RÉDACTION NON NUMÉROTÉE

COTE DELR 005

TITRE Intégration Weil
Chapitre I - Intégration abstraite
(Manuscrit autographe de Delsarte, fragment)

FONDS Jean Delsarte

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 13

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 7

– Intégration Weil –

Chapitre I. Intégration abstraite

§1. Théorie élémentaire de l'Intégrale

Soit E un ensemble fondamental. Nous nous donnons une famille Φ, de fonctions **numériques**, **bornées**, définies sur E, et satisfaisant à l'axiome.

(I). Si $f_1, f_2, \dots, f_n \in \Phi$, si $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ définie sur R^n, à valeurs dans R, est continue et s'annule au point $(0, 0, \dots 0)$, on a $F(f_1; f_2; \dots; f_n) \in \Phi$.

Nous aurons à considérer aussi des familles Ψ, satisfaisant à l'axiome plus restrictif :

(I_a). Si $f_1, f_2, \dots f_n \in \Psi$, si $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ définie sur R^n, à valeurs dans R, est continue, on a $F(f_1; f_2; \dots; f_n) \in \Psi$

Remarques (I_a) équivaut à la conjonction de I et de la proposition "$1 \in \Phi$", car toute fonction définie dans R^n et à valeurs dans R est la somme d'une constante et d'une fonction s'annulant à l'origine ; par ailleurs, (I) entraîne que la somme de deux fonctions appartenant à Φ, appartient encore à Φ.

Inversement, si la famille Φ satisfait à (I) et si $1 \notin \Phi$, la famille Ψ des fonctions $c + f$, où c est une constante, et où $f \in \Phi$, satisfait à (I_a), car si $F(x_1, x_2; \dots; x_n)$ est définie dans R^n, à valeurs dans R, et continue, on a, quelles que soient les constantes $c_1; c_2; \dots; c_n$
$F(c_1 + f_1; c_2 + f_2; \dots; c_n + f_n) = C + G(f_1; f_2; \dots; f_n)$
où C est une constante et où $G(x_1; x_2 \dots, x_n)$ est une fonction définie dans R^n, à valeurs dans R, continue et de plus nulle à l'origine.

Proposition 1 – ~~Toute fonction f appartenant à une base la famille Ψ, se met d'une manière et d'une seule sous la forme $f = c + g$, où c est une constante et où g appartient à la famille Φ.~~

Proposition 1 – Si la famille Φ est telle que $1 \notin \Phi$, et si $f_1; f_2; \dots; f_n \in \Phi$, le point $(0; 0; \dots; 0)$ est adhérent à l'ensemble des valeurs prises sur E par la fonction $(f_1; f_2; \dots; f_n)$ à valeurs dans R^n.

Il suffit de montrer que la fonction $\sum_{i=1}^{n} |f_i|$, définie dans E, à valeurs dans R, peut être rendue aussi petite qu'on le veut. Supposons au contraire qu'elle ait une borne inférieure positive, α, et considérons la fonction $F(x_1; x_2; \cdots ; x_n)$ égale à $\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ pour $\sum_{i=1}^{n}|x_i| < \alpha$, et à 1 pour $\sum_{i=1}^{n}|x_i| \geq \alpha$; cette fonction est continue dans R^n et nulle à l'origine, donc $F(f_1; f_2; \cdots ; f_n)$ appartient à Φ ; or il est clair que $F(f_1; f_2; \cdots ; f_n)$ est constante et égale à 1 ; il y a donc contradiction.

~~Proposition 2. - Si la famille~~ $\cancel{\Phi}$ ~~est telle que~~ $\cancel{1 \notin \Phi}$, ~~toute fonction de la famille~~ $\cancel{\Phi}$ ~~se met d'une manière et d'une seule sous la forme~~ $\cancel{c+f}$, ~~où~~ $\cancel{c}$ ~~est une constante, et où~~ $\cancel{f}$ ~~appartient à~~ $\cancel{\Phi}$.

<u>Définition 1</u>. On notera Φ_+ l'ensemble des fonctions ≥ 0 de Φ.

<u>Proposition 2</u>. Si $f \in \Phi$, on a $f = f^+ - f^-$ avec $f^+ \in \Phi_+$; $f^- \in \Phi_+$.

