RÉDACTION NON NUMÉROTÉE

COTE DELR 006

TITRE EXISTENCE ET UNICITÉ D'UNE MESURE

FONDS JEAN DELSARTE

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 15

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 15

EXISTENCE ET UNICITÉ D'UNE MESURE INVARIANTE ET D'UNE INTEGRALE DANS UN GROUPE TOPOLOGIQUE COMPACT.

Considérons le groupe des translations dans le plan. Choisissons une origine arbitraire et faisons correspondre à chaque translation l'extrêmité du vecteur $\overrightarrow{OM}$ qui la définit. Le plan devient ainsi l'espace du groupe des translations. La mesure superficielle de Lebesgue est invariante par le groupe.

On a cherché à généraliser ce résultat et à définir une mesure invariante dans des groupes aussi généraux que possible. La question semble complètement résolue par les travaux de HAAR et d'André WEIL. Nous allons énoncer le résultat général et le démontrer dans un cas particulier, celui d'un groupe compact.

Une telle extension n'est évidemment possible qu'en généralisant convenablement les notions d'espace, de continuité, de mesure. Nous allons donc donner d'abord celles de ces notions qui sont indispensables pour énoncer le résultat général.

ESPACE TOPOLOGIQUE.

Dans un ensemble E supposons qu'on ait défini une famille O de sous-ensembles, appelés les ensembles ouverts, et satisfaisant aux axiomes suivants :

I - Toute réunion d'ensembles de la famille O est encore un ensemble appartenant à la famille O .

....

II - Toute intersection finie d'ensembles de la famille O est un ensemble appartenant à la famille O.

III-- L'ensemble fondamental E appartient à la famille O.

IV - Si p et q sont deux éléments distincts de E, il existe un ensemble ouvert contenant p sans contenir q .

On dit que l'on a muni l'ensemble E d'une structure topologique, ou encore qu'il constitue un espace topologique : $\mathcal{E}$, dont E est le support. On appelle alors ses éléments des points.

Un ensemble F est dit fermé si son complémentaire

$\complement F = E - F$ est un ensemble ouvert.

De cette définition et des axiomes I et IV, on déduit que :

Tout ensemble réduit à un point est un ensemble fermé.

Adhérence. Etant donné un ensemble A, l'intersection de tous les ensembles fermés contenant A est un ensemble fermé d'après I. On le nomme l'adhérence de A, et on le note $\bar{A}$.

Voisinage. Nous dirons qu'un ensemble V est un voisinage d'un point a s'il contient au moins un ensemble ouvert contenant a .

FONCTION CONTINUE.

Soit $p' = f(p)$ une fonction définie en tout point d'un espace topologique $\mathcal{E}$, et prenant ses valeurs dans un espace topologique $\mathcal{E}'$: on dira que f est continue dans $\mathcal{E}$ si l'image inverse donnée par f de tout ensemble ouvert dans $\mathcal{E}'$ est un ensemble ouvert dans $\mathcal{E}$.

DELR 006

4

COMPACITÉ.

ESPACE COMPACT.

Nous dirons qu'un espace topologique $\mathcal{E}$ de support E est compact s'il satisfait à l'axiome suivant :

Dans toute famille d'ensembles ouverts dont la réunion est E, on peut trouver des ensembles ouverts en nombre fini dont la réunion est encore E .

ENSEMBLE COMPACT.

Un ensemble fermé F, dans un espace topologique $\mathcal{E}$, est dit compact si, de toute famille d'ensembles ouverts dont la réunion contient F, on peut extraire un nombre fini d'ensembles dont la réunion contient encore F .

Nous dirons enfin qu'un ensemble quelconque $\mathcal{E}$ d'un espace topologique est compact si son adhérence $\bar{\mathcal{E}}$ est un ensemble fermé compact.

Il résulte de la définition que :

Tout sous-ensemble d'un ensemble compact est lui-même compact. En particulier, si l'espace est compact, tout ensemble est compact.

ESPACE LOCALEMENT COMPACT.

Un espace topologique $\mathcal{E}$ est dit localement compact si tout point de $\mathcal{E}$ possède au moins un voisinage compact.

PRODUIT D'ESPACES TOPOLOGIQUES.

Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, deux espaces topologiques ayant pour supports respectivement E_1 , E_2 . Soit $E = E_1 \times E_2$

le produit des ensembles E_1, E_2, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $p = (p_1, p_2)$ dont chacun est un couple formé d'un élément p_1 de E_1 et d'un élément p_2 de E_2. On définit de la façon suivante une topologie dans l'ensemble produit E. On prend pour ensembles ouverts :

1°) Les ensembles Ω de E qui sont le produit d'un ensemble ouvert Ω_1 dans $\mathcal{E}_1$ et d'un ensemble ouvert Ω_2 dans $\mathcal{E}_2$.

2°) Toutes les réunions d'ensembles Ω.

L'espace topologique $\mathcal{E}$ de support E ainsi obtenu se nomme le produit des deux espaces topologiques $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.

GROUPE

Dans un ensemble E supposons qu'on ait défini une loi de composition, faisant correspondre à tout couple d'éléments a, b, de E rangés dans un certain ordre, un troisième élément de E nommé le composé de a et de b, noté a.b, et vérifiant les conditions suivantes :

1 La loi est associative. Quels que soient les éléments a, b, c, on a :

$$(a.b).c = a.(b.c) .$$

2 Il existe un élément e appelé élément unité, tel que pour tout élément a on ait :

$$a.e = e.a = a$$

3 A tout élément a correspond un élément a^{-1} appelé l'inverse de a et tel que :

$$a.a^{-1} = a^{-1}.a = e .$$

On dit que l'on a défini dans l'ensemble E une structure de groupe, ou encore que l'ensemble E muni de cette loi de composition constitue un groupe : G .

Composé de deux ensembles d'un groupe. On entend par composé de l'ensemble A et de l'ensemble B d'un groupe, et l'on note A.B l'ensemble des éléments dont chacun est le composé d'un élément de A et d'un élément de B .

Inverse d'un ensemble d'un groupe. L'inverse d'un ensemble A d'un groupe est l'ensemble des éléments inverses des éléments de A. On le désigne par A^{-1} .

GROUPE TOPOLOGIQUE.

Soit un ensemble E où l'on a défini :

1°) une structure topologique (c'est-à-dire une famille d'ensembles ouverts satisfaisant aux axiomes I, II, III, IV) ;

2°) une structure de groupe (c'est-à-dire une loi de composition sur les éléments, satisfaisant aux conditions 1, 2, 3) ; l'ensemble E muni de ces deux structures : G est un groupe topologique si : 1°) le composé $x.y$ de deux éléments de G est une fonction continue du point (x,y) dans l'espace topologique $G \times G$ produit de l'espace du groupe par lui-même, et si 2°) l'inverse x^{-1} de tout élément x de G est une fonction continue de x dans G . On peut remplacer ces deux conditions par la seule condition suivante : $y^{-1}x$ est une fonction continue du point (x, y) dans le produit $G \times G$ de l'espace du groupe par lui-même.

Il résulte de cette définition que :

Dans un groupe topologique, si Ω est un ensemble ouvert, Ω^{-1}, $\mathcal{E}\Omega$, $\Omega\mathcal{E}$ sont des ensembles ouverts quel que soit l'ensemble $\mathcal{E}$; en particulier : $S\Omega$, ΩS sont des ensembles ouverts quel que soit l'élément S.

Un voisinage quelconque d'un point S peut toujours se mettre sous la forme SV, où V est un voisinage de l'unité.

Si A et B sont deux ensembles ouverts tels que $\bar{A} \subset B$, il existe un voisinage de l'unité W tel que : $AW \subset B$.

Fonction uniformément continue. On dit qu'une fonction numérique f, définie dans un groupe topologique G, est *uniformément continue* si à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un voisinage V de l'unité tel que la relation $y \subset xV$ entraîne l'inégalité : $\left| f(x).f(y) \right| < \varepsilon$, quelque soit le point x de G . (C'est là un cas particulier de la définition d'une fonction uniformément continue dans un espace topologique muni d'une "structure uniforme", Voir A. WEIL C.R.).

On démontre que :

Sur un groupe topologique compact, toute fonction continue est uniformément continue.

D'autre part, on dit, sur un espace localement compact, qu'une fonction continue est *nulle à l'infini* si elle est nulle en dehors d'un ensemble compact. On démontre alors que :

Sur un groupe topologique localement compact toute fonction continue, nulle à l'infini, est uniformément continue.

MESURE

Les mesures que nous utiliserons seront définies, non pour tous les sous-ensembles de l'ensemble fondamental, mais seulement pour une famille de sous-ensembles. Donnons une définition relative à ces familles.

