LIVRE IV
CHAPITRE VI
DEVELOPPEMENTS TAYLORIENS GENERALISES
FORMULE SOMMATOIRE D'EULER-MACLAURIN

Rédaction n° 012

Nombre de pages : 16

Nombre de feuilles : 16

Livre IV Chap VI

Taylor généralisé.

Formules sommatoires

A 12

LIVRE IV

CHAPITRE VI

DÉVELOPPEMENTS TAYLORIENS GÉNÉRALISÉS FORMULE SOMMATOIRE D'EULER-MACLAURIN

1. Développements tayloriens généralisés.

1. Opérateurs de composition dans un anneau de polynomes.

Soit K un corps commutatif de caractéristique 0 , $K[X]$ l'algèbre des polynomes à une indéterminée sur K (*Alg.*, chap. IV) ; dans tout ce paragraphe, nous désignerons sous le nom d'*opérateur* dans $K[X]$ toute *application linéaire* $\underline{U}$ de l'espace vectoriel $K[X]$ (sur K) dans lui-même ; comme les monômes X^n $(n \geqslant 0)$ forment une base de cet espace , $\underline{U}$ est déterminé par la donnée des polynômes $\underline{U}(X^n)$; de façon précise, si $f(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$ avec $\lambda_k \in K$, on a $\underline{U}(f) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \underline{U}(X^n)$.

Si G est une algèbre commutative sur K , ayant un élément unité, le G-module $G[X]$ s'obtient par extension à G du corps des scalaires K de l'espace vectoriel $K[X]$; la donnée des $\underline{U}(X^n)$ détermine donc une application linéaire de ce module dans lui-même, que nous noterons encore $\underline{U}$; pour tout élément $g(X) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k X^k$, où $\gamma_k \in G$, on a donc $\underline{U}(g) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \underline{U}(X^n)$. En particulier, si on prend $G = K[Y]$, on a $G[X] = K[X,Y]$, et pour tout polynome $g(X,Y) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k(Y) X^k$ où $\gamma_k(Y) \in K[Y]$, on a $\underline{U}(g) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k(Y) \underline{U}(X^k)$. Comme $\underline{U}$ est linéaire, on voit que si on écrit $g(X,Y) = \sum_{h=0}^{m} \beta_h(X) Y^h$, on a aussi $\underline{U}(g) = \sum_{h=0}^{m} \underline{U}(\beta_h) Y^h$.

Cette dernière formule se généralise de la façon suivante. Considérons l'anneau $E = K[X][[Y]]$ des *séries formelles* en Y , à coefficients dans $K[X]$ (*Alg.*, chap. IV, Appendice), autrement dit, l'anneau des séries

3

formelles $g = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(X)Y^n$, où les β_n sont des polynomes en X à coefficients dans K. On définit une application $\underline{U}$ de E dans lui-même en posant $\underline{U}(g)=\sum_{n=0}^{\infty} \underline{U}(\beta_n)Y^n$. Il est clair que E est un module sur l'anneau $K[[Y]]$ des séries formelles en Y à coefficients dans K ; en raison de la linéarité de $\underline{U}$ dans $K[X]$, on vérifie aussitôt que pour tout élément $\theta \in K[[Y]]$, et tout $g \in E$, on a $\underline{U}(\theta g) = \theta\underline{U}(g)$; autrement dit, $\underline{U}$ est une application <u>linéaire</u> du module E dans lui-même.

Pour tout polynome $f \in K[X]$, nous désignerons par $\underline{T}_Y f$ le polynome $f(X+Y)$ de $K[X,Y]$; l'application $\underline{T}_Y$ est une application linéaire de $K[X]$ dans $K[X,Y]$.

DÉFINITION 1.- <u>On dit qu'un opérateur</u> U <u>dans</u> $K[X]$ <u>est un opérateur de composition si on a</u> $\underline{U}\underline{T}_Y = \underline{T}_Y\underline{U}$.

En d'autres termes, si pour tout polynome $f \in K[X]$, on pose $g(X) = \underline{U}(f(X))$, on doit avoir $g(X+Y) = \underline{U}(f(X+Y))$.

<u>Exemples</u>.- 1) Pour tout $\lambda \in K$, l'opérateur qui, à tout polynome $f(X)$, fait correspondre le polynome $f(X+\lambda)$ est un opérateur de composition.

