LIVRE IV
CHAPITRE VI
DEVELOPPEMENTS TAYLORIENS GENERALISES
FORMULE SOMMATOIRE D'EULER-MACLAURIN
CHAPITRE VII
LA FONCTION GAMMA

Rédaction n° 013

Nombre de pages : 45

Nombre de feuilles : 45

Livre IV Chap VI

Taylor généralisé

Euler Mac Laurin

Fonction Γ

13

A 13

LIVRE IV

CHAPITRE VI

DÉVELOPPEMENTS TAYLORIENS GÉNÉRALISÉS

FORMULE SOMMATOIRE D'EULER-MACLAURIN

§ 1. Développements tayloriens généralisés.

1. Opérateurs translatables dans un anneau de polynomes.

Soit K un corps commutatif caractéristique 0 , $K[X]$ l'algèbre des polynomes à une indéterminée sur K (Alg.,chap.IV) ; dans tout ce paragraphe, nous désignerons sous le nom d'opérateur dans $K[X]$ toute application linéaire $\underline{U}$ de l'espace vectoriel $K[X]$ (sur K) dans lui-même ; comme les monômes X^n $(n \geqslant 0)$ forment une base de cet espace, $\underline{U}$ est déterminé par la donnée des polynomes $\underline{U}(X^n)$; de façon précise, si $f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_k \in K$, on a $\underline{U}(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k \underline{U}(X^n)$.

Si G est une algèbre commutative sur K , ayant un élément unité, le G-module $G[X]$ s'obtient par extension à G du corps des scalaires K de l'espace vectoriel $K[X]$; la donnée des $\underline{U}(X^n)$ détermine donc une application linéaire de ce module dans lui-même, que nous noterons encore $\underline{U}$; pour tout élément $g(X) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k X^k$, où $\gamma_k \in G$, on a donc $\underline{U}(g) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \underline{U}(X^n)$. En particulier, si on prend $G=K[Y]$, on a $G[X] = K[X,Y]$, et pour tout polynome $g(X,Y) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k(Y)X^k$ où $\gamma_k(Y) \in K[Y]$, $\underline{U}(g) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k(Y)\underline{U}(X^k)$. Comme $\underline{U}$ est linéaire, on voit que si on écrit $g(X,Y) = \sum_{h=0}^{m} \beta_h(X)Y^h$, on a aussi $\underline{U}(g) = \sum_{h=0}^{m} \underline{U}(\beta_h)Y^h$.

Cette dernière formule se généralise de la façon suivante. Considérons l'anneau $E = K[X][[Y]]$ des séries formelles en Y , à coefficients dans $K[X]$ (Alg., chap.IV,Appendice), autrement dit, l'anneau des séries formelles $g = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(X)Y^n$, où les β_n sont des polynomes en X à coefficients dans K . On définit une application $\underline{U}$ de E dans lui-même en posant

$\underline{U}(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{U}(\beta_n)Y^n$. Il est clair que E est un module sur l'anneau $K[[Y]]$ des séries formelles en Y à coefficients dans K ; en raison de la linéarité de $\underline{U}$ dans $K[X]$, on vérifie aussitôt que pour tout élément $\theta \in K[[Y]]$, et tout $g \in E$, on a $\underline{U}(\theta g) = \theta\underline{U}(g)$; autrement dit, $\underline{U}$ est une application <u>linéaire</u> du module E dans lui-même.

Pour tout polynome $f \in K[X]$, nous désignerons par $\underline{T}_Y f$ le polynome $f(X+Y)$ de $K[X,Y]$; l'application $\underline{T}_Y$ est une application linéaire de $K[X]$ dans $K[X,Y]$.

DEFINITION 1.- <u>On dit que l'opérateur</u> $\underline{U}$ <u>est translatable si</u> $\underline{U}\underline{T}_Y = \underline{T}_Y\underline{U}$.

En d'autres termes, si $g(X) = \underline{U}(f(X))$, on doit avoir $g(X+Y) = \underline{U}(f(X+Y))$.

PROPOSITION 1.- <u>Pour qu'un opérateur</u> $\underline{U}$ <u>dans</u> $K[X]$ <u>soit translatable, il faut et il suffit qu'il soit permutable avec la dérivation</u> D <u>dans</u> $K[X]$.

En effet, avec les notations ci-dessus, la formule de Taylor montre que $\underline{U}(f(X+Y)) = \underline{U}(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} Y^k D^k f(X)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} Y^k \underline{U}(D^k(f(X)))$; comme $g(X+Y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} Y^k D^k(g(X)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} Y^k D^k(\underline{U}(f(X)))$, on a bien $\underline{U}D^k = D^k\underline{U}$ quel que soit l'entier k , donc $D\underline{U} = \underline{U}D$. Inversement, si cette relation est vérifiée, on a $\underline{U}D^k = D^k\underline{U}$ pour tout k , et la formule de Taylor prouve que $\underline{U}\underline{T}_Y = \underline{T}_Y\underline{U}$.

<u>Exemples</u>.- 1) Toute combinaison linéaire $\sum_{k=1}^{n} a_k D^k$ $(a_k \in K)$ de puissance de la dérivation D sont des opérateurs translatables (cf. exerc.1).

2) L'opérateur qui, à tout polynome f(X), fait correspondre le polynome $f(X+1)-f(X)$ est un opérateur translatable.

3) Toute combinaison linéaire à coefficients dans K d'opérateurs translatable est translatable, ainsi que le composé de deux opérateurs translatables. En d'autres termes, les opérateurs translatables forment une <u>sous-algèbre</u> de $\mathcal{L}(E)$.

Pour tout polynome $f \in K[X,Y]$, nous désignerons par $\underline{U}_0(f)$ le terme *indépendant de* X dans $\underline{U}(f)$; en particulier, si $f \in K[X]$, $\underline{U}_0(f)$ est le *terme constant* de $\underline{U}(f)$, et $\underline{U}_0$ est donc une *forme linéaire* sur $K[X]$. Avec les notations ci-dessus, on a $g(Y)=\underline{U}_0(f(X+Y)) =$ $= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} Y^k \underline{U}_0(D^k(f(X)))$; il en résulte en particulier que *le degré de* $\underline{U}f$ *est au plus égal au degré de* f, et que *la donnée de la forme linéaire* $\underline{U}_0$ *détermine complètement l'opérateur* $\underline{U}$. Par suite, la donnée de la suite des éléments $\underline{U}_0(X^n) \in K$ détermine complètement l'opérateur $\underline{U}$. De façon précise, supposons $\underline{U} \neq 0$, donc $\underline{U}_0 \neq 0$, et soit p le plus petit des entiers m tels que $\underline{U}_0(X^m) \neq 0$; nous dirons que p est l'ordre de $\underline{U}$. Nous poserons $\underline{U}_0(\frac{1}{m!} X^m) = \frac{\alpha_{m-p}}{(m-p)!}$ pour tout entier $m \geqslant p$; l'hypothèse signifie donc que $\alpha_0 \neq 0$. On a alors, d'après ce qui précède

(1) $$\underline{U}(X^n) = \sum_{k=0}^{n-p} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{(n-k-p)!} \alpha_{n-k-p} X^k \qquad \text{pour } n \geqslant p .$$

2. *Polynomes d'Appell attachés à un opérateur translatable.*

PROPOSITION 2.- *Tout opérateur translatable* $\underline{U}$ *d'ordre* p *dans* $K[X]$ *est une application de* $K[X]$ *sur lui-même, et* $\overset{-1}{\underline{U}}(0)$ *est identique à l'ensemble des polynomes de degré* $< p$.

Désignons par L_n l'ensemble des polynomes de degré $\leqslant n$; c'est un espace vectoriel de dimension n+1 sur K ; nous allons voir que $\underline{U}(L_n)=L_{n-p}$ pour $n \geqslant p$. La proposition étant vraie pour n=p, démontrons-la par récurrence ; comme $L_n \supset L_{n-1}$, $\underline{U}(L_n) \supset L_{n-p-1}$; d'autre part, la formule (1) et l'hypothèse $\alpha_0 \neq 0$ montre que $\underline{U}(L_n) \subset L_{n-p}$ et que $\underline{U}(L_n)$ contient un polynome de degré n-p, donc est distinct de L_{n-p-1} ; comme L_{n-p-1} est de codimension 1 dans L_{n-p}, on a bien $\underline{U}(L_n)=L_{n-p}$. Comme $K[X]$ est réunion des L_n, ceci démontre déjà que $\underline{U}$ est une application de $K[X]$ *sur* lui-même. D'autre part, $\overset{-1}{\underline{U}}(0)$ est réunion des sous-espaces $\overset{-1}{\underline{U}}(0) \cap L_n$; or ce dernier contient L_{p-1}, et est identique au noyau de la restriction de $\underline{U}$ à L_n ; comme nous venons de voir que cette restriction est de rang n-p+1, son noyau est de dimension p , donc identique à L_{p-1} . Par suite, on a bien $\overset{-1}{U}(0)=L_{p-1}$.

Nous allons déterminer une suite particulière de polynomes $u_n(X)$, de degré égal à leur indice, et satisfaisant aux relations

(2) $$\underline{U}(u_n(X)) = \frac{n!}{(n-p)!} X^{n-p} \quad \text{pour } n \geqslant p .$$

Il en résultera que pour tout polynome $f(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_{n-k}}{(n-k)!} X^{n-k}$ le polynome $g(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_{n-k}}{(n-k+p)!} u_{n-k+p}(X)$ satisfera l'équation $\underline{U}(g)=f$; en d'autres termes, nous aurons ainsi défini une application linéaire $\underline{V}$ de $K[X]$ dans lui-même telle que $\underline{U} \circ \underline{V} = \underline{I}$ (application identique).

Considérons pour cela la série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} Z^n$ dans l'anneau $K[[Z]]$; nous la désignerons (par abus de langage) par exp(Z) ou e^Z.

On peut écrire, dans l'anneau $K[[Z,T]]$

$$(\exp Z)(\exp T) = \sum_{p,q} \frac{Z^p\, T^q}{p!\; q!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\binom{n}{0} Z^n+\binom{n}{1}Z^{n-1}T+\ldots+\binom{n}{n}T^n\right)$$
$$= \exp(Z+T) ,$$

ce qui justifie la notation introduite. Considérons alors la série formelle $g(X,Z)=\underline{U}(\exp(XZ)) = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{U}(\frac{1}{n!}X^n)Z^n$. Comme $\underline{U}$ est translatable, on a $g(X+Y,Z)=\underline{U}(\exp((X+Y)Z))=\underline{U}((\exp(XZ)).(\exp(YZ)))=(\exp(YZ))g(X,Z)$; en substitiant 0 à X dans cette relation, il vient

(3) $$g(Y,Z) = u(Z).\exp(YZ)$$

où on a posé

(4) $$u(Z)=g(0,Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{U}_0(\frac{1}{n!}X^n)Z^n=Z^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_n Z^n$$

Comme par hypothèse $a_0\neq 0$, la série formelle $u(Z)/Z^p$ est <u>inversible</u> dans $K[[Z]]$; or, en remplaçant Y par X dans (3), cette relation peut s'écrire

(5) $$\underline{U}(Z^p\exp(XZ)/u(Z)) = Z^p\exp(XZ)$$

et par suite, si on pose

$$(6) \qquad Z^p \exp(XZ)/u(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, u_n(X) Z^n$$

$u_n(X)$ est un polynome de degré n , et la relation (5) équivaut aux relations (2). On dit que les polynomes u_n ainsi définis sont les <u>polynomes d'Appell</u> attachés à l'opérateur translatable $\underline{U}$.

PROPOSITION 3.- <u>Les polynomes d'Appell attachés à</u> U <u>satisfont aux identités</u>

$$(7) \qquad \frac{du_n}{dX} = n.u_{n-1}$$

$$(8) \qquad u_n(X+Y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_{n-k}(X) Y^k$$

En effet, les relations (7) s'obtiennent en dérivant les deux membres de (6) par rapport à X , puisque $\frac{d}{dX}(\exp(XZ)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} Z^n = Z \exp(XZ)$. De (7), on déduit, par récurrence sur k, $D^k u_n = n(n-1)..(n-k+1)u_{n-k}$, et la relation (8) résulte alors de l'application à u_n de la formule de Taylor.

PROPOSITION 4.- <u>Pour tout polynome</u> $f \in K[X]$, <u>de degré</u> n , <u>on a</u>

$$(9) \qquad f^{(p)}(X+Y) = \sum_{k=0}^{n-p} \frac{1}{k!}\, u_k(X) \underline{U}_0(f^{(k)}(X+Y))$$

(<u>développement taylorien généralisé</u>) .

En effet, comme $u_n(X)$ est de degré n , les u_n forment une <u>base</u> de $K[X]$, et on peut donc écrire

$$f(X+Y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, u_k(X) v_k(Y)$$

où $v_k \in K[Y]$; on en déduit, d'après les formules (2) et (7) et la prop.1

$$\underline{U}(f^{(h)}(X+Y)) = \sum_{k=p+h}^{n} \frac{X^{k-p-h}}{(k-p-h)!}\, v_k(Y) \qquad (p+h \leq n)$$

et en particulier $v_{p+h}(Y) = \underline{U}_0(f^{(h)}(X+Y))$. D'où la relation (9), en dérivant p fois l'expression de $f(X+Y)$ et tenant compte de (7) .

