donc aussi un ensemble ouvert dans la topologie définie par les systèmes $W(p)$.

Si deux systèmes $V(p)$ et $W(p)$ attachés à un point sont tels que tout $V(p)$ contienne un $W(p)$ et réciproquement, les deux systèmes sont dits <u>équivalents</u>.

On voit d'après ce qui précède que:

Si l'on attache à chaque point p de E deux systèmes équivalents, $V(p)$, $W(p)$, les topologies définies respectivement par les systèmes V et W sont telles que tout ensemble ouvert dans l'une l'est dans l'autre.

En général, un système $V(p)$ attaché à un point p ne constitue pas un système fondamental de voisinages dans la topologie définie par les systèmes V attachés à tous les points. Mais il est encore évident, d'après ce qui précède que si ceci a lieu, et si tout ensemble ouvert dans la topologie définie par les systèmes V l'est aussi dans celle définie par les systèmes W, tout $V(p)$ contient un $W(p)$. On voit ainsi que:

Si les deux systèmes $V(p), W(p)$ constituent pour chaque point p des systèmes fondamentaux de voisinages, et si tout ensemble ouvert dans la topologie définie par les premiers systèmes l'est dans celle définie par la seconde et réciproquement, les systèmes $V(p)$ et $W(p)$ sont, en chaque point équivalents.

Il n'est pas difficile d'indiquer une condition que doivent vérifier les $V(p)$ attachés aux points de E pour que, dans la topologie définie par ces systèmes, chaque système $V(p)$, attaché à un point constitue un système fondamental de voisinages.

Voici la condition en question:

Pour que la topologie dans E, définie par les systèmes $V(p)$ attachés à chaque point p de E, soit telle que chaque système $V(p)$ soit un système fondamental pour p, il faut et il suffit qu'à tout $V(p)$ du système attaché à p on puisse faire correspondre un $V'(p)$ du même système tel que $V(p)$ contienne au moins un voisinage $V''(q)$ du système attaché à chacun des points q de $V'(p)$.

La condition est évidemment nécessaire, car si Ω est un ensemble ouvert contenu dans $V(p)$ et contenant p tout ensemble du système contenu dans Ω et contenant p est bien un $V'(p)$ de l'énoncé.

La condition est aussi suffisante. Ecrivons, en effet,

$$p_1 = p,\ V(p) = V_1(p_1),\ V_1'(p_1) = V'(p),\ V_2(p_2) = V_1''(p_2) = V''(p_2) \text{ si } p_2 = q \in V'(p),$$

et soient $V_2'(p_2)$, $V_3(p_3)$ les ensembles tels que $V_2'(p_2)$ appartienne au système attaché à p_2 et ~~tel~~ qu'à chacun de ses points p_3 corresponde un ensemble $V_3(p_3)$ du système attaché à p_3; et, en procédant par récurrence, désignons par $V_n'(p_n)$, $V_{n+1}(p_{n+1})$ les ensembles qui appartiennent respectivement aux voisinages de p_n et p_{n+1} et qui soient tels que, quel que soit le point p_{n+1} de $V_n'(p_n)$, $V_{n+1}(p_{n+1})$ appartienne à $V_n(p_n)$.

L'ensemble

$$V_1'(p_1) \cup \Big(\bigcup_{p_2 \in V_1'(p_1)} V_2'(p_2)\Big) \cup \Big(\bigcup_{\substack{p_3 \in V_2'(p_2) \\ p_2 \in V_1'(p_1)}} V_3'(p_3)\Big) \ldots \cup \Big(\bigcup_{\substack{p_n \in V_{n-1}'(p_{n-1}) \\ \cdots \\ p_2 \in V_1'(p_1)}} V_n'(p_n)\Big)$$

est évidemment un ensemble ouvert contenu dans $V(p)$. Chaque $V(p)$ est donc un voisinage de p ; ~~et~~ le système lui-même est alors évidemment un système fondamental attaché à p.

§ 2 Fonctions continues.

La notion de fonction continue est une des plus importantes de l'analyse. Ce sont les fonctions qui réalisent une certaine correspondance, que nous définirons dans un instant, entre la topologie de l'espace où la fonction est définie, d'une part, et celle de l'espace où elle prend ses valeurs, d'autre part. La définition d'une fonction continue constitue en réalité une relation entre la fonction et les voisinages (et par conséquent les ensembles ouverts) des deux espaces: ~~celui~~ E où elle est définie et ~~celui~~ E' où elle prend ses valeurs; de sorte que deux de ces trois notions étant définies, la troisième l'est également; il nous arrivera, plus tard, de définir la topologie dans E ou dans E', en cherchant à rendre continue une fonction (ou une famille de fonctions) lorsque la topologie dans E' ou E est connue.

Voici la définition d'une fonction continue:

Soit f une fonction définie dans un espace topologique E et prenant ses valeurs dans un espace topologique E'. Cette fonction est continue au point p de E si, à tout voisinage V' du point $p' = f(p)$ dans E' correspond un voisinage V du point p dans E tel que

$$f(V) \subset V';$$

ce qu'on peut encore écrire sous la forme suivante:

$$\overset{-1}{f}(V') \supset V.$$

La fonction f est dite continue dans E si elle l'est en tout point de E.

Il résulte immédiatement de la définition de la continuité que:

La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f soit continue au point p, est que, quel que soit le voisinage V' du point $p' = f(p)$, l'ensemble $\overset{-1}{f}(V')$ soit un voisinage V de p.

La notion de la continuité est intimement liée à celle, également importante, de la limite.

Soit f une fonction définie dans l'espace topologique E et prenant des valeurs dans l'espace topologique E'. On dit que f admet, au point p, de l'espace E une limite a', et on écrit $\lim\limits_{q \to p} f(q) = a'$, si, a' appartenant à E', quel que soit le voisinage V' de a', dans E', l'ensemble $\overset{-1}{f}(V')$ contient tous les points d'un voisinage V du point p de E, sauf peut-être le point p lui-même. C'est-à-dire si:

 18

$$V - \{p\} \subset \overset{-1}{f}(V').$$

On peut encore dire que f admet en p une limite a', si, quel que soit le voisinage V' de a', il existe un voisinage V de p tel que $f(V-\{p\}) \subset V'$.

Il est évident que pour que a' soit une limite de f en p il faut et il suffit que, quel que soit le voisinage V'' d'un système fondamental de a' dans E', on ait $\overset{-1}{f}(V'') \supset V-\{p\}$ où V est un certain voisinage de p.

Il résulte immédiatement de cette définition et de celle de la continuité en un point la proposition suivante qui indique la liaison entre ces deux notions.

<u>Proposition 1. Pour que la fonction f définie dans l'espace E soit continue au point p de E, il faut et il suffit que cette fonction admette en p une limite égale à $p'=f(p)$.</u>

On voit d'après cette proposition que si f possède une limite au point p, cette limite étant égale à q', il suffit de poser, en changeant éventuellement la valeur que prend f en p, ~~en posant~~ $f(p)=q'$, pour que cette fonction soit continue en p.

En général, une fonction peut admettre, en un point plusieurs limites, et ceci même lorsqu'elle est continue en ce point.

<u>Exemple</u>. Si, a et b étant deux points donnés distincts, appartenant à E, la topologie dans E est définie de sorte que tout ensemble ouvert contenant a contient b, et réciproquement, la fonction identique, c'est-à-dire prenant au point p de E la valeur p, admet en chacun des points a, b deux limites qui sont a et b.

L'utilité de la notion de la limite est singulièrement diminuée lorsqu'une fonction peut admettre en un point deux limites. C'est pourquoi il importe de connaître les espaces E tels que si une fonction prend ses valeurs dans un tel espace, elle ne puisse admettre qu'une seule limite.

Pour avoir de tels espaces, nous introduirons l'axiome supplémentaire suivant:

O-$\underline{IV}$. Quels que soient les points distincts p, q de E, on peut trouver deux ensembles ouverts Ω, Ω' dans E sans point commun et tels que $p \in \Omega$, $q \in \Omega'$ (Axiome de Hausdorff)

Cet axiome peut encore être énoncé de la manière suivante:

Quels que soient les deux points distincts p et q de E, il existe un voisinage de p et un voisinage de q sans point commun.

La raison d'être de l'axiome O-$\underline{IV}$ est le théorème suivant:

Théorème I. Si la topologie dans E' vérifie l'axiome O-$\underline{IV}$, et si la topologie dans E est telle que deux voisinages quelconques de $p \in E$ admettent un point commun différent de p, une fonction f définie dans E et prenant ses valeurs dans E' ne peut admettre en p qu'une seule limite.

Effectivement, si p' et q' sont deux limites de f en p, on a, en désignant par V' un voisinage quelconque de p' et par V'' un voisinage quelconque de q' :

$$\overset{-1}{f}(V') \supset V_1 - \{p\}, \quad \overset{-1}{f}(V'') \supset V_2 - \{p\},$$

où V_1 et V_2 sont deux voisinages de p. Comme

$$A = \overset{-1}{f}(V' \cap V'') = \overset{-1}{f}(V') \cap \overset{-1}{f}(V'') \supset (V_1 - \{p\}) \cap (V_2 - \{p\}) = (V_1 \cap V_2) - \{p\},$$

on voit que l'ensemble A n'est pas vide, donc $V' \cap V''$ non plus, ce qui prouve, en vertu de O-$\underline{IV}$ que $p' = q'$.

Le fait que le point p où une fonction f admet une limite, est tel que deux de ses voisinages contiennent toujours un point commun différent de p, joue fréquemment un rôle important. Ceci tient à la proposition suivante:

Proposition 2 . Si la topologie dans E est telle que deux voisinages quelconques de p admettent un point commun différent de p ; si la fonction f , définie dans l'espace E et prenant ses valeurs dans l'espace E', est telle qu'il existe un voisinage V de p dans E et un ensemble fermé F dans E' tels que $f(V-\{p\}) \subset F$; et si $\lim_{q \to p} f(q) = a'$, on a $a' \in F$.

En effet, quel que soit le voisinage V' de a' il existe un voisinage V_1 de p tel que $f(V_1-\{p\}) \subset V'$. On a donc $f[(V_1 \cap V)-\{p\}] \subset V' \cap F$; l'ensemble $(V_1 \cap V)-\{p\}$ n'étant pas vide, $V' \cap F$ ne l'est pas non plus, ce qui prouve que $a' \in F$.

Exemple. Une fonction définie dans un espace discret et prenant des valeurs dans un espace E', admet en tout point p n'importe quel point de E' comme limite, car, il suffit de prendre pour le voisinage V de p l'ensemble $\{p\}$ pour avoir $V-\{p\} = O$.

Dans cet exemple la conclusion de la proposition 2 n'est pas vérifiée.

Dans les exemples que nous aurons à traiter, nous supposerons, toujours, $O-\overline{IV}$ vérifié, c'est pourquoi il importe d'établir dès maintenant la proposition suivante:

Proposition 3 . Si les axiomes $O-\overline{II}$ et $O-\overline{IV}$ sont vérifiés, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point p soit un point d'accumulation d'un ensemble A , est que tout voisinage de p contienne une infinité de points distincts de A.

La condition est évidemment suffisante. Elle est aussi nécessaire, car s'il y avait un voisinage V de p ne contenant qu'un nombre fini de points distincts: $a_1, a_2, \dots a_n$ de A différents de p , il suffirait de choisir des voisinages $V_1, V_2, \dots V_n$ de p ne contenant pas respectivement les points $a_1, a_2, \dots a_n$, ce qui serait possible en vertu de O-$\overline{IV}$, pour constater que l'intersection des voisinages $V, V_1, V_2 \ldots V_n$ est, en vertu de O-$\overline{II}$, un voisinage de p ne contenant aucun point de A ; p ne serait donc pas un point d'accumulation de A.

Il en résulte en particulier la proposition suivante:

Proposition 4. Si O-$\overline{II}$ et O-$\overline{IV}$ sont vérifiés, tout ensemble composé d'un nombre fini de points est fermé.

En effet, soit A cet ensemble; comme (voir page) $\bar{A} = A \cup A'$, où $\bar{A}$ est le support fermé de A et A' l'ensemble de ses points d'accumulation, et comme, d'après la proposition précédente, A' est vide, on voit que $A = \bar{A}$.

Nous allons maintenant signaler une proposition donnant une condition suffisante pour que O-$\overline{IV}$ ait lieu.

Proposition 5. Si tout ensemble composé d'un seul élément est fermé, et si la famille de tous les ensembles fermés contenant un point p constitue un système fondamental pour p, O-$\overline{IV}$ est vérifié.

Soient, en effet, p et q deux points distincts dans E. $\{q\}$ étant un ensemble fermé, $\Omega = \complement\{q\}$ est ouvert et contient p ; il existe donc un ensemble fermé F contenu dans Ω et contenant un ensemble ouvert Ω', contenant lui-même p. L'ensemble $\complement F$ est ouvert, contient q et n'a pas de point commun avec Ω'. La proposition est ainsi démontrée.

On peut, enfin, indiquer une condition impliquant O-$\overline{IV}$, semblable à celle-ci et suffisante pour que la famille d'ensembles fermés contenant un point constitue un système de voisinages pour ce point. On aura ainsi donné deux conditions dont une est nécessaire et l'autre suffisante pour que ce fait se produise.

22

<u>Proposition 6 . Si, quels que soient les deux ensembles A et B tels que $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = 0$, il existe deux ensembles ouverts Ω et Ω' tels que Ω contienne A et Ω' contienne B et tels que $\Omega \cap \Omega' = 0$, et si tout ensemble composé d'un seul élément est fermé, la famille d'ensembles fermés contenant un point p constitue un système de voisinages de p .</u>

Soit Ω_1 un ensemble ouvert contenant p , et posons $F_1 = C\Omega_1$.

L'égalité $\{p\} \cap F_1 = 0$ peut aussi s'écrire de deux manières suivantes: $\{p\} \cap F_1 = 0$, $\{p\} \cap \bar{F_1} = 0$. Il existe donc deux ensembles ouverts Ω, Ω' tels que $p \in \Omega$, $F_1 \subset \Omega'$, $\Omega \cap \Omega' = 0$. Par conséquent $p \in \Omega \subset C\Omega' = F \subset CF_1 = \Omega_1$ où F est un ensemble fermé. Notre proposition est ainsi démontrée.

Il résulte des deux propositions qui précèdent que : Si, quels que soient les deux ensembles A et B tels que $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = 0$, il existe deux ensembles ouverts Ω et Ω' tels que Ω contienne A et Ω' contienne B et tels que $\Omega \cap \Omega' = 0$, et si tout ensemble composé d'un seul élément est fermé, O-$\overline{IV}$ a lieu.

<u>Exercices</u> Montrer ce qui précède directement.

Montrer que tout espace contenant un nombre fini d'éléments et vérifiant O-$\overline{II}$ et O-$\overline{IV}$ est discret.

Montrer que l'espace composé de deux éléments a, b et où les ensembles ouverts sont les ensembles: $\{a\}$, $\{a\} \cup \{b\}$ et l'ensemble vide, vérifie O-$\overline{II}$ mais ne vérifie pas O-$\overline{IV}$ et n'est pas discret.

Montrer que si O-$\overline{II}$ et O-$\overline{IV}$ ont lieu, O-$\overline{III}$ a également lieu.

Reprenons maintenant la notion de la continuité; on voit immédiatement que le théorème suivant, dit Théorème des fonctions de fonctions, a lieu:

Théorème II. Soient f une fonction définie dans E et prenant ses valeurs dans E' et f' une fonction définie dans E' et prenant ses valeurs dans E''. Si f est continue au point p et f' continue au point $p' = f(p)$, la fonction $f'' = f'[f(p)]$ définie dans E et prenant ses valeurs dans E'' est continue au point p.

Si, en effet, V'' est un voisinage quelconque de $p'' = f'(p')$ $\overset{-1}{f'}(V'') = V'$ est un voisinage de p'. Mais alors, $\overset{-1}{f}(V') = V$ sera aussi un voisinage de p ; or, on sait que $\overset{-1}{f''}(V'') = \overset{-1}{f}[\overset{-1}{f'}(V'')] = \overset{-1}{f}(V') = V$ d'où, en vertu de la même proposition 1 on voit que f'' est continue au point p. Il résulte de ce théorème que:

Si f est une fonction continue dans E prenant ses valeurs dans E' et si f' est une fonction continue définie dans E' et prenant ses valeurs dans E'', la fonction $f''(p) = f'[f(p)]$ définie dans E et prenant ses valeurs dans E'' est une fonction continue dans E.

Le théorème suivant donne directement la relation qui existe entre les deux topologies définies respectivement dans les deux espaces E et E' qui sont respectivement les espaces de définition et celui de variation d'une fonction continue.

Théorème III. Pour que la fonction $p' = f(p)$ définie dans E et prenant ses valeurs dans E' soit continue dans E', il faut et il suffit que, quel que soit l'ensemble ouvert Ω' dans E', $\Omega = \overset{-1}{f}(\Omega')$ soit un ensemble ouvert dans E.

En effet, si cette condition est vérifiée et si V' est un voisinage de $p' = f(p)$ dans E', il existe un ensemble Ω' ouvert dans E' tel que $\Omega' \subset V'$, $p' \in \Omega'$, et comme $\Omega = \overset{-1}{f}(\Omega') \subset \overset{-1}{f}(V')$, on voit que $\overset{-1}{f}(V')$ contient un ensemble ouvert, contenant évidemment p, donc cet ensemble est un voisinage de p, et f est continue en vertu de la proposition 1. Réciproquement si f est continue, quel que soit l'ensemble ouvert Ω' dans E', $A=\overset{-1}{f}(\Omega')$ sera un voisinage de tout point p de A, car Ω' est un voisinage de tout point $p'=f(p)$ lui appartenant; A est donc bien un ensemble ouvert.

Il en résulte immédiatement que:

Si f est continue dans E, quel que soit l'ensemble fermé F' de E', l'ensemble $\overset{-1}{f}(F')=A$ est fermé et réciproquement, si ceci a lieu f est continue dans E.

Il suffit, en effet, de remarquer que $\overset{-1}{f}(\complement F')=\complement A$ pour être ramené au théorème précédent.

Mais il ne faut pas croire que si f est continue, quel que soit l'ensemble fermé F, $f(F)$ est fermé.

Exemple. Soit E un espace topologique quelconque et soit E' l'espace composé de deux éléments a et b, où les ensembles ouverts sont les suivants: $\{a\}$, E' et l'ensemble vide. Si f prend en tout point de E la valeur a, quel que soit l'ensemble A de E on a $f(A)=\{a\}$ qui n'est pas fermé, en particulier quel que soit l'ensemble fermé F de E, $f(F)$ n'est pas fermé.

Exercices Démontrer que chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que la fonction f définie dans E et prenant ses valeurs dans E' soit continue:

1°) Quel que soit l'ensemble A' de E', on a, en posant $C=\overset{-1}{f}(A')$:

$$\bar{C} \subset \overset{-1}{f}(\bar{A}')$$

2°) On a, en conservant les notations de 1°, et en désignant par Ω' l'intérieur de A' et par Ω_1 l'intérieur de C:

$$\Omega_1 \subset \overset{-1}{f}(\Omega').$$

3°) On a, en conservant les notations de 1°, et en désignant par A_1 l'adhérence de A' et par A_2 l'adhérence de C:

$A_2 \subset \overset{-1}{f}(A_1)$

Donner un exemple d'une fonction continue f telle, qu'en conservant les notations de 1°, l'ensemble $\overset{-1}{f}(\bar{A}')$ contienne des points n'appartenant pas à $\bar{C}$.

Démontrer que si la topologie dans E est la plus faible vérifiant O-$\underline{III}$ (l'ensemble vide et E sont les seuls ensembles ouverts) et si la topologie dans E' est la plus forte (toute partie de E' est un ensemble ouvert) les seules fonctions continues définies dans E et prenant leurs valeurs dans E' sont les fonctions prenant la même valeur en tout point de E.

Démontrer que si la topologie dans E est discrère, quelle que soit la topologie définie dans E', toute fonction définie dans E et prenant des valeurs dans E' est continue.

Démontrer que si α est un nombre rationnel fixe, les fonctions $f(x) = \alpha + x$, $g(x) = \alpha x$, définies sur l'ensemble E^1 des nombres rationnels x et prenant leurs valeurs dans le même ensemble, sont continues (la topologie dans E^1 est celle définie plus haut).

Deux espaces topologiques E et E' sont dits <u>topologiquement *isomorphes*</u> (ou parfois, lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre: <u>*homéomorphes*</u>, ou <u>*isomorphes*</u> tout court), si l'on peut établir une correspondance biunivoque entre ces deux ensembles, telle, qu'à tout ensemble ouvert dans un de ces espaces corresponde un ensemble ouvert dans l'autre.

On peut établir une *isomorphie* topologique entre deux ensembles par l'intermédiaire des fonctions continues.

Soient $p' = f(p)$ et $p = g(p')$ deux fonctions, la première définie dans E et prenant ses valaurs dans E', la seconde définie dans E' et prenant ses valeurs dans E. Si les deux fonctions f et g définissent une correspondance biunivoque entre E et E' et sont respectivement continues dans E et E' la correspondance qu'elles réalisent est dite <u>biunivoque et bicontinue</u>. On peut énoncer le théorème suivant:

<u>Théorème IV</u>. <u>Soient $p' = f(p)$ et $p = g(p')$ deux fonctions réalisant une correspondance biunivoque entre les deux espaces E et E'. Pour que ces deux espaces soient topologiquement isomorphes, il faut et il suffit que cette correspondance soit bicontinue.</u>

Il suffit, en effet, de remarquer que, quels que soient les deux ensembles Ω et Ω' respectivement ouverts dans E et E', on a:
$$f(\Omega) = g^{-1}(\Omega) \text{ et } g(\Omega) = f^{-1}(\Omega).$$

Pour **étudier** les propriétés de fonctions continues dans quelques espaces particulièrement importants il nous sera utile de démontrer la proposition suivante:

<u>Proposition 7</u>. <u>Si f, définie dans E et prenant des valeurs dans E' est continue, l'image, par f, d'un ensemble connexe est un ensemble connexe, c'est-à-dire que si A est connexe dans E, $f(A)$ est connexe dans E'.</u>

Soient, en effet, F_1' et F_2' deux ensembles fermés dont la réunion contient l'ensemble $A' = f(A)$; les ensembles $F_1 = f^{-1}(F_1')$ et $F_2 = f^{-1}(F_2')$ sont fermés dans E et leur réunion contient A. $F_1 \cap F_2$ possède donc un point de A, et l'ensemble $F_1' \cap F_2' \supset (f(F_1) \cap f(F_2))$ contient un point commun de A'.

§ 3 <u>Différentes manières de former une topologie</u>.

Tout ce qui précède montre que les fonctions continues établissent une correspondance entre les ensembles ouverts de deux espaces topologiques. Elles permettent, d'une manière générale, d'étudier les propriétés topologiques d'un espace lorsqu'on connaît celles d'un autre espace. On conçoit que ces procédés puissent être envisagés dans un sens inverse, et qu'il soit possible de définir une topologie dans un ensemble fondamental donné E, en y définissant comme famille $\mathcal{O}$ d'ensembles ouverts une famille contenant les ensembles $\overset{-1}{f}(\Omega')$ où f est une fonction donnée, arbitraire, définie dans E et prenant ses valeurs dans un espace topologique donné E'. On pourrait, également, chercher à rendre continues toutes les fonctions appartenant à une certaine famille $\mathcal{F}$, définies dans E et prenant des valeurs, chacune, dans un espace topologique correspondant. On pourrait, par exemple, opérer, en partant du principe général indiqué au § 1, et qui consiste à définir une topologie à partir d'une base $\mathcal{B}$, convenablement choisie.

Voici ~~le~~ le procédé, fréquemment employé:

Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions f_λ définies dans l'ensemble fondamental E, chacune de ces fonctions prenant ses valeurs dans l'espace topologique correspondant E'_λ. Soit $\mathcal{B}$ la famille composée de tous les ensembles $A = \overset{-1}{f_\lambda}(\Omega_\lambda)$ où Ω_λ est un ensemble ouvert quelconque dans E'_λ, f_λ étant une fonction quelconque de $\mathcal{F}$. Définissons comme famille $\mathcal{O}$ d'ensembles ouverts dans E la famille engendrée par la base $\mathcal{B}$; autrement dit, la famille $\mathcal{O}$ est composée de toutes les réunions d'ensembles appartenant à $\mathcal{B}$. Dans cette topologie les ensembles **fermés** sont ceux qui sont de la forme $\bigcap_\lambda [C\overset{-1}{f_\lambda}(\Omega_\lambda)]$, où f_λ est une fonction quelconque de $\mathcal{F}$, et où Ω_λ est un ensemble ouvert quelconque dans E_λ.

Remarquons encore que dans cette topologie, si $V_\lambda(p')$ est un voisinage de $p' = f(p)$ dans E_λ, $\overset{-1}{f_\lambda}(V_\lambda)$ est un voisinage de p dans E.

Il est facile à voir que <u>la topologie ainsi définie dans</u> E

est la plus faible rendant continues toutes les fonctions f_λ de $\mathcal{F}$.

On voit, en effet, en vertu du théorème III, que la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les fonctions f appartenant à $\mathcal{F}$ soient continues, est que tous les ensembles de $\mathcal{B}$ soient ouverts dans E, donc aussi toutes les réunions de ces ensembles.