2) La <u>dérivation</u> D dans $K[X]$ est un opérateur de composition (cf. th.1).

Il est clair que toute combinaison linéaire d'opérateurs de composition, à coefficients dans K est un opérateur de composition ; il en est de même du composé de deux opérateurs de composition. En d'autres termes les opérateurs de composition forment une <u>sous-algèbre</u> Γ de l'algèbre $\mathcal{L}(K[X])$ des endomorphismes du K-module $K[X]$.

PROPOSITION 1.-<u>Pour qu'un opérateur</u> $\underline{U}$ <u>dans</u> $K[X]$ <u>soit un opérateur de composition, il faut et il suffit qu'il soit permutable avec la dérivation</u> D <u>dans</u> $K[X]$.

En effet, la formule de Taylor montre que, pour tout polynome $f \in K[X]$, on a $\underline{U}(f(X+Y)) = \underline{U}(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Y^k D^k f(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Y^k \underline{U}(D^k(f(X)))$; si on pose $g(X) = \underline{U}(f(X))$, on a $g(X+Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Y^k D^k(g(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Y^k D^k(\underline{U}(f(X)))$; pour que $\underline{U}$ soit un opérateur de composition, on doit donc avoir $\underline{U}D^k = D^k\underline{U}$ pour tout entier $k \geqslant 1$, et en particulier $\underline{U}D = D\underline{U}$. Inversement, si cette relation est vérifiée, elle entraîne $\underline{U}D^k = D^k\underline{U}$ pour tout entier $k \geqslant 1$, par récurrence sur k ; la formule de Taylor montre alors que $g(X+Y) = \underline{U}(f(X+Y))$.

~~Rmixx~~ Pour tout polynome $f \in K[X,Y]$, nous désignerons par $\underline{U}_0(f)$ le terme <u>indépendant de</u> X dans le polynome $\underline{U}(f)$; en particulier, si $f \in K[X]$, $\underline{U}_0(f)$ est le <u>terme constant</u> de $\underline{U}(f)$, et $\underline{U}_0$ est donc une <u>forme linéaire</u> sur $K[X]$. Pour tout polynome $f \in K[X]$, on peut écrire

$$\underline{U}(f(X+Y)) = \underline{U}(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k D^k f(Y)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underline{U}(X^k) D^k f(Y)$$

Dans cette formule, remplaçons X par 0 ; en posant $g(X) = \underline{U}(f(X))$, on obtient ainsi, en vertu de la déf.1, $g(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underline{U}_0(X^k) D^k f(Y)$. Soit $\mu_k = \underline{U}_0(X^k)$; on voit donc qu'on a

$$\underline{U}(f(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mu_k D^k f(X) \tag{1}$$

Cette formule montre que la donnée des μ_k détermine complètement l'opérateur $\underline{U}$; inversement, si (μ_n) est une suite <u>arbitraire</u> d'éléments de K, la formule (1) définit un opérateur $\underline{U}$ qui est évidemment permutable avec D, et par suite (prop.1) un opérateur de composition. Par abus de langage, nous écrirons désormais la formule (1) sous la forme

$$\underline{U} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mu_k D^k \tag{2}$$

Cette formule peut s'interpréter en langage topologique de la façon suivante : si on considère sur $K[X]$ la topologie discrète, et sur $\mathcal{L}(K[X])$ la topologie de la convergence <u>simple</u> dans $K[X]$

(Top.gén., chap.X, §1,n°3), la série de terme général $\frac{1}{k!}\mu_k D^k$ est commutativement convergente dans $\mathcal{L}(K[X])$ et a pour somme $\underline{U}$ (Top.gén.,chap.III, §4,n°7).

La formule (2) montre qu'à toute série formelle $u(S) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k S^k$ (dans l'anneau $K[[S]]$ des séries formelles à une indéterminée sur K (Alg.,chap.IV,Appendice)), on peut faire correspondre l'opérateur de composition $\underline{U} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k$, que nous noterons désormais $u(D)$. Cette remarque peut être précisée de la façon suivante :

THÉORÈME 1.- L'application qui, à toute série formelle $u(S) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k S^k$ ~~de $K[[S]]$~~ fait correspondre l'opérateur de composition $u(D)= \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k$ dans $K[X]$, est un isomorphisme de l'algèbre $K[[S]]$ sur l'algèbre Γ ~~$\mathcal{L}(K[X])$~~ des opérateurs de composition.