On a aussi $|f| = f^+ + f^-$.

En effet si $x \in R$, désignons par x^+ la fonction de x, nulle si $x < 0$, et égale à x pour $x \geq 0$; soit de même x^- la fonction de x égale à $-x$ pour $x \leq 0$, et nulle pour $x > 0$; On a $x = x^+ - x^-$; $|x| = x^+ + x^-$; et x^+ comme x^- sont des fonctions continues de x, nulles pour $x = 0$;

Posons alors
$$f^+ = f \quad \text{pour } f \geq 0,$$
$$f^+ = 0 \quad \text{pour } f < 0 ;$$
puis
$$f^- = 0 \quad \text{pour } f > 0$$
$$f^- = -f \quad \text{pour } f \leq 0$$

D'après l'axiome (I), f^+ et f^- appartiennent à Φ, donc à Φ^+, et on a $f = f^+ - f^-$; $|f| = f^+ + f^-$.

<u>Définition 2</u> Soit V une multiplicité vectorielle à un nombre <u>fini</u> de dimensions, sur R. Dans la suite Φ_V sera l'ensemble des fonctions définies sur E, à valeurs dans V, dont toutes les composantes, pour un certain choix de la base dans V, appartiennent à Φ.
Il est clair qu'il en sera alors de même pour les composantes de ces fonctions relatives à une base quelconque de V. - La définition de la famille Φ_V est donc indépendante du choix de la base dans V.

Lorsque $V = R$, Φ_V se réduit à Φ. Un autre cas important est celui où V est le corps $\mathcal{C}$ des nombres complexes.

DELROOS (4)

et comme $|u|$ et $|v|$ appartiennent à Φ_+ ;

$$(3)' \qquad \left|\int uv\right| \leq \left[\int |u|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int |v|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

Nous étendrons dans un instant cette inégalité au cas où u et $v \in \Phi_e$.

2. <u>Inégalités de Minkowski</u> Soit r un nombre réel ; $r > 0$. Soit

$$F(x_1 ; x_2) = (x_1^r + x_2^r)^{\frac{1}{r}} ;$$

le domaine A est défini par les inégalités

$$0 \leq x_1 < +\infty \qquad\qquad 0 \leq x_2 < +\infty .$$

La fonction F est convexe dans A si $r \geq 1$; c'est $-F$ qui est convexe si $0 < r \leq 1$. On supposera toujours que $1 \in \Phi$; et on prendra $g = 1$; f_1 et $f_2 \in \Phi_+$; les hypothèses (a), (b), (c), (d) sont remplies, et l'inégalité générale donne cette fois :

$$(4_1) \qquad \int [f_1^r + f_2^r]^{\frac{1}{r}} \leq \left\{ \left[\int f_1\right]^r + \left[\int f_2\right]^r \right\}^{\frac{1}{r}} \qquad 0 < r \leq 1$$

$$(4_2) \qquad \int [f_1^r + f_2^r]^{\frac{1}{r}} \geq \left\{ \left[\int f_1\right]^r + \left[\int f_2\right]^r \right\}^{\frac{1}{r}} \qquad 1 \leq r$$

Revenons d'abord à l'inégalité de Hölder dans Φ_e ; soit donc

$$u = u_1 + i u_2 \qquad ; \qquad v = v_1 + i v_2$$

les fonctions $u_1 ; u_2 ; v_1 ; v_2$ appartenant à Φ ; on a

$$\left|\int uv\right| = \left\{ \left[\int (u_1 v_1 - u_2 v_2)\right]^2 + \left[\int (u_1 v_2 + u_2 v_1)\right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

appliquons l'inégalité précédente pour $r = 2$; $f_1 = u_1 v_1 - u_2 v_2$; $f_2 = u_1 v_2 + u_2 v_1$; (il suffit ici de supposer que f_1 et $f_2 \in \Phi$) ; il vient

$$\left|\int uv\right| \leq \int (u_1^2 + u_2^2)^{\frac{1}{2}} (v_1^2 + v_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

Appliquons enfin l'inégalité de Hölder aux fonctions $(u_1^2 + u_2^2)^{\frac{1}{2}}$ et $(v_1^2 + v_2^2)^{\frac{1}{2}}$, on obtient

$$(3'') \qquad \left|\int uv\right| \leq \left[\int |u|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int |v|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

qui est l'inégalité de Hölder dans Φ_e.