Exercice. Montrer que si $\mathcal{F}$ ne contient que des fonctions constantes (c'est-à-dire ne prenant qu'une seule valeur, d'un espace topologique quelconque), la topologie définie dans E par le procédé ci-dessus est la plus faible.

Voici une application importante de ce qui précède:

Soit A un sous-ensemble de l'espace topologique E. Désignons par φ la fonction définie dans A et prenant en chaque point p la même valeur p considérée comme point de E. Si l'on cherche à établir une topologie dans A par le procédé précédent, c'est-à-dire de sorte à rendre φ continue (cette topologie étant la plus faible jouissant de cette propriété), on doit considérer comme ensemble ouvert dans A tout ensemble $\overset{-1}{\varphi}(\Omega)$ où Ω est un ensemble ouvert dans E, ainsi que toutes les réunions de tels ensembles. Or, il est évident que l'ensemble $\overset{-1}{\varphi}(\Omega)$ n'est autre que l'ensemble $\Omega \cap A$. Comme, d'autre part, $\bigcup_\lambda (\Omega_\lambda \cap A) = (\bigcup_\lambda \Omega_\lambda) \cap A = \Omega' \cap A$, où Ω' est encore un ensemble ouvert dans E, on voit que, par ce procédé, la famille de tous les ensembles ouverts dans A est celle de tous les ensembles de la forme $\Omega \cap A$ où Ω est un ensemble ouvert quelconque dans E.

La topologie ainsi définie dans A est appelée la topologie induite dans A par celle de E.

Il est évident que les ensembles fermés dans la topologie induite dans A par celle de E sont ceux de la forme $\bigcap_\lambda [A - (\Omega_\lambda \cap A)]$

où Ω_λ est un ensemble ouvert quelconque dans E.

Si la topologie dans E vérifie les axiomes O-$\underline{II}$ et O-$\underline{III}$ la topologie induite dans A par celle de E vérifie les mêmes axiomes.

Ceci est évident pour O-$\underline{III}$, car $E \cap A = A$; quant à O-$\underline{II}$, il suffit de remarquer que si Ω et Ω' sont deux ensembles ouverts dans E, on a :

$$(\Omega \cap A) \cap (\Omega' \cap A) = (\Omega \cap \Omega') \cap A.$$

On dira qu'une propriété quelconque, relative à des éléments, ou des sous-ensembles de A, est vérifiée <u>par rapport à A, ou relativement à A,</u> si elle l'est dans la topologie induite dans A par celle de E. Si B est une partie de E, on dira que $B \cap A$ est <u>la trace de B sur A</u> et on désignera cet ensemble par B_A.

Ainsi la famille d'ensembles ouverts par rapport à A est celle des traces d'ensembles ouverts dans E.

<u>Proposition 1.</u> <u>Si O-$\underline{II}$ et O-$\underline{III}$ sont vérifiés dans E, la condition nécessaire et suffisante pour que tout ensemble ouvert relativement à A le soit dans E, est que A soit ouvert dans E.</u>

En effet, si Ω' est un ensemble ouvert par rapport à A, il est la trace Ω_A d'un ensemble ouvert Ω dans E, et si A est ouvert dans E, $\Omega_A = \Omega \cap A$ l'est aussi, en vertu de O-$\underline{II}$.

D'autre part, O-$\underline{III}$ étant vérifié dans E, cet axiome l'est aussi dans A, et ce dernier ensemble est, par conséquent, ouvert par rapport à A, et comme $A = A_A$, il est aussi ouvert dans E.

Il est d'ailleurs évident que si Ω est ouvert dans E et si $\Omega \subset A$, Ω est aussi ouvert par rapport à A.

Les ensembles fermés par rapport à A sont caractérisés par la proposition suivante:

Proposition 2. Pour qu'une partie B de A soit un ensemble fermé par rapport à A, il faut et il suffit que B soit la trace sur A d'un ensemble fermé dans E.

En effet, les ensembles fermés relativement à A sont ceux de la forme:

$$\bigcap_{\lambda} [A - (\Omega_\lambda \cap A)] = \bigcap_{\lambda} [A \cap \complement(\Omega_\lambda)] = \bigcap_{\lambda} (A \cap F_\lambda) = (\bigcap_{\lambda} F_\lambda) \cap A$$

où les Ω_λ et F_λ sont respectivement des ensembles ouverts et fermés dans E ; mais $\bigcap_\lambda F_\lambda$ est aussi un ensemble fermé dans E, d'où la conclusion cherchée.

Proposition 3. Pour que tout ensemble B fermé par rapport à A soit fermé dans E, il faut et il suffit que A soit fermé dans E.

La condition est suffisante, car d'après la proposition précédente, tout ensemble fermé par rapport à A est de la forme $F_A = F \cap A$, et si A est fermé dans E, F_A l'est aussi.

La condition est aussi nécessaire car A est fermé par rapport à lui-même.

Ce qui précède permet facilement de distinguer les voisinages, par rapport à A, d'un point p de A ; on voit immédiatement que si V est un voisinage d'un point de A, dans E, sa trace V_A sur A est un voisinage de p relativement à A.

La trace sur A d'un système fondamental de voisinages d'un point p de A, dans E, forme un système fondamental de voisinages de p relativement à A.

Si f est une fonction définie dans E et prenant ses valeurs dans E' et si A est un sous-ensemble de E, nous désignerons par f_A la fonction définie dans A et égale en chaque point p de A à la valeur de $f(p)$. Les propositions suivantes résultent immédiatement de celle qui précède:

Proposition 4. Si la fonction f, définie dans l'espace E est continue en un point p, et si le sous-ensemble A de E contient p, la fonction f_A est continue en p relativement à A.

Proposition 5. Si f, définie dans E admet en p une limite a', et si p appartient au sous-ensemble A de E, f_A admet en p la valeur a' comme limite relativement à A.

Il est important, pour les applications à venir, de généraliser la notion de la limite lorsque, ou bien l'ensemble où la fonction est définie, ou bien celui où la fonction prend ses valeurs ne coïncident pas avec les espaces respectifs E et E'.

Ainsi, soient A un sous-ensemble de l'espace E et A' un sous-ensemble de l'espace E', et soient p un point appartenant au support fermé $\overline{A}^*$ de A^* et a' un point appartenant au support fermé $\overline{A'}$ de A'. Soit, enfin, f une fonction définie dans A et prenant ses valeurs dans A'. Nous dirons encore que f admet a' comme limite en p relativement à A et A' si, quel que soit le voisinage V' de a' dans E', il existe un voisinage V de p dans E tel que $V_A - \{p\} \subset \overset{-1}{f}(V'_A)$. Lorsqu'il sera entendu que la fonction f est définie dans A et prend ses valeurs dans A' il nous arrivera, lorsque ceci ne prêtera à aucune ambiguïté, de supprimer dans la définition qui précède la phrase "relativement à A et A'", ou seulement la partie "à A" ou „à A'". De même il nous arrivera de dire "continue en p" au lieu de "continue en p relativement à A" ~~si~~ s'il est entendu que la fonction est définie dans A.

32

Exercice Montrer que si $p \in A$ et $a' \in A'$ la définition que nous venons de donner coïncide avec celle donnée page . ~~, la~~

à la ligne

La proposition suivante qui peut être souvent utilisée résulte immédiatement de la définition ci-dessus.

Proposition 6 . Si une fonction f, définie dans l'ensemble A et prenant ses valeurs dans A', admet, en un point d'accumulation p de A, n'appartenant pas à A, une limite a', la fonction F définie dans l'ensemble $A \cup \{p\}$ et égale à f en chaque point de A et à a' en p, est continue en p.

Cette proposition permet de prolonger une fonction définie dans un ensemble A en un point p, ne lui appartenant pas, mais appartenant à son support fermé, lorsque cette fonction admet une limite en p.

La notion de la topologie induite nous permet de caractériser la connexion d'une partie A de E, par la proposition suivante:

Proposition 7 . La condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie A de E soit connexe est que ~~les~~ deux ensembles quelconques fermés relativement à A, et dont la réunion est égale à A, contiennent un point commun, ou, ce qui revient au même, que l'espace A, avec la topologie induite sur lui par celle de E, soit connexe.

En effet, s'il en est ainsi, quels que soient les deux ensembles fermés dans E: F' et F'', tels que $A \subset (F' \cup F'')$, on a aussi $A = (F'_A \cup F''_A)$, l'ensemble $F'_A \cap F''_A$ étant non vide; l'ensemble $F' \cap F''$ contient donc un point de A.

La condition est aussi nécessaire, car si A est connexe, quels que soient les deux ensembles fermés relativement à A : F_1 et F_2 tels que $A = F_1 \cup F_2$, on a, en posant $F_1 = F'_A$, $F_2 = F''_A$ où F' et F'' sont fermés dans E : $A \subset (F' \cup F'')$ et, il existe un point de A contenu dans $F' \cap F''$ donc aussi dans $F_1 \cap F_2$.

En combinant les propositions 3 et 7, on a le résultat suivant:

Pour qu'un ensemble fermé A soit connexe, il faut et il suffit que, quels que soient les deux ensembles fermés dont la réunion est égale à A, ils aient un point commun.

<u>Exemples</u> Soient E^1 l'espace des nombres rationnels avec la topologie définie plus haut et $\mathcal{E}^*$ celui des entiers rationnels. Comme

$$A \cap (n - \tfrac{1}{2}, n + \tfrac{1}{2}) = \{n\},$$

on voit que tout ensemble composé d'un seul élément de $\mathcal{E}$ constitue, dans la topologie induite dans $\mathcal{E}^*$ par celle de E^1, un ensemble ouvert. Toute partie de $\mathcal{E}^*$ est donc un ensemble ouvert par rapport à $\mathcal{E}^*$. Avec cette topologie $\mathcal{E}^*$ <u>est un espace discret</u>.

Il y a aussi lieu, pour les applications à venir, d'induire sur l'ensemble $\hat{\mathcal{E}}$ composé de tous les entiers positifs et de l'élément $+\infty$, la topologie définie sur $\hat{E}^1$ (voir page).

Dans la topologie ainsi définie sur $\hat{\mathcal{E}}$, un ensemble quelconque composé d'un entier positif est ouvert, de même que l'ensemble composé de tous les entiers plus grands (ou égal) à un entier donné et de l'élément $+\infty$. La famille de ces derniers ensembles constitue un système de voisinage pour $+\infty$.

<u>Exercices</u>. E étant un ensemble ordonné muni de la topologie définie

~~avec, comme~~ ~~par la~~ avec comme base, la famille d'intervalles ouverts, soit I un intervalle dans E. Démontrer que dans la topologie induite dans I par celle de E, tout ensemble ouvert relativement à I est une réunion d'intervalles de E contenus dans I. Suivant que I est ouvert, demi-ouvert ou fermé, voir quels sont les intervalles I_λ de E dont la réunion donne un ensemble ouvert par rapport à I.

Démontrer que si la partie A de l'espace E est telle que, quel que soit le point p de A, il existe un système de voisinages de p dans E ne contenant qu'un seul point de A, la topologie induite sur A par celle de E est discrète. L'exemple ci-dessus en est un cas particulier.

Démontrer que si l'on considère deux topologies dans E, une plus forte que l'autre, la topologie induite dans A par la plus forte est plus forte que la topologie induite par la plus faible.

~~Démontrer, par un exemple, que si p è A et si deux voisinages de p dans E ont toujours un point commun différent de p, cette propriété a lieu par rapport à A.~~

Si la topologie dans E vérifie $O\text{-}\overline{IV}$, la topologie induite dans A par celle E jouit de la même propriété.

Un autre procédé important de définition d'une topologie dans un ensemble donné E peut être caractérisé de la manière suivante: on considère une famille $\mathcal{F}$ de fonctions $f_\gamma(p_\gamma)$ (γ désignant un indice variant dans un ensemble Γ), l'élément p_γ variant dans un espace topologique E_γ, les valeurs $p'_\gamma = f_\gamma(p_\gamma)$ que prennent ces fonctions variant dans E, et l'on cherche, dans E la topologie la plus forte rendant continues toutes les fonctions f_γ de $\mathcal{F}$. Pour cela il faut et il suffit qu'on considère comme ensemble ouvert dans E, tout ensemble $\Omega \subset E$ tel qu'on ait pour tout $\gamma \in \Gamma$: $f_\gamma^{-1}(\Omega) = \Omega_\gamma$, où Ω_γ est un ensemble ouvert dans E_γ. Il est évident que ce procédé fournit bien une topologie, car la famille d'ensembles $\mathcal{O}$ ainsi définie contient l'ensemble vide et ~~que~~ si les ensembles Ω^δ, où δ varie dans un ensemble Δ, appartiennent tous à la famille, $\bigcup \Omega^\delta$ lui appartient aussi, en vertu de la formule $\varphi^{-1}(\bigcup_\delta \Omega^\delta) = \bigcup_\delta \varphi^{-1}(\Omega^\delta)$.

Dans cette topologie, toutes les fonctions f_γ sont continues, par définition, et c'est la topologie la plus forte jouissant de cette propriété, car si Ω' est un ensemble ouvert dans une autre topologie jouissant de cette propriété, on a pour chaque γ: $f_\gamma^{-1}(\Omega') = \Omega'_\gamma$ où Ω'_γ est ouvert dans E_γ.

La topologie que nous venons de définir dans E sera dite <u>topologie de E déduite de celles des E_γ</u>.

On voit, immédiatement, en vertu de la formule:

$$\varphi^{-1}(\Omega' \cap \Omega) = \varphi^{-1}(\Omega) \cap \varphi^{-1}(\Omega'),$$

que <u>si les topologies définies dans les espaces E_γ vérifient l'axiome O-II, la topologie de E déduite de celles des E_γ le vérifie également.</u> <u>Si les topologies dans les espaces E_γ vérifient O-III la topologie de E le vérifie également.</u>

Signalons la proposition suivante qui permet de reconnaître les ensembles fermés dans un espace dont la topologie a été déduite de celles d'une famille d'espaces.

<u>Proposition 8</u>. <u>Soit $\mathcal{F}$ la famille des fonctions f_γ définies, chacune, sur un espace topologique E_γ et prenant leurs valeurs dans E. Pour qu'un ensemble F de E soit fermé dans la topologie déduite de celles des espaces E_γ par les fonctions f_γ il</u>

faut et il suffit que pour chaque $\gamma \in \Gamma$ l'ensemble $\overset{-1}{f_\gamma}(F) = F_\gamma$ soit fermé dans E_γ.

Ceci résulte immédiatment de l'égalité:

$$\overset{-1}{f_\gamma}(F) = \overset{-1}{f_\gamma}(E) - \overset{-1}{f_\gamma}(\complement F) = E_\gamma - \overset{-1}{f_\gamma}(\complement F).$$

On en ~~conclut~~ tire immédiatement la proposition suivante:

Proposition 9. O-II étant vérifié dans chaque espace E_γ, pour que chaque sous-ensemble de E, composé d'un nombre fini d'éléments soit fermé dans la topologie déduite de celles des espaces E_γ par les fonctions f_γ, il faut et il suffit que, quel que soit l'élément α de E, les ensembles $\overset{-1}{f_\gamma}[\{\alpha\}]$ soient fermés dans E_γ.

Il suffit, en effet, de remarquer que si ~~$A \subset E$~~ une partie A de E ne contient qu'un nombre fini d'éléments, $\overset{-1}{f_\gamma}(A)$ est la réunion des ensembles en nombre fini de la forme $\overset{-1}{f_\gamma}[\{\alpha\}]$, où $\alpha \in A$, donc si la condition de l'énoncé est vérifiée, cet ensemble est fermé en vertu de O-II et de la proposition précédente. On voit en vertu de la même proposition, que la condition est nécessaire, car $\{\alpha\}$ étant fermé $\overset{-1}{f_\gamma}[\{\alpha\}]$ l'est aussi.

Pour simplifier le langage, nous nous bornerons à partir de maintenant, au cas où la famille $\mathcal{F}$ ne contient qu'une seule fonction f. Tous les résultats qui sont établis ci-dessous sont encore valables dans le cas général d'un nombre quelconque de fonctions, à condition d'arranger convenablement les énoncés au point de vue du langage; les démonstrations restent également inchangées dans le fond. Nous laissons au lecteur le soin de s'en convaincre.

Nous désignerons par E_1 l'ensemble fondamental où f est définie; elle prend ses valeurs dans E. Si, quel que soit l'élément a de E_1, on pose $\overset{-1}{f}[\{a\}]$, on peut écrire $E_1 = \bigcup_{a \in E_1} C_a$, de sorte que les éléments de E_1, sont répartis en classes, chaque classe comportant les éléments où f prend la même valeur.

On peut encore dire qu'on définit ainsi une relation d'équivalence entre éléments de E_1, et qu'à chaque classe d'éléments équivalents on fait correspondre la même valeur a de E_1. On dit souvent, en déduisant la topologie de E de celle de E_1, par ~~la~~ une fonction f, qu'on définit dans E une topologie par le procédé de l'équivalence. Cette expression est peu correcte, il nous arrivera néanmoins de l'employer lorsqu'elle ne prêtera à aucune ambiguïté.

Soit φ une fonction définie dans E_1, prenant ses valeurs dans un espace topologique E' et constante sur C_a, quel que soit a de E. La fonction φ dépend uniquement de a, et l'on peut écrire $\varphi(p) = F[f(p)]$, où $F(a)$ est une fonction définie dans E et prenant ses valeurs dans E'.

Ces remarques vont nous permettre de comparer une topologie définie sur E par l'équivalence, à celle qu'on peut y définir en cherchant la topologie la plus faible sur E rendant continues une certaine famille de fonctions prenant leurs valeurs dans des espaces topologiques. On a ainsi la proposition suivante:

Proposition 10. Soit f une fonction définie dans l'espace topologique E_1, et prenant ses valeurs dans E. Soit d'autre part φ une fonction définie sur E_1 prenant ses valeurs dans un espace topologique E', continue sur E_1 et prenant des valeurs constantes dans chaque ensemble $C_a = \overset{-1}{f}[\{a\}]$. Désignons par $\mathcal{F}$ la famille de toutes les fonctions F définies dans E, ~~et~~ prenant leurs valeurs dans E' et qui vérifient la relation $\varphi(p) = F[f(p)]$. La topologie la plus faible sur E qui rend continues toutes les fonctions F de $\mathcal{F}$ est plus faible que la topologie de E déduite de celle de E_1 par f.

La famille $\mathcal{B}$ d'ensembles qui sert de base pour la définition de la première de ces topologies est composée de tous les ensembles A dans E tels que $A = \overset{-1}{F}(\Omega')$ où F est une fonction quelconque de $\mathcal{F}$ et où Ω' est un ensemble ouvert quelconque dans E'.

Or, on peut écrire:

$$\overset{-1}{f}(A) = \overset{-1}{f}[\overset{-1}{F}(\Omega')] = \overset{-1}{\varphi}(\Omega') = \Omega_1,$$

l'ensemble Ω_1 étant ouvert dans E_1, du fait que φ est continue dans E_1. L'ensemble A est donc, par définition, un ensemble ouvert dans la topologie de E déduite de celle de E_1, par f.

La famille des ensembles ouverts dans cette dernière topologie contient donc la famille $\mathcal{B}$, donc tous les ensembles ouverts formés à partir de cette base.

Voici un corollaire immédiat de cette proposition:

Soit φ une fonction définie dans l'espace topologique E, prenant ses valeurs dans l'espace topologique E' et constante sur chaque ensemble $C_a = \overset{-1}{f}[\{a\}]$ où f une fonction ~~est~~ définie sur E_1, et ~~prend~~ prenant ses valeurs sur E; pour que la fonction F définie dans E, prenant ses valeurs dans E', et telle que $\varphi(p) = F[f(p)]$, soit continue dans E, où la topologie est déduite de celle de E_1, par la fonction f, il faut et il suffit que φ soit continue sur E_1.

Nous sommes maintenant en mesure d'indiquer une condition nécessaire et une autre condition suffisante pour qu'une topologie déduite par l'équivalence vérifie O-$\overline{IV}$.

Proposition 11. Si dans la topologie de F, déduite de celle de E_1, par f, O-$\overline{II}$ et O-$\overline{IV}$ sont vérifiés, l'ensemble C_a est fermé dans E_1, quel que soit a.

En effet, d'après la proposition 4, tout ensemble composé d'un nombre fini d'éléments de E est fermé, il résulte alors de la proposition 9 que C_a est fermé.

Proposition 12 . Si, quels que soient les éléments distincts α, β de E, on peut déterminer une fonction φ continue dans E_1, prenant ses valeurs dans un espace topologique F qui vérifie O-$\underline{II}$, O-$\underline{III}$, O-$\underline{IV}$, constante sur chaque ensemble C_a et prenant des valeurs distinctes sur C_α et C_β, la topologie de E déduite de celle de E_1 par f, vérifie O-$\underline{IV}$.

En effet, il existe, en vertu de la remarque faite plus haut, une fonction F continue dans E, prenant ses valeurs dans E' et telle que $\varphi(p) = F[f(p)]$; si l'on pose $F(\alpha) = p'$, $F(\beta) = q'$, il existe, du fait que la topologie dans E' vérifie O-$\underline{IV}$, des ensembles Ω' et Ω'' ouverts dans E, sans point commun et tels que $p' \in \Omega'$, $q' \in \Omega''$; les ensembles $\overset{-1}{F}(\Omega')$, $\overset{-1}{F}(\Omega'')$ sont donc des ensembles ouverts dans E, sans point commun et contenant respectivement α et β. La topologie dans E vérifie donc bien O-$\underline{IV}$.

Il est utile, enfin, de signaler la proposition suivante qui résulte d'ailleurs immédiatement de la proposition 7 du § 2:

Proposition 13 . Si l'espace E_1 est connexe et si l'on déduit sur E la topologie de E_1, par l'intermédiaire de la fonction f, l'ensemble des valeurs que prend f est connexe dans E.
Si, en particulier, f prend toutes les valeurs de E, E est connexe.

Exercices. Soit E un ensemble topologique, f une fonction définie dans E et prenant ses valeurs dans E'. Soit A' un ensemble ouvert dans E', où l'on définit la topologie déduite de celle de E, par l'intermédiaire de f. Soit $\overset{-1}{f}(A') = A$; soit φ la fonction définie dans A et prenant en chaque point $p \in A$ la valeur $p' = f(p)$. Démontrer que les deux topologies: la topologie induite sur A' par celle de E' et la topologie de A' déduite de la topologie induite sur A par celle de E, par l'intermédiaire de φ, sont isomorphes.

A étant une partie d'un ensemble topologique E, soit, comme à la page , φ la fonction définie dans A et prenant en chaque point p la même valeur p, considérée comme point de E. Montrer que dans la topologie de E déduite, par l'intermédiaire de φ, de la topologie induite sur A par la topologie du départ dans E, les ensembles ouverts Ω' sont de la forme $\Omega \cup B$, où Ω est un ensemble ouvert dans la topologie du départ de E et où B est tel que $B \cap A$ est vide.

Soient E et E' deux ensembles fondamentaux et soient $p' = f(p)$ et $p = g(p')$ définies dans E et E', prenant respectivement les valeurs dans E' et E et réalisant une correspondance biunivoque entre E et E'. Démontrer que si la topologie dans E' est la topologie déduite de celle de E par intermédiaire de f, la topologie de E est la topologie déduite de celle de E' par l'intermédiaire de g.

Nous allons maintenant donner un exemple de la définition d'une topologie par équivalence. Nous y reviendrons, plus tard, lorsqu'on aura défini l'ensemble des nombres réels, et l'exemple actuel, convenablement élargi, acquerra toute son importance.

E^1 étant l'ensemble de nombres rationnels, considérons comme équivalents deux nombres rationnels x, y tels que $x - y$ est un entier rationnel, ce qu'on écrit $x \equiv y$ (mod. 1), ou encore $x \equiv y\,(1)$, en lisant x est congru à y modulo 1.

Par conséquent, on peut dire qu'on partage tous les nombres rationnels en classes, telles que si x appartient à une de ces classes, celle-ci est composée de tous les nombres rationnels qui sont congrus à x modulo 1, sans en contenir d'autres.

Il y a, évidemment, correspondance biunivoque entre l'ensemble de ces classes et tous les nombres rationnels compris dans l'intervalle $[0, 1)$. Ce partage en classes est réalisé en désignant par $f(x)$ la fonction définie dans l'ensemble des rationnels et égale au nombre rationnel y compris dans $[0,1)$ et congru à x modulo 1. Chaque classe C_α n'est donc autre que l'ensemble $f^{-1}[\{\alpha\}]$, α étant rationnel et variant dans l'intervalle $[0,1)$; l'ensemble de ces nombres que nous désignerons par C, s'appelle l'ensemble des nombres rationnels modulo 1. Sur C on définira la topologie déduite de celle de l'espace des rationnels E^1, par la fonction f qu'on vient de définir. On peut encore dire qu'on définit sur C la topologie en partant de celle de E par équivalence, en considérant comme équivalents deux nombres rationnels congrus un à l'autre modulo 1.