On vérifie aussitôt que cette application est une représentation. Tout revient donc à voir qu'elle est biunivoque, autrement dit que la relation $\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k = 0$ entraîne $a_k = 0$ pour tout k . Dans le cas contraire, il existerait un plus petit entier h tel que $a_h \neq 0$; mais comme le transformé par l'opérateur $\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k$ du monôme X^h est $h!a_h$, l'hypothèse $\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k = 0$ entraîne $a_h = 0$, contrairement à l'hypothèse.

COROLLAIRE.- L'algèbre Γ des opérateurs de composition dans $K[X]$ est commutative.

Exemple.- Si $\underline{U}$ est l'opérateur qui, à tout polynome $f(X)$, fait correspondre $f(X+\lambda)$ $(\lambda \in K)$, on a $\underline{U}_0(X^k) = \lambda^k$, et par suite $\underline{U} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\lambda D)^k$. Par abus de langage, nous désignerons par $\exp(S)$ ou e^S la série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} S^n$ dans l'anneau $K[[S]]$; on peut donc écrire $\underline{U} = e^{\lambda D}$. Remarquons d'ailleurs que, dans l'anneau de séries formelles $K[[S,T]]$ à deux indéterminées, on a

$$(\exp S)(\exp T) = \sum_{p,q} \frac{S^pT^q}{p!q!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\binom{n}{0} S^n+\binom{n}{1} S^{n-1}T+\ldots+\binom{n}{n}T^n\right) = $$
$$= \exp (S+T)$$

ce qui justifie la notation introduite.

2. __Polynomes d'Appell attachés à un opérateur de composition.__

Etant donné un opérateur de composition $\underline{U} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k \neq 0$, soit p le plus petit des entiers m tels que $a_m=0$; nous dirons que p est __l'ordre__ de l'opérateur $\underline{U}$.

Soit $\underline{U}$ un opérateur de composition $\neq 0$, d'ordre p ; d'après le th.1, on peut écrire $\underline{U}=D^p\underline{U}_1$, où $\underline{U}_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k$ est d'ordre 0, autrement dit, tel que $a_0 \neq 0$. Mais alors la série formelle $\sum_{k=0}^{\infty} a_k S^k$ est __inversible__ dans l'anneau $K[[S]]$ (__Alg.__, chap. IV, Appendice, prop.) ; il résulte donc du th.1 que dans l'algèbre Γ des opérateurs de composition, $\underline{U}_1$ est __inversible__. On en déduit tout d'abord la proposition suivante :

PROPOSITION 2.- __Tout opérateur de composition $\underline{U}$ d'ordre p dans $K[X]$ est une application de $K[X]$ sur lui-même, et $\underline{U}^{-1}(0)$ est identique à l'ensemble des polynomes de degré__ $< p$.

En effet, $\underline{U}_1$ étant un automorphisme du K-module $K[X]$, $\underline{U}$ applique $K[X]$ sur l'ensemble des dérivées p-èmes des polynomes de $K[X]$; mais comme, pour tout entier $k \geqslant 0$, X^k est la dérivée p-ème de $\frac{p!}{(p+k)!}X^{p+k}$, tout polynome est une dérivée p-ème, ce qui démontre la première partie de la proposition. D'autre part, si $\underline{U}(f)=0$, on a aussi $\underline{U}_1^{-1}(\underline{U}(f))=0$, et comme $\underline{U}=\underline{U}_1 D^p$, $D^p(f(X))=0$, ce qui prouve que f est nul ou a un degré $< p$; la réciproque est évidente, ce qui achève la démonstration.

On notera d'autre part, d'après la définition de l'ordre d'un opérateur de composition, que si $\underline{U}$ est d'ordre p, pour tout polynome $f \neq 0$ de degré $n \geqslant p$, $\underline{U}(f)$ est un polynome $\neq 0$ de degré $n-p$.

DEFINITION 2.- <u>Soit</u> $\underline{U}=D^p\underline{U}_1$ <u>un opérateur de composition d'ordre</u> p <u>dans</u> $K[X]$. <u>On appelle polynome d'Appell d'indice</u> n <u>attaché à l'opérateur U le polynome</u> $u_n(X)=\underline{U}_1^{-1}(X^n)$.