Les inégalités (4_1) et (4_2) donnent, en posant $r = \frac{1}{p}$; $f_1 = u^p$; $f_2 = v^p$, et en prenant u et v dans Φ_+ :

$$(5_1) \qquad \left[\int (u+v)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int u^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int v^p\right]^{\frac{1}{p}} \qquad p \geq 1$$

$$(5_2) \qquad \left[\int (u+v)^p\right]^{\frac{1}{p}} \geq \left[\int u^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int v^p\right]^{\frac{1}{p}} \qquad 0 < p \leq 1$$

Ce sont les inégalités de Minkowski - Seule la première est véritablement importante. Elle se généralise au cas où u et v appartiennent à Φ ; en effet, $|u|$ et $|v|$ appartiennent alors à Φ_+, et on a

$$|u+v| \leq |u| + |v| \quad ;$$

puis

$$\left[\int |u+v|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int (|u|+|v|)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

et

$$(5_1') \qquad \left[\int |u+v|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int |u|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int |v|^p\right]^{\frac{1}{p}} \qquad p \geq 1$$

C'est l'inégalité dans Φ. L'extension à Φ_e se fait ici directement. Soit $u = u_1 + i u_2$; $v = v_1 + i v_2$; $u_1 ; u_2 ; v_1 ; v_2$ appartenant à Φ ; on a

$$\left[\int |u+v|^p\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int \left[(u_1+v_1)^2 + (u_2+v_2)^2\right]^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{p}}$$

et l'inégalité élémentaire

$$\left[(u_1+v_1)^2 + (u_2+v_2)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{u_1^2+u_2^2} + \sqrt{v_1^2+v_2^2}$$

donne

$$\left[\int |u+v|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int (|u|+|v|)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

d'où, comme plus haut,

$$(5_2') \qquad \left[\int |u+v|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int |u|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int |v|^p\right]^{\frac{1}{p}} \qquad p \geq 1.$$

3. Normes d'ordre p des fonctions de Φ, et de Φ_e ; ($p \geq 1$)

Définition 6

Soit $f \in \Phi$, ou $\in \Phi_e$; on appelle norme d'ordre p de la fonction f, et on désigne par $\|f\|_p$, la quantité positive ou nulle

$$\|f\|_p = \left[\int |f|^p\right]^{1/p} \qquad (1 \leq p < +\infty)$$

Les formules $x_i = \frac{f_i}{g}$; $(i = 1, 2, - n)$; $z = F\left(\frac{f_1}{g}, \frac{f_2}{g}, \dots ; \frac{f_n}{g}\right)$

peuvent être regardées comme établissant une représentation paramétrique ~~de~~ d'une certaine portion B de cette hypersurface, qui est une calotte convexe relativement à la coordonnée z. L'ensemble E joue le rôle d'ensemble des paramètres, et g peut être regardée comme une densité de masse épandue sur B. Le point de coordonnées

$$\xi_1 ; \xi_2 ; - ; \xi_n \quad \text{et} \quad \zeta = \frac{1}{\int g} \cdot \int g \, F\left(\frac{f_1}{g} ; \frac{f_2}{g} ; - ; \frac{f_n}{g}\right)$$

est alors le centre de gravité G de la calotte B, et le théorème général de convexité exprime seulement que le point G se trouve au dessus de la calotte convexe B. (ou sur cette calotte dans le cas ~~[illegible]~~ d'égalité)

Remarque. On notera que l'hypothèse $F(0; 0; \dots ; 0) = 0$ n'a rien d'essentiel, pourvu que l'on remplace la famille Φ par la famille $\mathcal{F}$.

Forme homogène du théorème de convexité. - Plaçons nous toujours dans R^{n+1}, et considérons le cône d'équation

$$F\left(\frac{x_1}{z} ; \frac{x_2}{z} ; - \frac{x_n}{z}\right).$$

C'est un cône convexe dont l'intérieur sera défini par $F\left(\frac{x_1}{z} ; \frac{x_2}{z} ; - \frac{x_n}{z}\right) < 0$.