Si $\varphi(x)$ est une fonction définie sur E telle que $\varphi(x+1)=\varphi(x)$, quel que soit x de E, on a par récurrence, $\varphi(x) = \varphi(x+n)$, quel que soit l'entier positif n, et en changeant x en $x-n$, $\varphi(x-n) = \varphi(x)$. Autrement dit, on a $\varphi(x) = \varphi(y)$ chaque fois que $y \equiv x(1)$. De même, en écrivant $x \equiv y(a)$ (x congru à y modulo a) chaque fois que $x-y=na$, où n est un entier positif, négatif ou nul, et où a est un nombre rationnel, on voit que si $\varphi(x+a) = \varphi(x)$ pour chaque rationnel, on a $\varphi(x) = \varphi(y)$, chaque fois que $x \equiv y(a)$. Une telle fonction est dite <u>périodique de période a</u>. D'après ce que nous avons vu plus haut (page), il y a correspondance biunivoque entre les fonctions continues sur C

et les fonctions continues périodiques de période 1.

Remarquons encore que si A est un ensemble ouvert dans la topologie définie sur $\mathcal{C}$, l'ensemble ouvert Ω qui lui correspond sur E^1, à savoir $f^{-1}(A)$, est une réunion d'intervalles ouverts (x,y) ; mais il est évident que si l'intervalle (x, y) appartient à Ω, l'intervalle $(x+n, y+n)$ lui appartient aussi, quel que soit l'entier n et, par suite l'ensemble $\Omega_{xy} = \bigcup_n (x+n, y+n)$ appartient à Ω. Ω est donc la réunion des ensembles de la forme Ω_{xy}, où x et y sont rationnels. Réciproquement toute réunion d'ensembles Ω_{xy} est ouvert dans E^1, et il est évident qu'il lui correspond un ensemble ouvert dans la topologie définie sur $\mathcal{C}$.

Il y a, par conséquent, correspondance biunivoque entre les ensembles ouverts dans $\mathcal{C}$ et les réunion d'ensembles Ω_{xy} sur E^1.

Remarquons, enfin, qu'en vertu de la proposition 13, l'espace $\mathcal{C}$ est connexe.

Nous venons d'étudier deux méthodes générales permettant de définir une topologie dans un ensemble E en partant de celles définies sur une famille d'espaces.

Nous allons maintenant indiquer une troisième méthode, non moins importante, et qui consiste à définir une topologie sur un ensemble qui est le produit direct d'espaces topologiques.

Désignons par E_γ, un espace topologique correspondant à l'indice γ, cet indice prenant toutes les valeurs d'un certain ensemble Γ. Soit E le produit direct des ensembles E_γ: $E = \prod_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments p dont chacun est un ensemble formé en prenant un élément dans chaque E_γ. On peut encore écrire $\{p\} = \prod_{\gamma \in \Gamma} \{p_\gamma\}$, où p_γ est un élément de E_γ. S'il n'y a aucune ambiguïté à craindre, nous écrirons cette même égalité sous la forme $p = (p_\gamma)$, et nous dirons que p_γ est la γ-ième coordonnée de p.

Si Γ est un ensemble dénombrable dont les éléments sont $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n, \ldots$, ou fini, avec des éléments $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$, on notera aussi $p = (p_{\gamma_1}, p_{\gamma_2}, \ldots p_{\gamma_n} \ldots)$ ou respectivement $p = (p_{\gamma_1}, p_{\gamma_2}, \ldots p_{\gamma_n})$.

Si $A_\gamma \subset E_\gamma$, le produit direct $A = \prod_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ est l'ensemble de tous les éléments p de E, tels que $p = (p_\gamma)$ où p_γ est un élément quelconque de A_γ.

Soit Ω_γ un ensemble ouvert quelconque dans E_γ, et considérons la famille $\mathcal{B}$ de tous les produits directs $\prod \Omega_\gamma$. La topologie que nous définirons dans E est celle qui a comme base la famille $\mathcal{B}$. Pour abréger, nous appellerons cette topologie, <u>topologie produit des topologies</u> de E_γ, et l'ensemble E, muni de cette topologie, <u>espace produit des espaces E_γ</u>.

Désignons par φ_λ la fonction définie dans le produit E des espaces E_γ et prenant en chaque point $p = (p_\gamma)$ la valeur p_λ de sa λ-ième coordonnée. On a la proposition suivante:

<u>Proposition 14</u>. <u>Si la topologie de chaque espace E_γ vérifie O-III toutes les fonctions φ_λ sont continues dans l'espace produit des espaces E_γ</u>.

On a, en effet, si Ω_γ désigne un ensemble ouvert dans E_λ

$$\varphi_\lambda^{-1}(\Omega_\lambda) = \prod_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = B,$$

où $A_\lambda = \Omega_\lambda$, et où $A_\gamma = E_\gamma$ si $\gamma \neq \lambda$; si donc les ensembles E_γ sont ouverts (c'est-à-dire si O-III est vérifié pour ces espaces),

B est bien un ensemble ouvert dans E, par définition.

Signalons que si O-$\overline{III}$ n'est pas vérifié dans les topologies des E_γ, les fonctions φ_λ ne sont pas, en général, continues dans E.

<u>Exercice</u>. Montrer que si $E = E_1 \times E_1$, où E_1, est l'ensemble composé de deux éléments a et b, et où les seuls ensembles ouverts sont l'ensemble vide et l'ensemble $\{a\}$ composé du seul élément a, la fonction définie dans E et égale, en chaque point, à sa première coordonnée n'est pas continue.

Indiquons une autre proposition liant entre elles les topologies définies dans les espaces E_γ et la topologie produit dans E.

Soit Γ_1, un sous-ensemble de Γ et posons $\Gamma_2 = \Gamma - \Gamma_1$. Désignons par E' l'ensemble des points (p_γ) de E, tels que chaque cordonnée p_λ, lorsque $\lambda \in \Gamma_2$ prend la valeur fixe a_λ, la coordonnée p_γ, lorsque $\gamma \in \Gamma_1$, prenant des valeurs quelconques dans E_γ.

<u>Proposition 15</u> . <u>La topologie induite sur E' par celle de la topologie produit de $E = \prod_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma$ est *isomorphe* à la topologie produit de l'espace $\prod E_\gamma$</u> .

L'ensemble E' n'est autre que $\prod_{\gamma \in \Gamma_1} E_\gamma \times \prod_{\gamma \in \Gamma_2} \{a_\gamma\}$; tout ensemble ouvert dans la topologie induite sur E' par celle de E^* est une réunion d'ensembles $\prod_{\gamma \in \Gamma_1} \Omega_\gamma \times \prod_{\gamma \in \Gamma_2} \{a_\gamma\}$, où Ω_γ est ouvert dans E_γ. La correspondance établie entre E' et $\prod_{\gamma \in \Gamma_1} E_\gamma$ est donc biunivoque et bicontinue.

<u>Si tous les espaces E_γ vérifient O-$\overline{III}$ et si l'espace produit E des espaces E_γ vérifie O-$\overline{II}$, la topologie dans E</u>

 45

est la plus faible vérifiant O-$\overline{II}$ et rendant continues les fonctions φ_γ .

En effet, la famille Ω' d'ensembles ouverts dans la topologie de E, la plus faible vérifiant O-$\overline{II}$ et rendant continues les fonctions φ_γ, contient la famille Φ composée de tous les ensembles $\varphi_\gamma^{-1}(\Omega_\gamma)$, où $\gamma \in \Gamma$, et où Ω_γ est un ensemble ouvert quelconque dans E_γ, et de toutes les intersections $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \varphi_\gamma^{-1}(\Omega_\gamma)$; on a évidemment :

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \varphi_\gamma^{-1}(\Omega_\gamma) = \prod_{\gamma\in\Gamma} \Omega_\gamma .$$

La famille Ω' contient donc la base qui a servi pour définir la topologie produit dans E, et aussi, par conséquent, la famille σ d'ensembles ouverts dans la topologie produit de E.

Réciproquement, en vertu de la proposition 14, la famille σ contient la famille σ'; les deux familles sont donc identiques .

Exercice. Soit E^1 l'espace de nombres rationnels avec la topologie qui y a été définie, page . Démontrer que la topologie produit définie dans l'ensemble des couples de nombres rationnels (espace $E^2 = E^1 \times E^1$) n'est pas la topologie la plus faible rendant continue la fonction qui en chaque point $p = (x_1, x_2)$ $[\{p\} = \{x_1\} \times \{x_2\},\ p \in E^2,\ x_1 \in E^1,\ x_2 \in E^1]$ prend la valeur x_1 .

Il résulte facilement de la définition même des ensembles ouverts dans un espace-produit que:

Si E est l'espace produit des espaces topologiques E_γ, pour que V soit un voisinage du point $p = (p_\gamma)$ de E, il faut et il suffit qu'à chaque $\gamma \in \Gamma$ corresponde un voisinage V_γ de p_γ tel que $V \supset \prod_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma$.

En effet, si V est un voisinage de p, il contient un ensemble ouvert Ω dans E contenant p . Ω étant, par définition la réunion des ensembles de la forme $\prod \Omega_\gamma$, il existe un tel produit faisant partie de Ω et contenant p. La réciproque est aussi immédiate.

On voit donc que:

Pour qu'un ensemble Ω dans l'espace produit $E = \prod E_\gamma$ soit ouvert, il faut et il suffit que, quel que soit le point $p = (p_\gamma)$ de Ω, on puisse faire correspondre à chaque γ un voisinage V_γ de p_γ tel que $\prod V_\gamma \subset \Omega$.

On voit aussi immédiatement que:

Si pour chaque γ le point p_γ de E_γ est tel que deux voisinages quelconques de p_γ ont un point commun différent de p_γ, le point $p = (p_\gamma)$ de $E = \prod E_\gamma$, est tel que deux voisinages quelconques de p ont un point commun différent de p.

Nous allons maintenant donner plusieurs propositions, toutes très simples, mais fort importantes, concernant les fonctions continues définies ou prenant des valeurs dans un espace-produit. Dans toutes ces propositions E désigne l'espace $\prod_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma$ où les E_γ sont des espaces topologiques, la topologie dans E étant la topologie-produit de celles de E_γ.

Proposition 16 - Si tous les espaces E_γ vérifient $O-III$, et si f est définie et continue dans un E_λ, la fonction F définie dans E et égale en chaque point (p_γ) à la valeur de f en $p_\lambda \in E_\lambda$ est continue dans E.

Ceci résulte immédiatement de la proposition 14 et du théorème sur les fonctions de fonctions; il suffit, en effet, d'écrire: $F(p) = f[\varphi_\lambda(p)]$.

Proposition 17. Supposons que tous les espaces E_γ, vérifient $O-III$ et soit f une fonction définie dans l'espace E' vérifiant $O-II$ et prenant des valeurs dans E ; posons pour chaque $p' \in E' : f(p') = \prod [f_\gamma(p')]$. Pour que f soit continue en un point p' de E', il faut et il suffit que chaque fonction f_γ soit continue au point p'.

La condition est nécessaire, ce qu'on voit d'après le théorème sur les fonctions de fonction, la proposition 14 et l'égalité: $f_\gamma(p') = \varphi_\gamma[f(p')]$. Cette condition est aussi suffisante, car, on peut écrire:

$$\overset{-1}{f}(\prod \Omega_\gamma) = \overset{-1}{f}[\cap \overset{-1}{\varphi}_\gamma(\Omega_\gamma)] = \cap \overset{-1}{f}[\overset{-1}{\varphi}_\gamma(\Omega_\gamma)] = \cap \overset{-1}{f}_\gamma(\Omega_\gamma)$$

ce qui prouve, en vertu de $O-II$ dans E', que si chaque Ω_γ est ouvert dans E_γ, $\overset{-1}{f}(\prod \Omega_\gamma)$ l'est également. On voit ainsi, d'après la définition d'ensembles ouverts, que, quel que soit l'ensemble ouvert Ω dans E contenant $p = f(p')$, $\overset{-1}{f}(\Omega)$ est ouvert dans E' et contient p'.

Voici enfin une conséquence immédiate de la proposition 15.

Proposition 18. Soit f une fonction continue en un point $a = (a_\gamma)$ de E. Soient Γ_1 et Γ_2 deux ensembles, tels que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = 0$ et faisons correspondre à chaque point q de l'espace-produit $\prod E_\gamma$ la valeur que prend f au point $p = (p'_\gamma)$ dont les coordonnées p'_γ sont telles que si $\gamma \in \Gamma_2$, $p'_\gamma = a_\gamma$ et si $\gamma \in \Gamma_1$ les p'_γ sont les coordonnées de même indice de q. La fonction ainsi définie est continue au point dont les coordonnées d'indices $\gamma \in \Gamma_1$ sont les a_γ.

On sait, d'après la théorie des ensembles qu'une fonction f définie dans un ensemble produit $\prod E_\gamma$ est parfois dite, bien que cette locution ne soit pas tout à fait correcte, fonction des variables (ou des coordonnées) p_γ, $(p_\gamma \in E_\gamma)$ — c'est une fonction de plusieurs variables. Lorsque γ ne prend que des valeurs $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ on note, parfois, $f(p_{\gamma_1}, p_{\gamma_2}, \ldots p_{\gamma_n}, \ldots)$, ou encore, lorsque γ ne prend que n valeurs: $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$: $f(p_{\gamma_1}, p_{\gamma_2} \ldots p_{\gamma_n})$, au lieu de noter respectivement $f[(p_{\gamma_1}, p_{\gamma_2}, \dots p_{\gamma_n}, \dots)]$, $f[(p_{\gamma_1} \dots p_{\gamma_n})]$.

On exprimera, quelquefois, la propriété établie dans la proposition 18 (d'une manière d'ailleurs aussi peu correcte), en disant qu'une fonction de plusieurs variables continue en un point $p = (p_\gamma)$ est, lorsqu'on fixe quelques-unes des variables, fonction continue, en ce point, de l'ensemble des autres variables.

La réciproque de la proposition 18 n'est pas vraie.

Exemple. La fonction $f(x, y)$, définie dans l'espace $\hat{E}^2$-produit direct dont chaque facteur est l'espace $\hat{E}^1$, composé des rationnels et des points $-\infty, +\infty$ (avec la topologie définie p. ..), égale à 1 lorsque $y > x, y < x$, et égale à 0 lorsque $x = y$ est continue aux points $(+\infty, +\infty), (-\infty, -\infty)$ par rapport à chacune des variables, mais ne l'est pas en ces points au sens de la topologie-produit de $\hat{E}^2$.

Nous indiquerons, plus loin, un autre exemple d'une fonction $f(p_1, p_2), (p_1 \in E_1, p_2 \in E_2)$ continue de p_1, quelle que soit la valeur fixe de p_2, et de p_2, quelle que soit la valeur fixe de p_1 sans qu'elle soit continue dans $E = E_1 \times E_2$.

Donnons maintenant un théorème concernant les limites des fonctions définies dans un espace-produit.

Théorème I. Supposons que pour chaque $\gamma, (\gamma \in \Gamma)$ le point p_γ de l'espace E_γ est tel que deux voisinages quelconques de ce point admettent un point commun différent de p_γ. Supposons que tout point de l'espace E' admet la famille d'ensembles fermés le contenant comme système fondamental. Posons $E = \prod E_\gamma$ et $E^\alpha = \prod A_\gamma$ avec $A_\gamma = E_\gamma$ si $\gamma \neq \lambda$ et $A_\gamma = \{\alpha\}$ où $\alpha \in E_\lambda$, la topologie dans E étant la topologie-produit de celles des E_γ, la topologie dans E^α étant induite par celle de E. Soit f une fonction définie dans

49

E, prenant ses valeurs dans E' et admettant au point $p=(p_\gamma)$ une limite a'.

Si pour tout $\alpha \in E_\lambda$, f_{E^α} possède au point $p^\alpha = (p'_\gamma)$, ($p'_\lambda = \alpha$, $p'_\gamma = p_\gamma$ si $\gamma \neq \lambda$) une limite $a(\alpha)$, cette fonction $a(\alpha)$, définie dans E_λ, admet en p_λ, a' comme limite.

En effet, quel que soit le voisinage fermé V' de a' (c'est-à-dire ensemble fermé qui est un voisinage de a'), il existe un voisinage V de p dans E tel que $f(V-\{\alpha\}) \subset V'$. V contient un ensemble ouvert de la forme $\prod \Omega_\gamma$ dont chaque facteur Ω_γ, est un ensemble ouvert dans E_γ contenant le point correspondant p_γ ; si donc $\alpha \in \Omega_\gamma$, V contient l'ensemble $V_1 = \prod B_\gamma$, avec $B_\lambda = \{\alpha\}$, $B_\gamma = \Omega_\gamma$ si $\gamma = \lambda$, qui est un voisinage de p^α dans E^α. On a donc:

$$f_{E^\alpha}(V_1 - \{p^\alpha\}) = f(V_1 - \{p^\alpha\}) \subset f(V - \{a'\}) \subset V'.$$

En vertu de la remarque faite page deux voisinages quelconques de p^α dans E^α admettent un point commun différent de p^α, on voit donc, en vertu de la proposition 2 du § 2, et de la formule que nous venons d'écrire que la valeur $a(\alpha)$ est contenue dans V' dès que $\alpha \in \Omega_\gamma$, ce qui prouve la proposition.

Rappelons que si l'on suppose que E' est en plus tel que tout ensemble composé d'un seul point est fermé, la topologie de cet espace vérifie 0-IV, a' est donc la seule limite de f en p et de $a(\alpha)$ en p_λ.

Le théorème précédent peut être étendu, au cas où l'on partage les coordonnées de chaque point $q = (q_\gamma)$ de E en deux catégories: celles dont les indices γ appartiennent à Γ_1, et celles dont les indices appartiennent à Γ_2 $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma,\ \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = O)$, l'espace E^{α} de la proposition précédente étant remplacé par l'espace $E_{\Gamma_1} = \prod A_\gamma$, où $A_\gamma = \{\alpha_\gamma\}$ si $\gamma \in \Gamma_1$ et $A_\gamma = E_\gamma$ si $\gamma \in \Gamma_2$, la fonction $f_{E_{\Gamma_1}}$ admettant (pour chaque α dont les coordonnées sont α_γ, $\gamma \in \Gamma_1$) une limite ~~en~~ au point p^{α} de E_{Γ_1} dont les coordonnées sont α_γ, si $\gamma \in \Gamma_1$ et p_γ si $\gamma \in \Gamma_2$. Les notations de l'énoncé sont quelque peu compliquées mais sa démonstration peut être calquée sur celle qu'on vient de faire.

Nous allons maintenant indiquer un exemple de la formation d'un espace-produit, exemple qui, comme celui de la page , sera complété et acquerra toute son importance lors de l'introduction de l'ensemble des nombres réels.

Soit E^1 l'ensemble des nombres rationnels, et désignons par E^n le produit direct de n facteurs respectivement identiques à l'ensemble E^1. C'est l'ensemble des éléments $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, où chaque x_i est un nombre rationnel.

Si on donne à l'ensemble E^1 la topologie définie page ,
on peut donner à E^n la topologie-produit correspondante, c'est-à-dire que la base de cette topologie sera la famille $\mathcal{F}$ d'ensembles Ω, dont chacun est de la forme: $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \cdots \times \Omega_n$ les ensembles $\Omega_1, \ldots \Omega_n$ étant ouverts dans E^1. Comme chaque ensemble Ω_j est la réunion d'intervalles ouverts dans E^1, on voit que Ω est lui-même la réunion d'ensembles de la forme $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \ldots \times (a_n, b_n)$ où chaque (a_j, b_j) est un intervalle ouvert dans E^1. Ce produit direct de n intervalles de E^1 sera appellé <u>intervalle ouvert dans</u> E^n (quelques-uns des a_j, ou tous, peuvent être le point $-\infty$, quelques-uns des b_j, ou tous, peuvent être le point $+\infty$). Le produit $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots [a_n, b_n]$ sera appelé intervalle fermé dans E^n. Il est évident, d'après la théorie générale, que les intervalles ouverts ou fermés contenant

le point $a=(a_1, a_2, \ldots a_n)$ forment pour ce point un système fondamental de voisinages.

On peut de la même façon étudier l'espace-produit de n espaces identiques dont chacun est l'ensemble $\hat{E}^1$ composé de tous les rationnels et des points $-\infty, +\infty$ muni de la topologie définie page . Pour avoir la base de la famille d'ensembles ouverts dans cet espace-produit, il suffit d'ajouter à la base qui définit la topologie dans E^n les produits $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, où un au moins des facteurs est un intervalle de la forme $[-\infty, a)$ ou $(a, +\infty]$, les autres étant des intervalles ouverts dans E^1. Ces produits constituent des intervalles ouverts dans $\hat{E}^n$ si chaque facteur est de la forme (a, b) où a et b sont des nombres rationnels, ou de la forme $(-\infty, a)$, $[-\infty, a)$, (a, ∞), $(a, +\infty]$; ils constituent des intervalles fermés dans $\hat{E}^n$ si chaque facteur est de la forme $[a, b]$ ou $[-\infty, a]$, $[a, \infty]$. La famille de tous les intervalles ouverts (ou fermés) dans $\hat{E}^n$ contenant un point p constitue encore un système de voisinages de p .

Il y a , enfin, lieu d'indiquer, pour les applications à venir, l'espace-produit de n facteurs, $\mathcal{E}^{*n}$ dont chacun est l'espace $\mathcal{E}^*$ d'entiers, dans lequel a été défini la topologie induite par celle de E^1, ou l'espace-produit de n facteurs, $\hat{\mathcal{E}}^n$ dont chacun est l'espace $\hat{\mathcal{E}}$ composé de tous les entiers positifs et du point $+\infty$. Chaque ensemble composé d'éléments $p=(p_1, p_2, \ldots p_n)$ où les p_i $(i=1,2, \ldots n)$ sont des entiers est un ensemble ouvert dans $\mathcal{E}^n$ ainsi que dans $\hat{\mathcal{E}}^n$. Ce dernier espace admet encore comme ensembles ouverts ceux de la forme $A_1 \times A_2 \times \cdots A_n$, où chaque facteur est, ou bien un esnemble quelconque d'entiers positifs, ou bien l'ensemble composé de tous les entiers supérieurs (ou égal) à un entier donné et du point $+\infty$. L'espace $\mathcal{E}^n$ est discret. Remarquons, enfin, que tout voisinage du point p de $\hat{\mathcal{E}}^n$ dont toutes les coordonnées sont $+\infty$ contient un intervalle ouvert dans $\hat{\mathcal{E}}^n$ de la forme $(a_1, +\infty] \times (a_2, +\infty], \ldots \times (a_n, +\infty]$ (ainsi qu'un intervalle fermé de la forme $[b_1, +\infty] \times [b_2, +\infty] \ldots \times [b_n, +\infty]$), où les a_i (ainsi que les b_i) sont des entiers. La famille de ces intervalles ouverts (ou fermés) constitue un système de voisinages pour le point p de $\hat{\mathcal{E}}^n$ dont toutes les coordonnées sont $+\infty$.

Exercice Montrer que la topologie induite sur l'ensemble-produit de n facteurs dont chacun est l'ensemble de tous les entiers par celle de l'espace E^n est isomorphe à la topologie-produit de $\mathcal{E}^{*n}$ qu'on vient de définir. Etablir le même fait lorsqu'on envisage, d'une part, l'ensemble produit de n facteurs dont chacun est composé de tous les entiers et des points $-\infty, +\infty$ et, d'autre part, l'espace $\hat{E}^n$.

§ 4 - Suites et limites.

D'après ~~que~~ ce que nous avons vu dans la théorie des ensembles on appelle suite d'éléments de E une fonction u définie dans l'ensemble d'entiers naturels, $\mathcal{E}$, et prenant ses valeurs dans E. Dans ce qui suit nous supposerons que l'ensemble E où la suite prend ses valeurs est un espace topologique, et nous envisagerons l'ensemble $\mathcal{E}$ comme partie de l'espace dont les points sont les nombres naturels et le point $+\infty$, et où on a défini la topologie induite par celle de l'espace de tous les rationnels et des points $\mp\infty$. Le point $+\infty$ est alors un point d'accumulation de l'ensemble $\mathcal{E}$.

Désignons par $u_{\{n\}}$ la fonction définie dans l'ensemble composé du seul élément n (entier naturel) et égale à la valeur de u en n. Nous l'appellerons le n-ième terme de la suite. Désignons par u_n l'élément de $E^{\neq}$ qui est la valeur de $u_{\{n\}}$ et par $\{u_n\}$ la suite. Nous dirons aussi que u_n est un point de la suite.

On dit que la suite $\{u_n\}$ tend vers une limite a de E, et l'on écrit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$, si la fonction u qui définit la suite admet a comme limite au point $+\infty$. On dit aussi que $\{u_n\}$ converge vers a, ou, encore, que les u_n tendent vers a. On dit qu'une suite est convergente si elle a une limite.

On voit, que si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$, la fonction ~~égale~~ définie dans $\hat{\mathcal{E}}$, égale à u_n en chaque point n et égale à a en $+\infty$, est continue au point $+\infty$.

Comme dans la topologie de $\hat{\mathcal{E}}$ tous les intervalles $[m, +\infty]$, où m est un entier naturel quelconque, constituent un système de voisinages du point $+\infty$, on voit que :

Pour que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$, il faut et il suffit que tout voisinage V de a dans E, contienne tous les éléments u_n à partir d'un certain rang, c'est-à-dire que tous les u_n appartiennent à V dès que $n \geqslant m$, où m est un certain entier.