__Exemples__.- 1) Si $\underline{U}$ est l'application identique de $K[X]$ sur lui-même, on a $\underline{U}_0(f(X))=f(0)$, $p=0$, $\alpha_0=1$ et $\alpha_m=0$ pour $m \geqslant 1$; le polynome d'Appell correspondant $u_n(X)$ n'est autre que X^n , et le développement (9) se réduit à la formule de Taylor.

2) Prenons $\underline{U}(f(X))=f(X+1)-f(X)$; c'est évidemment un opérateur translatable. On a $\underline{U}_0(f(X))=f(1)-f(0)$, $p=1$, $\alpha_0=1$, $\alpha_m=\frac{1}{m}$ pour $m \geqslant 1$; le polynome d'Appell correspondant se note $B_n(X)$ et est appelé __polynome de Bernoulli__ de degré n ; on a alors $B_n(X+1)-B_n(X) = nX^{n-1}$, et $u(Z)=e^Z-1$; les coefficients de $B_n(X)$ sont donc des __nombres rationnels__. Si on pose $B_n(0)=b_n$, la formule (8) montre en particulier qu'on a

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k . \qquad (10)$$

Les nombres b_n sont liés simplement aux nombres rationnels connus sous le nom de __nombres de Bernoulli__ ; nous ferons une étude plus détaillée de ces nombres et des polynomes de Bernoulli au §2 .

3. __Opérateurs translatables sur les fonctions d'une variable réelle.__

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, formé de fonctions d'une variable réelle, à valeurs complexes, définies et continues dans un intervalle I identique à $\mathbb{R}$ ou de la forme $[x_0,+\infty[$ (x_0 quelconque dans $\mathbb{R}$) ; nous supposerons que pour tout $a \geqslant 0$ et toute fonction $f \in E$, la fonction $x \rightarrow f(x+a)$ appartient à E ; en outre, nous supposerons que E contient les restrictions à I des __polynomes__ et des fonctions $e^{\lambda x}$, pour __tout__ λ __complexe__. Nous appellerons __opérateur__ dans E toute application linéaire $\underline{U}$ de E dans l'espace de toutes les applications de I dans $\mathbb{C}$; si $f \in E$ et $g=\underline{U}(f)$, il sera commode d'utiliser la notation

$$g(x) = \underline{U}_x(f(\xi))$$

ξ étant donc une variable *liée* dans le symbole fonctionnel du second membre (cf. chap.II, §1,n°4).

DÉFINITION 2.- *On dit que l'opérateur $\underline{U}$ dans E est translatable si, pour* $a \geqslant 0$, *il est permutable avec l'opérateur qui, à toute fonction* $f \in E$, *associe la restriction à I de la fonction* $x \to f(x+a)$.

Avec la notation introduite ci-dessus, cette définition se traduit par l'identité en x et a $(x \in I \ , \ a \in \mathbb{R}_+)$

$$(11) \qquad \underline{U}_{x+a}(f(\xi)) = \underline{U}_x(f(\xi+a))$$

Dans cette identité, on peut échanger les rôles de x et de a , et faire $x=0$ si $0 \in I$, ce qui donne pour $x \in I \cap \mathbb{R}_+$

$$(12) \qquad \underline{U}_x(f(\xi))=\underline{U}_0(f(\xi+x))$$

$\underline{U}_0$ étant la *forme linéaire* sur E qui, à toute fonction $f \in E$, fait correspondre la valeur $g(0)$ de $g=\underline{U}(f)$.

Si f est un polynome, on a $f(\xi+x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi)x^k$, et la formule (12) montre donc que $\underline{U}(f)$ est un *polynome* ; restreint à l'ensemble des polynomes en x , à coefficients dans $\mathbb{C}$ (qu'on peut identifier à $\mathbb{C}[X]$) , l'opérateur $\underline{U}$ est donc un opérateur translatable au sens de la déf.1, et tous les résultats du n°2 lui sont donc applicables. En outre, par hypothèse $\underline{U}$ est défini pour toute exponentielle $e^{\lambda x}$ (λ complexe) ; la formule (12) montre que

$$(13) \qquad \underline{U}_x(e^{\lambda\xi})=\underline{U}_0(e^{\lambda x}e^{\lambda\xi}) = e^{\lambda x}\underline{U}_0(e^{\lambda\xi})$$

Si l'on peut écrire $\underline{U}_0(e^{\lambda\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \underline{U}_0\left(\frac{\xi^n}{n!}\right)$ la série du second membre étant convergente pour tout λ complexe (ce qui dépend de la nature de l'opérateur translatable $\underline{U}$ considéré), on aura $\underline{U}_0(e^{\lambda\xi}) = \lambda^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \alpha_n \lambda^n$, la série du second membre étant convergente pour tout nombre complexe λ . Par abus de langage, même lorsque la relation précédente n'a pas lieu, nous désignerons encore le nombre $\underline{U}_0(e^{\lambda\xi})$

par la notation $u(\lambda)$, et nous dirons que la fonction $u(\lambda)$, définie dans $\mathbb{C}$, est l'<u>indicatrice</u> de l'opérateur translatable $\underline{U}$ (cf.exerc.3).

Au développement taylorien généralisé d'un polynome (formule (9)) correspond, pour des fonctions plus générales, le résultat fondamental suivant (où on suppose que $I \supset \mathbb{R}_+$) :

THÉORÈME 1.- <u>Soit</u> f <u>une fonction à valeurs dans</u> $\mathbb{C}$, <u>définie dans</u> $\mathbb{R}_+$ <u>et admettant une dérivée</u> $(n+1)$<u>-ème continue</u>. <u>Pour</u> $x \geqslant 0$ <u>et</u> $h \geqslant 0$, <u>on a</u>

$$(14)\quad f^{(p)}(x+h) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} u_m(x)\underline{U}_h(f^{(m)}(\xi)) - \underline{U}_h\left(\int_0^{\xi-x-h} \frac{1}{n!} u_n(x+\eta) f^{(n+1)}(\xi-\eta)\,d\eta\right)$$

<u>lorsque toutes les dérivées</u> $f^{(m)}$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$ <u>appartiennent à</u> E <u>(développement taylorien généralisé)</u>.

Considérons l'intégrale $\int_0^{\xi-x-h} \frac{1}{n!} u_n(x+\eta) f^{(n+1)}(\xi-\eta)\,d\eta$, définie et continue pour tout $\xi \geqslant 0$, et appliquons-lui la formule d'intégration par parties d'ordre n (chap.II, §1,formule (12)) en tenant compte des $u_n^{(p)} = n(n-1)\ldots(n-p+1)u_{n-p}$ déduites par récurrence de (7) ; il vient

$$(15)\quad \int_0^{\xi-x-h} \frac{1}{n!} u_n(x+\eta) f^{(n+1)}(\xi-\eta)\,d\eta = \\ = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} u_m(x) f^{(m)}(\xi) - \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} u_m(\xi-h) f^{(m)}(x+h).$$

Supposons que toutes les fonctions $f^{(m)}$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$ appartiennent à E, et appliquons aux deux membres de (15) (considérés comme fonctions de ξ) l'opérateur $\underline{U}$, puis prenons la valeur de la fonction obtenue pour la valeur h de la variable ; en remarquant que d'après la formule (2), on a

$$\underline{U}_h(u_m(\xi-h)) = \underline{U}_0(u_m(\xi)) = \begin{cases} 0 & \text{pour } m \neq p \\ p! & \text{pour } m = p \end{cases}$$

on obtient finalement la formule (14).

COROLLAIRE.- <u>Pour toute valeur de</u> $\lambda \in \mathbb{C}$ <u>telle que</u> $u(\lambda) \neq 0$, <u>on a</u>

$$(16)\qquad \frac{\lambda^p e^{\lambda x}}{u(\lambda)} = \sum_{m=0}^{n} u_m(x)\frac{\lambda^m}{m!} - \frac{\lambda^{n+1}}{u(\lambda)}\,\underline{U}_0\left(\int_0^{\xi-x}\frac{1}{n!}u_n(x+\eta)e^{\lambda(\xi-\eta)}d\eta\right)$$

Il suffit d'appliquer la formule (14) à $f(x)=e^{\lambda x}$ et à $h=0$, en tenant compte de ce que $f^{(m)}(\xi)=\lambda^m e^{\lambda\xi}$, d'où $\underline{U}_0(f^{(m)}(\xi))=\lambda^m u(\lambda)$.

Exemples.- 1) Si $\underline{U}$ est l'application identique, on a $p=0$ et $u_m(x)=x^m$; en posant $t=\xi-\eta$, la formule (14) devient

$$f(x+h) = \sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}f^{(m)}(h)x^m + \int_h^{x+h} f^{(n+1)}(t)\frac{(x+h-t)^n}{n!}dt$$

c'est-à-dire la formule de Taylor démontrée au chap.II, § 1, n°6.

2) Prenons pour $\underline{U}$ l'opérateur translatable qui, à toute fonction f définie dans $\mathbb{R}_+$, fait correspondre la fonction g telle que $g(x)=f(x+1)-f(x)$; en d'autres termes $\underline{U}_x(f(\xi))=f(x+1)-f(x)$; on a vu que $p=1$, et $u(\lambda)=e^{\lambda}-1$. En appliquant la formule (14) à une primitive de f, il vient

$$(17)\qquad f(x+h) = \int_h^{h+1} f(t)dt + \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}B_m(x)(f^{(m-1)}(h+1)-f^{(m-1)}(h)) + R_n(x,h)$$

avec

$$(18)\qquad R_n(x,h) = -\int_0^{1-x}\frac{B_n(x+\eta)}{n!}f^{(n)}(h+1-\eta)d\eta + \int_0^{-x}\frac{B_n(x+\eta)}{n!}f^{(n)}(h-\eta)d\eta$$

*3) Soit E l'espace vectoriel des fonctions f définies et continues dans $\mathbb{R}$ et telles que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi$ soit convergente pour tout $x \geqslant 0$. L'opérateur $\underline{U}$ défini par

$$\underline{U}_x(f(\xi)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} f(x+\xi)d\xi$$

est donc défini dans E et est évidemment translatable. E contient toutes les exponentielles $e^{\lambda x}$ (λ complexe quelconque), et on a

$$u(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}+\lambda\xi}d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{\frac{\lambda^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\xi-\lambda)^2/2}d\xi = e^{\frac{\lambda^2}{2}}$$

(cf.chap.III, § 1, exerc.24, et chap.VII, § 1, formule ( )).

En outre, pour tout entier n, on peut écrire

$$\sum_{k=0}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\lambda\xi|^k}{k!}e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi \leq 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}+|\lambda|\xi}d\xi$$

donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \frac{(\lambda\xi)^n}{n!}$ peut être intégrée terme à terme dans $\mathbb{R}$, ce qui montre que $p=0$ et que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_n \lambda^n$ converge absolument pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et a une somme égale à $\exp(\lambda^2/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{2^n n!}$, d'où on déduit aussitôt (chap.I, §3,n°2, Remarque 2) que $a_{2n} = \frac{1}{2^n}$, $a_{2n+1} = 0$.

Les séries $\exp(-\frac{\lambda^2}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^{2n}}{2^n\, n!}$ et $\exp(\lambda x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n x^n}{n!}$ étant absolument convergentes pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, il en est de même de leur produit ; d'après (6), on voit donc que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} u_n(x)$ est absolument convergente pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, et qu'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} u_n(x) = \exp(-\frac{\lambda^2}{2} + \lambda x) = \exp(\frac{x^2}{2})\exp(-\frac{1}{2}(\lambda - x)^2)$$

En appliquant la formule de Taylor à la fonction $\exp(-\frac{x^2}{2})$ on obtient l'expression suivante des polynomes $u_n(x)$

$$u_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-\frac{x^2}{2}})$$

Ce polynome est appelé le <u>polynome d'Hermite</u> de degré n et se note le plus souvent $H_n(x)$. Les formules (7), (8) et (2) donnent ici

$$\frac{dH_n}{dx} = nH_{n-1}(x)$$

$$H_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_{n-k}(x) y^k$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(x+\xi)\, d\xi = x^n ,$$

et la formule (14) devient, pour $h=0$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, f(x) = \sum_{m=0}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} f^{(m)}(\xi)\, d\xi \right) \frac{H_m(x)}{m!} - \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_0^{\xi} \frac{H_n(x+\eta)}{n!} e^{-\frac{(\xi+x)^2}{2}} f^{(n+1)}(x+\xi-\eta)\, d\eta$$

<u>Exercices</u>.- 1) Soit K un corps de caractéristique 0 , et soit $E=K[X]$.

a) Montrer que si $\underline{U}$ est un opérateur translatable dans E , on a $\underline{U} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_n D^{n+p}$, la série étant convergente dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$, muni de la topologie de la convergence simple dans E .

b) En déduire que deux opérateurs translatables dans E sont toujours <u>permutables</u>.