Nous ferons ici l'hypothèse complémentaire que $F\left(\frac{f_1}{g} ; \frac{f_2}{g} ; - - \frac{f_n}{g}\right) \leq 0$, de sorte que l'inégalité (1) donne

(2) $$F\left[\frac{\int f_1}{\int g} ; \frac{\int f_2}{\int g} ; - ; \frac{\int f_n}{\int g}\right] \leq 0$$

qui exprime que la droite de paramètres directeurs

$$\int f_1 ; \int f_2 ; - - ; \int f_n ; \int g$$

est intérieure au cône. Or cette droite peut être regardée comme l'axe de gravité du volume conique décrit par le point

$$x_i = \lambda f_i ; \qquad z = \lambda g$$

quand l'argument des fonctions f_i et g décrit E et que λ décrit R. La densité de masse épandue dans ce volume est ici prise égale à l'unité.

Remarque. Contrairement aux apparences, l'inégalité (2) n'est pas moins générale que (1). On le voit en l'appliquant au cas de $n+1$ variables et à la fonction, encore convexe

$$\mathcal{F}(x_1 ; x_2 ; - - ; x_n ; x_{n+1}) = F(x_1 ; x_2 ; - ; x_n) - x_{n+1} ;$$

On prend toujours $x_i = \frac{f_i}{g}$; $(i = 1, 2, \ldots ; n+1)$ et on satisfait à la condition subsidiaire $\mathcal{F}\left(\frac{f_1}{g} ; \frac{f_2}{g} ; \ldots ; \frac{f_n}{g} ; \frac{f_{n+1}}{g}\right) \leq 0$, en choisissant

$$f_{n+1} = g \, F\left(\frac{f_1}{g} ; \frac{f_2}{g} ; \ldots \frac{f_n}{g}\right).$$

En appliquant l'inégalité (2), on retombe immédiatement sur l'inégalité (1).

Applications du théorème de Convexité

1.- Inégalité de Hölder .- Soit r un nombre réel , $0 < r < 1$. Soit

$$F(x_1 ; x_2) = x_1^r \, x_2^{1-r}$$

le domaine A est ici défini par les inégalités

$$0 \leq x_1 < +\infty \qquad 0 \leq x_2 < +\infty ;$$

et la fonction $-F(x_1 ; x_2)$ est convexe dans ce domaine, ~~[illegible]~~ l'hypothèse (a) est donc satisfaite. Nous supposerons de plus que $1 \in \Phi$, et nous prendrons $g = 1$, de manière à satisfaire à l'hypothèse (b). Pour que l'hypothèse (c) soit remplie, il faut prendre ici f_1 et f_2 dans Φ_+. On a alors $\xi_1 = \int f_1$; $\xi_2 = \int f_2$, et l'hypothèse (d) est satisfaite d'elle-même. L'inégalité générale donne alors

$$\left[\int f_1\right]^r \left[\int f_2\right]^{1-r} \geq \int f_1^r \, f_2^{1-r}$$

On pose habituellement : $r = \frac{1}{p}$; $1 - r = \frac{1}{q}$, avec

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

puis $f_1 = u^p$; $f_2 = v^q$, u et v appartenant à Φ_+ , dans ces conditions, on a : (Inégalité de Hölder)

$$\int uv \leq \left[\int u^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int v^q\right]^{\frac{1}{q}} \quad \text{avec } p > 1 \tag{3}$$

Cette inégalité se généralise immédiatement au cas où u et v sont seulement supposées appartenir à Φ ; on a alors

$$\left|\int u.v\right| \leq \int |u.v|$$

de f par cette même fonction est donc un filtre de Cauchy sur R, lequel admet donc un point limite, définissant le prolongement par continuité de l'intégrale pour le point $g \in \Phi^*$. La continuité de ax ~~sur~~ R, et de $x+y$ sur R^2 entraîne alors la linéarité de $\int g$ sur Φ^*; de plus, si $g \in \Phi^*_+$, on peut approcher g par une fonction $f \in \Phi$, telle que $f \geqslant -\varepsilon$, aussi petit que soit $\varepsilon > 0$; on en déduit $\int f \geqslant -\varepsilon I$; $\int g \geqslant -2\varepsilon I$, et par suite $\int g \geqslant 0$. Toutes les conditions imposées à l'intégrale sur Φ^* sont donc ~~les~~ remplies.