Exercices. Montrer que si une suite tend vers a, toute suite extraite de la précédente tend aussi vers a.

Montrer que les suites $\{p/2^n\}$, $\{p/n\}$, où p est un entier tendant vers 0.

Il en résulte, en particulier que si le point a de E possède un voisinage réduit à ce seul point, la suite $\{u_n\}$ ne peut converger vers a que si, à partir d'un certain rang, tous les éléments u_n sont égaux à a. C'est le cas de tous les points d'un espace discret.

Il en est ainsi lorsque E est l'espace $\mathcal{E}$ de tous les entiers naturels avec la topologie induite par celle de l'espace des rationnels. On voit donc qu'une suite d'entiers ne peut converger que si tous ses termes sont égaux à partur d'un certain rang.

Il est aussi évident que:

Pour que $\lim_{n\to\infty} u_n = a$, il faut et il suffit que tout voisinage d'un système fondamental de a contienne tous les u_n à partir d'un certain rang.

Ainsi pour qu'une suite α_n de nombres rationnels converge vers α, il faut et il suffit que, quel que soit l'entier m, tous les α_n, à partir d'un certain rang appartiennent à l'intervalle $(\alpha - \frac{1}{m}, \alpha + \frac{1}{m})$ ou, ce qui revient au même, que l'on ait pour n suffisamment grand $|\alpha_n - \alpha| < \frac{1}{m}$.

~~Il résulte du théorème I § 2 que:~~ Si l'espace E vérifie $0-\text{IV}$, une suite prenant ses valeurs dans E ne peut admettre qu'une limite.

En se rapportant à la définition de la page , on voit que si les termes de la suite $\{u_n\}$ prennent leurs valeurs dans un sous-ensemble A de E, sa limite, si elle existe, peut ne pas appartenir à A, mais elle appartient certainement à son support fermé $\bar{A}$.

Signalons, maintenant la proposition suivante:

Proposition 1. Soit A un sous-ensemble de E contenant toutes les valeurs u_n de la suite $\{u_n\}$; pour que l'égalité $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ ait lieu relativement à A, il faut et il suffit que cette égalité ait lieu dans le sens de la topologie de E.

Si u est la fonction définie dans l'espace $\mathcal{E}$, prenant ses valeurs dans l'espace E, et définissant la suite $\{u_n\}$, et si f est une fonction définie dans E et prenant ses valeurs dans l'espace E', la fonction $f[u(n)]$ définit une nouvelle suite, dont le n-ième terme a comme valeur celle de f au point u_n de E.

La proposition suivante, résulte immédiatement ~~de la définition~~ du théorème des fonctions ~~continues~~ des fonctions:

<u>Proposition 2</u>. <u>Si la fonction f est continue au point a et si la suite $\{u_n\}$ converge vers a, la suite dont le n-ième terme a la valeur $f[u(n)]$ converge vers $a'=f(a)$.</u>

Une généralisation importante de la notion de suite est obtenue lorsqu'on considère des fonctions définies dans l'ensemble $\mathcal{E}^k$ qui est le produit direct de k ensembles dont chacun est l'ensemble $\mathcal{E}$ d'entiers naturels. Soit $\hat{\mathcal{E}}^k$ l'espace-produit de k facteurs dont chacun est l'espace $\hat{\mathcal{E}}$ avec la topologie définie plus haut, et soit u une fonction définie dans la partie $\mathcal{E}^k$ de $\hat{\mathcal{E}}^k$, et prenant ses valeurs dans un espace E ; une telle fonction est appelée <u>suite à k indices</u> (Suite double lorsque $k=2$, triple lorsque $k=3$, etc. suite multiple dans le cas général).

La fonction définie au point $(n_1, n_2, \dots n_k)$ de $\mathcal{E}^k$ et égale à la valeur de u en ce point est dite <u>le terme du rang $(n_1, n_2, \dots n_k)$ de la suite</u>; ce terme sera désigné par $u_{\{n_1, n_2 \dots n_k\}}$ et sa valeur par $u_{n_1, n_2 \dots n_k}$. La suite elle-même sera désignée par $\{u_{n_1, n_2 \dots n_k}\}$. On dira que <u>la suite $\{u_{n_1, n_2, \dots n_k}\}$ tend vers une limite a</u>, et l'on écrira: $\lim\limits_{\substack{n_i \to \infty \\ i=1,2,\dots k}} u_{n_1, n_2 \dots n_k} = a$ si la fonction u admet a comme limite au point dont toutes les coordonnées sont $+\infty$.

Toutes les propositions et remarques que nous avons énoncées pour les suites à un seul indice, sont encore vraies lorsqu'il s'agit de suites à plusieurs indices.

 56

Ainsi, pour que $\lim\limits_{\substack{n_i \to \infty \\ i=1,2,\dots k}} u_{n_1 n_2 \dots n_k} = a$, il faut et il suffit que, quel que soit le voisinage V de a, il existe k entiers ν_1, $\nu_2, \dots \nu_k$ tels que tous les éléments $u_{n_1 n_2 \dots n_k}$ soient contenus dans V dès que $n_1 \geq \nu_1, n_2 \geq \nu_2, \dots \quad n_k \geq \nu_k$. Il faut aussi et il suffit que ceci ait lieu pour tout voisinage d'un système fondamental attaché à a.

Il n'y a rien à changer aux énoncés des propositions 1 et 2, ni à la remarque concernant la limite unique, pour en avoir concernant les suites multiples.

Considérons, en particulier, une suite double $\{u_{nm}\}$.

D'après ce que nous avons vu dans la théorie des fonctions de plusieurs variables, si on fixe la coordonnée m, en posant $m = m_1$, la suite $\{u_{nm_1}\}$ peut être considérée comme suite simple, dont le terme de rang n est u_{nm_1}. Si cette suite est convergente, nous désignerons sa limite par u_{m_1}, et nous écrirons $\lim\limits_{n\to\infty} u_{nm_1} = u_{m_1}$. Si ceci a lieu quel que soit $m = m_1$, on peut considérer u_m comme le terme de rang m d'une suite $\{u_m\}$.

Le théorème I § 3, appliqué aux fonctions définies dans $\mathcal{E}^2$ fournit immédiatement la proposition que voici:

Proposition 3 . Soit $\{u_{nm}\}$ une suite double, dont les termes prennent leurs valeurs dans un espace E' tel que chacun de ses points admette la famille d'ensembles fermés le contenant comme système fondamental de voisinages. Si $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} u_{nm} = a$, et si $\lim\limits_{n\to\infty} u_{nm} = u_m$ quel que soit m, on a aussi $\lim\limits_{m\to\infty} u_m = a$.

La dernière égalité peut aussi s'écrire $\lim\limits_{m\to\infty} [\lim\limits_{n\to\infty} u_{nm}] = a$.

Il en résulte, en particulier, la proposition que voici:

Proposition 4 . Si $\{u_{nm}\}$ converge, l'espace E où cette suite prend ses valeurs possédant la propriété précitée dans la proposition précédente; si pour chaque $m=m_1$, la suite u_{nm_1} converge, et si pour chaque $n=n_1$, la suite $u_{n_1 m}$ converge, on a $\lim\limits_{m\to\infty}[\lim\limits_{n\to\infty} u_{nm}] = \lim\limits_{n\to\infty}[\lim\limits_{m\to\infty} u_{nm}] = \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} u_{nm}$.

Il importe de remarquer que l'existence de chacune des limites $\lim\limits_{n\to\infty} u_{nm}$, $\lim\limits_{m\to\infty} u_{nm}$ respectivement pour chaque m et chaque n n'implique nullement la convergence de la suite $\{u_{nm}\}$. Cette convergence peut ne pas avoir lieu, même lorsque $\lim\limits_{m\to\infty}[\lim\limits_{n\to\infty} u_{nm}]$ et $\lim\limits_{n\to\infty}[\lim\limits_{m\to\infty} u_{nm}]$ existent. Et même l'égalité $\lim\limits_{n\to\infty}[\lim\limits_{m\to\infty} u_{nm}] = \lim\limits_{m\to\infty}[\lim\limits_{n\to\infty} u_{nm}]$ n'implique pas la convergence de $\{u_{nm}\}$.

Exemple. La suite $\{u_{nm}\}$ avec $u_{nm}=1$ pour $n \geq m$ et $u_{nm}=0$ pour $n<m$ est telle que $\lim\limits_{n\to\infty} u_{nm}=1$, quel que soit m, et $\lim\limits_{m\to\infty} u_{nm}=0$, quel que soit n. On a, évidemment, $\lim\limits_{m\to\infty}[\lim\limits_{n\to\infty} u_{nm}]=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}[\lim\limits_{m\to\infty} u_{nm}]=0$. En posant dans $\hat{\mathcal{E}}^2$, $u(n,m)=u_{nm}$, ~~si n et m sont entiers,~~ $u(+\infty,m)=1$, $u(n,+\infty)=0$, la fonction $u(x,y)$ ainsi obtenue est continue au point $(+\infty,+\infty)$ par rapport à la coordonnée x ainsi que par rapport à la coordonnée y, mais ne l'est pas au point $(+\infty,+\infty)$ dans la topologie de $\hat{\mathcal{E}}^2$. Si l'on pose $u_{nm}=1$ pour $n \neq m$ et $u_{nm}=0$ pour $n=m$, on a une suite telle que $\lim\limits_{m\to\infty}[\lim\limits_{n\to\infty} u_{nm}] = \lim\limits_{n\to\infty}[\lim\limits_{m\to\infty} u_{nm}] = 1$, sans que la suite $\{u_{nm}\}$ converge.

La considération des suites est surtout intéressante dans les espaces où l'on peut attacher à chaque point un système fondamental composé d'une infinité dénombrable de voisinages. Nous allons donc formuler l'axiome correspondant qui porte souvent le nom de 1^{er} axiome de dénombrabilité:

à la ligne

O-V. Tout point de E possède un système fondamental de voisinages composé de voisinages en infinité dénombrable. [Dans un tel espace, on peut définir le support-fermé et l'ensemble dérivé d'un ensemble par l'intermédiaire des suites. On a, en effet, la proposition suivante:

Proposition 5. Si l'espace E vérifie $O-V$, pour qu'un point p appartienne au support-fermé $\bar{A}$ d'un ensemble A dans E, il faut et il suffit qu'il y ait une suite $\{p_\nu\}$ de points de A convergente vers p ; pour que p soit un point d'accumulation de A, il faut et il suffit qu'il y ait une telle suite composée de points de A distincts de p.

Les conditions sont évidemment suffisantes; elles sont aussi nécessaires, car si $p \in \bar{A}$, il y a un point p_ν de A dans chacun des voisinages V_ν d'un système de voisinages attaché à p, et la suite $\{p_\nu\}$ tend vers p ; et si p est un point d'accumulation de A, on peut prendre les points p_ν distincts de p.

Voici un corollaire immédiat de la proposition précédente: Si E vérifie $O-V$, la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble A dans E, soit fermé est que toute suite dont les points sont dans A et qui converge dans E, soit aussi convergente dans A.

Nous allons maintenant introduire une notion qui est appelée à jouer un rôle important:

On dit qu'un point p est un point limite d'une suite $\{p_\nu\}$ si, quel que soit le voisinage V de p, il y a une infinité d'entiers ν pour lesquels $p_\nu \in V$.

Il est évident que si une suite possède une limite, celle-ci est un point limite de la suite; Si $O-IV$ est vérifié, une suite convergente possède un seul point limite qui est sa limite.

Un point limite d'une suite n'est pas nécessairement un point d'accumulation de l'ensemble A des valeurs des termes de la suite, c'est par exemple le cas d'une suite dont tous les termes prennent la même valeur. C'est aussi le cas de la suite $\{u_n\}$ telle que $u_{2p} = \frac{1}{p}$ $(p=1,2,\ldots)$, $u_{2p+1} = 1$ $(p=0,1,\ldots)$.

Exercice Démontrer que s'il existe un entier n tel que pour $\nu > n$ tous les points P_ν sont différents, tout point limite de $\{P_\nu\}$ est un point d'accumulation de l'ensemble constitué par les P_ν .

Voici un résultat analogue à celui de la proposition 5.

Proposition 6 . Si la suite $\{P_\nu\}$ prend ses valeurs dans un espace E vérifiant O-V , pour qu'un point p soit point limite de $\{P_\nu\}$ il faut et il suffit qu'on puisse extraire de cette suite une suite partielle tendant vers p .

La condition est évidemment suffisante. La condition est aussi nécessaire, car si p est un point limite de $\{P_n\}$ et si les V_ν constituent un système de voisinages de p, on peut déterminer un point P_{n_1} , tel que $P_{n_1} \in V_1$, un point P_{n_2} , avec $n_2 > n_1$ et tel que $P_{n_2} \in V_2$, et, en procédant par récurrence, on peut déterminer un entier $n_\nu > n_{\nu-1}$, tel que $P_{n_\nu} \in V_\nu$; la suite $\{P_{n_\nu}\}$ converge vers p .

Il importe de noter la proposition suivante qui est d'ailleurs évidente:

Proposition 7 . Si E vérifie O-V , cette propriété a aussi lieu relativement à tout sous-ensemble A de E .

Exercice Montrer que si $E = \prod_{i=1,2\ldots n} E_i$, chaque espace E_i $(i=1,2\ldots n)$ vérifiant O-V , l'espace-produit E vérifie également O-V.

Chapitre II

Etat 1

§ 1 - Espaces uniformes

Il est très important pour la suite de pouvoir comparer, dans un espace topologique, les voisinages de ses différents points. Il s'avère, en effet, fort utile, pour une fonction continue f, définie dans un espace E et prenant ses valeurs dans un espace E', de pouvoir comparer sa manière d'être continue en des points différents de E.

Cette comparaison entre voisinages qui, pour toutes les applications, peuvent être supposés appartenant aux systèmes fondamentaux de chaque point, peut-être réalisée en partageant ces voisinages en classes, chacune de ces classes contenant un voisinage de chaque point. On pourrait le faire, par exemple, en considérant toutes les correspondances possibles entre les points p de E et les voisinages appartenant aux systèmes fondamentaux de p.

On pourrait opérer de la manière suivante: considérons la famille ~~l'ensemble~~ $\mathfrak{A}$ de toutes les parties de E, et désignons par w une fonction définie dans E, et prenant ses valeurs dans $\mathfrak{A}$, la valeur $w(p)$ étant un voisinage appartenant au système fondamental de p.

La valeur de $w(p)$ sera désignée par $V_w(p)$.

A partir de ce chapitre, nous n'envisagerons que les topologies vérifiant les axiomes $O\text{-}I$, $O\text{-}II$, $O\text{-}III$, $O\text{-}IV$. Si la topologie est définie par des systèmes attachés à chaque point de l'espace, que nous supposerons être les systèmes fondamentaux des voisinages de ces points (voir page   la condition pour qu'il en soit ainsi), $O\text{-}I$ et $O\text{-}III$ ont lieu de toute façon; L'axiome O-II se traduit, en employant la notation ci-dessus, de la manière suivante:

Quels que soient les indices ω_1 et ω_2, il y a un indice ω_3 tel que $V_{\omega_3}(p) \subset V_{\omega_1}(p) \cap V_{\omega_2}(p)$, quel que soit p.

On se rappelle que le fait que chaque système attaché à un point p est un système fondamental de voisinages de p se traduit par la possibilité de faire correspondre à chaque $V(p)$ de ce système un $V'(p)$ du même système tel que $V(p)$ contienne un certain voisinage $V'(q)$ de chaque point q appartenant à $V'(p)$.

Il est essentiel, pour le but que nous ~~nous~~ sommes proposés, de pouvoir comparer entre eux, aussi bien les $V'(p)$ que les $V''(q)$ lorsque p prend toutes les valeurs possibles et lorsque les $V(p)$ appartiennent à une classe $V_\alpha(p)$. Or, lorsqu'une topologie est définie dans E, il est en général impossible de réaliser cette comparaison lorsque les classes sont définies, comme plus haut, par l'intermédiaire des fonctions $\omega(p)$.

Toute autre division en classes jouissant des propriétés voulues, est impossible, dans le cas général.

Il est donc indispensable de donner une autre axiomatique, plus complète, d'un espace pour que nos désiderata soient vérifiés. Cette axiomatique portant sur les systèmes attachés aux points partira directement de la possibilité de partager les voisinages en classes correspondant au but visé.

Faisons correspondre à tout α, pris dans un certain ensemble d'indices, et à tout élément p de E, une partie $V_\alpha(p)$ de E contenant p et vérifiant les axiomes suivants:

U-I. Quels que soient les indices α, β, il y a un indice γ, tel que $V_\gamma(p) \subset V_\alpha(p) \cap V_\beta(p)$, quel que soit p.

$\mathcal{U}$-II. A tout α correspond un α' tel que de $p \in V_{\alpha'}(r)$, $q \in V_{\alpha'}(r)$ résulte $q \in V_\alpha(p)$.

$\mathcal{U}$-III Quels que soient p et q, il y a un indice α tel que q n'appartient pas à $V_\alpha(p)$.

Pour p donné les $V_\alpha(p)$ constituent un système attaché à p. Les $V_\alpha(p)$ définissent donc, dans E, une topologie en vertu du principe général établi page .

Signalons quelques conclusions immédiates des axiomes $(\mathcal{U})$.

Convenons de désigner, quel que soit l'indice δ, par δ' un indice tel que de $q \in V_{\delta'}(p)$, $r \in V_{\delta'}(p)$ résulte $q \in V_\delta(r)$.

1° $q \in V_{\alpha'}(p)$ entraîne: $q \in V_\alpha(p)$; il suffit, en effet, pour le voir, d'ajouter à la première relation la relation $p \in V_{\alpha'}(p)$, et d'appliquer $\mathcal{U}$-II.

2° $q \in V_{\alpha'}(p)$ entraîne: $p \in V_\alpha(q)$. La démonstration est la même que pour 1°.

3° A chaque indice α on peut faire correspondre deux indices $\beta = \alpha'$ et $\gamma = \beta'$ tels que de $r \in V_\gamma(p)$, $q \in V_\beta(r)$ résulte $q \in V_\alpha(p)$.

On voit, en effet, en vertu de 2°, que $p \in V_\beta(r)$, et, en vertu de $\mathcal{U}$-II que $q \in V_\alpha(p)$.

La remarque 3° prouve que dans la topologie de l'espace E, définie par les systèmes $V_\alpha(p)$ attachés à tous ses points, le système attaché à chaque point p constitue un système fondamental de voisinages attaché à p.

Un espace E où la topologie est définie à partir des systèmes $V_\alpha(p)$ vérifiant les axiomes $(\mathcal{U})$ est dit espace uniforme.

On dit aussi que les $V_\alpha(p)$ définissent sur E une structure uniforme.

Si à chaque point p sont attachés deux systèmes différents, équivalents, $W_\lambda(p)$ et $V_\alpha(p)$ satisfaisant aux axiomes $(\mathcal{U})$, on dit que ces systèmes définissent dans E la même structure uniforme. On sait que les deux systèmes définissent dans E la même topologie.

D'ailleurs, il est facile à voir que si les $W_\lambda(p)$ et $V_\alpha(p)$ sont tels qu'à chaque α correspond un λ tel que $W_\lambda(p) \subset V_\alpha(p)$, quel que soit p, et à chaque δ correspond un β tel que $V_\beta(p) \subset W_\delta(p)$, quel que soit p, et si les $V_\alpha(p)$ vérifient les axiomes $(\mathcal{U})$, les $W_\lambda(p)$ vérifient également les axiomes. Soient, en effet, $\varepsilon, \delta, \alpha, \alpha'$ tels que $W_\varepsilon(p) \subset V_{\alpha'}(p) \subset V_\alpha(p) \subset W_\delta(p)$, quel que soit p (α et α' étant liés, par $\mathcal{U}$-II). Si $p \in W_\varepsilon(r)$ $q \in W_\varepsilon(r)$, on a aussi $p \in V_{\alpha'}(r)$, $q \in V_{\alpha'}(r)$, donc $p \in V_\alpha(q) \subset W_\delta(q)$ ce qui prouve que les $W_\delta(q)$ vérifient $\mathcal{U}$-II avec $\delta' = \varepsilon$.

On démontre aussi facilement que $\mathcal{U}$-I et $\mathcal{U}$-III sont vérifiés pour les $W_\lambda(p)$.

Nous allons maintenant, en partant des systèmes $V_\alpha(p)$ vérifiant $(\mathcal{U})$, indiquer d'autres systèmes qui leurs sont équivalents.

Désignons par $\overset{-1}{V}_\lambda(p)$ l'ensemble de tous les points q tels que $p \in V_\delta(q)$; on voit, d'après 2°, que $\overset{-1}{V}_{\alpha'}(p) \subset V_\alpha(p)$ et que $V_{\alpha'}(p) \subset \overset{-1}{V}_\alpha(p)$. Les systèmes $\overset{-1}{V}_\alpha(p)$ constituent donc des systèmes équivalents aux systèmes $V_\alpha(p)$ et vérifiant $(\mathcal{U})$.

Il résulte de 1° et 2° que $V_{\alpha'}(p) \subset V_\alpha(p) \cap \overset{-1}{V}_\alpha(p) \subset V_\alpha(p)$, ce qui prouve que les systèmes $V'_\alpha(p) = V_\alpha(p) \cap \overset{-1}{V}_\alpha(p)$ constituent également des systèmes équivalents aux systèmes $V_\alpha(p)$ et vérifant $(\mathcal{U})$.

Il est évident que de $q \in V'_\alpha(p)$ résulte que $p \in V'_\alpha(q)$ ce qui prouve que $V'_\alpha(p) = \overset{-1}{V}{}'_\alpha(p)$.

Les systèmes $\Omega_\alpha(p)$ composés, pour chaque α, des points intérieurs de $V_\alpha(p)$ — les intérieurs des $V_\alpha(p)$ — constituent également des systèmes équivalents aux $V_\alpha(p)$ et vérifiant $(\mathcal{U})$, car d'après 3°, on voit qu'avec $\gamma=(\alpha')'$ on a : $V_\gamma(p)\subset\Omega_\alpha(p)\subset V_\alpha(p)$.

Les supports fermés $\overline{V}_\alpha(p)$ des ensembles $V_\alpha(p)$ constituent des systèmes équivalents aux systèmes $V_\alpha(p)$ et vérifiant $(\mathcal{U})$. On a, en effet, d'une part: $V_\alpha(p)\subset\overline{V}_\alpha(p)$. On a, d'autre part, $\overline{V}_\gamma(p)\subset V_\alpha(p)$ avec $\gamma=(\alpha')'$, car si $r\in\overline{V}_\gamma(p)$, tout voisinage de r contient un point a de $V_\gamma(p)$, donc, puisque les $\overset{-1}{V}_\delta(r)$ constituent de tels voisinages, il existe un point a tel que $a\in\overset{-1}{V}_\gamma(r)$, $a\in V_\gamma(p)$, et on voit d'après 3° que $r\in V_\alpha(p)$.

Nous allons maintenant introduire une notation qui peut faciliter le langage. Dans l'espace-produit $E^2=E\times E$, muni de la topologie-produit correspondante, la topologie dans E étant définie par les systèmes $V_\alpha(p)$, désignons par V_α, l'ensemble $\bigcup\limits_{p\in E}(\{p\}\times V_\alpha(p))$. Si donc on désigne, comme d'ordinaire, par (p,q) un point de E^2, on voit que les deux notations: $(p,q)\in V_\alpha$ et $q\in V_\alpha(p)$, sont équivalents. Il est évident, d'après 1° que $V_{\alpha'}\subset V_\alpha$.

Remarquons que si l'on pose successivement $\beta=\alpha'$, $\gamma=\beta'$ et $\delta=\gamma'$, tout point de V_δ est un point intérieur de V_α. Car si $(p,q)\in V_\delta$ tout point (r,s) appartenant à $V_\beta(p)\times V_\delta(q)$ appartient, comme on le voit d'après 3° et $\mathcal{U}$-$\underline{II}$, à V_α. Si, par conséquent, on désigne par Ω'_α l'intérieur de V_α, on voit que $(p,q)\in\Omega'_\alpha$. En désignant alors par $\Omega'_\alpha(p)$ l'ensemble de tous les points q tels que $(p,q)\in\Omega'_\alpha$, on a $V_\delta(p)\subset\Omega'_\alpha(p)\subset V_\alpha(p)$. Les ensembles $\Omega'_\alpha(p)$ sont ouverts et constituent également des systèmes équivalents aux $V_\alpha(p)$ et vérifiant les axiomes $(\mathcal{U})$. Ces systèmes jouissent de la propriété suivante: si $q\in\Omega'_\alpha(p)$ il existe un β et un γ (qui dépendent de p et de q) tels que $\Omega'_\beta(q)\subset\Omega'_\alpha(r)$ quel que soit $r\in\Omega'_\gamma(p)$, ce qu'on peut encore écrire sous les deux formes suivantes:

$\Omega'_\gamma(p) \times \Omega'_\beta(q) \subset \Omega'_\alpha$, $\Omega'_\beta(q) \subset \bigcap_{r \in \Omega'_\gamma(p)} \Omega'_\alpha(r)$; pour justifier cette remarque, il suffit de remarquer que, si $(p,q) \in \Omega'_\alpha$, il existe un $V_\gamma(p)$ et un $V_\beta(q)$ tels que $V_\gamma(p) \times V_\beta(q) \subset \Omega'_\alpha$, il ne reste alors qu'à prendre comme Ω'_γ et Ω'_β les intérieurs respectifs de V_γ et V_β.