Tribu. On appelle tribu une famille d'ensembles T telle que :

1°) Si $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ sont deux ensembles de T tels que $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$ l'ensemble $\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ appartient à T.

2°) Toute réunion finie ou dénombrable d'ensembles de T est un ensemble appartenant à T.

On démontre qu'il en est alors de même de toute intersection finie ou dénombrable d'ensembles de T.

Par exemple la plus petite tribu de la droite contenant les intervalles est constituée par la famille des ensembles de Baire de la droite.

MESURE - ENSEMBLE MESURABLE.

Etant donné un ensemble E, on appelle mesure une fonction d'ensemble μ définie pour tout ensemble d'une famille d'ensembles T de E et vérifiant les conditions suivantes :

A_1- La fonction μ est complètement additive, c'est-à-dire que si les ensembles $\mathcal{E}_i$ sont des ensembles de T sans point commun deux à deux, en nombre fini ou en infinité dénombrable, dont la somme appartient à T, on a :

$$\sum \mu \mathcal{E}_i = \mu\left(\sum \mathcal{E}_i \right).$$

A_2 - T <u>est une tribu</u>.

A_3 - <u>Si</u> $\mathscr{E}$ <u>est un ensemble de</u> T <u>tel que</u> $\mu\mathscr{E} = 0$, <u>toute partie</u> $\mathscr{E}'$ <u>de</u> $\mathscr{E}$ <u>appartient à</u> T <u>et on a</u> : $\mu\mathscr{E}' = 0$.

A_4 - <u>Tout ensemble</u> $\mathscr{E}$ <u>de</u> T <u>pour lequel</u> $\mu\mathscr{E} = +\infty$ <u>est contenu dans la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles de</u> T <u>pour lesquels</u> μ <u>est fini</u>.

Se donner μ c'est définir dans E une <u>structure de mesure</u>. E est alors appelé <u>espace mesuré</u>.

Les ensembles de la tribu T sont appelés <u>mesurables</u>.

<u>FONCTION MESURABLE</u>.

Une fonction f à valeurs réelles positives est nulle, définie dans un espace mesuré E de mesure μ , est dite <u>mesurable</u> si l'ensemble des points de E où $f > \alpha$ est mesurable, quelle que soit la constante positive α .

<u>INTEGRALE</u>.

A cette fonction f on fait correspondre une intégrale de la façon suivante :

Soit ℓ_i, $(1 < i < +\infty)$, le terme général d'une suite de nombres réels, croissante et augmentant indéfiniment. Désignons par A_i l'image inverse dans E par f de l'intervalle semi-ouvert : $(\ell_i \leqslant y < \ell_{i+1})$. On démontre que <u>lorsque le plus grand des intervalles</u> $(\ell_{i+1} - \ell_i)$ <u>tend vers 0, la somme</u> $\sum \ell_i \, \mu \, A_i$ <u>tend vers une limite peut être infinie</u>. Cette limite se nomme <u>l'intégrale</u> de la fonction f par rapport à la mesure μ et se note :

$$\int f(x)\,\mu$$

Enfin, $\mathcal{E}$ étant un ensemble mesurable, on pose :

$$\int_{\mathcal{E}} f(x)\,\mu = \int f(x).\,\varphi_{\mathcal{E}}(x)\,\mu ,$$

~~($\varphi_{\mathcal{E}}(x)$ désignant la fonction caractéristique de l'ensemble)~~

$\varphi_{\mathcal{E}}(x)$ désignant la <u>fonction caractéristique</u> de l'ensemble $\mathcal{E}$, c'est-à-dire la fonction numérique définie en tout point de l'ensemble fondamental, prenant la valeur 1 en tout point de $\mathcal{E}$, la valeur 0 en tout point de $\complement\mathcal{E}$.

<u>OBTENTION D'UNE MESURE A PARTIR D'UNE FONCTION DE CARATHEODORY.</u>

Dans un ensemble E on peut obtenir une mesure et une famille d'ensemble mesurables, si on a défini dans E une fonction de Carathéodory.

<u>Fonction de Carathéodory.</u> C'est une fonction d'ensemble χ définie pour tout sous-ensemble de E et satisfaisant aux axiomes suivants:

<u>I</u> - <u>A tout ensemble</u> $\mathcal{E}$ <u>de points de</u> E <u>correspond un nombre</u> $\chi\mathcal{E}$ <u>positif ou nul et peut être infini</u>. <u>Si</u> $\mathcal{E}$ <u>est l'ensemble vide on a</u> $\chi\mathcal{E} = 0$.