Si $\underline{U}_1^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\beta_k D^k$ $(\beta_0\neq 0)$, on a donc

$$u_n(X)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta_k X^{n-k} \tag{3}$$

ce qui montre entre autres que u_n est un polynome <u>de degré n</u> ; en outre, on a

$$u_n(0)=\beta_n \quad . \tag{4}$$

PROPOSITION 3.- <u>Les polynomes d'Appell attachés à U satisfont aux relations</u>

$$\frac{du_n}{dx}=n.u_{n-1} \tag{5}$$

$$u_n(X+Y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_{n-k}(X)Y^k \tag{6}$$

$$\underline{U}(u_n(X))=\frac{n!}{(n-p)!}X^{n-p} \tag{7}$$

La relation (5) est une conséquence immédiate du fait que $\underline{U}_1^{-1}$ est permutable avec la dérivation D . De (5) on déduit, par récurrence sur k , que $D^k u_n=n(n-1)..(n-k+1)u_{n-k}$, et la relation (6) résulte alors de l'application à u_n de la formule de Taylor. Enfin, (7) résulte de la déf.2 et de la relation $\underline{U}\underline{U}_1^{-1}=D^p$.

PROPOSITION 4.- <u>Pour tout polynome</u> $f\in K[X]$, <u>on a</u>

$$f^{(p)}(X+Y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\underline{U}(f^{(k)}(X))u_k(Y) \tag{8}$$

(<u>développement taylorien généralisé</u>).

En effet, le développement de Taylor de $f(X+Y)$ donne

$$f(X+Y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}X^kD^kf(Y)$$

d'où
$$\underline{U}_1^{-1}(f(X+Y))=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}u_k(X)D^kf(Y)$$

d'après la définition des polynomes d'Appell u_k . Mais comme $\underline{U}_1^{-1}$ est un opérateur de composition, $\underline{U}_1^{-1}(f(X+Y))$ est un polynome symétrique en X et Y ; on a par suite

$$\underline{U}_1^{-1}(f(X+Y)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} u_k(Y) D^k f(X)$$

Si on applique aux deux membres de cette relation l'opérateur $\underline{U}$ et qu'on se rappelle que $\underline{U}\underline{U}_1^{-1} = D^p$, on obtient la relation (8) .

PROPOSITION 5.- <u>Soit</u> $\underline{U} = D^p \underline{U}_1 = u(D)$ <u>un opérateur de composition d'ordre</u> p <u>dans</u> $K[X]$, $u(S)$ <u>étant une série formelle d'ordre</u> p <u>dans</u> $K[[S]]$. <u>On a alors les formules</u>

(9) $$\underline{U}(\exp(XS)) = u(S).\exp(XS)$$

(10) $$S^p \exp(XS)/u(S) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u_n(X) S^n$$

u_n <u>étant le polynome d'Appell d'indice</u> n <u>attaché à</u> $\underline{U}$.

Considérons la série formelle $g(X,S)=\underline{U}(\exp(XS)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underline{U}(X^n)S^n$; comme $\underline{U}$ est un opérateur de composition, on a

$$g(X+Y,S)=\underline{U}(\exp((X+Y)S))=\underline{U}((\exp(XS)).(\exp(YS)))=(\exp(YS))g(X,S) \quad ;$$

substituant 0 à X dans cette identité, et remarquant qu'on a $g(0,S) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underline{U}_0(X^n)S^n = u(S)$ d'après les formules (1) et (2), il vient $g(Y,S) = u(S).\exp(YS)$, ce qui n'est autre que la formule (9) où Y remplace X .

Appliquons maintenant la formule (9) à l'opérateur de composition $\underline{U}_1^{-1} = D^p/u(D)$, d'ordre 0 ; comme on a par définition $\underline{U}_1^{-1}(\exp(XS)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u_n(X)S^n$, on obtient aussitôt (10).

On notera que la formule (10) s'obtient aussi par multiplication des séries formelles $S^p/u(S)$ et $\exp(XS)$, en tenant compte des formules (3) et (4) .