2) Soient $\underline{U}$ et $\underline{V}$ deux opérateurs translatables dans $E=K[X]$ et soit $\underline{W}=\underline{UV}=\underline{VU}$; soient (u_n), (v_n), (w_n) les suites de polynomes d'Appell correspondant respectivement à $\underline{U}$, $\underline{V}$, $\underline{W}$. Démontrer les formules

$$u_n^{(p)}(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v_{n-k}(X) \underline{V}_0(u_k)$$

$$w_n(X+Y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k(X) v_{n-k}(Y).$$

3) Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ engendré par les fonctions x^n ($n \in \mathbb{N}$), $e^{\lambda x}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$) et $|x+\mu|$ ($\mu \in \mathbb{R}$).

a) Montrer que les fonctions précédentes forment une base de E sur $\mathbb{C}$.

b) Soit $\underline{U}$ l'application linéaire de E dans lui-même, définie par les conditions $\underline{U}(x^n)=x^n$, $\underline{U}(|x+\mu|)=|x+\mu|$, $\underline{U}(e^{\lambda x})=0$ pour $\lambda \neq 0$; montrer que $\underline{U}$ est translatable ; l'indicatrice $u(\lambda)$ est égale à 1 pour $\lambda=0$, à 0 pour $\lambda \neq 0$, et est donc distincte de la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_n \lambda^n$.

c) Soit $\underline{V}$ l'application linéaire de E dans lui-même, définie par les conditions $\underline{V}(x^n)=x^n$, $\underline{V}(e^{\lambda x})=e^{\lambda x}$, $\underline{V}(|x+\mu|)= e^{x+\mu}$; montrer que $\underline{V}$ est un opérateur translatable dans E , et qu'on a $\underline{U}\circ\underline{V} \neq \underline{V}\circ\underline{U}$.

§ 2. Développements eulériens des fonctions trigonométriques et nombres de Bernoulli.

1. <u>Développement eulérien de cotg</u> z .

D'après la formule (6) du § 1, les nombres $\frac{b_n}{n!}$ sont les coefficients du développement en série <u>formelle</u> de $Z/(e^Z-1)$; nous allons démontrer dans ce paragraphe que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} b_n z^n$ où $z \in \mathbb{C}$ est convergente dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$ et a pour somme la fonction $z/(e^z-1)$; nous en déduirons des majorations pour les nombres b_n .

Notons en premier lieu qu'on a

$$(1) \qquad \frac{z}{e^z-1} = -\frac{z}{2} + \frac{z}{2}\,\frac{e^z+1}{e^z-1} = -\frac{z}{2} + \frac{iz}{2} \operatorname{cotg} \frac{iz}{2}$$

Nous allons obtenir dans ce qui suit un développement en série de $\operatorname{cotg} z$, valable pour tout z distinct d'un multiple entier de π .

PROPOSITION 1.- <u>Pour tout nombre complexe</u> z <u>et tout entier</u> n , <u>on a</u>

$$(2) \qquad \sin nz = 2^{n-1} \sin z \, \sin\left(z+\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(z+\frac{2\pi}{n}\right) \dots \sin\left(z+\frac{(n-1)\pi}{n}\right) .$$

En effet, on peut écrire

$$\sin nz = \frac{e^{niz}-e^{-niz}}{2i} = \frac{e^{-niz}(e^{2niz}-1)}{2i} = \frac{e^{-niz}(e^{2iz}-1)(e^{2iz}-e^{-\frac{2i\pi}{n}})..(e^{2iz}-e^{-\frac{2(n-1)i\pi}{n}}}{2i}$$

$$= A \sin z \, \sin\left(z+\frac{\pi}{n}\right) \dots \sin\left(z+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

avec $A=(2i)^{n-1} e^{-i\frac{\pi}{n}(1+2+\dots+(n-1))} = (2i)^{n-1} e^{-i(n-1)\frac{\pi}{2}} = 2^{n-1}$.

COROLLAIRE.1.- <u>Pour tout entier</u> n , <u>on a</u>

$$(3) \qquad \sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n} \dots \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Il suffit en effet de diviser les deux membres de (2) par $\sin z$ et de faire tendre z vers 0 .

COROLLAIRE 2.- <u>Pour tout entier impair</u> $n=2m+1$, <u>et tout nombre complexe</u> z <u>tel que</u> nz <u>ne soit pas multiple entier de</u> π , <u>on a</u>

$$(4) \qquad \operatorname{cotg} nz = (-1)^m \operatorname{cotg} z \operatorname{cotg}\left(z+\frac{\pi}{n}\right) \dots \operatorname{cotg}\left(z+\frac{(n-1)\pi}{n}\right) .$$

En effet, on a $\sin n(z+\frac{\pi}{2}) = \sin(nz+\frac{\pi}{2}+m\pi) = (-1)^m \cos nz$, d'où , en remplaçant z par $z+\frac{\pi}{2}$ dans (2)

$$(5) \qquad \cos nz = (-1)^m \cos z \cos\left(z+\frac{\pi}{n}\right) \dots \cos\left(z+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

et les formules (2) et (5) donnent (4) par division membre à membre lorsque $\sin nz \neq 0$.

Dans tout ce qui suit, nous supposerons toujours que $n=2m+1$ est un entier impair ; la formule (4) peut aussi s'écrire

$$\operatorname{cotg} nz = (-1)^m \prod_{k=-m}^{m} \operatorname{cotg}\left(z-\frac{k\pi}{n}\right)$$

Or, on a $\operatorname{cotg}\left(z-\frac{k\pi}{n}\right) = \dfrac{1+\operatorname{tg} z \operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}}{\operatorname{tg} z - \operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}}$ pour $\operatorname{tg} z$ fini ; par rapport à $u=\operatorname{tg} z$, $\operatorname{cotg} nz$ est donc une fraction rationnelle dont le numérateur est de degré $n-1$ et dont le dénominateur, de degré n, a les n racines simples $\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}$; en décomposant cette fraction en éléments simples, il vient

$$(6) \qquad \operatorname{cotg} nz = \sum_{k=-m}^{m} \frac{A_k}{u-\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}}$$

avec

$$A_k = \lim_{z\to\frac{k\pi}{n}} \operatorname{cotg} nz.\left(\operatorname{tg} z-\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}\right) = \lim_{z\to\frac{k\pi}{n}} \frac{\cos nz}{\sin nz}\,\frac{\sin\left(z-\frac{k\pi}{n}\right)}{\cos z\cos\frac{k\pi}{n}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos nh}{\cos\frac{k\pi}{n}\cos\left(h+\frac{k\pi}{n}\right)}\,\frac{\sin h}{\sin nh} = \frac{1}{n\cos^2\frac{k\pi}{n}}$$

d'où, en mettant à part dans (6) le terme correspondant à $k=0$, en réunissant les termes correspondant à des valeurs opposées de k, et en remplaçant z par z/n,

$$(7) \qquad \operatorname{cotg} z = \frac{1}{n\operatorname{tg}\frac{z}{n}} + \sum_{k=1}^{m} \frac{2n\operatorname{tg}\frac{z}{n}}{\cos^2\frac{k\pi}{n}\left(n\operatorname{tg}\frac{z}{n}\right)^2-\left(n\sin\frac{k\pi}{n}\right)^2}$$

valable pour tout nombre complexe z non multiple entier de $\frac{\pi}{2}$.

On peut écrire cette formule sous la forme $\operatorname{cotg} z = \dfrac{1}{n\operatorname{tg}\frac{z}{n}} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k(n,z)$

avec $v_k(n,z)=0$ pour $k>m$ et $v_k(n,z) = \dfrac{2n\operatorname{tg}\frac{z}{n}}{\cos^2\frac{k\pi}{n}\left(n\operatorname{tg}\frac{z}{n}\right)^2-\left(n\sin\frac{k\pi}{n}\right)^2}$

pour $1\leqslant k\leqslant m$. Nous allons voir que pour tout z contenu dans une partie <u>compacte</u> K de $\mathbb{C}$ ne contenant aucun multiple entier de π, et pour tout n impair assez grand, la série de terme général $v_k(n,z)$ est <u>normalement convergente</u>. En effet, lorsque n tend vers $+\infty$ $n\operatorname{tg}\frac{z}{n}$

tend vers z uniformément dans K, donc il existe un nombre $M > 0$ tel que $\left| n \operatorname{tg} \frac{z}{n} \right| \leqslant M$ pour tout entier m assez grand et tout $z \in K$. D'autre part, pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, on a $\frac{\sin x}{x} \geqslant 1 - \frac{x^2}{6} \geqslant \frac{1}{2}$, donc pour $1 \leqslant k \leqslant m$, on a $n \sin \frac{k\pi}{n} \geqslant \frac{k\pi}{2}$; par suite dès que m est assez grand pour tout entier k tel que $\frac{k\pi}{2} \geqslant M$ on a $\left| v_k(n,z) \right| \leqslant \dfrac{2M}{\frac{k^2\pi^2}{4} - M^2}$ ce qui démontre notre assertion. Pour tout k fixe, $v_k(n,z)$ tend (uniformément dans K) vers $\dfrac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Par suite :

THÉORÈME 1.- <u>Pour tout nombre complexe</u> z <u>distinct d'un multiple entier de</u> π, <u>on a</u>

$$\operatorname{cotg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2} \tag{8}$$

<u>la série du second membre étant normalement convergente dans tout ensemble compact</u> $K \subset \mathbb{C}$ <u>ne contenant aucun multiple entier de</u> π (développement eulérien de cotg z).

2. <u>Développement eulérien de</u> sin z.

Pour tout entier <u>impair</u> $n = 2m+1$ et tout z complexe, la formule (2) peut s'écrire

$$\sin nz = (-1)^m 2^{n-1} \prod_{k=-m}^{k=m} \sin\left(z - \frac{k\pi}{n}\right)$$
$$= (-1)^m 2^{n-1} \sin z \prod_{k=1}^{m} \sin\left(z - \frac{k\pi}{n}\right)\sin\left(z + \frac{k\pi}{n}\right)$$

Or, on a $\sin\left(z - \frac{k\pi}{n}\right)\sin\left(z + \frac{k\pi}{n}\right) = \sin^2 z - \sin^2 \frac{k\pi}{n}$, et, d'après (3), $\prod_{k=1}^{m} \sin^2 \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$, d'où, en remplaçant z par z/n

(9) $$\sin z = n \sin \frac{z}{n} \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{n}}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}}\right)$$

On peut écrire cette formule $\sin z = n \sin \frac{z}{n} \prod_{k=1}^{m} (1-w_k(n,z))$, avec $w_k(n,z)=0$ pour $k > m$, et $w_k(n,z) = \dfrac{\sin^2 \frac{z}{n}}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}}$ pour $1 \leq k \leq m$. Nous allons voir que pour tout z contenu dans une partie compacte K de $\mathbb{C}$ et pour tout n impair, la série de terme général $w_k(n,z)$ est <u>normalement convergente</u>. En effet, lorsque n tend vers $+\infty$, $n \sin \frac{z}{n}$ tend uniformément vers z dans K, donc il existe $M > 0$ tel que $\left| n \sin \frac{z}{n} \right| \leq M$ pour tout entier m et tout $z \in K$. Nous avons vu d'ailleurs dans la démonstration du th.1 que pour $1 \leq k \leq m$ on a $n \sin \frac{k\pi}{n} \geqslant \frac{k\pi}{2}$; donc, pour tout entier k tel que $\frac{k\pi}{2} \geqslant M$ on a $\left| w_k(n,z) \right| \leqslant \frac{4M^2}{k^2\pi^2}$, ce qui démontre notre assertion. Comme pour tout k fixe, $w_k(n,z)$ tend (uniformément dans K) vers $\frac{z^2}{k^2\pi^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$, on voit que:

THÉORÈME 2.- <u>Pour tout nombre complexe z, on a</u>

(10) $$\sin z = z . \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

<u>le produit infini du second membre étant absolument et uniformément convergent dans toute partie compacte de</u> $\mathbb{C}$ (développement eulérien de $\sin z$).

3. Application aux nombres de Bernoulli.

A l'aide du développement eulérien de cotg z, et de la formule (1), nous allons montrer maintenant que la fonction $\frac{z}{e^z-1}$ est égale, dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, à la somme d'une série absolument convergente de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; le produit de cette série et de la série $e^z-1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ étant égal à z, il s'ensuit que l'on a $a_n = \frac{1}{n!} b_n$, ce qui déterminera les b_n.

Le th.2 montre que, pour $0 \leqslant x < \pi$, la série de terme général

$\frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2} \geqslant 0$ est convergente. On peut d'autre part écrire pour tout nombre complexe z tel que $|z| < \pi$,

$$\frac{2z}{n^2\pi^2 - z^2} = \frac{2z}{n^2\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{n^{2k}\pi^{2k}}$$

la série du second membre étant absolument convergente. Nous allons en déduire que, <u>la série "double"</u>

$$(11) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2z^{2k-1}}{n^{2k}\pi^{2k}}$$

<u>est absolument convergente dans le disque ouvert</u> $|z| < \pi$ <u>normalement convergente dans tout ensemble compact contenu dans ce disque, et a pour somme</u> $\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z}$. En effet, pour $|z| \leqslant a < \pi$, la valeur absolue terme général de (11) est au plus égal à $\frac{2\,a^{2k-1}}{n^{2k}\pi^{2k}}$, et la somme d'un nombre fini quelconque de termes $\frac{2a^{2k-1}}{n^{2k}\pi^{2k}}$ est inférieure au nombre fini $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,a}{n^2\pi^2 - a^2}$; en sommant d'abord par rapport à k, puis par rapport à n, on voit que la somme de la série (11) est égale à $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,z}{z^2 - n^2\pi^2}$, ce qui démontre notre assertion.