Par la suite, nous désignerons aussi par $V_\alpha(D)$ l'ensemble $\bigcup_{p \in D} V_\alpha(p)$.

Exercice Donner un exemple de systèmes $V_\alpha(p)$ tels qu'il existe des points p pour lesquels les deux ensembles: $\Omega_\alpha(p)$ défini plus haut, et $\Omega'_\alpha(p)$ ne coïncident pas.

La topologie d'un espace uniforme vérifie évidemment les axiomes O-$\underline{II}$ et O-$\underline{III}$.

U-$\underline{III}$ n'implique pas, pour la topologie de l'espace correspondant, l'axiome O-$\underline{IV}$, mais nous verrons que celui-ci résulte de U-$\underline{II}$ et U-$\overline{\underline{III}}$.

Remarquons d'abord que U-$\overline{\underline{III}}$ implique que:

Tout ensemble composé d'un seul élément est fermé.

En effet, à chaque point q, différent de p, on peut faire correspondre un ensemble ouvert $\Omega(q)$ le contenant et ne contenant pas p, l'ensemble $\bigcup_{q \in E - \{p\}} \Omega(q)$ est ouvert et est égal à $E - \{p\}$, ce qui prouve que $\{p\}$ est fermé.

Il suffit maintenant d'appliquer la proposition 5 du § 2, en tenant compte du fait établi plus haut que les $\overline{V}_\alpha(p)$ constituent un système de voisinages pour p, pour avoir le théorème suivant:

Théorème I. La topologie d'un espace uniforme vérifie O-$\underline{IV}$.

Il importe de remarquer que si E est un espace uniforme et E' un espace topologiquement isomorphe à E (c'est-à-dire que la topologie de E' est isomorphe à celle de E définie par les systèmes $V_\alpha(p)$), les ensembles $W_\alpha(p')$ dans E', qui correspondent, dans la correspondance biunivoque et bicontinue entre E et E', aux voisinages $V_\alpha(p)$ dans E, p' correspondant à p, constituent des systèmes définissant une structure uniforme dans E'.

Un exemple important d'un espace uniforme est celui de l'espace des nombres rationnels. Soit α un nombre rationnel positif; a étant un nombre rationnel quelconque, désignons par $V_\alpha(a)$ l'intervalle $(a-\alpha, a+\alpha)$; les $V_\alpha(a)$ où α varie dans un intervalle $(0, \omega)$, où ω est fixe quelconque, constituent un système attaché à a. Ces systèmes vérifient les axiomes $(\mathcal{U})$: en effet, $\mathcal{U}$-$\overline{I}$ est évident; $\mathcal{U}$-$\overline{II}$ l'est aussi, car pour exprimer que $b \in V_\alpha(a)$, on peut écrire $|b-a| < \alpha$, or de $|c-b| < \frac{\alpha}{2}$, $|b-a| < \frac{\alpha}{2}$ résulte que

$$|c-a| = |c-b+b-a| \leq |c-b| + |b-a| < \alpha,$$

ce qui prouve que $\mathcal{U}$-$\overline{II}$ a lieu avec $\beta = \frac{\alpha}{2}$; enfin $\mathcal{U}$-$\overline{III}$ a également lieu, car si $b \neq a$, il suffit de poser $\alpha < |b-a|$, pour voir que b n'appartient pas à $V_\alpha(a)$.

Ainsi l'espace des rationnels, E^1, (muni de la topologie définie page) est bien muni d'une structure uniforme.

Soit maintenant A une partie de l'espace E muni d'une structure uniforme. On sait que lorsqu'on a défini une topologie sur E, on peut définir une topologie dans A, en considérant comme ensemble ouvert relativement à A la trace sur A de tout ensemble ouvert dans E ; dans cette topologie induite dans A par celle de E, la trace sur A d'un voisinage dans E, d'un point p lui appartenant, est un voisinage de p relativement à A. Les traces d'un système fondamental de p constituent un système fondamental de p par rapport à A. Or, on voit immédiatement qu'en partant des systèmes $V_\alpha(p)$ définissant sur E une structure uniforme, les traces des $V_\alpha(p)$, pour chaque point p de A, définissent une structure uniforme sur A.

On dit que la structure uniforme ainsi définie sur A est la structure induite dans A par la structure uniforme de E; d'après ce qu'on a vu plus haut, la topologie de A, muni d'une structure uniforme induite par celle de E, est la topologie induite dans A par celle de E.

Ainsi l'espace $\mathcal{E}^*$ d'entiers rationnels (ou l'espace $\mathcal{E}$ d'entiers positifs) possède une structure uniforme induite par celle de E^1. Si, lors de la définition de cette dernière, on pose dans les axiomes $(\mathcal{U}), 0<\alpha<\frac{1}{2}$, chaque système $V_\alpha(n)$, dans la structure induite sur A, sera composé du seul élément n.

Exercice. Démontrer que chaque espace discret est uniforme.

Soient E_γ des espaces pourvus, chacun, d'une structure uniforme (γ variant dans un ensemble d'indices Γ); et soit E le produit direct, $\prod E_\gamma$, de ces ensembles E_γ. Il est facile à voir qu'on peut munir E d'une structure uniforme, en partant de celles des espaces E_γ. Supposons, en effet, que dans chaque espace E_γ les indices des systèmes attachés aux points p_γ de cet espace et vérifiant les axiomes $(\mathcal{U})$, varient dans un ensemble Δ_γ; de sorte que le système attaché à un point p_γ de E_γ est composé de tous les voisinages $V_{\alpha_\gamma}(p_\gamma)$, α_γ prenant toutes les valeurs dans Δ_γ. Désignons par Δ le produit direct des Δ_γ: $\Delta = \prod \Delta_\gamma$. A chaque point $p=(p_\gamma)$ de E attachons le système $V_\alpha(p)$ où α est un élément quelconque de Δ, l'ensemble $V_\alpha(p)$ étant défini par l'égalité $V_\alpha(p) = \prod_{\gamma\in\Gamma} V_{\alpha_\gamma}(p_\gamma)$, où les α_γ sont les coordonnées de α, c'est-à-dire où l'on a: $\alpha=(\alpha_\gamma)$, $\alpha_\gamma \in \Delta_\gamma$ (ou encore $\{\alpha\} = \prod_{\gamma\in\Gamma}\{\alpha_\gamma\}$)

On voit, sans peine, que si, dans chaque espace, les $V_{\alpha_\gamma}(p_\gamma)$ vérifient les axiomes $(\mathcal{U})$, les $V_\alpha(p)$ les vérifient également.

Ainsi, on munit E d'une structure uniforme. Il est aussi clair que la topologie de E, définie par cette structure, n'est autre que la topologie-produit de celle des espaces E_γ, définies par leurs structures uniformes correspondantes.

<u>Exemple.</u> Ainsi lorsqu'on considère l'ensemble E^n, produit de n facteurs dont chacun est l'ensemble des rationnels, on le munit d'une structure uniforme, en partant de celle qu'on a définie dans E^1. Les systèmes attachés aux points p de E^n sont définis de la manière suivante: si $p=(a_1, a_2, \ldots a_n)$, où les a_i sont des rationnels et si α est également un point de E^n, $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ (les α_i sont donc encore des rationnels), on posera $V_\alpha(p) = V_{\alpha_1}(p_1) \times V_{\alpha_2}(p_2) \ldots \times V_{\alpha_n}(p_n)$; le système attaché à p est composé de tous ces $V_\alpha(p)$ lorsque α prend toutes les valeurs dans E^n. (Dans cet exemple, les ensembles E_γ et Δ_γ coïncident, mais ceci n'est évidemment pas le cas général).

<u>Exercices</u> Montrer que, dans E^n, les systèmes attachés à ses points et définis plus haut, et ceux définis comme suit: $W_\lambda(p) = \prod_{\gamma \in \Gamma} V_\lambda(p_\gamma)$ où λ est un rationnel quelconque, sont équivalents.

Montrer que ce n'est plus le cas lorsqu'on considère l'ensemble E^∞, produit d'une infinité dénombrable de facteurs identiques, dont chacun est l'ensemble des rationnels. C'est-à-dire que les systèmes attachés à chaque point $p=(p_i)$ de E^∞: d'une part, celui composé de tous les ensembles $\prod_{i \in 6} V_{\alpha_i}(p_i)$, où α_i est un rationnel quelconque, et, d'autre part, celui composé de tous les ensembles $\prod_{i \in 6} V_\alpha(p_i)$ où α est un rationnel quelconque, ne sont pas équivalents.

Un des buts essentiels qu'on vise en définissant les structures uniformes est la possibilité d'introduire dans des espaces munis d'une telle structure des fonctions dites <u>uniformément continues</u>.

Soient E et E' deux espaces uniformes, dont les structures sont respectivement définies par les systèmes $V_\alpha(p)$ attachés aux points p de E et par les systèmes V'_λ attachés à chaque point p' de E'. Une fonction f définie dans E et prenant ses valeurs dans E' est dite uniformément continue, <u>si à tout indice λ on peut faire correspondre un indice α tel que, quel que soit p de E, l'égalité $p'=f(p)$ entraîne la relation $f[V_\lambda(p')] \supset V_\alpha(p)$, ou, ce qui revient au même: $f[V_\alpha(p)] \subset V'_\lambda(p')$.</u>

Il est clair qu'une fonction uniformément continue est continue dans le sens ordinaire de ce mot. Mais la réciproque n'est pas vraie, en général, (voir l'exercice de la fin de ce §)

Il est évident, d'après la définition des fonctions uniformément continues que le théorème suivant (théorème des fonctions uniformément continues des fonctions uniformément continues) a lieu:

<u>Théorème II</u>. <u>Si les espaces E, E', E'', ont chacun une structure uniforme, ~~et~~ si f est une fonction uniformément continue dans E, prenant ses valeurs dans E', et si φ est une fonction uniformément continue définie dans E' et prenant ses valeurs dans E'', la fonction $\varphi[f(p)]$ définie dans E et prenant ses valeurs dans E'' est uniformément continue.</u>

<u>Exemples</u>. La fonction $p'=f(p)=x+y$ définie dans l'espace $E^2=E^1 \times E^1$ (E^1 est l'espace uniforme des rationnels), où chaque point p a comme coordonnées les valeurs rationnelles x, y — $p=(x,y)$ —, et prenant ses valeurs dans E^1, est uniformément continue dans E^2. On a, en effet, si (x,y) et (x',y') sont deux points quelconques de E^2:

$$|(x'+y')-(x+y)| \leq |x'-x|+|y'-y|,$$

en posant alors $V_{(\alpha,\beta)}(p)=(x-\alpha, x+\alpha)\times(y-\beta, y+\beta)$, $V'_\gamma(a)=(a-\gamma, a+\gamma)$, on voit que $f[V_{(\alpha,\beta)}(p)] \subset V'_{\alpha+\beta}(p')$ ce qui prouve que f est uniformément continue.

On voit de la même façon que la fonction $f(x,y)=x+y$ est également uniformément continue dans E^2.

La fonction $p'=\varphi(p)=xy$ est uniformément continue dans toute partie A de E^2 (c'est-à-dire que φ_A est uniformément continue dans l'espace uniforme induit dans A) pourvu que les coordonnées de tous les points de A vérifient des inégalités: $|x|<M_1$, $|y|<M_2$, où M_1 et M_2 sont des nombres rationnels positifs.

En effet, on peut écrire, pour (x',y') et (x,y) appartenant à A :

$$|x'y'-xy| = |(x'y'-xy')+(xy'-xy)| \leq |y'||x'-x| + |x||y'-y| \leq M_2|x'-x| + M_1|y'-y|,$$

c'est-à-dire qu'avec les mêmes notations que plus haut, on a pour p contenu dans A :

$$\varphi[V_{\alpha,\beta}(p)] \subset V'_{M_2\alpha+M_1\beta}(p')$$

Nous allons, enfin, démontrer que la fonction $p'=f(x)=\frac{1}{x}$ définie lorsque $x\in E^1-\{0\}$ est uniformément continue dans chaque partie A de E^1 telle que tous éléments x vérifient une inégalité de la forme $|x|>a$, où a est un rationnel positif.

On a, en effet, lorsque x et x' appartiennent à A :

$$\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x}\right| = \left|\frac{x-x'}{xx'}\right| \leq \frac{|x-x'|}{a^2},$$

ce qu'on peut écrire sous la forme $f[V_\alpha(x)] \subset V_{\frac{\alpha}{a^2}}(p')$.

Exercice. Montrer que dans l'espace E^1 la fonction x^2 n'est pas uniformément continue.

§ 2. Espaces complets.

Soit E un espace uniforme dont la structure est définie par les systèmes $V_\alpha(p)$. On dira qu'une famille $\mathcal{A}$ d'ensembles

A dans E est une famille de Cauchy si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

1°- L'intersection d'un nombre fini d'ensembles de $\mathcal{A}$ n'est jamais vide.

2°- A tout α correspond au moins un ensemble A de $\mathcal{A}$, tel que, quel que soit p de A, on ait $A \subset V_\alpha(p)$, c'est-à-dire tel que $A \subset \bigcap_{p\in A} V_\alpha(p)$, ou encore tel que $A^2 \subset V_\alpha$.

Exemple. Soit A un sous-ensemble de l'espace uniforme E. Si $p \in \bar{A}$ les traces de $V_\alpha(p)$ sur A, $V_\alpha(p) \cap A$, constituent une famille de Cauchy. En effet: 1° a lieu, car si $C_i = A \cap V_{\alpha_i}(p)$, $(i=1, 2, \dots n)$, les points de l'ensemble $C' = A \cap [\bigcap_i V_{\alpha_i}(p)]$ qui contient, en vertu de $\mathcal{U}$-I, un ensemble $A \cap V_\gamma(p)$, non vide, font partie de tous les C_i ; 2° est aussi vérifié, car $A \cap V_{\alpha'}(p) \subset V_\alpha(q)$, quel que soit $q \in A \cap V_{\alpha'}(p)$.

D'une manière plus générale, si $\mathcal{D}$ est une famille de Cauchy, dont tous les ensembles ne contiennent que des points de $\bar{A}$, les ensembles $A \cap V_\alpha(D)$ où D est un ensemble quelconque de $\mathcal{D}$ constituent également une famille de Cauchy. 1° se démontre comme plus haut; quant à 2°, il suffit, en posant $\beta = \alpha'$, $\gamma = \beta'$, de choisir D_1, de sorte que $D_1^2 \subset V_\gamma$ pour voir, en vertu de $\mathcal{U}$-II_* (et 3° page 61), que $[A \cap V_{\alpha'}(D_1)]^2 \subset V_\alpha$.

On dira que deux familles de Cauchy: $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont équivalentes si les réunions $A \cup B$ d'un ensemble A de $\mathcal{A}$ et d'un ensemble B de $\mathcal{B}$ constituent une famille de Cauchy. Cette relation est évidemment symétrique.

Proposition 1. La condition nécessaire et suffisante pour que deux famille de Cauchy $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ soient équivalentes est que, quel que soit α, il existe un ensemble A de $\mathcal{A}$ et un ensemble B de $\mathcal{B}$ tels qu'on ait dans E^2: $A \times B \subset V_\alpha$.

Comme la condition 1° est toujours vérifiée, il reste à montrer que la condition de l'énoncé est nécessaire et suffisante pour que 2° ait lieu; d'après la définition de l'équivalence de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle ait lieu est qu'il existe un A et un B tels que $(A \cup B)^2 \subset V_\alpha$; or, de la dernière relation résulte évidemment $A \times B \subset V_\alpha$. Réciproquement si, en posant $\beta = \alpha'$, $\gamma = \beta'$, on a: $A' \times B' \subset V_\gamma$ et si $A_1^2 \subset V_\gamma$, $B_1^2 \subset V_\beta$, on a pour un point p de $A' \cap A_1$ et un point q de $B' \cap B_1$: $(p, q) \in V_\gamma$; et en vertu de 3° de la page 61, on voit que $V_\gamma(p) \times V_\beta(q) \subset V_\alpha$ et par conséquent aussi: $A_1 \times B_1 \subset V_\alpha$ d'où l'on conclut que $(A_1 \cup B_1)^2 = A_1^2 \cup B_1^2 \cup (A_1 \times B_1) \subset V_\alpha$.

On peut énoncer aussi cet autre critère d'équivalence.

Proposition 2. La condition nécessaire et suffisante pour que les deux familles de Cauchy $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ soient équivalentes est qu'on puisse faire correspondre à chaque indice α et à chaque ensemble B de $\mathcal{B}$ un ensemble A de $\mathcal{A}$ tel que $A \subset V_\alpha(B)$.

La condition est suffisante car si $\beta = \alpha'$, $\gamma = \beta'$, $B_1^2 \subset V_\gamma$ et si $A \subset V_\beta(B)$ on a $B \times A \subset V_\alpha$. Elle est aussi nécessaire, car si A et B sont tels que $(A \cup B)^2 \subset V_\alpha$, on a aussi, quel que soit B' de $\mathcal{B}$, pour $q \in B' \cap B$: $(A \cup B) \subset V_\alpha(q)$, donc $A \subset V_\alpha(q) \subset V_\alpha(B)$.

Exemples. Il est évident que la famille composée d'ensembles $A \cap V_\alpha(D)$ où D est un ensemble quelconque d'une famille $\mathcal{D}$ dont tous les ensembles ne contiennent que des points de $\bar{A}$, est équivalente à la famille $\mathcal{D}$.

Exercice Montrer que les ensembles $\bar{D}$ constituent une famille de Cauchy équivalente à $\mathcal{D}$.

Une famille réduite à un ensemble composé d'un seul élément est évidemment une famille de Cauchy. Losqu'aucune ambiguïté ne sera à craindre, nous dirons que la famille est réduite à un seul point. Il résulte de la proposition précédente que pour qu'une famille de Cauchy soit équivalente à un point p (c'est-à-dire à une famille réduite à un seul point p), il faut et il suffit qu'à tout α on puisse faire correspondre un ensemble A de la famille tel que $A \subset V_\alpha(p)$; ou encore que l'on ait quels que soient α et $A \in \mathcal{A}$: $p \in V_\alpha(A)$.

En tenant compte de l'égalité $\bar{M} = \bigcap_\alpha V_\alpha(M)$ on a la proposition suivante:

Proposition 3 . Pour qu'une famille $\mathcal{A}$ soit équivalente au point p , il faut et il suffit que p appartienne aux supports fermés de tous les ensembles A de $\mathcal{A}$.

Il résulte, d'ailleurs, de la proposition 2 que pour qu'une famille d'ensembles $\mathcal{C}$ soit une famille de Cauchy et qu'elle soit équivalente à un point p , il faut et il suffit que la condition 1° (de la page) ait lieu et que, quel que soit l'indice α , il existe un ensemble C de cette famille tel que $C \subset V_\alpha(p)$.

La condition est évidemment nécessaire, en vertu de la proposition 2 . Elle est aussi suffisante, car si $C' \subset V_{\alpha'}(p)$, r et s étant deux points quelconques de C', on a : $r \in V_{\alpha'}(p)$, $s \in V_{\alpha'}(p)$ donc, en vertu de $\mathcal{U}$-II: $r \in V_\alpha(s)$, c'est-à-dire: $C'^2 \subset V_\alpha$, ce qui constitue la condition 2° pour qu'une famille soit de Cauchy. Cette famille est évidemment équivalente à p , en vertu de la proposition 2.

Exemple. La famille de Cauchy composée de tous les ensembles $A \cap V_\alpha(p)$, où $p \in \bar{A}$ est équivalente au point p .

S'il existe un point p appartenant aux supports fermés de tous les ensembles C de $\mathcal{C}$, on dira que la famille $\mathcal{C}$ converge.

Deux points distincts ne peuvent évidemment pas constituer deux familles équivalentes. Une famille ne peut donc être équivalente qu'à un seul point.

Un espace uniforme est dit complet si toute famille de Cauchy y est convergente. Nous justifierons plus loin l'emploi de ce mot, en faisant voir qu'un espace uniforme non complet, peut être complété, c'est-à-dire transformé en espace complet en lui adjoignant de nouveaux points qu'on définit comme limites des familles de Cauchy non convergentes.

La notion de famille de Cauchy permet de donner un critère important pour qu'une fonction, prenant ses valeurs dans un espace complet, possède une limite. On a, en effet, le théorème suivant:

Théorème I . Soit f une fonction définie dans un sous-ensemble A d'un espace topologique E, et prenant ses valeurs dans un espace uniforme et complet. Pour que f admette au point p de $\bar{A}$ une limite, il suffit que la famille d'ensembles $f[V_A - \{p\}]$ où V est un voisinage quelconque d'un système fondamental de p dans E, constituent une famille de Cauchy dans E'. Si cette famille est équivalente à a', on a $\lim_{q \to p} f(q) = a'$.

Cette condition est aussi nécessaire si le point p est tel qu'un nombre fini de voisinages de son système fondamental ont toujours un point commun appartenant à A et différent de p.

La condition est suffisante: Soit $\mathcal{G}$ la famille d'ensembles $f[V_A - \{p\}]$, supposons qu'elle est de Cauchy et soit a' le point de E' auquel cette famille est équivalente. Quel que soit l'indice α il existe alors un ensemble C de $\mathcal{G}$, donc un voisinage du système fondamental attaché à p, tel que $C = f[V_A - \{p\}] \subset V'_\alpha(a')$, les $V'_\alpha(p')$ constituant les systèmes attachés aux points de E' et définissant sa structure uniforme. On a, par conséquent $\lim_{q \to p} f(q) = a'$.

La condition est aussi nécessaire, si l'on ajoute la propriété du point p, mentionnée dans l'énoncé.

Si, en effet, $\lim\limits_{q \to p} f(q) = a'$, quel que soit l'indice α il existe un voisinage V du système fondamental attaché à p, tel que $C = f[V_A - \{p\}] \subset V'_\alpha(a')$.

Il suffit, alors, en vertu de la remarque de la page , de constater que, grâce à la condition supplémentaire que nous avons imposée au point p, la condition 1° ~~de la page~~ d'équivalence est bien vérifiée.

__Exercice.__ Indiquer un exemple où, E' étant un espace complet, l'on ait $\lim\limits_{q \to p} f(q) = a'$, sans que la famille $f[V_A - \{p\}]$ soit une famille de Cauchy. (Pour les notations voir le théorème qui précède).

La proposition suivante sera également d'une grande utilité:

__Proposition 4.__ __Soient E et E' deux espaces uniformes. Soit f une fonction uniformément continue définie dans E et prenant ses valeurs dans E'. Si $\mathcal{C}$ est une famille de Cauchy dans E, la famille composée de tous les ensembles $f(C)$ où C est un ensemble quelconque de $\mathcal{C}$ constitue une famille de Cauchy dans E'.__

En effet: la condition 1° ~~de la page~~ est vérifiée, car si $C_1, C_2, \dots C_n$ sont des ensembles de $\mathcal{C}$, donc possédant un point commun, les ensembles $f(C_1) \dots f(C_n)$ possèdent également un point commun. La condition 2° est également vérifiée. Soient, en effet, $V_\alpha(p)$ et $V'_\alpha(p')$ les systèmes respectivement attachés aux points p de E et aux points p' de E', et soient α et β tels que de $p' = f(p)$ résulte $f[V_\beta(p)] \subset V'_\alpha(p')$; si l'ensemble C_1 de $\mathcal{C}$ est tel que $C_1^2 \subset V_\beta$, on a, quel que soit le point $p \in C_1$: $f(C_1) \subset f[V_\beta(p)] \subset V'_\alpha(p')$, c'est-à-dire $f(C_1) \times f(C_1) \subset V'_\alpha$, ce qui exprime que 2° a lieu.

Soit A une partie d'un espace uniforme E à laquelle on attribue la structure uniforme induite par celle de E. Il est évident que pour qu'une famille d'ensembles C de A soit une famille de Cauchy relativement à A, il faut et il suffit qu'elle le soit par rapport à A ; de même pour que deux familles de Cauchy soient équivalentes par rapport à A, il faut et il suffit qu'elles le soient dans le sens de la structure de E. Par conséquent, pour qu'une famille de Cauchy relativement à A, équivalente dans E à un point p, soit convergente dans A, il faut et il suffit que p appartienne à A.

On en tire facilement la proposition suivante:

Proposition 5. Pour qu'un sous-ensemble A d'un espace uniforme soit complet (dans la structure uniforme induite sur lui par celle de E), il faut que A soit fermé; cette condition est aussi suffisante si E est complet.

Supposons que A est complet; si $p \in \bar{A}$, les ensembles $A \cap V_\alpha(p)$ forment dans E une famille de Cauchy équivalente à p ; cette famille est aussi une famille de Cauchy relativement à A, et pour qu'elle converge dans A, il faut que $p \in A$, ce qui prouve que $\bar{A} = A$.

Supposons, maintenant, que E est complet et que A est fermé. Si l'ensemble C appartenant à A est un ensemble d'une famille de Cauchy dans E équivalente à p, $p \in \bar{C} \subset \bar{A}$, donc si $A = \bar{A}$, on a $p \in A$ ce qui prouve que A est complet.

Démontrons, maintenant, la proposition suivante qui nous sera utile plus tard.

Proposition 6. Le produit direct d'un nombre fini d'espaces complets est un espace complet.