<u>Définition 5</u>. <u>Le langage du calcul des probabilités</u>.

Si $1 \in \Phi$, et si $I = \int 1 = 1$, on dit aussi que $\int f$ est la <u>moyenne</u> de la fonction f. L'élément générique x de l'ensemble E s'appelle alors <u>la variable aléatoire</u>, et E se nomme l'ensemble des valeurs de la variable aléatoire.

<u>Théorème de la moyenne</u>. Soit g une fonction numérique bornée ~~quelconque~~ définie sur E, f une fonction de Φ_+ telle que $fg \in \Phi$. On a.

$$\mathrm{Min}.g.\int f \leqslant \int fg \leqslant \mathrm{Max}.g.\int f.$$

En effet, il est clair que

$$\mathrm{Min}\,g.\,f \leqslant fg \leqslant \mathrm{Max}\,g.\,f$$

d'où résulte le ~~pre~~ théorème, comme corollaire de la proposition 3.

<u>Théorème général de convexité</u>.

a/ - Soit $F(x_1; x_2; \dots; x_n)$ une fonction convexe, (donc continue) définie dans un intervalle ~~convexe~~, fini ou non, A de R^n, contenant l'origine; la fonction F étant nulle en ce point.

b/ - Soit g une fonction de Φ_+, telle que $\int g > 0$

c/ - Soient $f_1; f_2; \dots; f_n$, n fonctions de Φ, telles que les fonctions f_1/g; f_2/g; $\dots$; f_n/g appartiennent à $\bar{\Phi}$, et que de plus, la fonction $\left(\frac{f_1}{g}; \frac{f_2}{g}; \dots \frac{f_n}{g}\right)$, à valeurs dans R^n, prenne ses valeurs dans A.

Le théorème de la moyenne donne immédiatement

$$\text{Min.}\, \frac{f_i}{g} \cdot \int g \;\leq\; \int f_i \;\leq\; \text{Max.}\, \frac{f_i}{g} \cdot \int g \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

ce qui entraîne que le point $(\xi_1 ; \xi_2 ; \ldots ; \xi_n)$ de R^n, avec

$$\xi_i = \frac{\int f_i}{\int g} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

appartient à $\bar{A}$.

d/ Nous ferons l'hypothèse plus restrictive, que

$$(\xi_1 ; \xi_2 ; \cdots ; \xi_n) \in A.$$

Par ailleurs l'axiome (I) et l'hypothèse (a), entraînent que la fonction

$$g \cdot F\left[\frac{f_1}{g} ; \frac{f_2}{g} ; \cdots ; \frac{f_n}{g}\right] \in \Phi$$

De plus, la fonction F est convexe dans A ; d'après le théorème de Hahn-Banach, (dit du plan d'appui). [Esp. vect. topologiques, § 1], il existe n constantes finies, $a_1 ; a_2 ; \cdots ; a_n$, telles que, dans A

$$F(x_1 ; x_2 ; \cdots ; x_n) = F(\xi_1 ; \xi_2 ; \ldots ; \xi_n) + \sum_{i=1}^{n} a_i (x_i - \xi_i) + G(x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n)$$

avec $G(x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n) \geq 0$. Par suite, la fonction

$$g \cdot G\left[\frac{f_1}{g} ; \frac{f_2}{g} ; \cdots ; \frac{f_n}{g}\right] \in \Phi_+$$

Il vient ensuite

$$\int g \cdot F\left[\frac{f_1}{g} ; \frac{f_2}{g} ; \cdots ; \frac{f_n}{g}\right] = F(\xi_1 ; \xi_2 ; \cdots ; \xi_n) \cdot \int g + \sum_{i=1}^{n} a_i \left[\int f_i - \xi_i \int g\right]$$
$$+ \int g \cdot G\left[\frac{f_1}{g} ; \frac{f_2}{g} ; \ldots ; \frac{f_n}{g}\right] ;$$

d'où résulte, compte tenu de la définition des ξ_i et de l'hypothèse (b),

$$(1). \qquad F\left[\frac{\int f_1}{\int g} ; \frac{\int f_2}{\int g} ; \cdots ; \frac{\int f_n}{\int g}\right] \leq \frac{1}{\int g} \cdot \int g \, F\left[\frac{f_1}{g} ; \frac{f_2}{g} ; \cdots ; \frac{f_n}{g}\right]$$

qui est l'inégalité générale de convexité.