Si maintenant on somme la série (11), d'abord par rapport à n, puis par rapport à k, on a l'identité (pour $|z| < \pi$)

$$(12) \qquad \operatorname{cotg} z - \frac{1}{z} = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_{2k}}{\pi^{2k}} z^{2k-1}$$

où on a posé $S_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$. D'après (1), on a donc, pour $|z| < 2\pi$

$$(13) \qquad \frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} S_{2n}}{2^{2n-1}\pi^{2n}} z^{2n}$$

d'où les formules

$$(14) \qquad b_0 = 1, \quad b_1 = -\frac{1}{2}, \quad b_{2n-1} = 0 \qquad \text{pour } n > 1$$

$$\frac{b_{2n}}{(2n)!} = (-1)^{n-1} \frac{2\,S_{2n}}{(2\pi)^{2n}} \qquad \text{pour } n \geqslant 1$$

Les nombres positifs rationnels $B_n=(-1)^{n-1}b_{2n}$ $(n \geqslant 1)$ sont appelés les <u>nombres de Bernoulli</u> ; ils sont déterminés par la relation de récurrence qui se déduit de la multiplication des deux membres de (13) par la série $e^z-1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ (ou encore de la définition des nombres $b_n=B_n(0)$ et des formules $B_n(X+1)-B_n(X)=nX^{n-1}$ et $B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}X^k$):

(15) $$\sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} b_m = 0 \qquad (n > 1)$$

On obtient ainsi pour les premières valeurs de n

$$B_1=\frac{1}{6}\ , \quad B_2=\frac{1}{30}\ , \quad B_3=\frac{1}{42}\ , \quad B_4=\frac{1}{30}\ , \quad B_5=\frac{5}{66}\ , \quad B_6=\frac{691}{2730}$$

On a évidemment $S_{k+1} \leqslant S_k$, donc pour tout k entier $\geqslant 2$, $S_k \leqslant S_2 = \frac{\pi^2}{6} \leqslant 2$; on tire donc de (14) la majoration suivante pour les b_{2n}

(16) $$\left| b_{2n} \right| \leqslant 4\, \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}$$

De cette inégalité on peut tirer une majoration du polynome de Bernoulli $B_n(x)= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k x^{n-k}$; en particulier, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a

(17) $$\left| B_n(x) \right| \leqslant 4 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k!}{(2\pi)^k} = 4\, \frac{n!}{(2\pi)^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2\pi)^k}{k!} \leqslant 4e^{2\pi}\, \frac{n!}{(2\pi)^n}$$

<u>Exercices</u>.- 1) Démontrer les formules

$$\operatorname{tg} z = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} (2^{2n}-1)\, B_n\, \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$$

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} 2(2^{2n-1}-1)\, B_n\, \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$$

où les séries du second membre sont absolument convergentes, la première pour $|z| < \frac{\pi}{2}$ et la seconde pour $|z| < \pi$ (exprimer $\operatorname{tg} z$ et $\operatorname{cosec} 2z = \frac{1}{\sin 2z}$ comme des combinaisons linéaires de $\operatorname{cotg} z$ et $\operatorname{cotg} 2z$). En déduire que les nombres $\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}B_n$ sont entiers (on utilisera le lemme suivant : si, dans deux séries absolument convergentes $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{z^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{z^n}{n!}$ les coefficients

α_n et β_n sont entiers, dans leur produit écrit sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \frac{Z^n}{n!}$, les γ_n sont entiers). Montrer de même que les nombres $2(2^{2n}-1)B_n$ sont entiers.

2) Démontrer la formule

$$(n-1)B_n(X) = n(X-1)B_{n-1}(X) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k B_{n-k}(X)$$

(dériver la série $Ze^{ZX}/(e^Z-1)$ par rapport à Z). En déduire la formule

$$(2n+1)B_n = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k} B_k B_{n-k}$$

pour les nombres de Bernoulli.

3) Démontrer, pour tout entier $p > 1$, la formule

$$B_n\left(\frac{X}{p}\right) + B_n\left(\frac{X+1}{p}\right) + \dots + B_n\left(\frac{X+p-1}{p}\right) = \frac{1}{p^{n-1}} B_n(X)$$

4) a) Démontrer la relation

$$B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X)$$

(utiliser le fait que $b_{2n-1}=0$ pour $n > 1$, et la relation

$$B_n(1-X) - B_n(-X) = (-1)^{n-1} n X^{n-1}) .$$

b) Montrer qu'on a

$$B_n\left(\frac{1}{2}\right) = b_n\left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)$$

(utiliser l'exerc.3).

c) Montrer que, pour n pair, $B_n(x)$ a deux racines dans l'intervalle $[0,1]$, et que, pour n impair >1 , $B_n(x)$ a une racine simple aux points $0, \frac{1}{2}$ et 1 , et ne s'annule en aucun autre point de $[0,1]$ (utiliser b) et la relation $B'_n = nB_{n-1}$) .

d) Déduire de c) que, pour n pair, le maximum de $|B_n(x)|$ dans l'intervalle $[0,1]$ est égal à $|b_n|$, et que pour n impair, si a_n est le maximum de $|B_n(x)|$ dans $[0,1]$, on a

$$\frac{4}{n+1}\left|b_{n+1}\right|\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{2}\, n \left|b_{n-1}\right|$$

(utiliser le th. des accroissements finis).

5) Si on pose $S_n(x) = \frac{1}{n+1}(B_{n+1}(x)-B_{n+1}(0))$, on a, pour tout entier $a > 0$

$$S_n(a) = 1^n + 2^n + \ldots + a^n \; .$$

a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout entier $a > 0$, on a $2S_{2n+1}(a) \equiv 0 \pmod{a}$ (considérer la somme $k^{2n+1}+(a-k)^{2n+1}$) .

b) Si a et b sont deux entiers >0 quelconques, montrer que

$$S_n(ab) \equiv bS_n(a) + naS_{n-1}(a) \quad S_1(b-1) \quad (\text{mod.}\, a^2)$$

Déduire de là que, si $a_1,a_2,\ldots,a_k$ sont des entiers premiers entre eux deux à deux, le nombre

$$\frac{S_n(a_1a_2\ldots a_k)}{a_1a_2\ldots a_k} - \sum_{i=1}^{k} \frac{S_n(a_i)}{a_i}$$

est entier.

c) Montrer que pour tout entier $n > 0$ et tout couple d'entiers $a,b > 0$, on a

$$S_{2n}(ab) \equiv bS_{2n}(a) \quad (\text{mod.}\, a^2)$$

En déduire que, pour tout exposant r , le nombre

$$\frac{S_{2n}(a^r)}{a^r} - \frac{S_{2n}(a)}{a}$$

est entier.

d) Soient $a_1,a_2,\ldots,a_k$ des nombres premiers distincts, $r_1,r_2,\ldots,r_k$ des entiers >0 quelconques ; déduire de b) et c) que

$$\frac{S_{2n}(a_1^{r_1}\, a_2^{r_2} \ldots a_k^{r_k})}{a_1^{r_1}\, a_2^{r_2} \ldots a_k^{r_k}} - \sum_{i=1}^{k} \frac{S_{2n}(a_i)}{a_i}$$

est entier.

e) Soit a un nombre premier ; montrer que si n est divisible par a-1 , on a $S_n(a) \equiv -1 \pmod{a}$, et que si n n'est pas divisible par a-1 , $S_n(a) \equiv 0 \pmod{a}$ remarquer que $x^{a+k} \equiv x^k \pmod{a}$ pour tout entier x , et utiliser les formules de Newton appliquées au polynome $X^a - X$ dans le corps $\mathbb{Z}/(a)$).

f) Soient x et n deux entiers > 0 quelconques, et soient a_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ les facteurs premiers distincts de x , tels que $a_i - 1$ divise 2n . Montrer que le nombre

$$\frac{S_{2n}(x)}{x} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i}$$

est entier.

g) Déduire de f) que, pour tout $n \geqslant 1$, si p_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ sont les nombres premiers distincts tels que $p_i - 1$ divise 2n, le nombre $B_n + (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i}$ est entier (appliquer le résultat de f) en prenant pour x le produit de tous les nombres premiers $< 2n+1$, en remarquant alors que x^{2n} est divisible par 2n+1 , et raisonnant par récurrence sur n) ("théorème de Clausen-von Staudt).

§ 3. La formule sommatoire d'Euler-Maclaurin.

1. La formule sommatoire d'Euler-Maclaurin.

Dans la formule (17) du § 1, remplaçons x par 0 , et h par x ; compte-tenu des valeurs des nombres $B_m(0)$ (§ 2, formule (14)) , il vient

$$(1) \quad f(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt - \frac{1}{2}(f(x+1)-f(x)) + \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} B_k(f^{(2k-1)}(x+1)-f^{(2k-1)}(x))+R_p(x)$$

avec

$$(2) \quad R_p(x) = \frac{-1}{(2p+1)!} \int_0^1 B_{2p+1}(t)f^{(2p+1)}(x+1-t)dt$$

Dans cette formule, remplaçons successivement x par x+1,x+2,...,x+n , et ajoutons les formules obtenues membre à membre ; il vient

(3) $$f(x)+f(x+1)+\dots+f(x+n) = \int_x^{x+n+1} f(t)dt - \frac{1}{2}(f(x+n+1)-f(x)) + \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} B_k(f^{(2k-1)}(x+n+1)-f^{(2k-1)}(x))+T_p(x,n)$$

avec

(4) $$T_p(x,n) = -\frac{1}{(2p+1)!}\int_0^1 B_{2p+1}(t)\Big(\sum_{k=0}^{n} f^{(2p+1)}(x+k+1-t)\Big)dt$$

La formule (3) est dite <u>formule sommatoire d'Euler-Maclaurin</u> ; elle est applicable à toute fonction ayant une dérivée (2p+1)-ème continue dans un intervalle $[x_0,+\infty[$, pourvu que $x \geqslant x_0$. Le reste (4) de cette formule se majore aisément à l'aide de la majoration de $|B_{2p+1}(t)|$ dans l'intervalle $[0,1]$ obtenue au § 2 (formule (17)) qui donne

(5) $$|T_p(x,n)| \leqslant \frac{4\,e^{2\pi}}{(2\pi)^{2p+1}} \int_x^{x+n+1} |f^{(2p+1)}(u)|\,du \quad .$$

<u>Remarque</u>.- On vérifie immédiatement que le raisonnement qui conduit à la formule d'Euler-Maclaurin est applicable sans modification à toute fonction f ayant une dérivée (2p+1)-ème continue dans un intervalle $[x_0,+\infty[$, et prenant ses valeurs dans un <u>espace normé complet</u> quelconque sur $\mathbb{R}$.

2. <u>Application aux développements asymptotiques</u>.

La formule d'Euler-Maclaurin permet de donner une solution plus complète (dans les cas les plus importants) au problème traité au chap.V, § 4,n°2, consistant à obtenir un développement asymptotique de la somme partielle $s_n = \sum_{m=0}^{n} g(m)$ (resp. du reste $r_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} g(m)$) , où g est une fonction numérique >0 et monotone définie dans un intervalle $[x_0,+\infty[$. Nous allons nous borner au cas où g est une <u>fonction</u> (H) (chap.V, Appendice,n°4), <u>d'ordre</u> 0 <u>par rapport à</u> e^x ; autrement dit, on a la relation $g' \prec\!\prec g$; de cette relation, on déduit $g^{(k+1)} \prec\!\prec g^{(k)}$ pour tout entier $k>0$ tel qu'aucune des dérivées $g^{(h)}$ d'ordre $h \leqslant k$ ne soit équivalente à une constante (chap.V, §3, prop.7) .

Soit p un entier tel qu'aucune des dérivées $g^{(h)}$ d'ordre $h \leqslant 2p$ ne soit équivalente à une constante. Supposons d'abord que la série de terme général $g(n)$ ait une somme infinie, et distinguons plusieurs cas :

1° $|g^{(2p-1)}(n)|$ tend vers $+\infty$ avec n ; il en est de même en vertu de l'hypothèse, de $|g^{(2k-1)}(n)|$ pour $1 \leqslant k < p$; en outre, comme $g^{(2p+1)}$ est monotone au voisinage de $+\infty$, la formule (5) donne $T_p(0,n) = \underline{O}(g^{(2p)}(n+1)) = \underline{o}(g^{(2p-1)}(n+1))$; la formule d'Euler-Maclaurin, appliquée pour $x=0$ donne

$$s_n = \sum_{m=0}^{n} g(m) = \int_0^{n+1} g(t)dt - \frac{1}{2}g(n+1) + \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} B_k g^{(2k-1)}(n+1) + \underline{o}(g^{(2p-1)}(n+1))$$

chacun des termes de cette somme étant négligeable devant le précédent ; en développant chacun d'eux par rapport à une échelle de comparaison $\mathcal{E}$, on aura donc un développement asymptotique de s_n.