Soit $\mathcal{C}$ une famille de Cauchy de l'espace $E = E_1 \times \cdots E_n$ où chaque E_j est complet, C étant un ensemble de $\mathcal{C}$, désignons par C_j $(j = 1, 2, \ldots n)$ l'ensemble dans E_j, composé de toutes les coordonnées d'indice j

des points de C. Il est évident, d'après la définition des systèmes de voisinages dans E, que, pour j donné, les ensembles C_j correspondant à tous les ensembles C de $\mathcal{C}$ constituent une famille de Cauchy dans E_j. Désignons cette famille par $\mathcal{C}_j$. Chacune de ces familles est équivalente à un point p_j dans E_j.

Démontrons que la famille $\mathcal{C}$ est équivalente au point $p=(p_j)$.

Il suffit de démontrer que, quel que soit α, il existe un C tel que $C \subset V_\alpha(p)$. Posons $\beta=\alpha'$, $\gamma=\beta'$ et soit $C^2 \subset V_\gamma$. Si (avec la notation de la page) $V_\gamma(p)=V_{\alpha_1}(p_1)\times \dots \times V_{\alpha_n}(q_n)$, désignons pour chaque $j=1,2\dots n$ par C^j l'ensemble de $\mathcal{C}$ tel que $C^j_j \subset V_{\alpha_j}(p_j)$. Un point z commun à tous les C^j et à C vérifie la relation $z \in V_\gamma(p)$; comme $C \subset V_\gamma(z)$, on a aussi $C \subset V_\alpha(p)$, ce qui prouve notre proposition.

On a rencontré, plus haut, des exemples où il suffit d'ajouter à un espace A, non complet, des nouveaux éléments pour que le nouvel espace ainsi obtenu le soit: on <u>complète</u> ainsi l'espace A. Ainsi, il suffit, dans ce but, d'adjoindre au sous-ensemble A de E, si ce dernier est complet, tous ses points d'accumulation.

Nous allons maintenant donner un théorème extrêmement important montrant la possibilité de compléter tout espace uniforme.

<u>Théorème III.</u> <u>A tout espace uniforme E on peut associer un espace complet $\bar{E}$ tel que E soit isomorphe à un sous-ensemble partout dense de $\bar{E}$.</u>

Désignons par $\bar{E}$ l'ensemble dont chaque élément est une classe de familles de Cauchy équivalentes dans E. Une classe équivalente à un élément p de E sera encore désignée dans $\bar{E}$ par p.

Soit, ~~comme à la page~~ Ω'_α. l'intérieur de l'ensemble V_α. On se rappelle que les ensembles $\Omega'_\alpha(p)$ constituent pour chaque point p un système, ces systèmes définissant la structure uniforme de $\bar{E}$, si les $V_\alpha(p)$ la définissent. a et b étant deux éléments de $\bar{E}$, on écrira $b \in W_\alpha(a)$, si, quelle que soit la famille $\mathcal{A}$ définissant a, et, quelle que soit la famille $\mathcal{B}$ définissant b, il existe un ensemble A de $\mathcal{A}$ et un ensemble B de $\mathcal{B}$ tels que $A \times B \subset \Omega'_\alpha$.

Il résulte de la proposition 1 que $a \in W_\alpha(a)$; pour chaque a les $W_\alpha(a)$ constituent ainsi un système, et nous allons prouver que ces systèmes définissent dans $\bar{E}$ une structure uniforme.

Que U-I est vérifié pour les $W_\alpha(p)$ on le voit de la définition des $W_\alpha(p)$ et du fait que les $\Omega'_\alpha(p)$ vérifient cet axiome.

Les $W_\alpha(p)$ vérifient également U-II. Supposons que $b \in W_{\alpha'}(a)$ et $c \in W_{\alpha'}(a)$ (α' est lié à α par U-II des systèmes $\Omega'_\delta(p)$). $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ étant des familles définissant respectivement a, b, c, soient A, B, C des ensembles appartenant respectivement à ces classes et tels que $A \times B \subset \Omega'_{\alpha'}$, $A \times C \subset \Omega'_{\alpha'}$; quels que soient les points p, q, r appartenant respectivement à A, B, C, on a $q \in \Omega'_{\alpha'}(p)$, $r \in \Omega'_{\alpha'}(p)$ et par conséquent $q \in \Omega'_\alpha(r)$ et $B \times C \subset \Omega'_\alpha$, c'est-à-dire $c \in W_\alpha(b)$.

On voit enfin que les systèmes $\Omega'_\alpha(p)$ vérifient U-III, car si l'on a pour <u>tout α</u>, $b \in W_\alpha(a)$, c'est-à-dire s'il existe un A et un B tels que $A \times B \subset \Omega'_\alpha$, les deux familles correspondantes $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ contenant respectivement les ensembles A, B et correspondant à a et b sont équivalentes, en vertu de la proposition 1, et $a = b$.

Si maintenant a et b appartiennnent à E (c'est-à-dire si a et b, dans $\bar{E}$, sont définis par des familles de Cauchy, respectivement équivalentes aux points a et b de E), $b \in W_\alpha(a)$ entraîne $b \in \Omega'_\alpha(a)$ dans E ; réciproquement de $b \in \Omega'_\alpha(a)$, c'est-à-dire de $(a, b) \in \Omega'_\alpha$, résulte, puisque Ω'_α est ouvert, l'existence d'un γ et d'un δ tels que $\Omega'_\gamma(a) \times \Omega'_\delta(b) \subset \Omega'_\alpha$, et si l'on choisit dans $\mathcal{A}$ définissant a un ensemble $A \subset \Omega'_\gamma(a)$ et dans $\mathcal{B}$ définissant b un ensemble $B \subset \Omega'_\delta(b)$, on voit que $A \times B \subset \Omega'_\alpha$; on voit ainsi que $b \in \Omega'_\alpha(a)$ entraîne $b \in W_\alpha(a)$. Ce qui prouve que la structure induite sur E par celle de $\bar{E}$ est la même qu'on s'était initialement donnée dans E au moyen des $\Omega'_\alpha(p)$ ou des $V_\alpha(p)$.

Si $p \in \bar{E}$ il existe un point a de E (un point de $\bar{E}$ défini par une famille équivalente au point a de E), tel que $a \in W_\alpha(p)$. Soit, en effet, $\mathcal{C}_1$, une famille équivalente à p. Il existe un ensemble C_1 de $\mathcal{C}_1$, tel que $C_1^2 \subset \Omega'_\alpha$; a étant un point de C_1, on a $C_1 \times \{a\} \subset \Omega'_{\alpha'}$, c'est-à-dire $a \in \Omega'_{\alpha'}(C_1)$, et comme $\Omega'_{\alpha'}(C_1)$ est un ensemble ouvert, il existe un γ tel que $\Omega'_\gamma(a) \subset \Omega'_{\alpha'}(C_1)$ ou $C_1 \times \Omega'_\gamma(a) \subset \Omega'_{\alpha'}$ et, quelle que soit la famille $\mathcal{A}$ définissant a, il existe un ensemble A de $\mathcal{A}$ tel que $A \subset \Omega'_\gamma(a)$ et $C_1 \times A \subset \Omega'_{\alpha'}$; ce qui prouve que $\Omega'_{\alpha'}(C_1) \times A \subset \Omega'_\alpha$. Dans toute famille $\mathcal{C}$ équivalente à $\mathcal{C}_1$, on peut déterminer un ensemble $C \subset \Omega'_\alpha(C_1)$, par conséquent tel que $C \times A \subset \Omega'_\alpha$, ce qui prouve que $a \in W_\alpha(p)$

On voit ainsi que la partie de $\bar{E}$ qui est topologiquement isomorphe à E est partout dense dans $\bar{E}$.

D'après le raisonnement que nous venons de faire on voit que tout point a appartenant à C_1, où $C_1^2 \subset \Omega'_{\alpha'}$, appartient à $W_\alpha(p)$, c'est-à-dire que $C_1 \subset W_\alpha(p)$. C'est-à-dire que la famille $\mathcal{C}_1$ dont chaque ensemble ne contient que des points appartenant à E et qui définit le point p de $\bar{E}$, est équivalente à p, dans le sens de l'espace uniforme $\bar{E}$.

Pour démontrer que $\bar{E}$ est complet, il suffit, par conséquent, de montrer que toute famille de Cauchy dans $\bar{E}$ est équivalente à une famille de Cauchy dont tous les ensembles ne contiennent que des points de E. Or, il suffit, une famille $\mathcal{L}$ dans $\bar{E}$ étant donnée, de considérer la famille composée d'ensembles $E \cap W_\alpha(L)$, où L est un ensemble quelconque de $\mathcal{L}$, pour avoir, d'après ce qu'on a vu page 71, une famille dans E, équivalente à la famille $\mathcal{L}$. Notre théorème est donc complètement démontré.

Nous verrons plus loin que si deux espaces uniformes et complets sont tels que chacun d'eux admet un sous-ensemble partout dense, isomorphe à l'espace uniforme donné, les deux espaces sont également isomorphes. Autrement dit, on ne peut compléter un espace uniforme que d'une seule manière (à une isomorphie près, bien entendu).

Exercice. $\bar{E}$ étant, comme plus haut, l'ensemble de toutes les classes de familles de Cauchy équivalentes entre elles, et a, b étant deux éléments de $\bar{E}$, écrivons $b \in W'_\alpha(a)$ si, $\mathcal{A}$ étant une famille de Cauchy, correspondant à a et $\mathcal{B}$ une classe correspondant à b, il existe un ensemble A de $\mathcal{A}$ un ensemble B de $\mathcal{B}$ et deux indices λ et μ tels que: $V_\lambda(A) \times V_\mu(B) \subset V_\alpha$.

Démontrer que cette définition est indépendante des classes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ qui définissent respectivement a et b, que les $W'_\alpha(p)$ constituent des systèmes définissant sur $\bar{E}$ la même structure uniforme que les $W_\alpha(p)$ envisagés dans la démonstration qui précède.

Nous allons, maintenant, indiquer quelques applications très importantes du principe qui consiste à compléter un espace uniforme.

Nous avons vu, plus haut, que dans l'ensemble E^1 des nombres rationnels, les ensembles $V_\alpha(a)$ composés des éléments b qui vérifient l'inégalité $|b-a|<\alpha$, constituent, lorsque α varie dans un intervalle ouvert $(0, \omega)$, des systèmes définissant dans

E^1 une structure uniforme. L'espace uniforme ainsi défini n'est pas complet.

Exercice. Montrer que dans l'espace uniforme qu'on vient de définir la famille $\mathcal{C}$ d'ensembles C_ν, dont chacun contient tous les éléments $c_\nu, c_{\nu+1}, \ldots c_{\nu+k}, \ldots$, où $c_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ est une famille de Cauchy qui n'est pas convergente.

Mais d'après le théorème précédent on peut compléter cet espace en considérant l'ensemble $\bar{E}^1$ de toutes les classes de familles de Cauchy équivalentes et en définissant dans $\bar{E}^1$ une certaine structure uniforme; ce nouvel espace, qui est complet, sera désigné par R et chaque élément de cet espace sera appelé nombre réel. Nous continuerons à appeler un élément de R nombre rationnel si cet élément fait partie du sous-ensemble de R qui est isomorphe à E^1. Nous continuerons également à désigner par E^1 l'ensemble de tous les nombres rationnels considérés comme éléments de R. Tout nombre réel qui n'est pas rationnel sera dit irrationnel.

Il résulte directement du théorème énoncé que les nombres rationnels sont partout denses dans R. L'ensemble R sera appelé par la suite, droite numérique. Cette appellation trouvera sa justification plus loin.

A l'ensemble E^1 des nombres rationnels on peut attribuer une structure uniforme différente de celle dont on l'avait munie jusqu'à présent. Soit p un nombre premier, c'est-à-dire un entier supérieur à un qui n'ait d'autres diviseurs que lui-même et 1. Soit a un nombre rationnel égal à la fraction continue irréductible $\frac{m}{n}$. Si p ne divise ni m ni n nous poserons $|a|_p = 1$; si p figure dans la décomposition de m en facteurs premiers avec l'exposant μ, nous poserons $|a|_p = p^{-\mu}$; si p figure dans la décomposition de n avec l'exposant ν nous poserons $|a|_p = p^{\nu}$; nous poserons $|0|_p = 0$. On a donc toujours $|a|_p = p^{\rho}$ où ρ est le plus petit entier rationnel tel que $p^{\rho}a$, mis sous forme de fraction irréductible ait un dénominateur premier à p. Il en résulte que $|a \pm b|_p$ est au plus égal au plus grand des deux nombres $|a|_p = p^{\rho}$ et $|b|_p = p^{\sigma}$, car, si, par exemple $\rho \geqslant \sigma$, du fait que $p^{\rho}a$ et $p^{\sigma}b$ aient des dénominateurs premiers à p, résulte que $p^{\rho}(a \pm b)$ a également un dénominateur premier à p.

Attachons alors à chaque point a de E^1 tous les ensembles $W_{\alpha}(a)$, où α prend toutes les valeurs entières rationnelles, chaque $W_{\alpha}(a)$ étant l'ensemble des nombres rationnels b tels que $|b-a|_p < p^{\alpha}$. On a évidemment $a \in W_{\alpha}(a)$ quel que soit α.

On constate facilement que les systèmes $W_{\alpha}(a)$ véfifient les axiomes $(\mathcal{U})$.

$\mathcal{U}$-$\bar{I}$ est évidemment vérifié.

$\mathcal{U}$-$\underline{II}$ est vérifié: d'après ce qu'on a dit plus haut, on a :

$$|b-a|_p = |(b-c)-(a-c)|_p \leq |b-c|_p + |a-c|_p,$$

et si l'on pose $\alpha' = \alpha - 1$, de $b \in W_{\alpha'}(c)$ et $a \in W_{\alpha'}(c)$ résulte

$$|b-a|_p < 2p^{\alpha-1} \leq p^{\alpha},$$

c'est-à-dire $b \in W_{\alpha}(a)$.

$\mathcal{U}$-$\overline{III}$ est également vérifié, car si $a \neq b$ et si $|a-b|_p = p^{\sigma}$, il suffit de poser $\alpha < \sigma$ pour voir que b n'est pas contenu dans le voisinage $W_{\alpha}(a)$.

Les systèmes $W_{\alpha}(a)$ définissent, par conséquent, dans l'ensemble des nombres rationnels une structure uniforme.

On peut, alors, compléter cet espace, en vertu du théorème démontré plus haut. On obtient ainsi un espace complet différent de la droite numérique et qu'on appelle l'ensemble des nombres p-adiques.

Nous avons attribué une structure uniforme à chaque ensemble E^n-produit de n facteurs dont chacun est l'ensemble des nombres rationnels muni de la structure uniforme définie page . On peut compléter chacun de ces ensembles . L'ensemble qui complète E^n sera désigné par R^n et s'appellera espace numérique à n dimensions; lorsque $n=2$, on dira aussi plan numérique. Un point appartenant au plan numérique R^2 sera aussi appelé nombre complexe. Nous verrons plus tard la grande utilité de cette notion.

L'importance de l'opération qui consiste à compléter un espace uniforme tient à la possibilité d'étendre à l'espace complété des opérations définies sur l'espace initial; cette extension n'étant autre chose que le prolongement à l'espace complet des fonctions qui les définissent. On conçoit ainsi l'importance du théorème suivant qui exprime la possibilité et l'unicité d'un tel prolongement des fonctions uniformément continues.

Théorème IV . Soient E un espace uniforme, A un sous-ensemble de E et f une fonction prenant ses valeurs dans un espace complet E', définie et uniformément continue sur $\bar{A}$. Il existe une et une seule fonction $\bar{f}$ prenant ses valeurs dans E', définie et continue sur $\bar{A}$, et telle que $\bar{f}_A = f$. La fonction $\bar{f}$ ainsi définie est uniformément continue sur $\bar{A}$.

Si les systèmes définissant la structure uniforme de E sont les $V_\alpha(p)$, les ensembles $f[V_\alpha(p) \cap A]$ constituent une famille de Cauchy, quel que soit p de $\bar{A}$, et pour un tel point $\bar{f}(p)$ est l'élément de E équivalent à cette famille.

Soit p un point de $\bar{A}$; pour qu'une fonction $\bar{f}$ soit conti-

84

nue en p, il faut que pour $q \in A$, $\lim_{q \to p} f(q)$ existe et soit égale à $\bar{f}(p)$. Si p est un point d'accumulation de A, un nombre fini de voisinages $V_\alpha(p)$ contiennent un point commun différent de p il faut, par conséquent, en vertu du théorème I, que les ensembles $f[V_\alpha(p) \cap A]$ constituent une famille de Cauchy équivalente à $\bar{f}(p)$, ce qui prouve d'abord que si le prolongement est possible il est unique.

Or, les ensembles $V_\alpha(p) \cap A$ forment précisément une famille de Cauchy, quel que soit p de $\bar{A}$, et d'après la proposition 4, les ensembles $f[V_\alpha(p) \cap A]$ forment une famille de Cauchy dans E' ; si p' est le point auquel cette famille est équivalente, posons $\bar{f}(p) = p'$.

Quel que soit α, il existe un β tel que $f[V_\beta(p) \cap A] \subset V'_\alpha(p')$, ce qui prouve que lorsque p est dans A, $f(p) = \bar{f}(p)$.

La fonction $\bar{f}$ est continue dans $\bar{A}$, car si λ, ν et μ sont tels que $V_\nu[V_\mu(p)] \subset V_\lambda(p)$ et si λ est tel que $f[V_\lambda(p) \cap A] \subset V'_\alpha(p')$ alors on a

$$\bar{f}(q) \in f[V_\lambda(p) \cap A] \subset V'_\alpha(p'),$$

quel que soit q de $V_\mu(p)$, ce qui prouve que $\bar{f}$ est continue.

La fonction f étant uniformément continue dans A, pour α donné, la relation $f[V_\beta(p) \cap A] \subset V'_\alpha(p')$ est vérifié avec le même indice β, quel que soit le point p de A. Mais on peut aussi faire correspondre à α un indice γ, tel que si l'on le substitue à β la relation précédente a lieu quel que soit p de $\bar{A}$. En effet, si λ et μ sont tels que $V'_\lambda[V'_\mu(p')] \subset V'_\alpha(p')$ et si ω est tel que pour tout $q \in A$ et $q' = f(q)$ on a $f[V_\omega(q) \cap A] \subset V'_\lambda(q')$, on a alors ~~pour~~ tous les points q de A qui se trouvent dans un certain voisinage $V_\varepsilon(p)$ (ε dépend de p) tel que $\bar{f}[V_\varepsilon(p)] \subset V'_\mu(p')$:

$$f[V_\omega(q) \cap A] \subset V'_\lambda(q') \subset V'_\alpha(p').$$

On a, par conséquent:

$$f[V_{\omega}(p) \cap A] \subset V'_{\alpha}(p'),$$

où ω ne dépend que de α (et non de p).

Si, maintenant, α, et β, sont tels que $V_{\beta}[V_{\alpha}(p)] \subset V_{\omega}(p)$, on a, en vertu de la proposition 3 :

$$\bar{f}(q) \in \overline{f[V_{\beta}(q) \cap A]} \subset \overline{f[V_{\omega}(p) \cap A]} \subset \overline{V'_{\alpha}(p')},$$

quels que soient les points p et q de $\bar{A}$, à condition que $q \in V_{\alpha}(p)$. Comme les $\overline{V'_{\alpha}(p')}$ constituent des systèmes équivalents aux systèmes $V'_{\alpha}(p')$, on voit que $\bar{f}$ est une fonction uniformément continue dans $\bar{A}$.

On peut tirer du théorème démontré le corollaire suivant:

Soient $\bar{E}$ et $\bar{E}'$ deux espaces uniformes et complets. Soient E un sous-ensemble partout dense de $\bar{E}$, et E' un sous-ensemble partout dense dans $\bar{E}'$. Si E et E' sont isomorphes, les espaces $\bar{E}$ et $\bar{E}'$ sont également isomorphes.

En effet, comme E et E' sont isomorphes, il existe deux fonctions $p' = f(p)$ et $p = g(p')$, inverses l'une de l'autre, uniformément continues, qui représentent l'une E ~~et~~ sur E', l'autre E' sur E. Il existe une et une seule fonction $\bar{f}$ qui prolonge f aux points de l'espace $\bar{E}$, et une seule fonction $\bar{g}$ qui prolonge g aux points de l'espace $\bar{E}'$.

La fonction $\bar{g}[\bar{f}(p)]$ est une transformation de $\bar{E}$ en lui-même qui coïncide avec la transformation identique sur E, donc d'après le théorème précédent, sur $\bar{E}$; de même $\bar{f}[\bar{g}(p')]$ est la transformation identique de $\bar{E}'$ en lui-même et par conséquent les fonctions $\bar{f}$ et $\bar{g}$ sont inverses l'une de l'autre, et déterminent une correspondance biunivoque entre $\bar{E}$ et $\bar{E}'$; comme ces fonctions sont uniformément continues, cette correspondance est une isomorphie

 86

Nous allons donner quelques applications importantes du théorème précédent. Nous ~~allons~~ commençons par étendre à l'ensemble des nombres réels les opérations algébriques supposées connues dans E^1 ; c'est-à-dire de le définir comme <u>corps</u>.

Remarquons d'abord que l'espace numérique R^n que nous avons défini plus haut comme étant celui qui complète l'espace E^n, celui-ci étant muni de la structure uniforme définie page , est isomorphe à l'espace-produit de n facteurs égaux dont chacun est la droite numérique R. (Cette remarque justifie la notation R^n). En effet, d'après la proposition 6, le produit direct de deux droites numériques est un espace complet; un sous-ensemble de ce produit est évidemment isomorphe à E^n. Il résulte alors, d'après ce qui précède, que les deux espaces $\bar{E}^n$ et R^n <u>sont isomorphes</u>.
(produit de n facteurs dont chacun est R)
A chaque point de R^n on peut faire correspondre des coordonnées $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ qui sont des nombres réels.

Dans la suite, nous ne distinguerons pas ces deux espaces.

Nous avons vu que les fonctions $x \pm y$ sont uniformément continues dans E^2, d'après le théorème IV, on peut prolonger cette fonction et ceci d'une seule manière sur tout l'espace R^2. Les valeurs de ces fonctions en un point (x, y) de R^2 seront encore désignées par $x \pm y$. D'après le même théorème IV, ces fonctions sont uniformément continues dans R^2.

On a pour toutes les valeurs réelles x, y : $x+y=y+x$.

En effet si à chaque point (x,y) de R^2 on fait correspondre le point (y,x) de ce même espace, la fonction ainsi obtenue est continue dans R^2, car la fonction égale à chacune des coordonnées y, x l'est. Comme $y+x$ est une fonction continue dans R^2, il résulte du théorème sur les fonctions continues des fonctions continues que $y+x$ est bien une fonction continue en (x,y). Du fait que les deux fonctions $x+y$, $y+x$ sont continues dans R^2 et de l'égalité $x+y=y+x$ et la continuité uniforme de ces deux fonctions dans E^2 résulte notre affirmation.

On a pour toutes les valeurs réelles x, y, z : $(x+y)+z = x+(y+z)$

Comme ces deux fonctions sont égales et uniformément continues dans E^3, il suffit, en ~~[illegible]~~ raisonnant comme plus haut, de démontrer que chacune de ces deux fonctions est continue dans R^3. Or, en posant $x+y=X$, ~~[illegible]~~ la fonction qui à chaque point (x,y,z) de R^3 fait correspondre le point (X,z) de R^2 est continue dans R^3, X et z l'étant séparement. Comme, d'autre part, la fonction $X+z$ prenant ses valeurs dans R et définie ~~en (X,z)~~ dans R^2 est continue en (X,z) dans cet espace, on voit que $(x+y)+z$ est continue dans R^3. On voit de même que la fonction $x+(y+z)$ est continue dans R^3. On a donc $(x+y)+z = x+(y+z)$ et on peut désigner cette somme par $x+y+z$.

Pour x et y réels on a : $(x-y)+y=x$.

~~Comme plus haut on démontre que $(x-y)+y=x$~~

En effet, en posant $X=x-y$, la fonction qui à chaque point ~~de~~ (X,y) fait correspondre $X+y$ est continue dans R^2, mais la fonction qui à chaque point (x,y) de R^2 fait correspondre le point ~~[illegible]~~ (X,y) l'est également, la fonction $(x-y)+y$ est donc continue dans R^2; comme la fonction prenant pour (x,y) la valeur x l'est aussi, et comme $(x-y)+y=x$ pour les valeurs rationnelles, on voit que cette égalité a lieu pour toutes les valeurs réelles.

Nous allons maintenant définir pour les nombres réels la multiplication.