<u>Interprétation mécanique du théorème de convexité</u> Dans R^{n+1}, envisageons l'hypersurface définie par

$$(x_1 ; x_2 ; \cdots ; x_n) \in A ; \qquad z = F(x_1 ; x_2 ; \ldots x_n) ;$$

Exemples d'ensembles Φ.

1/. Soit E un espace compact. ~~[illegible]~~ Considérons l'ensemble des fonctions ~~[illegible]~~ numériques, continues ~~[illegible]~~ sur E. Les fonctions sont bornées et il est clair que l'axiome (I_a) est satisfait. L'ensemble en question constitue donc une famille Φ.

2/ Soit E un espace localement compact. Considérons l'ensemble des fonctions numériques, continues sur E, nulles en dehors d'un compact. Soient $f_1; f_2 - \quad f_n$, n fonctions de cet ensemble, et $F(x_1; - ; x_n)$ une fonction numérique définie ~~[illegible]~~ et continue sur R_n, nulle à l'origine. Soit A_i la partie compacte de E en dehors de laquelle f_i est nulle ; $F(f_1; f_2 - \quad f_n)$ est défini et continue sur E, est nulle en dehors du compact $\bigcup_{i=1,2,.n} A_i$; par suite l'ensemble en question constitue une famille Φ.

<u>Définition 3</u> On dit qu'on a défini sur E une structure d'ensemble intégré si l'on s'est donné la famille Φ et, sur Φ, une fonction numérique $\int f$, linéaire sur Φ, ≥ 0 sur Φ_+ ; $\int f$ est dite une <u>intégrale</u> sur Φ

D'après la proposition 2, il revient au même de se donner l'intégrale $\int f$ linéaire et ≥ 0 sur Φ_+ ; quelle que soit $f \in \Phi$, on a alors

$$\int f = \int f^+ - \int f^- \qquad \Big| \quad \text{Corollaire} \quad \left|\int f\right| < \int |f|$$

<u>Définition 4</u>. Si f et g sont deux fonctions ~~[illegible]~~, ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ numériques définies sur E, on dira que $f \leq g$, lorsque, pour tout $x \in E$, on a $f(x) \leq g(x)$.

<u>Proposition 3</u>. Si f et g appartiennent à Φ, et si $f \leq g$, on a

$$\int f \leq \int g$$

En effet $g - f$ appartient alors à Φ_+.

Dans la suite, étant donné une famille Φ, on désignera par $\bar{\Phi}$ la famille des fonctions $c + f$, où c est une constante réelle, et où $f \in \Phi$.

mettre ici le corollaire $\left|\int f\right| \leq \int |f|$

énoncer dans le cas de $\bar{\Phi}$, et de Φ_c

<u>Proposition 4</u>.- Si $1 \notin \Phi$, pour qu'on puisse prolonger $\int f$ en une intégrale $\int g$ définie sur Ψ, il faut et il suffit que

$$\sup_{f \in \Phi_+ ;\ f \leq 1} \int f$$

ait une valeur finie I ; alors, pour toute fonction $g = c + f$ de Ψ, on a

$$\int g = cI + \int f.$$

En effet, pour qu'on puisse prolonger $\int f$ à Ψ, en conservant la linéarité de la fonction $\int g$, définie sur Ψ, il faut pouvoir définir $\int 1$ - Soit donc I la valeur attribuée à cette dernière expression ; on aura bien

$$\int g = cI + \int f$$

Mais I doit être choisi de façon telle que $\int g$ soit ≥ 0 sur Ψ_+ ; il est donc nécessaire et suffisant que $f \geq -c$ entraîne, pour $f \in \Phi$,

$$\int f \geq -cI$$

ou encore que $f \leq 1$, entraîne $\int f \leq I$, pour $f \in \Phi$.