2° Supposons maintenant que pour un indice q tel que $1 \leqslant q < p$, $|g^{(2q-1)}(n)|$ tende vers $+\infty$ avec n, mais que $g^{(2k-1)}(n)$ tende vers 0 pour $k > q$. Comme $g^{(2p+1)}$ est monotone au voisinage de $+\infty$ l'intégrale $\int_0^{\infty} |g^{(2p+1)}(u)|\, du$ est convergente, et on peut alors écrire

$$s_n = \sum_{m=0}^{n} g(m) = \int_0^{n+1} g(t)dt - \frac{1}{2}g(n+1) + \sum_{k=1}^{q} \frac{(1)^{k-1}}{(2k)!} B_k g^{(2k-1)}(n+1) + C + \sum_{k=q+1}^{p} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} B_k g^{(2k-1)}(n+1) + \underline{o}(g^{(2p-1)}(n+1))$$

où C est une constante : on a en effet

$$\int_{n+1}^{\infty} |g^{(2p+1)}(u)|\, du = \underline{O}(g^{(2p)}(n+1)) = \underline{o}(g^{(2p-1)}(n+1)) .$$

La même formule est valable lorsque $g(n)$ elle-même tend vers 0.

Enfin, lorsque la série de terme général $g(n)$ est convergente, on a, pour le reste $r_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} g(m)$, le développement

$$r_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} g(m) = \int_{n+1}^{\infty} g(t)dt + \frac{1}{2}g(n+1) - \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} B_k g^{(2k-1)}(n+1)$$
$$+ \underline{o}(g^{(2p-1)}(n+1)) .$$

<u>Exercices</u>.- 1) Montrer que, si $f^{(2p+1)}(t)$ est monotone dans l'intervalle $[x, x+n+1]$, le reste $T_p(x,n)$ de la formule d'Euler-Maclaurin (formule (4)) a le même signe que le terme
$$\frac{(-1)^p}{(2p+2)!} B_{p+1}(f^{(2p+1)}(x+n+1) - f^{(2p+1)}(x))$$
et a une valeur absolue au plus égale à celle de ce terme.

Si on suppose seulement que $f^{(2p+2)}$ est continue, montrer qu'on a
$$\left|T_p(x,n)\right| \leqslant \frac{1}{(2p+2)!} B_{p+1}\left(\left|f^{(2p+1)}(x+n+1) - f^{(2p+1)}(x)\right| + \right.$$
$$\left. + \int_x^{x+n+1} \left|f^{(2p+2)}(u)\right| du \right) .$$

2) Démontrer la formule
$$\frac{1}{2} f(x) - f(x+1) + f(x+2) - \dots - f(x+2n-1) + \frac{1}{2} f(x+2n) =$$
$$= \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} (2^{2k}-1) B_k (f^{(2k-1)}(x+2n) - f^{(2k-1)}(x)) + U_p(x,n)$$
avec
$$\left| U_p(x,n) \right| \leqslant \frac{4e^{2\pi}(2^{2p+1}+1)}{(2\pi)^{2p+1}} \int_x^{x+2n} \left| f^{(2p+1)}(u) \right| du .$$

(Appliquer la formule d'Euler-Maclaurin à $g(x) = f(2x)$) .

CHAPITRE VII
LA FONCTION GAMMA

§ 1. La fonction gamma dans le domaine réel.

1. Définition de la fonction gamma.

Nous avons défini (Ens., chap. III) la fonction $n!$ pour tout entier $n \geqslant 0$, comme égale au produit $\prod_{k<n}(n-k)$; on a donc $0!=1$, $(n+1)!=(n+1).n!$ pour $n \geqslant 0$. Nous poserons $\Gamma(n)=(n-1)!$ pour tout entier $n \geqslant 1$; nous nous proposons de définir, dans l'ensemble des nombres réels $x > 0$, une fonction continue $\Gamma(x)$, prolongeant la fonction Γ définie sur l'ensemble des entiers $\geqslant 1$.

Il est clair qu'il existe une infinité de telles fonctions ; comme on a la relation $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$, nous nous bornerons à considérer, parmi les fonctions continues qui prolongent Γ , celles qui pour tout $x > 0$ satisfont à l'équation

$$(1) \qquad f(x+1) = xf(x) \quad .$$

Pour qu'une solution de cette équation soit un prolongement de $\Gamma(n)$, il faut et il suffit qu'on ait en outre $f(1)=1$.

Si f satisfait à (1), pour tout n entier > 1, on a, par récurrence sur n

$$(2) \qquad f(x+n) = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)f(x)$$

pour tout $x > 0$. Cette relation montre en particulier que les valeurs de f dans un intervalle $]n,n+1]$ (n entier $\geqslant 1$) sont déterminées par ses valeurs dans l'intervalle $]0,1]$. Inversement, soit φ une fonction continue dans $]0,1]$, satisfaisant aux seules conditions $\varphi(1)=1$, $\lim_{x\to 0} x\varphi(x)=1$; définissons f par la relation

$$f(x)=(x-1)(x-2)\ldots(x-n)\varphi(x-n)$$

dans l'intervalle $]n,n+1]$, pour tout entier $n \geqslant 1$; il est clair que f est continue dans $]0,+\infty[$, satisfait à l'équation (1) et prolonge $\Gamma(n)$.

Si f est une solution continue de (1) et prend des valeurs >0 dans $]0,1]$ elle prend des valeurs >0 dans $]0,+\infty[$ d'après (2) ; la fonction $g(x)=\log f(x)$ est donc définie et continue dans $]0,+\infty[$ et satisfait dans cet intervalle à l'équation

(3) $$g(x+1)-g(x) = \log x$$

Si g_1 est une seconde solution continue de (3) dans $]0,+\infty[$, et si $h=g_1-g$, on a $h(x+1)-h(x)=0$ pour tout $x>0$; autrement dit, h est une fonction continue <u>périodique</u> de période 1, définie dans $]0,+\infty[$; inversement, pour toute fonction h de cette nature, $g+h$ est une solution continue de (3).

PROPOSITION 1.- <u>Il existe une fonction</u> convexe <u>et une seule</u> g , <u>définie dans</u> $]0,+\infty[$, <u>satisfaisant à l'équation</u> (3) <u>et prenant la valeur</u> 0 <u>pour</u> $x=1$.

Montrons d'abord que s'il existe une fonction g satisfaisant aux conditions de l'énoncé, elle est <u>bien déterminée</u> dans l'intervalle $]0,1]$, et par suite dans tout l'intervalle $]0,+\infty[$. En effet, pour tout entier $n>1$, la pente de la droite joignant le point $(n,g(n))$ au point $(x,g(x))$ est fonction croissante de x , puisque g est convexe (chap. I, § 4, prop. 5) ; on doit donc avoir, pour $0<x\leqslant 1$

$$\frac{g(n-1)-g(n)}{(n-1)-n} \leqslant \frac{g(n+x)-g(n)}{(n+x)-n} \leqslant \frac{g(n+1)-g(n)}{(n+1)-n}$$

c'est-à-dire, d'après (3)

(4) $$x\log(n-1) \leqslant g(x+n)-g(n) \leqslant x \log n$$

Or, d'après (3), on a

$$g(x+n)-g(n)=g(x)+\log x + \sum_{k=1}^{n-1} (\log(x+k)-\log k)$$

D'autre part, on peut écrire $\log n = \sum_{k=2}^{n} \log \frac{k}{k-1}$,

donc l'inégalité (4) s'écrit

$$x\sum_{k=2}^{n-1} \log\frac{k}{k-1} \leqslant g(x)+\log x + \sum_{k=2}^{n} (\log(x+k-1)-\log(k-1)) \leqslant x\sum_{k=2}^{n} \log\frac{k}{k-1}$$

Posons, pour tout $n \geqslant 2$

(5) $$u_n(x) = x \log \frac{n}{n-1} - \log(x+n-1)+\log(n-1)$$

et $$g_n(x) = -\log x + \sum_{k=2}^{n} u_k(x)$$

Pour $0 < x \leqslant 1$, on a donc

(6) $$g_n(x)-x \log \frac{n}{n-1} \leqslant g(x) \leqslant g_n(x)$$

Comme $\log \frac{n}{n-1}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on déduit de (6) que si la solution g existe, elle est nécessairement égale, dans $]0,1]$, à la <u>limite</u> de $g_n(x)$.

Or, on tire aussitôt de la relation (5) que, pour tout x fixe et > 0, on a

$$u_n(x) = -x \log(1-\frac{1}{n})-\log(1+\frac{x-1}{n})+\log(1-\frac{1}{n}) \sim \frac{x-1}{n^2}$$

lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui prouve que la série de terme général $u_n(x)$ converge pour tout $x > 0$. Chacune des fonctions $u_n(x)$ étant convexe dans $]0,+\infty[$, ainsi que $-\log x$, la fonction $g(x)=-\log x + \sum_{n=2}^{\infty} u_n(x)$ est convexe dans cet intervalle (chap.I, § 4, prop.2 et 4) ; enfin, on a $u_n(1)=0$, d'où $g(1)=0$, et

$$u_n(x+1)=u_{n+1}(x)+x(\log \frac{n}{n-1} - \log \frac{n+1}{n})$$

d'où $g(x+1)=-\log(x+1)+ x \log 2 + \sum_{n=3}^{\infty} u_n(x) = \log x + g(x)$;

autrement dit, g satisfait à l'équation (3).

C.Q.F.D.

DÉFINITION 1.- <u>On désigne par</u> $\Gamma(x)$ <u>la fonction</u> >0 <u>définie dans l'intervalle</u> $]0,+\infty[$, <u>satisfaisant à l'équation</u> (1), <u>telle que</u> $\Gamma(1)=1$ <u>et que</u> $\log \Gamma(x)$ <u>soit convexe dans</u> $]0,+\infty[$.

<u>2. Propriétés de la fonction gamma</u>.

PROPOSITION 2.- <u>Pour tout</u> $x > 0$, <u>on a</u>

(7) $$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^x.n!}{x(x+1)...(x+n)}$$

<u>(formule de Gauss), et</u>

$$(8) \qquad \Gamma(x) = e^{-\gamma x}\,\frac{1}{x}\,\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}$$

où γ désigne la constante d'Euler, et le produit infini du second membre de (8) est absolument et uniformément convergent dans tout intervalle compact de $\mathbb{R}$ ne contenant aucun entier <0 (formule de Weierstrass).

La fonction $\Gamma(x)$ est indéfiniment dérivable dans $]0,+\infty[$, et on a

$$(9) \qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right)$$

et

$$(10) \qquad D^k(\log \Gamma(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k-1)!}{(x+n)^k} \qquad \text{pour } k \geqslant 2$$

les séries qui figurent aux seconds membres de (9) et (10) étant absolument et uniformément convergentes dans tout intervalle compact ne contenant aucun entier $\leqslant 0$.

En effet, la démonstration de la prop.1 montre que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}$$

d'où la formule de Gauss, puisque $\frac{n}{x+n}$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. On peut aussi écrire $\log \frac{n}{n-1} = \frac{1}{n-1} + (\log \frac{n}{n-1} - \frac{1}{n-1})$, donc (avec les notations de la prop.1)

$$\exp(u_n(x)) = e^{x\left(\log \frac{n}{n-1} - \frac{1}{n-1}\right)} \frac{e^{\frac{x}{n-1}}}{1+\frac{x}{n-1}}$$

et la série de terme général $\log \frac{n}{n-1} - \frac{1}{n-1}$ est absolument convergente et a pour somme $-\gamma$, où γ désigne la constante d'Euler (chap.IV, § 4, n°2), d'où la formule de Weierstrass.

Pour $|x| \leqslant a$, on a $\left|\frac{1}{(x+n)^k}\right| \leqslant \frac{1}{(n-a)^k}$ dès que $n > a$, donc la série du second membre de (10) est absolument et uniformément convergente dans tout intervalle compact de $\mathbb{R}$ ne contenant aucun entier $\leqslant 0$

quel que soit l'entier $k \geqslant 2$; le même raisonnement s'applique à la série du second membre de (9), puisque $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right| \leqslant \frac{a}{n(n-a)}$ pour $|x| \leqslant a$ et $n > a$. Comme ces séries s'obtiennent en dérivant terme à terme la série

$$\log \Gamma(x) = -\gamma - \log x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} - \log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$$

qui converge pour tout $x > 0$, la série de terme général $\frac{x}{n} - \log(1+\frac{x}{n})$ est absolument et uniformément convergente dans tout intervalle compact contenu dans $\left]0,+\infty\right[$, et on a bien les relations (9) et (10) pour tout $x > 0$ (chap.II, §1,th.1). D'ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x}{n} - \log(1+\frac{x}{n})$ est défini dès que n est assez grand, donc le th.1 du chap.II §1 montre encore que le produit infini du second membre de (10) est absolument et uniformément convergent dans tout intervalle compact ne contenant aucun entier $\leqslant 0$.