Nous avons vu, page , que la fonction qui à chaque point (x',y') de E^2 fait correspondre le nombre $x'y'$ est uniformément continue dans chaque ensemble dont les valeurs absolues des coordonnées sont inférieures à ~~des~~ deux constantes rationnelles. Désignons par $A_{M_1 M_2}$ l'ensemble ~~de~~ tous les points (x',y') dans E^2 tels que $|x| < M_1$, $|y| < M_2$. D'après le théorème III on peut ~~définir~~ prolonger la fonction précédente dans ~~R^2, la fonction égale à xy au~~ l'ensemble $\bar{A}_{M_1 M_2}$ de l'espace R^2, ce prolongement étant unique. La valeur de la fonction, continue dans $\bar{A}_{M_1 M_2}$ et égale en un point quelconque (x',y') de $A_{M_1 M_2}$ à $x'y'$, sera désignée, pour chaque point (x,y) de $\bar{A}_{M_1 M_2}$, par xy. Pour que cette définition ait un sens pour tous les points (x,y) de R^2 il faut démontrer que, quel que soit le point (x,y) de R^2, il existe deux nombres rationnels M_1, M_2 tels que $(x,y) \in \bar{A}_{M_1 M_2}$ et que si l'on a, à la fois : $(x,y) \in \bar{A}_{M_1 M_2}$, $(x,y) \in \bar{A}_{M_1' M_2'}$ les deux valeurs correspondantes qu'on attribue à xy sont égales.

Si $(x,y) \in \bar{A}_{M_1 M_2}$ et $(x,y) \in \bar{A}_{M_1' M_2'}$, et si $M_1 \leq M_1'$, $M_2 \leq M_2'$, on a $\bar{A}_{M_1 M_2} \subset \bar{A}_{M_1' M_2'}$ et il résulte immédiatement du théorème III que la valeur attribuée à xy est la même, qu'on parte de $A_{M_1 M_2}$ ou de $A_{M_1' M_2'}$. Si les deux inégalités précédentes n'ont pas lieu il suffit de ~~poser $M_1'' = \min(M_1, M_1')$~~ désigner par M_1'' la plus petite des quantités M_1, M_1' et par M_2'' la plus petite des quantités M_2, M_2' pour avoir, si $(x,y) \in \bar{A}_{M_1 M_2}$, $(x,y) \in \bar{A}_{M_1' M_2'}$, aussi la relation $(x,y) \in \bar{A}_{M_1'' M_2''}$, ce qui prouve, d'après ce qu'on vient de voir, que la valeur de xy est indépendante des constantes M_1, M_2.

Démontrons maintenant que, quel que soit le point (x,y) de R^2, il existe deux constantes M_1, M_2 telles que $(x,y) \in \bar{A}_{M_1 M_2}$. Désignons par $V_\alpha(a)$, a étant un nombre réel ~~qui~~ et α un nombre rationnel positif, l'ensemble de tous les nombres réels b tels que, quelles que soient les deux familles de Cauchy

~~88~~ 88

dans E', $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ respectivement équivalentes dans R à a et b, il existe un ensemble A de $\mathcal{A}$ et un ensemble B de $\mathcal{B}$ tels que $A \times B \subset V_\alpha$, où V_α est l'ensemble des points (a', b') de E^2 vérifiant l'inégalité $|a'-b'| < \alpha$. On sait, d'après le raisonnement fait lors de la démonstration du théorème II que, pour a donné, les $V_\alpha(a)$ constituent un système attaché à a, l'ensemble de ces systèmes, lorsque a prend toutes les valeurs dans R, définissant la structure uniforme de R. α étant donné, il existe un nombre rationnel positif M_1 tel que tous les nombres x' appartenant à $A_\alpha = E' \cap V_\alpha(x)$ vérifient l'inégalité $|x'| < M_1$. En effet d'après ce qui précède, quels que soient les deux nombres x' et x'' de A_α, il existe un nombre rationnel x_1 tel que $|x'-x_1| < \alpha$, $|x''-x_1| < \alpha$: il suffit de prendre comme x_1 un nombre commun aux ensembles A_1 et A_2 appartenant à une famille de Cauchy dans E', équivalente, dans R, à x et tels que $A_1 \times \{x'\} \subset V_\alpha$, $A_2 \times \{x''\} \subset V_\alpha$; on a, dans ces conditions $|x'-x''| = |x'-x_1+x_1-x''| \leq |x'-x_1| + |x''-x_1| < 2\alpha$ et, par conséquent $|x'| < |x''| + 2\alpha$, ce qui prouve, en fixant x'' et en prenant x' arbitraire dans A_α, l'existence du nombre M_1. Il existe de même un nombre rationnel positif M_2 tel que tous les points y' appartenant à $B_\alpha = E' \cap V_\alpha(y)$ vérifient l'inégalité $|y'| < M_2$.

Comme, lorsque α est fixe et lorsque β prend toutes les valeurs rationnelles positives, les ensembles $V'_\beta(x) = V_\beta(x) \cap V_\alpha(x)$ constituent, en vertu de U-I un système de voisinages pour x, et comme ~~chaq~~ chacun de ces ensembles contient un point de A_α, une remarque analogue étant d'ailleurs valable pour $V'_\beta(y) = V_\beta(y) \cap V_\alpha(y)$, on voit immédiatement qu'avec le choix des constantes M_1, M_2 on a $(x, y) \in \bar{A}_{M_1 M_2}$.

Remarquons qu'avec le choix des constantes M_1, M_2 qu'on vient de faire (x, y) est un point intérieur de $\bar{A}_{M_1 M_2}$. En effet, en donnant à β et à γ toutes les valeurs rationnelles positives, les ensembles $V'_\beta(x) \times V'_\gamma(y)$ constituent un système attaché au point (x, y);

il existe, par conséquent un couple β', γ' et un couple β'', γ'' tels que si ~~...~~ $(x_1, y_1) \in V'_{\beta'}(x_2) \times V'_{\gamma'}(y_2)$ et si $(x_2, y_2) \in V'_{\beta''}(x) \times V'_{\gamma''}(y)$, on a aussi $(x_2, y_2) \in V'_\beta(x) \times V'_\gamma(y)$. Tous les points (x_1, y_1) de R^2 contenus dans le voisinage $V'_{\beta'}(x) \times V'_{\gamma}(y)$ de (x, y) sont donc tels que les points (x', y') dont les coordonnées vérifient les relations : $x' \in E^1 \cap V'_{\beta''}(x_1)$, $y' \in E^1 \cap V'_{\gamma''}(y_1)$ vérifient aussi les relations $x' \in A_2$, $y' \in B_2$, ce qui prouve, comme plus haut, que $(x, y_1) \in \bar{A}_{M_1 M_2}$. Le point (x, y) est donc bien un point intérieur de $\bar{A}_{M_1 M_2}$. Ce qui prouve non seulement que la fonction égale à xy en chaque point (x, y) de R^2 est définie ~~et~~ et continue dans l'ensemble $\bar{A}_{M_1 M_2}$ où ce point se trouve, mais encore ~~...~~ continue dans R^2. Elle est uniformément continue dans ~~...~~ chaque $\bar{A}_{M_1 M_2}$ où le point (x, y) se trouve.

En raisonnant comme pour ~~l'ad~~ la fonction $x+y$, on voit que $xy = yx$. On ~~dir~~ voit aussi facilement que la multiplication est ~~commutative~~ associative ; on voit enfin qu'elle est distributive par rapport à l'addition, c'est à dire que $(x+y)z = xz + yz$.

Définissons maintenant pour les nombres réels l'opération $\frac{1}{x}$. ~~On~~ D'après ce qu'on a vu page ~~que~~ la fonction égale à $\frac{1}{x'}$ pour chaque point x' de E^1 est uniformément continue ~~...~~ dans l'ensemble $E^1 \cap \complement V_\alpha(0)$, où V_α a la même signification que plus haut. $\complement V_\alpha(0)$ étant un ensemble fermé vérifiant la relation $\complement V_\alpha(0) = \overline{E^1 \cap \complement V_\alpha(0)}$, on voit qu'on peut prolonger l'opération $\frac{1}{x}$ à tous les points de cet ensemble. Il résulte d'après U-III, que quel que soit le point x de $R - \{0\}$ on peut déterminer α de sorte que $x \in \complement V_\alpha(0)$. L'opération $\frac{1}{x}$ est donc définie pour tous les points de $R - \{0\}$. On voit immédiatement que cette définition est indépendante de α, car si $x \in \complement V_\alpha(0)$ et $x \in \complement V_\beta(0)$ on a aussi $x \in \complement V_\gamma(0)$, où γ est tel que $V_\gamma(0) \subset V_\alpha(0) \cap V_\beta(0)$.

On voit aussi immédiatement qu'on peut choisir α de sorte que le point x soit intérieur à l'ensemble $CV_\alpha(0)$; ~~de sorte que~~ la fonction égale à $\frac{1}{x}$ pour toute valeur ~~de~~ x de R est donc ~~est~~ continue dans $R-\{0\}$. Cette fonction est uniformément continue dans chaque ensemble $CV_\alpha(0)$.

Si l'on pose $X=\frac{1}{x}$, la fonction Xx est continue au point (X,x) de R^2; comme, d'autre part, la fonction définie dans R prenant ses valeurs dans R^2 et égale en chaque point x à (X,x) est continue en ~~pour~~ tout point $x\neq 0$, on voit que la fonction $\frac{1}{x}x$ est continue en ~~un~~ tel point; or cette fonction est égale à 1 chaque fois que x est rationnel (en donnant à la fonction au point $x=0$ la valeur 1), on a donc pour chaque x réel différent de 0: $\frac{1}{x}\cdot x=1$. Tout nombre réel différent de 0 a donc un inverse.

Nous avons ainsi ~~donc~~ démontré que <u>R vérifie tous les axiomes des corps.</u>

De la continuité de xy dans R^2 on tire, par application du théorème des fonctions des fonctions et en procédant par récurrence sur le nombre de facteurs, que tout monôme $cx_1^{a_1}x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n}$ où les a_i sont entiers positifs est une fonction continue ~~dans~~ ~~R~~ du point $x=(x_i)$ dans R^n. En tenant alors compte du fait que $x+y$ est une fonction continue dans R^2 et en appliquant de nouveau le théorème des fonctions des fonctions on voit que <u>tout polynome à un nombre quelconque de variables $x_1, x_2, \dots x_n$ est une fonction continue de $x=(x_i)$ dans R^n.</u>

On voit alors ~~de même~~, en se basant sur la continuité de $\frac{1}{x}$ sur $R-\{0\}$ que <u>toute fraction rationnelle en $x_1, x_2, \dots x_n$ est une fonction continue de $x=(x_i)$ dans l'ensemble des points de R^n où son dénominateur n'est pas nul.</u>

Si maintenant $f_1(\alpha)$ et $f_2(\alpha)$ sont deux fonctions continues à valeurs ~~variables~~ numériques définies dans un espace quelconque, la fonction $f(\alpha)=(f_1(\alpha),f_2(\alpha))$ est une fonction continue définie dans le même espace et prenant ses valeurs dans R^2; en appliquant alors le théorème des fonctions ~~continues~~ des fonctions, on voit que les fonctions $f_1(\alpha)+f_2(\alpha)$ et $f_1(\alpha)\cdot f_2(\alpha)$ sont encore des fonctions continues de α. On voit

91. aussi d'une manière générale que toute expression rationnelle formée avec des fonctions continues d'un argument α est elle-même une fonction continue aux points où ~~le~~ son dénominateur ne s'annule pas.

Donnons maintenant l'exemple dont il a été question au chapitre I, à savoir d'une fonction $f(x,y)$ définie dans R^2 continue, quel que soit x fixe, par rapport à y, et quel que soit y fixe par rapport à x et n'étant pas continue en un certain point (ici $(0,0)$) dans la topologie de R^2.

Posons $f(0,0)=0$ et pour tout autre point (x,y) de R^2 : $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$. Donnons à x n'importe quelle valeur a : si $a=0$ on aura $f=0$ quel que soit y ; si $a \neq 0$ on aura $f(a,y) = ay/(a^2+y^2)$, et cette fonction sera donc continue pour toutes les valeurs de y car le dénominateur ne s'annule pas ; f étant symétrique en x et y on voit aussi que $f(x,b)$ est une fonction continue pour toutes les valeurs de x, quel que soit b. La fonction f n'est cependant pas continue (dans la topologie de R^2) au point $(0,0)$, car dans tout voisinage de ce point se trouvent des points ~~rationnels $x=y$~~ (x,y) tels que $x=y$ et pour lesquels $f(x,y)=\frac{1}{2}$.

Nous allons maintenant démontrer que ~~l'ensemble~~ l'espace

R_p des nombres p-adiques vérifient les axiomes des corps.

On se rappelle que l'espace R_p a été obtenu en complétant l'espace des nombres rationnels lequel a été muni de la structure ~~sui~~ uniforme suivante : à chaque nombre rationnel $\underline{a}$ on a attaché le système d'ensembles $V_\alpha(a)$ composé des points b tels que $|b-a| < p^\alpha$, α étant un entier rationnel.

Nous désignerons l'ensemble des nombres rationnels muni de cette structure par E_p.

Dans E_p^2 les fonctions (prenant leurs valeurs dans E_p et) qui en chaque point (x,y) prennent respectivement les valeurs $x \pm y$, xy sont uniformément continues, la première dans E_p^2, la seconde dans toute partie de E_p^2 dont les points (x,y) vérifient des inégalités $|x|_p \leq p^\alpha$, $|y|_p < p^\beta$, α et β étant indépendants de x et de y.

~~De~~ même que la fonction qui prend ses valeurs dans E_p et qui en chaque point x de ~~E_p et~~ $E_p - \{0\}$ est égale à $\frac{1}{x}$ est uniformément continue dans $\complement V_\alpha(0)$, quel que soit l'entier α.

Si (x,y) et (x',y') appartiennent à E_p^2, comme on a :

$$|(x \pm y) - (x' \pm y')|_p \leq |x - x'|_p + |y' - y|_p,$$

il suffit que $x' \in V_{\alpha-1}(x)$, $y' \in V_{\alpha-1}(y)$, c'est à dire que $|x-x'|_p < p^{\alpha-1}$, $|y-y'| < p^{\alpha-1}$, pour que ~~avoir~~ $|(x \pm y) - (x' \pm y')| < 2p^{\alpha-1} \leq p^\alpha$, c'est à dire $(x' \pm y') \in V_\alpha(x \pm y)$, ce qui prouve que $x \pm y$ est une fonction ~~co~~ uniformément continue dans E_p^2.

Soit maintenant ~~on considère~~ un ensemble A de E_p^2 tel qu'il existe deux entiers α et β vérifiant les inégalités $|x|_p \leq p^\alpha$ $|y|_p \leq p^\beta$, quels que soit le point (x,y) de A. Si (x,y) et (x',y') sont deux points de A on a :

$$|xy - x'y'|_p = |xy - xy' + xy' - x'y'|_p \leq |x(y-y')|_p + |y'(x-x')|_p$$
$$\leq p^\alpha |y-y'|_p + p^\beta |x-x'|_p.$$

Pour avoir, (x,y) et (x',y') étant dans A, $|xy - x'y'|_p < p^\lambda$ c'est à dire ~~x~~ $xy \in V_\lambda(x'y')$, il suffit qu'on ait à la fois :

$$|y-y'|_p < p^{\lambda-\alpha-1}, \quad |x-x'|_p < p^{\lambda-\beta-1};$$

c'est à dire $y' \in V_{\lambda-\alpha-1}(y)$, $x' \in V_{\lambda-\beta-1}(x)$, ce qui prouve que ~~la~~ xy est une fonction ~~continue~~ uniformément continue dans A.

Supposons que x varie dans $\complement V_\alpha(0)$ c'est à dire que $|x|_p \geq p^\alpha$. D'après la définition de la quantité $|x|_p$ on voit immédiatement que $|\frac{1}{x}|_p \leq p^{-\alpha}$, on peut alors écrire, x et x' étant deux nombres de E_p :

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}\right|_p = \left|\frac{x'-x}{xx'}\right|_p \leq \left|\frac{1}{x}\right|_p \left|\frac{1}{x'}\right|_p |x'-x|_p \leq p^{-2\alpha} |x'-x|_p.$$

Pour avoir $\frac{1}{x'} \in V_\lambda(\frac{1}{x})$ il suffit, par conséquent, d'avoir $x' \in V_{2\alpha+\lambda}(x)$, ce qui prouve que $\frac{1}{x}$ est uniformément continue dans $\complement V_\alpha(0)$.

Il suffit maintenant de modifier légèrement le langage employé lors de la définition des ~~[illegible]~~ opérations $x \pm y$, xy $\frac{1}{x}$ pour les nombres réels, pour voir que le théorème III fournit, par le procédé du prolongement, ~~la~~ la définition de

~~93~~ 93

ces mêmes opérations pour les nombres p-adiques. On voit de même que l'espace des nombres p-adiques constitue un corps.

Ayant démontré que R est un corps, nous pouvons définir les opérations de l'addition, multiplication et division dans R^2 de sorte à pouvoir définir cet espace comme corps. Nous avons dit que tout point (x,y) de cet espace sera appelé nombre ~~complexe~~ complexe; ~~qu'on~~ on le désignera aussi sous la forme $x+iy$ pour des raisons qu'on expliquera un peu plus loin. Posons:

L'ensemble des points $(x,0)=x+i0$ ~~est~~ constitue un espace topologiquement isomorphe à R. Nous désignerons un tel point par x et l'appellerons encore ~~ce point~~ nombre réel. Un ~~nombre~~ point de la forme $(0,y)=0+iy$ sera aussi désigné par iy et nous l'appellerons purement imaginaire.

~~Posons~~ $(x+iy)+(x'+iy')=(x+x')+i(y+y')$

$(x+iy)(x'+iy')=(xx'-yy')+i(xy'+x'y)$

et si (x,y) est différent de $(0,0)$:

$$\frac{1}{x+iy}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Chacune des ~~ces~~ deux premières opérations définit une fonction dans R^4 prenant ses valeurs ~~également~~ dans R^2. On voit immédiatement, d'après ce que nous avons dit sur les fractions rationnelles, ~~pour les mêmes opérations dans R~~, que $(x+iy)+(x'+iy')$ et $(x+iy)(x'+iy')$ sont des fonctions continues dans R^4, en tout point (x,x',y,y'). En effet $(x+x')$ est continue dans R^2 donc dans R^4, de même $(y+y')$, donc aussi $[(x+x'),(y+y')]=(x+x')+i(y+y')$. On voit aussi que $(xx'-yy')$ et $(xy'+x'y)$ sont continues ~~continues~~ dans R^4, donc aussi $(xx'-yy')+i(xy'+x'y)$. On voit, ~~enfin~~, que $\frac{1}{x+iy}$ définit dans R^2 une fonction continue lorsque le point (x,y) est différent de $(0,0)$. On constate ~~enfin~~ facilement que l'addition et la multiplication pour les nombres complexes possèdent les mêmes propriétés que ces mêmes opérations dans R. Ainsi par exemple $[(x+iy)+(x'+iy')]+(x''+iy'')=(x+iy)+[(x'+iy')+(x''+iy'')]$ car chacun de ces nombres est égal à $(x+x'+x'')+i(y+y'+y'')$ etc... On voit, enfin, que $\frac{1}{x+iy}(x+iy)=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}+\frac{i0}{x^2+y^2}=1$. On démontre ainsi que R^2 ~~possède toutes les propriétés~~ vérifie tous les axiomes d'un corps. On voit aussi que lorsque, comme nous l'avons fait plus haut, on considère R

comme un sous-ensemble de R^2, on retrouve par les opérations ~~dans~~ sur les nombres complexes les opérations déjà définies dans R.

On peut envisager le corps des nombres complexes sous un autre aspect. Dans le corps des nombres réels le polynome x^2+1 est irréductible : car autrement il aurait un facteur du premier degré, donc une racine, ce qui est impossible, car si l'on avait pour un x réel $x^2+1=0$, il y ~~on~~ aurait, quel que soit α rationnel positif, ~~de la continuité de x^2+1~~ un nombre rationnel β tel que si $x' \in V_\beta(x)$, $(x'^2+1) \in V_\alpha(0)$, cette relation serait donc aussi valable pour les nombres rationnels de $V_\beta(x)$, et pour un tel nombre on aurait $x'^2+1<\alpha$, ce qui est impossible lorsque $\alpha<1$. On peut donc (voir Algèbre §) d'une manière et essentiellement d'une seule définir un corps, extension algébrique du corps des nombres réels, et où l'équation $x^2+1=0$ ait une racine. Ce corps se déduit du corps des nombres réels par ~~l~~ adjonction d'une racine de $x^2+1=0$, et si cette racine est désignée par i, tout élément du corps en question peut d'une manière et d'une seule, s'écrire sous la forme $x+iy$, x et y étant des nombres réels. ~~L'ensemble de ces éléments $(x+iy)$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des points (x,y) de R^2 et l'on peut attribuer à cet ensemble la topologie qui correspond à celle de R^2.~~ Les règles de calcul pour ~~les~~ ces éléments $x+iy$ se déduisent immédiatement des définitions ; on a $(x+iy)+(x'+iy') = (x+x')+i(y+y')$, $(x+iy)(x'+iy') = xx'+iyx'+ixy'+i^2yy' = (xx'-yy')+i(xy'+x'y)$, car $i^2=1$; $\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}$. Le corps dont les éléments sont en correspondance biunivoque avec ceux de R^2 est donc ~~identique~~ isomorphe à celui qu'on a défini plus haut dans cet espace R^2.

L'équation x^2+1 ayant deux racines i et $-i$ on obtient un isomorphisme du corps des nombres complexes en lui-même en changeant i en $-i$, c'est à dire en faisant correspondre à tout nombre complexe $z=x+iy$ le nombre $x-iy$ qui est appelé, comme l'on sait, l'imaginaire conjugué de z et se note $\bar{z}$. On a évidemment

~~95~~ 95. ~~$\frac{z+\bar z}{2}$~~ $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$; x s'appelle la partie réelle de z et se note $\mathcal{R}(z)$, y s'appelle partie imaginaire de z et se note $\mathcal{I}(z)$ (voir Algèbre).

Chapitre III

§1. Nombres réels.

L'espace R, la droite numérique, joue un rôle particulièrement important dans l'Analyse, il importe, par conséquent, d'indiquer ses propriétés. Nous commençons par démontrer que cet ensemble est ordonné.

Rappelons que la structure uniforme dans R est définie par les systèmes $V_\alpha(x)$ attachés à chaque point x de R, α prenant toutes les valeurs rationnelles positives, ou seulement inférieures à un nombre rationnel ω fixe; l'ensemble $V_\alpha(x)$ étant composé de tous les nombres réels y tels que si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux familles de Cauchy ~~sur~~ dans E^1, respectivement équivalentes, dans R, à x et à y, il existe un ensemble A de $\mathcal{A}$ et un ensemble B de $\mathcal{B}$ tels que $A \times B \subset V_\alpha$ dans E^2, c'est à dire tels que, quels que soient le point x' de A et le point y' de B, on a $|x'-y'|<\alpha$. Le long de tous les raisonnements qui suivent $V_\alpha(x)$ aura le sens qu'on vient de lui donner. On voit immédiatement que si $\beta<\alpha$, on a $V_\beta(x) \subset V_\alpha(x)$. Si x' et x'' sont deux nombres ~~ratio~~ rationnels contenus dans $V_\alpha(x)$ on a $|x'-x''|<2\alpha$; en effet dans chaque famille de Cauchy $\mathcal{A}$ équivalente à x il existe un ensemble A_1 et un ensemble A_2 tels que: $A_1 \times \{x'\} \subset V_\alpha$, $A_2 \times \{x''\} \subset V_\alpha$, et pour ~~le~~ un point x_1 commun à A_1 et A_2 on a $|x'-x_1|<\alpha$, $|x''-x_1|<\alpha$, donc: $|x'-x''| = |x'-x_1+x_1-x''| \leq |x'-x_1|+|x''-x_1| < 2\alpha$.

Si $x \neq 0$, il existe, en vertu de U-III, un α et un γ tels que $V_\gamma(0) \cap V_\alpha(x) = O$. Par conséquent $V_\alpha(x)$ ne contient aucun nombre rationnel x' tel que $|x'| < \gamma$; d'après ce qui précède aucun $V_\beta(x)$, avec $\beta \leq \alpha$, ne contient les nombres rationnels x' tels que $|x'| < \gamma$. Si donc δ est inférieur à la fois à α et à $\frac{\gamma}{2}$, $V_\delta(x)$ ne peut contenir à la fois des nombres rationnels positifs et négatifs, car si x' et x'' ~~sont~~ étaient deux nombres rationnels dont un est positif et l'autre négatif tous deux contenus dans $V_\delta(x)$, on aurait nécessairement $|x'-x''| \geq \gamma > 2\delta$ ce qui ~~prouve d'après ce que nous avons dit plus haut~~ ~~est~~ serait en contradiction avec ce que nous avons dit plus haut.

On voit ainsi que quel que soit le nombre réel x, il existe un nombre rationnel positif δ tel que pour tous les autres nombres rationnels positifs λ inférieurs ou égal à δ, $V_\lambda(x)$ ne contient que des nombres rationnels positifs, ou que des nombres rationnels négatifs: dans le premier cas on dira que *x est positif* et on écrira $x>0$, dans le second cas on dira que x est *négatif* et on écrira $x<0$.