Il est donc bien nécessaire et suffisant que $\sup\limits_{f \in \Phi_+ ;\ f \leq 1} \int f$ existe et soit finie, et on peut prendre pour I, la valeur de cette borne supérieure, ou toute valeur plus grande.

<u>Proposition 5</u>. Si $1 \in \Phi$, on peut prolonger l'intégrale $\int f$ donnée sur Φ, en une intégrale $\int g$, sur la famille Φ^* des fonctions limites <u>uniformes</u> sur E de fonctions de Φ.

Posons $I = \int 1$; soit $g \in \Phi^*$; g et tous les $f \in \Phi$ sont des points de l'espace R^E des fonctions numériques définies sur E, muni de la topologie de la convergence uniforme. Soit $\mathfrak{F}$ le filtre sur Φ admettant g comme point limite. Aussi petit que soit $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble de $\mathfrak{F}$ dont tous les points sont distants de g de moins de ε, et il est clair que l'image sur R d'un tel ensemble par la fonction $\int f$ est petit d'ordre $2\varepsilon I$. L'image l'inégalité de Minkowski s'écrit alors

$$\| f+g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p$$

C'est une inégalité triangulaire; elle montre que la norme d'ordre p a, dans l'espace vectoriel formé par la famille Φ, le caractère d'une distance.

Si on suppose maintenant $p > 1$, l'inégalité de Hölder devient

$$\left| \int f \cdot g \right| \leq \| f \|_p \, \| g \|_q$$

Proposition 6. – Si $p > 1$, on a,

pour $f \in \Phi_+$; $\qquad \| f \|_p = \sup\limits_{g \in \Phi_+ ;\ \| g \|_q \leq 1} \int f \cdot g$.

pour $f \in \Phi$; $\qquad \| f \|_p = \sup\limits_{g \in \Phi ;\ \| g \|_q \leq 1} \left| \int f \cdot g \right|$

pour $f \in \Phi_e$ $\qquad \| f \|_p = \sup\limits_{g \in \Phi_e ;\ \| g \|_q \leq 1} \left| \int f \cdot g \right|$ —

Si f et g appartiennent à Φ_+, $\left| \int f \cdot g \right| = \int f \cdot g$, et dans les trois cas, l'inégalité de Hölder et l'hypothèse $\| g \|_q \leq 1$ entraînent

$$\left| \int f \cdot g \right| \leq \| f \|_p$$

et l'égalité peut être atteinte; il suffit de prendre

$$g = (\text{signe } f) \cdot \frac{|f|^{\frac{p}{q}}}{(\| f \|_p)^{\frac{p}{q}}} \quad ; \quad \text{on a } \| g \|_q = 1$$

et il vient alors

$$\int f \cdot g = \frac{1}{(\| f \|_p)^{\frac{p}{q}}} (\| f \|_p)^p = \| f \|_p \quad ;$$

d'où la proposition.

Définition 7. – La norme d'ordre p de la fonction f n'est jusqu'ici définie que pour $p \leq 1 < +\infty$; l'extension de la proposition 6 au cas de $p = +\infty$, $(q=1)$, donne une définition de $\| f \|_\infty$, à savoir

$$\| f \|_\infty = \sup\limits_{g \in \Phi ;\ \| g \|_1 \leq 1} \left| \int f \cdot g \right|$$

où Φ peut être remplacé par Φ_+, ou par Φ_e.

Proposition 7 ; si $f \in \Phi_+$, et si $f \neq 0$ entraîne $\int f > 0$, on a

$$\|f\|_\infty = \sup. |f|$$

On observera d'abord, qu'en tous cas, (pour $f \in \Phi_+$, ou Φ, ou $\Phi_{\mathbb{C}}$), on a

$$\left| \int fg \right| \leq \int |f \cdot g| \leq \sup |f| \cdot \int |g| = \sup |f| . \|g\|_1$$

d'après le théorème de la moyenne ; on a donc à coup sûr

$$\|f\|_\infty \leq \sup |f|$$