La fonction $\Gamma(x)$, définie pour $x > 0$, peut se prolonger à tout l'ensemble des points x distincts des entiers $\leqslant 0$ de façon à satisfaire à l'équation (1) dans cet ensemble : il suffit, pour $-(n+1) < x < n$, de poser $\Gamma(x) = \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)} \Gamma(x+n+1)$. D'après la prop.2 , les formules (7), (8),(9) et (10) sont encore valables dans cet ensemble. La formule (8) montre que $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ lorsque x tend vers 0, d'où, d'après (1),

$$\Gamma(x) \sim \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} \tag{11}$$

lorsque x tend vers -n (n entier $\geqslant 0$). La fonction $\frac{1}{\Gamma(x)}$ peut donc être prolongée par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier, en lui donnant la valeur 0 aux entiers $\leqslant 0$; on a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n \to \infty} \frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{n^x \cdot n!} \tag{12}$$

et

$$(13) \qquad \frac{1}{\Gamma(x)} = e^{\gamma x} x . \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$$

et on montre comme dans la prop.2 que le produit infini du second membre de (13) est absolument et uniformément convergent dans tout intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Comme $\Gamma(x) > 0$ pour $x > 0$, l'équation (1) montre que l'on a $\Gamma(x) < 0$ pour $-(2n-1) < x < -(2n-2)$ et $\Gamma(x) > 0$ pour $-2n < x < -(2n-1)$ (n entier $\geqslant 1$) ; $\Gamma(x)$ a pour limite à droite $+\infty$ aux points $-2n$, $-\infty$ aux points $-(2n+1)$, pour limite à gauche $-\infty$ aux points $-2n$, $+\infty$ aux points $-(2n+1)$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$). La formule (10) montre que, pour $k=2$, le second membre est toujours $\geqslant 0$ lorsqu'il est défini, donc $\Gamma''(x)\,\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2 \geqslant 0$, et par suite $\Gamma''(x)$ a le signe de $\Gamma(x)$; Γ est donc <u>convexe</u> pour $x > 0$ et pour $-(2n+2) < x < -(2n+1)$, <u>concave</u> pour $-(2n+1) < x < -2n$ ($n \in \mathbb{N}$) ; on en déduit que, dans les intervalles où Γ est convexe, $\Gamma'(x)$ croît de $-\infty$ à $+\infty$, et, dans les intervalles où Γ est concave, $\Gamma'(x)$ décroît de $+\infty$ à $-\infty$, en remarquant que d'après (10) appliquée pour $k=2$, $\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ est une fonction <u>croissante</u> de x . D'où la courbe représentative de Γ (fig.1).

3. <u>Les intégrales eulériennes</u>.

Nous dirons pour abréger qu'une fonction f définie dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et > 0 dans cet intervalle, est <u>logarithmiquement convexe</u> dans I si $\log f$ est convexe dans I . La définition de $\Gamma(x)$ montre donc que cette fonction est logarithmiquement convexe dans $]0,+\infty[$.

Il est clair que le <u>produit</u> de deux fonctions logarithmiquement convexes dans I est logarithmiquement convexe dans I . En outre :

Lemme 1.- Soient f et g deux fonctions > 0 et deux fois dérivables dans un intervalle ouvert I. Si f et g sont logarithmiquement convexe dans I, $f+g$ est logarithmiquement convexe dans I.

En effet, la relation $D^2(\log f(x)) \geqslant 0$ s'écrit $f(x)f''(x)-(f'(x))^2 \geqslant 0$. Nous sommes ramenés à montrer que les relations $a \geqslant 0$, $a' \geqslant 0$, $ac-b^2 \geqslant 0$, $a'c'-b'^2 \geqslant 0$ entraînent $(a+a')(c+c')-(b+b')^2 \geqslant 0$; or, les relations $a \geqslant 0$, $ac-b^2 \geqslant 0$ équivalent au fait que la forme quadratique $ax^2+2bxy+cy^2$ est $\geqslant 0$ dans $\mathbf{R}$, et il est clair que si $ax^2+2bxy+cy^2 \geqslant 0$ et $a'x^2+2b'xy+c'y^2 \geqslant 0$ dans $\mathbf{R}$, on a aussi $(a+a')x^2+2(b+b')xy+(c+c')y^2 \geqslant 0$ dans $\mathbf{R}$.

Lemme 2.- Soit f une fonction numérique finie et > 0, définie et continue dans le produit $I \times J$ de deux intervalles ouverts dans $\mathbf{R}$ et telle que, pour tout $t \in J$, la fonction $x \to f(x,t)$ soit logarithmiquement convexe et deux fois dérivable dans I. Dans ces conditions, si pour tout $x \in I$, l'intégrale $g(x) = \int_J f(x,t)dt$ est convergente, g est logarithmiquement convexe dans I.

Montrons d'abord que, pour tout intervalle compact $K \subset J$, la fonction $g_K(x) = \int_K f(x,t)dt$ est logarithmiquement convexe. En effet, si $K = [a,b]$, la suite des fonctions

$$g_n(x) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)$$

converge simplement vers $g_K(x)$ dans I (chap.II, §1, prop.5), donc $\log g_n$ converge simplement vers $\log g_K$; d'après le lemme 1, $\log g_n$ est convexe dans I, donc (chap.I, §4, prop.4) il en est de même de $\log g_K$.

D'autre part, g est limite simple des g_K suivant l'ordonné filtrant des intervalles compacts contenus dans I (chap.II, §2, n°1), donc $\log g$ est limite simple des $\log g_K$; ces dernières fonctions étant convexes dans I, il en est de même de $\log g$ (chap.I, §4, prop.4).

On montre facilement que les lemmes 1 et 2 sont encore valables lorsque l'on n'y suppose plus les fonctions deux fois dérivables (exerc. 4).

Lemme 3.- Soit φ une fonction continue et >0 dans un intervalle ouvert J contenu dans $[0,+\infty[$. Si I est un intervalle ouvert tel que l'intégrale $g(x)=\int_J t^{x-1}\varphi(t)dt$ soit convergente pour tout $x\in I$, g est logarithmiquement convexe dans I .

En effet, $\log t^{x-1}=(x-1)\log t$ est une fonction de x qui est convexe et deux fois dérivable pour tout $t>0$, donc le lemme 2 est applicable

PROPOSITION 3.- Pour tout $x>0$, on a

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \tag{14}$$

(seconde intégrale eulérienne).

En effet, la fonction $g(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ est définie pour tout $x>0$ (chap.IV, § 3, n°2) ; le lemme 3 montre donc qu'elle est logarithmiquement convexe dans $]0,+\infty[$. D'autre part, en intégrant par parties, on a

$$g(x+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^x dt=-e^{-t}t^x\Big|_0^\infty+x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt=xg(x) .$$

Autrement dit, g est une solution de l'équation (1) ; enfin, $g(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=1$; la proposition résulte ~~dans~~ donc de la prop.1 .

Par le changement de variable $e^{-t}=u$, on déduit de (14) la formule

$$\Gamma(x)=\int_0^1\left(\log\frac{1}{t}\right)^{x-1}dt \tag{15}$$

De même, par lechangement de variable $u=t^x$, il vient

$$x\,\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t^{1/x}}dt$$

ou encore, en tenant compte de (1)

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{x}\right)=\int_0^\infty e^{-t^x}dt \tag{16}$$

et en particulier, pour $x=2$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-t^2}dt . \tag{17}$$

PROPOSITION 4.- <u>Pour</u> $x > 0$ <u>et</u> $y > 0$, <u>l'intégrale</u> $\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ (<u>première intégrale eulérienne</u>) <u>a pour valeur</u>

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{18}$$

En effet, l'intégrale est convergente pour $x>0$ et $y>0$ (chap.IV, §3,n°2). D'après le lemme 3, la fonction $x \to \mathrm{B}(x,y)$ est <u>logarithmiquement convexe</u> pour $x > 0$. D'autre part, on a

$$\mathrm{B}(x+1,y) = \int_0^1 (1-t)^{x+y-1} \left(\frac{t}{1-t}\right)^x dt$$

d'où, en intégrant par parties

$$\mathrm{B}(x+1,y) = -\frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\left(\frac{t}{1-t}\right)^x\Bigg|_0^1 + \frac{x}{x+y}\int_0^1 (1-t)^{x+y}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1}\frac{dt}{(1-t)^2} = \frac{x}{x+y}\mathrm{B}(x,y)$$

Il en résulte que $f(x) = \mathrm{B}(x,y)\Gamma(x+y)$ satisfait à l'identité (1). D'autre part cette fonction est logarithmiquement convexe, comme produit de deux fonctions logarithmiquement convexes. Enfin, on a $f(1) = \mathrm{B}(1,y)\ \Gamma(y+1)$, et $\mathrm{B}(1,y) = \int_0^1 (1-t)^{y-1}dt = \frac{1}{y}$, d'où $f(1) = \frac{1}{y}\ \Gamma(y+1) = \Gamma(y)$. La fonction $\frac{f(x)}{\Gamma(y)}$ est donc égale à $\Gamma(x)$ d'après la prop.1 , ce qui démontre (18).

Par le changement de variable $t = \frac{u}{u+1}$, la formule (18) devient

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\, dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{19}$$

et par le changement de variable $t=\sin^2\varphi$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\varphi\ \cos^{2y-1}\varphi\ d\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\ . \tag{20}$$

Si, dans cette dernière formule, on fait $x=y=\frac{1}{2}$, il vient

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{21}$$

d'où, en vertu de (17)

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\ . \tag{22}$$

D'après la relation (1), on a, pour $\Gamma(x)$ au voisinage de 0, le développement asymptotique

(23) $$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1) = \frac{1}{x} + \Gamma'(1) + \frac{1}{2!}\Gamma''(1)x + \ldots + \frac{1}{n!}\Gamma^{(n)}(1)x^{n-1} + \underline{O}(x^n)$$

De même, pour tout y fixe et >0, on peut écrire

$$\frac{1}{\Gamma(x+y)} = \frac{1}{\Gamma(y)} + D\left(\frac{1}{\Gamma(y)}\right)x + \frac{1}{2!}D^2\left(\frac{1}{\Gamma(y)}\right)x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}D^n\left(\frac{1}{\Gamma(y)}\right)x^n + \underline{O}_1(x^{n+1})$$

et la formule (18) donne donc, pour y fixe, le développement asymptotique au voisinage de $x=0$

(24) $$B(x,y) = \frac{1}{x} + \left(\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)}\right) + \left(\frac{\Gamma''(1)}{2} - \Gamma'(1)\frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} + \frac{2\Gamma'^2(y) - \Gamma(y)\Gamma''(y)}{2\Gamma^2(y)}\right)x + \underline{O}(x^2)$$

D'autre part, pour $x>0$ et $y>0$, on a

(25) $$B(x,y) = \int_0^1 \left(t^{x-1} + t^x\,\frac{(1-t)^{y-1}-1}{t}\right)dt = \frac{1}{x} + \int_0^1 t^x\,\frac{(1-t)^{y-1}-1}{t}\,dt$$

La fonction $\varphi(t) = \frac{(1-t)^{y-1}-1}{t}$ est continue dans l'intervalle compact $[0,1]$; comme

$$t^x = e^{x\log t} = 1 + x\log t + \frac{x^2}{2!}(\log t)^2 + \ldots + \frac{x^n}{n!}(\log t)^n + r_n(x,t)$$

avec $|r_n(x,t)| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}|\log t|^{n+1}$ (puisque $\log t \leqslant 0$ et $x>0$),

la formule (25) donne pour $B(x,y)$ le développement asymptotique au voisinage de $x=0$

$$B(x,y) = \frac{1}{x} + \int_0^1 \varphi(t)dt + x\int_0^1 \varphi(t)\log t\,dt + \ldots + \frac{x^n}{n!}\int_0^1 \varphi(t)(\log t)^n\,dt + \underline{O}_2(x^{n+1})$$

Pour $n=1$, l'identification de ce développement à (24) donne en particulier

$$\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} = \int_0^1 \frac{(1-t)^{y-1}-1}{t}\,dt$$

D'ailleurs la formule (9) donne $\Gamma'(1) = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma$, donc (<u>intégrale de Gauss</u>)

(26) $$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \gamma = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^{x-1}}{t}\,dt \quad .$$

Exercices.- 1) Soit $g(x)$ une fonction réglée et >0 dans $]0,+\infty[$.

a) Soient u et v deux fonctions croissantes dans $]0,+\infty[$ telles que $u(x+1)-u(x)=v(x+1)-v(x)=g(x)$ pour tout $x>0$. Montrer que si $w=u-v$, on a $\sup_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1} |w(y)-w(x)| \leqslant \inf_{x>0} g(x)$ (remarquer que pour $a\leqslant x\leqslant y\leqslant a+1$, on a $u(y)-u(x)\leqslant g(a)$). En particulier, si $\inf_{x>0} g(x)=0$, il existe au plus une solution croissante de l'équation $u(x+1)-u(x) = g(x)$ prenant une valeur donnée en un point donné.

b) On suppose que g est décroissante dans $]0,+\infty[$. Montrer que la série $\varphi(x)=-g(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(g(n)-g(x+n))$ est absolument et uniformément convergente dans tout intervalle compact contenu dans $]0,+\infty[$; si $\lambda = \lim_{x\to+\infty} g(x)$, la fonction $u(x)=\varphi(x)+\lambda x$ est une solution croissante de l'équation $u(x+1)-u(x)=g(x)$. Montrer que pour toute solution croissante v de cette équation, on a $v(y)-v(x)\geqslant\varphi(y)-\varphi(x)$ pour $0<x<y$. Quelle est l'enveloppe supérieure (resp. inférieure) de l'ensemble des solutions croissantes de l'équation $u(x+1)-u(x)=g(x)$ prenant une valeur donnée en un point donné ? Montrer que, pour que cet ensemble se réduise à un seul élément, il faut et il suffit que $\lambda=0$.

c) Montrer que si $g(x)$ est croissante dans $]0,+\infty[$ et non identiquement nulle, il existe une infinité de solutions croissantes de l'équation $u(x+1)-u(x)=g(x)$ qui prennent une valeur donnée en un point donné.

d) Soit $\psi(x)$ la fonction définie dans $]0,+\infty[$ par les conditions $\psi(x)=0$ pour $0\leqslant x<1$, $\psi(x)=1$ pour $1\leqslant x<2$, $\psi(x)=n$ pour $n-1+\frac{1}{n-1}\leqslant x<n+\frac{1}{n}$ $(n\geqslant 2)$; soit $g(x)=\psi(x+1)-\psi(x)$. Montrer que ψ est la seule solution croissante de l'équation $u(x+1)-u(x)=g(x)$ telle que $u(1)=1$.