Si, pour δ assez petit, tous les $V_\delta(x)$ contiennent des nombres rationnels positifs, tous les $V_\lambda(-x)$ pour λ suffisamment petit contiennent des nombres rationnels négatifs, ce qu'on voit en vertu de la continuité de la fonction égale en x à $-x$. Si donc x est positif, $-x$ est négatif, et de même si x est négatif, $-x$ est positif. Il résulte ~~de même~~ encore de la continuité de la fonction prenant la valeur $x+y$ en (x,y) dans R^2, qu'on peut faire correspondre à α un β tel que dès que les nombres rationnels x' et y' ~~sont tels que~~ vérifient les relations $x' \in V_{\beta'}(x)$, $y' \in V_{\beta'}(y)$ où $\beta' \leq \beta$, on a $(x'+y') \in V_\alpha(x+y)$, ce qui prouve que si x et y sont positifs, $x+y$ n'est pas négatif, car pour β' assez petit x' et y' sont positifs, donc aussi $x'+y'$. Mais $x+y$ n'est pas égal à zéro, car sinon on aurait $x=-y<0$; donc $x+y>0$. On voit de même que si x et y sont positifs xy n'est pas négatif. Comme xy n'est pas égal à zéro, car sinon on aurait $x=0$, ou $y=0$, on voit que $xy>0$.

Convenons d'écrire $x<y$ (ou $y>x$) chaque fois que $y-x>0$. Par cette relation l'ensemble R se trouve ordonné. Il est ~~d'abord~~ en effet évident que l'axiome 1° de la page est vérifié. Quant à l'axiome 2° ~~l'autre~~ il suffit de remarquer que de $x<y$, $y<z$, c'est à dire de $y-x>0$, $z-y>0$, résulte $(y-x)+(z-y)=z-x>0$, c'est à dire $x<z$. Si $x<y$ on dira que x est plus petit que y, (ou x inférieur à y), ou encore que y est plus grand que x (y supérieur à x).

Il est évident que si $b>0$, $a+b>a$, et $a-b<a$.

Il résulte aussi des définitions que de $a>b$, résulte $a+c>b+c$, quelque soit c. On a, par conséquent $a-a-b>b-a-b$, c'est à dire $-b>-a$. On a aussi dans les mêmes conditions si $c>0$: $c(a-b)>0$, donc $ca>cb$, et si c est négatif : $c(a-b)<0$, c'est à dire $ca<cb$.

On a vu plus haut que, quels que soient les deux nombres rationnels x', x'' tels que $x'\in V_\alpha(x)$, $x''\in V_\alpha(x)$, on a $|x'-x''|<2\alpha$; si l'on désigne alors par n un entier supérieur à $x''+2\alpha$, on a pour tous les rationnels compris dans $V_{\alpha'}(x)$ avec $\alpha'\leq\alpha$: $x'<n$, ~~[illegible]~~ c'est à dire $n-x'>0$, ce qui prouve que $n-x>0$. On peut donc énoncer le résultat suivant :

Théorème I. *Quel que soit le nombre réel x, il y a un entier positif n supérieur à x.*

Désignons par $|x|$, si $x=0$, le nombre 0 ; si $x\neq 0$ celui des deux nombres x, $-x$ qui est positif. Le nombre $|x|$ est appelé valeur absolue de x. On a évidemment $|xy|=|x|\cdot|y|$. Si x et y sont tous deux positifs, ou tous deux négatifs, on a $|x+y|=|x|+|y|$; si x est positif et y négatif, ou inversement ~~au contraire~~, on a : $|x+y|=|x|-|y|$ ou $|x+y|=|y|-|x|$ suivant que $|x|\geq|y|$ ou $|y|\geq|x|$. On a donc toujours $|x+y|\leq|x|+|y|$.

Soient x et y deux nombres réels ; on voit facilement que de $|x-y|<\alpha$, α étant rationnel, résulte $x\in V_\alpha(y)$: on a en effet $x-y-\alpha<0$ et $x-y+\alpha>0$ et pour un certain β, lorsque les nombres ~~irra~~ rationnels x', y' vérifient les relations $x'\in V_\beta(x)$, $y'\in V_\beta(y)$, on a aussi $x'-y'-\alpha<0$, $x'-y'+\alpha>0$, c'est à dire $|x'-y'|<\alpha$ ce qui signifie évidemment que $x\in V_\alpha(y)$. On voit aussi de la même manière que de $x\in V_\alpha(y)$ résulte $|x-y|\leq\alpha$. Mais l'égalité ne peut pas avoir lieu. ~~[illegible]~~ En effet, quel que soit δ ~~irrationnel~~ rationnel et quel que soit a réel, il existe un b et un b', tous deux rationnels, tels que $b<a$, $b\in V_\delta(a)$, $b'>a$, $b'\in V_\delta(a)$; il suffit, par exemple de prendre b tel que

$b \in V_{\frac{\delta}{4}}(a-\frac{\delta}{2})$, car on aura alors, d'après ce qui précède: $b \le a - \frac{\delta}{4}$ et $b \ge a + \frac{3}{4}\delta$, et par conséquent aussi $b \in V_\delta(a)$; on démontre de la même manière l'existence de b'; si donc on avait $x-y=\alpha$, comme les familles d'ensembles $E'\cap V_\delta(x)$ et $E'\cap V_\delta(y)$ sont des familles de Cauchy respectivement équivalentes à x et à y, et comme, quel que soit l'ensemble A de la première famille, il existe un $x'\in A$, $x' > x$, et quel que soit ~~la famille~~ l'ensemble B de la seconde famille, un $y'\in B$, $y'<y$, on aurait $x'-y' > x-y = \alpha$ et la relation $B\times A \subset V_\alpha$ ne pourrait pas être vérifiée, c'est à dire qu'on n'aurait pas $x\in V_\alpha(y)$; on ne peut pas avoir, non plus, $y-x=\alpha$. On a démontré ainsi que:

Pour tout $\alpha \in E^1_+$ les deux relations: $x\in V_\alpha(y)$ et $|x-y|<\alpha$ sont équivalentes.

On appelle intervalle ouvert (a,b) l'ensemble de tous les nombres réels x vérifiant à la fois les deux inégalités $x>a$, $x<b$. Un tel intervalle n'est pas vide, si $b>a$, car on a $a<\frac{b+a}{2}<b$. On appelle intervalle demi-ouvert (à gauche) $(a,b]$, l'ensemble ~~composé de tous les~~ $(a,b)\cup\{b\}$, intervalle demi-ouvert à droite $[a,b)$, l'ensemble $(a,b)\cup\{a\}$, intervalle fermé $[a,b]$, l'ensemble $(a,b)\cup\{a\}\cup\{b\}$.

On définit encore, tout comme dans E^1, les ~~ensembles~~ intervalles ouverts $(-\infty,a)$ (l'ensemble de tous les nombres réels $<a$), $(a,+\infty)$ et les intervalles fermés $(-\infty,a]$, $[a,+\infty)$. Il est facile à voir que les intervalles ouverts sont des ensembles ouverts et que les intervalles fermés sont des ensembles fermés. Pour démontrer, par exemple, que (a,b) est ouvert, il suffit, si $x\in(a,b)$, ~~de~~ choisir un nombre rationnel positif α tel que $\alpha<x-a$, $\alpha<b-x$, pour avoir $V_\alpha(x)\subset(a,b)$. On voit aussi que $[a,b]$ est un ensemble fermé, car $[a,b]=\complement[(-\infty,a)\cup(b,+\infty)]$.

On voit immédiatement que l'ensemble de tous les nombres réels vérifiant l'inégalité: $|x-a|<\alpha$ est l'intervalle ouvert $(a-\alpha, a+\alpha)$, de même que l'ensemble de tous les nombres réels vérifiant l'inégalité $|x-a|\le\alpha$ est l'intervalle fermé $[a-x, a+x]$. Nous allons maintenant démontrer le théorème important suivant:

Théorème II. Si une suite d'intervalles fermés (non vides) $I_\nu=[a_\nu,b_\nu]$ est telle que $I_{\nu+1}\subset I_\nu$, les I_ν ont au moins un élément ~~commun~~ commun. Celui-ci est unique si $\lim_{\nu\to\infty}(b_\nu-a_\nu)=0$.

Supposons d'abord qu'il existe un nombre positif κ tel qu'on ait pour toutes les valeurs de ν $b_\nu-a_\nu>\kappa$. Dans ce cas il existe un entier positif ν_κ tel qu'on ~~pour $\nu>\nu_\kappa$ on~~ ait quel que soit l'indice ν: $a_\nu<a_{\nu_\kappa}+\frac{\kappa}{4}$. Car si ceci n'avait pas lieu, comme les a_ν vont en croissant, ν étant un entier arbitraire il

il existerait un entier $\nu_2 > \nu_1$ ~~et~~ tel que $a_{\nu_2} \geq a_{\nu_1} + \frac{k}{4}$, un entier $\nu_3 > \nu_2$ tel que $a_{\nu_3} \geq a_{\nu_2} + \frac{k}{4}$ et, en procédant par récurrence, il existerait, pour n arbitraire, un entier $\nu_n > \nu_{n-1}$ tel que $a_{\nu_n} \geq a_{\nu_{n-1}} + \frac{k}{4}$; on aurait ainsi $a_{\nu_{n+1}} \geq a_{\nu_1} + n\frac{k}{4}$; mais d'après le théorème I il existe un entier positif m_x tel que $m_x > \frac{4}{k}(b_{\nu_1} - a_{\nu_1})$, c'est à dire tel que $a_{\nu_1} + m\frac{k}{4} > b_{\nu_1}$; ~~et~~ comme $b_{\nu_{m+1}} \leq b_{\nu_1}$ on aurait : $a_{\nu_{m+1}} \geq a_{\nu_1} + m\frac{k}{4} > b_{\nu_1} \geq b_{\nu_{m+1}}$, c'est à dire que l'intervalle $[a_{\nu_m}, b_{\nu_m}]$ serait vide. L'existence de l'indice ν_k est ainsi établi. On démontre de même l'existence d'un indice ν'_k tel que pour tout indice ν on a : $b_\nu > b_{\nu'_k} - \frac{k}{4}$. Si alors l est le plus grand des nombres ν_k et ν'_k on aura pour tout indice ν simultanément : $a_\nu < a_l + \frac{k}{4}$, $b_\nu > b_l - \frac{k}{4}$, et l'intervalle $(a_l + \frac{k}{4}, b_l - \frac{k}{4})$ qui n'est pas vide, car $b_l - \frac{k}{4} > a_l + \frac{k}{4}$, est contenu dans tous les intervalles $[a_\nu, b_\nu]$.

Si maintenant une telle constante k n'existe pas, c'est à dire si $\lim_{\nu \to \infty} (b_\nu - a_\nu) = 0$, la famille d'intervalles I_ν constitue une famille de Cauchy dans R. Effectivement : ~~tout~~ nombre fini de tels intervalles possède une partie commune, à savoir le plus petit de ces intervalles ; quel que soit, d'autre part, ~~quel que soit~~ le nombre rationnel positif α, il existe un intervalle $[a_\nu, b_\nu]$ tel que $0 \leq b_\nu - a_\nu < \alpha$, et par conséquent, quels que soient les deux nombres x_1, x_2 de cet intervalle, on aura $|x_1 - x_2| < \alpha$, c'est à dire $I_\nu \times I_\nu \subset V_\alpha$. Comme l'espace R est complet, cette famille de Cauchy est équivalente à un point c, ~~Or il est facile à voir que c est contenu dans tous les intervalles I_ν.~~ et d'après ce que nous avons vu au chapitre II, on a alors $c \in \bar{I}_\nu = I_\nu$ pour tous les indices ν. Un autre point c' ne peut pas vérifier toutes ces relations, car sinon on aurait pour tout ν (en supposant que $c' > c$) : $(c, c') \subset I_\nu$ et $b_\nu - a_\nu > c' - c$, ce qui est impossible puisque $\lim_{\nu \to \infty} (b_\nu - a_\nu) = 0$. Notre théorème est ainsi complètement démontré.

<u>Exercice</u> Montrer par un exemple que le théorème précédent devient faux si l'on remplace les intervalles fermés I_ν par des intervalles ouverts.

Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème III. L'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable.

Il s'agit de démontrer qu'il n'existe pas de fonction définie dans R prenant des valeurs entières positives et distincte en deux points distincts de R. Supposons donc qu'une telle fonction existe et démontrons que ceci conduit à une contradiction. Soit $f(x)$ cette fonction.

Désignons par a_1 et b_1, la plus petite et la plus grande des quantités $\overset{-1}{f}(1)$, $\overset{-1}{f}(2)$. Soient n_2 et n'_2 les deux plus petits entiers positifs $(n'_2>n_2)$ tels que les quantités $\overset{-1}{f}(n_2)$ et $\overset{-1}{f}(n'_2)$ soient comprises dans l'intervalle (a_1, b_1) et désignons ~~par~~ respectivement par a_2 et b_2 la plus petite et la plus grande de ces deux quantités; Soient n_3 et n'_3 les deux plus petits entiers positifs $(n'_3>n_3)$ tels que les quantités $\overset{-1}{f}(n_3)$ et $\overset{-1}{f}(n'_3)$ soient comprises dans l'intervalle (a_2, b_2) et désignons par a_3, b_3 respectivement la plus petite et la plus grande de ces quantités. En procédant par récurrence, quel que soit l'entier positif m, désignons par n_m et n'_m les deux plus petits entiers positifs $(n'_m>n_m)$ tels que les quantités $\overset{-1}{f}(n_m)$ et $\overset{-1}{f}(n'_m)$ soient comprises dans l'intervalle (a_{m-1}, b_{m-1}) et désignons par a_m et b_m respectivement la plus petite et la plus grande de ces quantités. Il est évident que $2<n_2<n'_2<n_3<n'_3 \dots <n_m<n'_m \dots$ et que $a_1<a_2 \dots <a_m< \dots$; $b_1>b_2>\dots b_m>\dots$; $a_m<b_m$ $(m=1,2\dots)$. D'après le théorème précédent il existe donc un nombre réel c compris dans tous les intervalles $I_m=[a_m, b_m]$, et d'après ce qui précède c n'est égal à aucun a_m ni à aucun b_m, donc l'entier $f(c)=k$ est distinct de tout n_m et de tout n'_m. Mais l'entier k est aussi distinct de tout autre entier, car quel que soit m, si l désigne un entier compris entre n_m et n'_m, on a $\overset{-1}{f}(l) \notin I_{m-1}$, et si l est compris entre n'_m et n_{m+1}, on a $\overset{-1}{f}(l) \notin I_m$; k n'est donc compris entre aucun couple d'entiers $1, 2, n_1, n'_1, \dots$, ni égal à aucun de ces entiers; comme ces entiers croissent

indéfiniment il y a contradiction.

Un ensemble de nombres réels est dit <u>borné</u> s'il est contenu dans un intervalle $[a,b]$, a et b étant deux nombres réels quelconques ; <u>borné supérieurement</u> s'il est contenu dans un intervalle $(-\infty, a]$, <u>borné inférieurement</u> s'il est contenu dans un intervalle $[a, +\infty)$.

<u>Théorème IV Dans tout ensemble fermé, borné inférieurement, il y a un nombre plus petit que tous les autres, et dans tout ensemble fermé, borné supérieurement, un nombre plus grand que tous les autres.</u>

Soit F un ensemble compris par exemple dans l'intervalle $[a, +\infty)$, x étant un élément de F, désignons par n le plus grand entier compris dans l'intervalle $(a-1, x]$ et tel que tout élément de F lui soit supérieur ou égal ; cet entier existe, car le plus petit entier de cet intervalle est $\leq a$ donc inférieur ou égal à tout élément de F et comme cet intervalle ne contient qu'un nombre fini d'entiers on peut en choisir le plus grand possédant la même propriété.

Il existe un élément x_0 de F compris dans l'intervalle $[n, n+1)$ car sinon ~~a point~~ n ne serait plus le plus grand entier jouissant des propriétés indiquées

Désignons par k_ν le plus grand entier de l'intervalle $[0, 2^\nu]$ tel que tous les nombres de F soient supérieurs ou égaux à $n + k_\nu/2^\nu$. Il existe un élément x_ν de F dans l'intervalle $[n + k_\nu/2^\nu, n + (k_\nu+1)/2^\nu]$; et de $n + k_\nu/2^\nu = n + (2k_\nu)/2^{\nu+1}$ résulte que $k_{\nu+1} \geq 2k_\nu$, donc $n + k_{\nu+1}/2^{\nu+1} \geq n + k_\nu/2^\nu$. On peut aussi évidemment supposer que $x_{\nu+1} \leq x_\nu$. En posant : $a_\nu = n + k_\nu/2^\nu$, on a $0 < x_\nu - a_\nu < \frac{1}{2^\nu}$, et $[a_{\nu+1}, x_{\nu+1}] \subset [a_\nu, x_\nu]$, il existe donc, en vertu du théorème précédent, un nombre c, d'ailleurs unique, ~~tel~~ compris dans tous ces intervalles. c est un point d'accumulation de F, car chacun de ses voisinages contient un point x de F ; en effet : $x_\nu \in V_{\frac{1}{2^\nu}}(c)$. Si $d < c$, il existe un ν tel que $d < a_\nu$, car il existe un ν tel que $d < c - \frac{1}{2^\nu}$ et $a_\nu > c - \frac{1}{2^\nu}$; d ne peut donc pas appartenir à F ; c est par conséquent bien le plus petit ~~élément~~ nombre de F.

Si un ensemble A est borné inférieurement, son ~~support fermé~~ support fermé $\bar{A}$, l'est également, car si $a \in \bar{A}$, il existe un nombre x appartenant à A et tel que $|x-a|<1$, on a donc $a > x-1$, et si tous les éléments de A sont supérieurs à M, on a : $a > M-1$. De même si A est borné ~~inférieurement~~ supérieurement, $\bar{A}$ l'est également. Si A est borné inférieurement le plus petit nombre de $\bar{A}$ s'appelle <u>borne inférieure de A</u> et on le désigne par $\underline{\text{borne}}\,A$. Si A est borné supérieurement, le plus grand nombre de $\bar{A}$ est appelé la <u>borne supérieure de A</u>, et on le désigne par $\overline{\text{borne}}\,A$.

On voit immédiatement, d'après les définitions que si $\alpha = \underline{\text{borne}}\,A$, tout intervalle $[\alpha, \gamma)$, $(\gamma > \alpha)$, contient un élément de A. De même, en posant $\beta = \overline{\text{borne}}\,A$, tout intervalle $(\gamma, \beta]$ $(\gamma < \beta)$ contient un élément de A.

<u>Exercice</u> Indiquer des ~~exemples~~ ensembles ne contenant pas leurs bornes supérieures, ou leurs bornes inférieures

Nous avons vu plus haut qu'un intervalle est un ensemble ouvert ; la réunion d'intervalles ouverts est donc aussi un ensemble ouvert. On sait d'autre part que tout ensemble ouvert Ω est de la forme $\Omega = \bigcup_{x \in \Omega} V_\alpha(x)$ (où α dépend de x), comme les $V_\alpha(x)$ sont des intervalles ouverts, on voit que tout ensemble ouvert est la réunion d'intervalles ouverts.

Soit $x \in \Omega$ et soit (a_μ, b_μ) un intervalle ouvert quelconque contenant x. L'ensemble $F = \bigcap (-\infty, a_\mu]$ est vide si les a_μ ne sont pas bornés inférieurement; on a alors $\bigcup (a_\mu, x] = (-\infty, x]$; par contre si a est la borne inférieure de l'ensemble des a_μ, F contient tout y tel que $y < a$, donc puisque F est fermé, il contient aussi a : $F = (-\infty, a]$. On a par conséquent : ~~[illegible]~~ $\bigcup (a_\mu, x] = (-\infty, x] - (-\infty, a] = (a, x]$.

On voit de même que $\bigcup [x, b_\mu) = [x, b)$, où b est la borne supérieure de l'ensemble des b_μ si celui-ci est borné, ou $-\infty$ dans le cas contraire.

L'intervalle $\bigcup (a_\mu, b_\mu) = (a, b)$ est appelé <u>le plus grand intervalle contenant x et contenu dans Ω</u>. Tout intervalle de cette nature sera appelé *composante* de Ω. Deux composantes sont évidemment sans point commun. Comme chaque composante contient au moins un nombre rationnel, et comme tout nombre rationnel est contenu dans au plus une seule composante, on voit que l'ensemble des composantes est au plus dénombrable.

On voit ainsi que:

Théorème IV Tout ensemble ~~intervalle~~ ouvert est la somme d'intervalles ouverts, sans point commun deux à deux, en nombre fini ou en infinité dénombrable.

Les ensembles fermés étant complémentaires des ensembles ouverts, on les obtient en enlevant de la droite R un nombre fini ou une infinité dénombrable d'intervalles ouverts sans point commun deux à deux. Si F est fermé, une composante de $\complement F$ est appelée un *intervalle contigu à F*. Il est évident qu'un point isolé de F est l'extrémité commune de deux intervalles contigus à F; un ensemble fermé F ne contient donc qu'une infinité dénombrable de points isolés.

Voici une conséquence immédiate de ce qui précède:

Proposition 1. Tout intervalle est un ensemble connexe.

Soient F_1 et F_2 deux ensembles fermés tels que $(a,b) \subset F_1 \cup F_2$, $F_1 \cap (a,b) \neq 0$, $F_2 \cap (a,b) \neq 0$ et démontrons que $F_1 \cap F_2 \neq 0$. Soit $c \in F_1 \cap (a,b)$. Si c n'appartient pas à $F_2 \cap (a,b)$, il existe un intervalle (α,β), contigu ~~(α,β)~~ à F_2 et contenant c. Une des deux extrémités α, β est un nombre réel appartenant à (a,b), car sinon on aurait $F_2 \cap (a,b) = 0$. Supposons que $\alpha \in (a,b)$. Mais on a aussi $\alpha \in F_2$ et $\alpha \in F_1$, car $[\alpha, c] \subset F_1$; on a donc ~~$\alpha \in F_1 \cap F_2$~~ $\alpha \in (a,b) \cap F_1 \cap F_2$, d'où le résultat énoncé.

Une sorte de réciproque de cette proposition est également vraie.

Proposition 2. Tout ensemble connexe contenant deux nombres a et b contient l'intervalle fermé $[a,b]$.

Soit, en effet ~~un p~~ un nombre c appartenant à cet intervalle, la réunion des deux ensembles fermés $(-\infty, c]$, $[c, +\infty)$ contient notre ensemble A. Chacun de ces ensembles contient un point de A. Leur intersection, ~~qui est d'aill qui est d'ailleurs composé d'unique de~~ contient l'unique point c; ~~appa~~, ce point appartient donc à A; comme c est arbitraire dans $[a,b]$, notre proposition est démontrée.

Les ~~deux~~ propositions précédentes conduisent immédiatement au théorème suivant:

<u>Théorème V.</u> <u>Soit $f(x)$ une fonction continue, définie sur un intervalle $[a,b]$ et prenant ses valeurs dans ~~l'ensemble~~ R. ~~des x~~ Quel que soit x'_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il y a au moins un nombre x de (a,b) tel que $f(x) = x'_0$.</u>

L'ensemble $[a,b]$ est convexe, son image $A = f([a,b])$ l'est donc également. Comme A contient a et b, cet ensemble contient aussi tout l'intervalle $[a,b]$ ce qui prouve la proposition.

On va maintenant démontrer le théorème dit de Borel-Lebesgue qui est comme nous le verrons plus loin d'une importance capitale:

<u>Théorème VI.</u> <u>Soit $I = [a,b]$ un intervalle fermé et soit σ une familles d'ensembles ouverts dont la réunion contienne I. Alors on peut trouver dans σ un nombre fini d'ensembles dont la réunion contienne encore I.</u>

~~X~~ Désignons par X l'ensemble de tous les points x de l'intervalle I tels que $[a,x]$ soit ~~encore~~ contenu dans un nombre fini ~~d'intervalles~~ d'ensembles de σ; ~~et soit b' la borne supérieure de X~~ X n'est pas vide, car si l'ensemble Ω de σ contient a, il contient aussi tout un intervalle $[a, x_1]$. Soit ~~b' la~~ $b' = \overline{\text{borne}}\, X$; Dans tout intervalle contenant b' il y a un point x' de X; ~~et~~ comme $b' \in I$, il existe un ensemble $\Omega' \in \sigma$ contenant b', si donc $b' \in (\alpha, \beta) \subset \Omega'$ et si $x' \in (\alpha, \beta)$ et $x' \in X$, la réunion U des ensembles de σ couvrant $[a, x']$ et de l'ensemble Ω' ~~couvre~~ contient $[a, b']$. Ce qui prouve que $b' \in X$ ~~et~~ mais aussi que $b' = b$, car U

contient ~~des points ouverts~~ tous les nombres de l'intervalle $(\alpha,\beta)\cap \underline{I}$, et si on avait $b'<b$, b' ne serait pas la borne supérieure de X. Notre théorème est ainsi démontré.

Le théorème suivant dit de ~~Bolzano-Weierstrass~~ Bolzano-Weierstrass ~~est la premi~~ résulte très facilement du théorème précédent:

Théorème VII. Tout ensemble infini borné possède au moins un point d'accumulation.

Supposons que l'ensemble infini A est contenu dans l'intervalle $[a,b]=\underline{I}$. Si A ne possédait pas de point d'accumulation, quel que soit le point $x\in I$, il existerait un intervalle ouvert I_x contenant x et ne contenant qu'un nombre fini d'éléments de A; on pourrait, alors, en vertu du théorème précédent en extraire un nombre fini dont la réunion couvrirait ~~conv~~ ~~contre~~ $[a,b]$, et A) ~~$[a,b]$~~, et par conséquent A ne contiendrait qu'un nombre fini d'éléments contrairement à l'hypothèse.