<u>II</u> - <u>Etant donné un système fini ou dénombrable d'ensembles</u> $\mathcal{E}_\nu$ <u>de</u> E, <u>si</u> $\mathcal{E}$ <u>est tel que</u> $\mathcal{E} \subset \bigcup_\nu \mathcal{E}_\nu$, <u>on a</u> :

$$\chi\mathcal{E} \leqslant \sum_\nu \chi\mathcal{E}_\nu .$$

<u>Propriété de Carathéodory.</u> On dira qu'un ensemble $\mathcal{E}$ de E possède la propriété de Carathéodory si on a, quel que soit l'ensemble A :

$$\chi A = \chi(A \cap \mathcal{E}) + \chi(A \cap \complement\mathcal{E}).$$

On démontre que :

<u>1°)</u> la famille $\mathcal{C}$ de ces ensembles est une tribu ;

2°) la fonction définie pour les ensembles de $\mathcal{C}$ et qui y est égale à χ est complètement additive.

3°) cette fonction vérifie la condition A_3.

Enfin soit T la famille des ensembles $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}$ pour lesquels : 1°) $\chi\mathcal{E}$ est fini, ou 2°) si $\chi\mathcal{E}$ est infini, $\mathcal{E}$ est contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles de $\mathcal{C}$ pour lesquels χ est fini.

La fonction μ définie pour tout ensemble de T et qui y est égale à χ est une mesure dite déduite de χ et les ensembles de la famille T sont les ensembles dits mesurables.

Inversement, étant donné une mesure quelconque μ, soit A un ensemble quelconque de E, posons : $\overline{\mu} A$ = Borne inf.$(\sum \mu \mathcal{E}_i)$ pour tous les systèmes finis ou dénombrables d'ensembles mesurables $\mathcal{E}_i$ dont la réunion contient A. $\overline{\mu}$ est une fonction de Carathéodory, et μ est la mesure qui s'en déduit par le procédé ci-dessus.

ESPACE TOPOLOGIQUE MESURÉ

Soit un ensemble E dans lequel on a défini :

1°) une structure topologique

2°) une structure de mesure (c'est-à-dire une mesure et une famille d'ensembles mesurables)

L'ensemble E muni de ces deux structures est un espace topologique mesuré.

MESURE DE RADON

Soit un espace topologique localement compact mesuré. La mesure est dite de Radon si toute fonction continue, nulle à l'infini est mesurable. Pour cela il faut et il suffit que la mesure μ satisfasse aux deux axiomes suivants :

III - Tout point possède au moins un voisinage mesurable de mesure finie.

IV - Pour tout couple d'ensembles A, B tels qu'il existe une fonction continue, nulle à l'infini, prenant la valeur 1 sur A, la valeur 0 sur B, on a :

$$\bar{\mu}(A+B) = \bar{\mu}A + \bar{\mu}B .$$

Alors tout ensemble fermé compact, tout ensemble ouvert compact sont mesurables de mesure finie. Tout l'espace n'est pas en général mesurable.

ENSEMBLES DE BAIRE. Nous dirons qu'une famille de fonctions numériques est une famille close par rapport à l'opération "limite" si elle contient la limite de toute suite convergente de fonctions de la famille. On appelle fonction de Baire les fonctions de la plus petite famille close par rapport à l'opération limite contenant toutes les fonctions continues nulles à l'infini, et ensembles de Baire les ensembles dont la fonction caractéristique est une fonction de Baire. Pour une mesure de Radon, toute fonction de Baire et tout ensemble de Baire sont mesurables.

Enfin, deux mesures de Radon sont considérées comme identiques si elles coïncident sur les ensembles de Baire.

Mesure invariante dans un groupe.

Soit un groupe topologique G dans lequel est définie une structure de mesure μ . La mesure sera dite invariante à gauche dans le groupe G si, quels que soient l'ensemble mesurable E de l'espace du groupe G et l'élément S de G, on a :

$$\mu(S\mathcal{E}) = \mu(\mathcal{E}).$$

Nous sommes maintenant en possession des notions nécessaires pour énoncer ce théorème de HAAR-WEIL.