2) Soit g une fonction continue et croissante dans $]0,+\infty[$.

a) Montrer que si $\liminf\limits_{x\to+\infty} g(x)/x = 0$, il existe au plus une solution convexe de l'équation $u(x+1)-u(x)=g(x)$ prenant une valeur donnée en un point donné (remarquer que pour tout $h > 0$, la fonction $v(x)=u(x+h)-u(x)$ est une fonction croissante satisfaisant à l'équation $v(x+1)-v(x)=g(x+h)-g(x)$, et appliquer l'exerc.1 a)).

b) Montrer que si g est concave dans $]0,+\infty[$, il existe une solution convexe de l'équation $u(x+1)-u(x)=g(x)$; pour qu'il existe une seule solution convexe de cette équation prenant une valeur donnée en un point donné, il faut et il suffit que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)/x = 0$ (cf. exerc. 1 b)).

3) Montrer que la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\Gamma(\frac{x}{2})}{\Gamma(\frac{x+1}{2})}$ est la seule solution convexe de l'équation $u(x+1) = \dfrac{1}{xu(x)}$ (remarquer que cette équation entraîne $u(x+2) = \dfrac{x}{x+1}u(x)$, et appliquer (l'exerc. 1a)).

4) Généraliser les lemmes 1 et 2 aux fonctions logarithmiquement convexes quelconques (cf. chap.I, §4,exerc.2). Montrer que toute fonction logarithmiquement convexe est convexe.

5) Soit $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$; pour tout entier $q > 1$ et tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant q-1$, démontrer les formules

$$\sum_{p=1}^{q} \psi\left(\frac{p}{q}\right) \exp\left(\frac{2pk\pi i}{q}\right) = -q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(\frac{2nk\pi i}{q}\right) = q \log\left(1-\exp\left(\frac{2k\pi i}{q}\right)\right)$$

(utiliser la formule (9)).

§ 2. La fonction gamma dans le domaine complexe.

1. Prolongement à $\mathbb{C}$ de la fonction gamma.

Reprenons la formule de Weierstrass qui donne l'expression de $1/\Gamma(x)$ pour tout x réel

$$(1) \qquad \frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$$

et considérons le produit infini de terme général $(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}$, pour z complexe quelconque. On peut écrire $e^{-\frac{z}{n}} = 1-\frac{z}{n}+h(z)$, avec $|h(z)| \leqslant \frac{|z|^2}{2n^2} e^{|\frac{z}{n}|}$ (chap.III, § 2,formule (8)), d'où

$$(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}} = 1+v_n(z)$$

avec $|v_n(z)| \leqslant \frac{|z|^2}{n^2}(1+\frac{e^{|z|}}{2}(1+|z|))$; le produit infini considéré est donc <u>absolument et uniformément convergent</u> dans toute partie compacte de $\mathbb{C}$; en outre, sa valeur n'est nulle que pour les points $z=-n$ (<u>Top.gén</u>.,chap.IX,App.,cor. du th.2). En raison de la formule (1) on pose, pour tout z complexe

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})\, e^{-\frac{z}{n}} \tag{2}$$

La fonction $\Gamma(z)$ est ainsi définie pour tout point $z \in \mathbb{C}$ distinct des points $-n$ ($n \in N$) ; elle est continue dans cet ensemble, et au voisinage de $-n$, on a $(z+n)\Gamma(z) \sim \frac{(-1)^n}{n!}$ (§ 1,formule (11)) puisque $\frac{1}{\Gamma(z)}$ est continue dans $\mathbb{C}$ tout entier. La formule (2) montre que l'ona $\Gamma(\bar{z}) = \overline{\Gamma(z)}$ pour tout z distinct d'un entier négatif.

Le raisonnement qui permet de passer de la formule de Gauss (§ 1, formule (7)) à la formule de Weierstrass s'applique aussi bien pour z complexe, et montre que, pour tout $z \neq -n$ ($n \in N$), on a

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z . n!}{z(z+1)..(z+n)} \tag{3}$$

en convenant de poser $n^z = e^{z \log n}$. Comme on a

$$\frac{n^{z+1}.n!}{(z+1)(z+2)...(z+n+1)} = z.\frac{n}{n+1+z}.\frac{n^z.n!}{z(z+1)...(z+n)}$$

on a encore, en passant à la limite, l'équation fonctionnelle fondamentale

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) \tag{4}$$

pour tout $z \neq -n$ ($n \in N$).

Soit p un entier > 0 quelconque, et K_p le disque ouvert $|z| < p$; pour tout $z \in K_p$ et tout entier $n > p$, $1+\frac{z}{n}$ n'est pas un nombre réel négatif, donc $\log(1+\frac{z}{n})$ est défini, et il résulte de ce qui précède que la série de terme général $\log(1+\frac{z}{n})-\frac{z}{n}$ $(n > p)$ est <u>normalement convergente</u> dans K_p ; il en est de même des séries obtenues en dérivant un nombre quelconque de fois le terme général, puisqu'on a

$\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{z+n}\right| \leq \frac{p}{n(n-p)}$ et $\left|\frac{1}{(z+n)^k}\right| \leq \frac{1}{(n-p)^k}$ $(k > 1)$ pour $z \in K_p$ et $n > p$. On voit donc (cf. chap. II, § 3, remarque 2 suivant la prop. 3) que $\Gamma(z)$ est <u>indéfiniment dérivable</u> en tous les points $z \in \mathbb{C}$ distincts des points $-n$, et on a en ces points

$$(5) \qquad \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{z+n}\right)$$

$$(6) \qquad D^{k-1}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k-1)!}{(z+n)^k} \qquad \text{pour } k \geq 2,$$

les séries des seconds membres de (5) et (6) étant <u>normalement convergentes</u> dans tout ensemble compact contenu dans et ne contenant aucun entier ≤ 0. On peut écrire en outre

$$(7) \qquad \log\Gamma(z) \equiv -\gamma z - \log z + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n}-\log(1+\frac{z}{n})\right) \qquad (\text{mod. } 2\pi i)$$

en convenant que lorsqu'un logarithme, dans cette formule, porte sur un nombre réel négatif, il a l'une ou l'autre des deux valeurs limites (différant de $2\pi i$) de $\log z$ en ce point ; la série du second membre de (7) est alors normalement convergente dans tout ensemble compact contenu dans $\mathbb{C}$ et ne contenant aucun entier ≤ 0.

2. <u>La relation des compléments et la formule de multiplication de Legendre-Gauss.</u>

On tire aussitôt de la formule (2) que, pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = -z^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

Or, le développement eulérien de sin z (chap.VI, § 2, th.2) montre que $z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2}) = \frac{1}{\pi}\sin \pi z$; tenant compte de l'équation fonctionnelle (4), on voit donc que :

PROPOSITION 1.- <u>Pour tout</u> z <u>complexe, on a</u>

(8) $$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{1}{\pi}\sin \pi z$$

(<u>relation des compléments</u>).

COROLLAIRE.- <u>Pour tout</u> t <u>réel, on a</u>

(9) $$|\Gamma(it)| = \sqrt{\frac{\pi}{t \operatorname{sh} \pi t}} \qquad (t\neq 0)$$

(10) $$\left|\Gamma(\tfrac{1}{2}+it)\right. = \sqrt{\frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi t}}$$

En effet on déduit de (8) que $\Gamma(it)\Gamma(-it) = \frac{i\pi}{t \sin \pi it} = \frac{\pi}{t \operatorname{sh} \pi t}$ et on a $\Gamma(-it) = \overline{\Gamma(it)}$; de même , (8) donne

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}+it)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}-it) = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2}+\pi it)} = \frac{\pi}{\cos \pi it} = \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi t} \text{ , et on a}$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}-it) = \overline{\Gamma(\tfrac{1}{2}+it)} \text{ .}$$

Soit maintenant p un entier >0 quelconque, et considérons le produit

$$f(z) = \Gamma(\frac{z+1}{p})\,\Gamma(\frac{z+2}{p})\dots\Gamma(\frac{z+p}{p})$$

D'après (3), pour tout $z\neq -n$ $(n\in\mathbb{N})$, f(z) est limite du produit

$$\frac{n^{\frac{z+1}{p}}\, n!}{(\frac{z+1}{p})(\frac{z+1}{p}+1)\dots(\frac{z+1}{p}+n)}\cdot\frac{n^{\frac{z+2}{p}}\, n!}{(\frac{z+2}{p})(\frac{z+2}{p}+1)\dots(\frac{z+2}{p}+n)}\cdots\frac{n^{\frac{z+p}{p}}\, n!}{\left(\frac{z+p}{p}\right)\left(\frac{z+p}{p}+1\right)\dots\left(\frac{z+p}{p}+n\right)}$$

$$= \frac{n^{z+\frac{p+1}{2}}\, p^{(n+1)p}\,(n!)^p}{(z+1)(z+2)\dots(z+(n+1)p)}$$

et en particulier f(0) est limite du produit

$$\frac{n^{\frac{p+1}{2}}\, p^{(n+1)p}\,(n!)^p}{((n+1)p)!}$$

d'où résulte que $f(z)/f(0)$ est limite de

$$\frac{n^z\,((n+1)p)!}{(z+1)(z+2)\dots(z+(n+1)p)} = zp^{-z}\,(\frac{n}{n+1})^z\,\frac{((n+1)p)^z\,((n+1)p)!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+(n+1)p)}$$

ce qui, d'après (3), donne

(11) $$f(z)=f(0)zp^{-z}\Gamma(z)$$

Mais on peut écrire

$$f(0)=\prod_{k=1}^{p-1}\Gamma\left(\frac{k}{p}\right)=\prod_{k=1}^{p-1}\Gamma\left(1-\frac{k}{p}\right)=\sqrt{\prod_{k=1}^{p-1}\Gamma\left(\frac{k}{p}\right)\Gamma\left(1-\frac{k}{p}\right)}$$

puisque $f(0)>0$; la relation des compléments donne par suite

$$f(0)=\sqrt{\pi^{p-1}\Big/\prod_{k=1}^{p-1}\sin\frac{k\pi}{p}}$$

et comme le produit du second membre est égal à $\frac{p}{2^{p-1}}$ (chap.VI, §2, cor.1 de la prop.1), on voit finalement que :

PROPOSITION 2.- <u>Pour tout nombre complexe distinct d'un entier</u> $\leqslant 0$ <u>et pour tout entier</u> $p>0$, <u>on a</u>

(12) $$\Gamma\left(\frac{z}{p}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{p}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{z+p-1}{p}\right)=(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}p^{\frac{1}{2}-z}\Gamma(z)$$

(<u>formule de multiplication de Legendre-Gauss</u>).

PROPOSITION 3.- <u>Pour tout nombre réel</u> $x>0$, <u>on a</u>

(13) $$\int_x^{x+1}\log\Gamma(t)dt=x(\log x-1)+\frac{1}{2}\log 2\pi$$

(<u>intégrale de Raabe</u>).