THEOREME DE HAAR-WEIL

Dans tout groupe topologique localement compact, il existe une mesure de Radon invariante à gauche, non identiquement nulle, et une seule à un facteur constant près.

L'objet de ce travail est d'exposer la démonstration de ce théorème dans le cas particulier où l'espace du groupe est compact. La théorie se simplifie dans ce cas grâce aux remarques suivantes :

Tout ensemble est compact. Toute fonction continue est nulle à l'infini, dans l'axiome IV on peut donc supprimer les mots "nulle à l'infini". Pour toute mesure de Radon, l'espace entier est mesurable de mesure finie ; on supposera sa mesure égale à 1 . Tout ensemble ouvert ou fermé est mesurable de mesure finie.

L'énoncé devient :

THEOREME.

Dans tout groupe topologique compact, il existe une mesure de Radon invariante à gauche, non identiquement nulle, et une seule, égale à 1 pour tout l'espace.

On va d'abord démontrer l'unicité de cette mesure, en supposant qu'elle existe, au moyen du lemme suivant. (on désigne par $\varphi_{\mathcal{E}}(S)$ la fonction caractéristique de l'ensemble $\mathcal{E}$).

LEMME

Soit m une mesure de Radon, invariante à gauche, soit V un voisinage ouvert de l'unité que nous supposerons égal à V^{-1}. Soient deux ensembles $\mathcal{E}'$ mesurable et $\mathcal{E}$ quelconque tels que $\mathcal{E}' \supset \mathcal{E}V$. Alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, on pourra trouver des éléments x_ν de $\mathcal{E}'$ en nombre fini, et des constantes $c_\nu \geqslant 0$ de sorte que l'on ait, quelque soit S :

$$\varphi_{\mathcal{E}}(S) \leqslant \sum_\nu c_\nu \varphi_{x_\nu V}(S)$$
$$\sum_\nu c_\nu \leqslant (1+\varepsilon)\,\frac{m\,\mathcal{E}'}{m\,V}$$

Démonstration.

Etablissons d'abord la proposition suivante : soit A un ensemble quelconque, B et U deux ensembles mesurables tels que : $B \supset AU$, on a alors la double inégalité :

$$(1) \qquad mU.\varphi_A(S) \leqslant \int_B \varphi_{xU^{-1}}(S)\,dx \leqslant mB.\,\varphi_{BU^{-1}}(S)$$

Démontrons d'abord la deuxième inégalité : pour tout $x \in B$ on a $xU^{-1} \subset BU^{-1}$ d'où, pour S quelconque :

$$\varphi_{xU^{-1}}(S) \leqslant \varphi_{BU^{-1}}(S),$$

et la deuxième inégalité résulte de la formule de la moyenne.

Démontrons maintenant la première inégalité : si $S \in BU^{-1}$, c'est-à-dire si $SU \subset B$, on a :

$$\int_B \varphi_{xU^{-1}}(S)\,dx = m(B \cap SU) = m\,SU = m\,U$$

En particulier, comme $A \subset B\, U^{-1}$, ceci est vrai pour $S \in A$; d'où :

$$mU.\varphi_A(S) \leqslant \int_B \varphi_x\, U^{-1}(S)\, dx ,$$

et la double inégalité (1) est démontrée.

Supposons qu'on puisse trouver un ensemble ouvert $U \subset V$ tel que $m\,U \geqslant (1-\varepsilon)\, m\,V$, et un voisinage ouvert W tel que : $U\,W \subset V$. On a alors, d'après (1), puisque $E' \supset E\,U \supset E\,V$:

$$\varphi_E(S) \leqslant \frac{1}{m\,V} \int_E \varphi_x\, U^{-1}(S)\, dx .$$

W étant un voisinage ouvert (donc mesurable) de l'unité, W^{-1} est aussi un voisinage ; $\mathcal{E}'$ est contenu dans la réunion des voisinages $x\,W^{-1}$ de ses points ; et, étant compact, est aussi contenu dans la réunion d'un nombre fini de $x\,W^{-1}$:

$$\mathcal{E}' \subset \bigcup_\nu x_\nu\, W^{-1} \qquad (x_\nu \in \mathcal{E}')$$

On peut donc choisir(d'après la propriété des tribus) des ensembles W_ν mesurables et en nombre fini, tels que :

$$W_\nu \subset x_\nu\, W^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}' = \sum_\nu W_\nu .$$