Démontrons d'abord la formule (13) pour $x=0$. Comme $\log\Gamma(x)\sim\log\frac{1}{x}$ lorsque x tend vers 0 , l'intégrale $\int_0^1\log\Gamma(x)dx$ est convergente. En outre, dans $]0,1]$, la fonction $\log\Gamma(x)$ est décroissante (§1,n°2) ; pour tout $\alpha>0$, on a donc $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{q}\log\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\int_0^\alpha\log\Gamma(x)dx$, q étant le plus grand entier tel que $\frac{q}{n}\leqslant\alpha$. Comme $\int_0^\alpha\log\Gamma(x)dx$ tend vers 0 avec α et que $\frac{1}{n}\sum_{k=q+1}^{n}\log\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)$ tend vers $\int_0^1\log\Gamma(x)dx$ lorsque n tend vers $+\infty$ (chap.II, §1,prop.5), on a

$$\int_0^1\log\Gamma(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)$$

Mais, d'après (13), le second membre de cette formule est limite de $\frac{n-1}{2n}\log 2\pi-\frac{1}{2}\frac{\log n}{n}$, d'où

(14) $$\int_0^1\log\Gamma(x)dx=\frac{1}{2}\log 2\pi\ .$$

Remarquons maintenant que, de l'identité

$$\log\Gamma(x+1) = \log\Gamma(x)+\log x$$

on déduit, en intégrant, pour $x > 0$

$$\int_0^x \log\Gamma(t+1)dt = \int_0^x \log\Gamma(t)dt + \int_0^x \log t\, dt .$$

Mais l'intégrale du premier membre est aussi égale à $\int_1^{x+1} \log\Gamma(t)dt$.

On a donc, d'après (14)

$$\int_x^{x+1} \log\Gamma(t)dt = \int_0^x \log t\, dt + \frac{1}{2}\log 2\pi = x(\log x-1)+\frac{1}{2}\log 2\pi .$$

3. Le développement de Stirling.

Soient x et y deux nombres complexes non situés sur le demi-axe réel négatif ; d'après la formule (3), et avec les conventions du n°1 concernant les logarithmes, $\log\Gamma(x)-\log\Gamma(y)$ est congru modulo $2\pi i$ à la limite de l'expression

$$(15)\qquad (x-y)\log n + \sum_{k=0}^{n} (\log(y+k)-\log(x+k))$$

Posons $f(t)=\log(y+t)-\log(x+t)$; nous allons appliquer à la fonction f la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin (chap.VI, §3,n°1)

$$f(0)+f(1)+\ldots+f(n) = \int_0^{n+1} f(t)dt-\frac{1}{2}(f(n+1)-f(0))+$$
$$+\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)}{(2k)!}B_k(f^{(2k-1)}(n+1)-f^{(2k-1)}(0))+T_p(n)$$

avec

$$(16)\qquad \left|T_p(n)\right| \leqslant \frac{4\,e^{2\pi}}{(2\pi)^{2p+1}}\int_0^{n+1}\left|f^{(2p+1)}(u)\right|du .$$

Comme $f^{(m)}(t)=(-1)^{m-1}(m-1)!\left(\frac{1}{(y+t)^m}-\frac{1}{(x+t)^m}\right)$, $f^{(2k-1)}(n+1)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, pour tout $k \geqslant 1$; il en est d'ailleurs de même de $f(n+1)=\log(1+\frac{y}{n+1})-\log(1+\frac{x}{n+1})$. D'autre part, on a $\int_0^{n+1}\log(x+t)dt=(x+n+1)(\log(x+n+1)-1)-x(\log x-1)$; lorsque n tend vers $+\infty$, on a le développement asymptotique

$$(x+n)(\log(x+n)-1)=n\log n-n+x\log n+O(\tfrac{1}{n})$$

Portant dans l'expression (15) on voit finalement que, lorsque n tend vers $+\infty$, $T_p(n)$ a une limite $R_p(x,y)$ et que l'on peut écrire

$$\log\Gamma(x)-g(x) \equiv \log\Gamma(y)-g(y)+R_p(x,y)\qquad (\mathrm{mod.}\ 2\pi i)$$

en posant

(17) $$g(x) = x \log x - x - \frac{1}{2} \log x + \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k-1}}{2k(2k-1)} \frac{B_k}{x^{2k-1}}$$

Nous allons maintenant évaluer une borne supérieure de $R_p(x,y)$ à l'aide de l'inégalité (16), en supposant que x et y soient tous deux la partie H_A de $\mathbb{C}$ définie par la relation " $\mathcal{R}(z) \geqslant A$ ou $|\mathcal{I}(z)| \geqslant A$" , où A est un nombre >0 arbitraire (fig.2). Remarquons

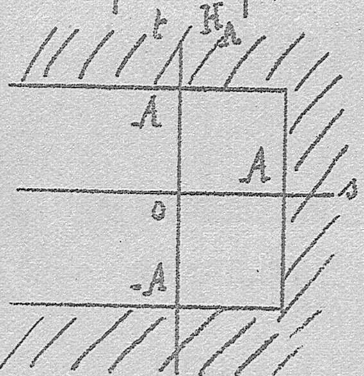

fig. 2

pour cela que si $x=s+it$ avec $s > A$, on a $|x+u| \geqslant A+u$ pour tout $u > 0$ et par suite

$$\int_0^{n+1} \frac{du}{|x+u|^{2p+1}} \leqslant \int_0^{\infty} \frac{du}{(A+u)^{2p+1}} = \frac{1}{2p\,A^{2p}}$$

De même, si $|t| \geqslant A$, on a $|x+u| = |s+u+it| \geqslant \sqrt{A^2+(s+u)^2}$ pour tout u réel, d'où

$$\int_0^{n+1} \frac{du}{|x+u|^{2p+1}} \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(A^2+u^2)^{p+\frac{1}{2}}} = \frac{2}{A^{2p}} \int_0^{\infty} \frac{dv}{(1+v^2)^{p+\frac{1}{2}}}$$

On voit donc que, lorsque x et y sont dans H_A , on a

$$|R_p(x,y)| \leqslant \frac{C_p}{A^{2p}}$$

où C_p ne dépend que de p. Soit alors $\mathfrak{F}$ le filtre ayant pour base les ensembles H_A ; le critère de Cauchy montre que, suivant le filtre $\mathfrak{F}$, la fonction $\log \Gamma(z) - g(z)$ <u>a une limite</u> finie δ (modulo $2\pi i$) et que, si on pose $\overline{\omega}(z) = \max(\mathcal{R}(z), |\mathcal{I}(z)|)$, on a

(18) $$\log \Gamma(z) - g(z) - \delta \equiv \underline{O}\left(\frac{1}{(\overline{\omega}(z))^{2p}}\right) \quad (\text{mod. } 2\pi i)$$

Pour x réel et > 0 , on a $\Gamma(x) > 0$ et g(x) est réel, donc on peut supposer δ <u>réel</u>, et on a

$$\log \Gamma(x) = g(x) + \delta + \underline{O}\left(\frac{1}{x^{2p}}\right)$$

Nous allons en déduire la valeur de la constante δ ; d'après la prop.3, on a en effet

$$x(\log x - 1) + \frac{1}{2} \log 2\pi = \delta + \int_x^{x+1} g(t)\,dt + \underline{O}\left(\frac{1}{x^{2p}}\right)$$

Mais comme $g'(x)=\log x+\underline{O}_1(\frac{1}{x})$, $g''(x)=\underline{O}_2(\frac{1}{x})$, la formule de Taylor montre aussitôt que $\int_x^{x+1} g(t)dt = \int_0^1 g(x+u)du = g(x)+\frac{1}{2}g'(x)+\underline{O}_3(\frac{1}{x}) = x(\log x-1)+\underline{O}_4(\frac{1}{x})$, ce qui montre que $\delta = \frac{1}{2}\log 2\pi$. On a donc finalement le résultat suivant :

PROPOSITION 4.- <u>Suivant le filtre $\mathfrak{F}$, on a (pour tout entier</u> $p \geqslant 1$) <u>le développement asymptotique</u>

$$\log\Gamma(z) \equiv z\log z - z - \frac{1}{2}\log z + \frac{1}{2}\log 2\pi + \sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^{k-1}}{2k(2k-1)}\frac{B_k}{z^{2k-1}} + \underline{O}\left(\frac{1}{(\varpi(z))^{2p}}\right) \pmod{2\pi i} \tag{19}$$

(<u>développement de Stirling</u>).

COROLLAIRE.- <u>Suivant le filtre</u> $\mathfrak{F}$, <u>on a</u>

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\exp(z\log z - z - \frac{1}{2}\log z) \tag{20}$$

En particulier, pour x réel et >0, la formule (20) s'écrit

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \tag{21}$$

On déduit de là de nombreuses formules utiles. Par exemple, pour tout nombre complexe α et tout entier n , on a, lorsque n tend vers $+\infty$

$$\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)} \sim n^{\alpha} \qquad (= e^{\alpha\log n}) \tag{22}$$

De même, pour tout nombre complexe a distinct d'un entier $\leqslant 0$, on a

$$a(a+1)(a+2)\ldots(a+n) = \frac{\Gamma(n+a+1)}{\Gamma(a)} \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(a)}\, n^{n+a+\frac{1}{2}} e^{-n} \tag{23}$$

et pour tout nombre complexe a , distinct d'un entier $\geqslant 0$

$$\binom{a}{n} = \frac{(-1)^n}{\Gamma(-a)}\frac{\Gamma(n-a)}{\Gamma(n+1)} \sim \frac{(-1)^n}{\Gamma(-a)}\, n^{-a-1} \tag{24}$$

Enfin, pour toute constante réelle $k>1$, on a

$$(25)\quad \binom{kn}{n} = \frac{\Gamma(kn+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma((k-1)n+1)} \sim \sqrt{\frac{k}{2\pi(k-1)n}}\left(\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}\right)^n$$

Le même raisonnement conduit à la proposition analogue suivante :

PROPOSITION 5.- <u>Suivant le filtre</u> $\mathfrak{F}$, <u>on a</u> (<u>pour tout entier</u> $p \geqslant 1$), <u>le développement asymptotique</u>

$$(26)\quad \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \log z - \frac{1}{2z} - \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k-1}}{2k}\,\frac{B_k}{z^{2k}} + \underline{O}\,\frac{1}{(\varpi(z))^{2k+1}}$$

Au lieu de l'intégrale de Raabe, on utilise pour la détermination de la constante la formule $\displaystyle\int_x^{x+1} \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}\,dt = \log\Gamma(x+1) - \log\Gamma(x) = \log x$.

<u>Exercices</u>.- 1) a) Soit g une fonction numérique continue pour $x \geqslant 0$. Montrer que si g vérifie les deux identités

$$\sum_{k=0}^{p-1} g\left(\frac{x+k}{p}\right) = g(x)$$

$$\sum_{h=0}^{q-1} g\left(\frac{x+h}{q}\right) = g(x)$$

elle vérifie aussi l'identité $\displaystyle\sum_{j=0}^{pq-1} g\left(\frac{x+j}{pq}\right) = g(x)$.

b) En déduire que si une fonction g a une dérivée continue pour $x \geqslant 0$ et vérifie l'identité

$$\sum_{k=0}^{p-1} g\left(\frac{x+k}{p}\right) = g(x)$$

elle est de la forme $a(x-\frac{1}{2})$, où a est une constante (remarquer que g vérifie une identité analogue où p est remplacé par p^n ; faire tendre n vers $+\infty$, et en déduire que $g'(x) = \displaystyle\int_0^1 g'(t)\,dt$) .

c) Conclure de b) que la fonction Γ est la seule fonction ayant une dérivée continue pour $x > 0$, vérifiant l'équation (1) et la formule de multiplication (12) pour une valeur de p .

2) Pour tout nombre $k > 1$, on pose $s_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}$. Démontrer que, pour $-1 < x \leqslant 1$, on a

$$\log\Gamma(1+x) = -\gamma x + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{s_k}{k} x^k$$

la série du second membre étant uniformément convergente dans tout intervalle compact contenu dans $\left]-1,1\right]$, et absolument convergente pour $|x| < 1$.

3) Soit s un nombre réel fixe ; montrer que, lorsque t tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, on a

$$\left|\Gamma(s+it)\right| \sim \sqrt{2\pi}\,|t|^{s-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{\pi}{2}|t|}$$

et

$$\frac{\Gamma'(s+it)}{\Gamma(s+it)} \sim \log|t|$$

4) Soit t un nombre réel fixe et $\neq 0$; montrer que lorsque s tend vers $+\infty$, on a

$$\left|\Gamma(-s+it)\right| \sim \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{s^{s+\frac{1}{2}}\,e^{-s}\sqrt{\mathrm{sh}^2\pi t+\sin^2\pi s}}$$

(utiliser la relation des compléments).

5) Soit x_n la racine de l'équation $\Gamma'(x)=0$ appartenant à l'intervalle $]-n,-n+1[$. Montrer qu'on a

$$x_n = -n + \frac{1}{\log n} + O\left(\frac{1}{(\log n)^2}\right)$$

(utiliser la relation des compléments et la formule (5)).

En déduire que

$$\Gamma(x_n) \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}\,n^{-n-\frac{1}{2}}\,e^{n+1}\log n$$

6) Soit V_n le déterminant de Vandermonde $V(1,2,\dots,n)$ (Alg. chap.III, § 6, n°4). Montrer qu'on a

$$\log V_n = \frac{n^2}{2}\log n - \frac{3n^2}{4} + \left(\frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{4}\right)n - \frac{1}{12}\log n + k + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

où k est une constante.