<u>Exemple</u>.- Considérons l'opérateur de composition $\underline{U}$ défini par $\underline{U}(f(X)) = f(X+1)-f(X)$; on peut l'écrire $\underline{U}=e^D-1$ (n°1,<u>Exemple</u>); c'est un opérateur de degré 1 ; on a ici $\underline{U}_1^{-1} = \frac{D}{e^D-1}$. Le polynome d'Appell d'indice n correspondant s'appelle <u>polynome de Bernoulli</u> de degré n , et se note $B_n(X)$; si on pose $b_n=B_n(0)$, on a les formules

(11) $$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$$

(12) $$\frac{S}{e^S-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} b_n S^n$$

Les formules (5) et (7) donnent, pour les polynomes de Bernoulli, les relations

(13) $$\frac{dB_n}{dX} = nB_{n-1}(X)$$

(14) $$B_n(X+1)-B_n(X) = nX^{n-1} \quad .$$

En particulier, on a $B_n(1)-B_n(0)=0$ pour $n > 1$, ce qui, compte-tenu de (11), donne la relation de récurrence

(15) $$\sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} b_m = 0 \qquad (n > 1),$$

qui permet de calculer de proche en proche les b_n. Ces nombres sont évidemment <u>rationnels</u> ; comme on peut écrire

$$\frac{S}{e^S-1} = -\frac{S}{2} + \frac{S}{2}\,\frac{e^S+1}{e^S-1}$$

et que l'on a

$$\frac{e^{-S}+1}{e^{-S}-1} = -\frac{e^S+1}{e^S-1}$$

on voit que, dans la série formelle $\frac{S}{2}\,\frac{e^S+1}{e^S-1}$, tous les termes de degré <u>impair</u> ont un coefficient nul ; on a donc

(16) $$b_0=1 \ , \quad b_1=-\frac{1}{2} \ , \quad b_{2n-1}=0 \qquad \text{pour} \quad n > 1 \ .$$

On pose $B_n=(-1)^{n-1}b_{2n}$ pour $n \geqslant 1$; les nombres rationnels B_n sont appelés <u>nombres de Bernoulli</u> ; nous verrons au §2 qu'ils sont tous >0.
La formule (15) donne, pour les premières valeurs de n

$$B_1= \frac{1}{6}\ , \quad B_2= \frac{1}{30}\ , \quad B_3 = \frac{1}{42}\ , \quad B_4= \frac{1}{30}\ , \quad B_5 = \frac{5}{66}\ , \quad B_6 = \frac{691}{2730}\ .$$

Nous poursuivrons l'étude des nombres et les polynomes de Bernoulli au §2.

3. <u>Opérateurs de composition sur les fonctions d'une variable réelle.</u>

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant l'intervalle $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$; soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, formé de fonctions d'une variable réelle, à valeurs complexes , définies dans I . Nous supposerons que pour tout $a \geqslant 0$ et toute fonction $f \in E$, la fonction $x \to f(x+a)$ appartient à E ; en outre, nous supposerons que E contient les restrictions à I des <u>polynomes</u> (à coefficients complexes) et des exponentielles $e^{\lambda x}$, pour <u>tout</u> λ <u>complexe</u>. Nous appellerons <u>opérateur</u> dans E toute application linéaire $\underline{U}$ de E dans l'espace de toutes les applications de I dans $\mathbb{C}$; si $f \in E$ et $g=\underline{U}(f)$, il sera commode d'utiliser la notation

$$g(x) = \underline{U}_x^{\xi}(f(\xi))$$

ξ étant donc une variable <u>liée</u> dans le symbole fonctionnel du second membre (cf.chap.II, §1,n°4).

DÉFINITION 3.- <u>On dit que l'opérateur $\underline{U}$ dans E est un opérateur de composition si, pour tout $a \geqslant 0$, il est permutable avec l'opérateur qui, à toute fonction $f \in E$, associe la restriction à I de la fonction</u> $x \to f(x+a)$.

Avec la notation introduite ci-dessus, cette définition se traduit par l'identité en x et a $(x \in I\ ,\ a \geqslant 0)$

$$(17) \qquad \underline{U}_{x+a}^{\xi}(f(\xi)) = \underline{U}_x^{\xi}(f(\xi+a)) .$$

Dans cette identité, on peut échanger les rôles de x et a (si $x \geqslant 0$), puis faire $x=0$, ce qui donne, pour $x > 0$

$$(18) \qquad \underline{U}_x^{\xi}(f(\xi)) = \underline{U}_0^{\xi}(f(\xi+x))$$

$\underline{U}_0$ étant la <u>forme linéaire</u> sur E qui, à toute fonction $f \in E$, fait correspondre la valeur $g(0)$ de $g=\underline{U}(f)$.

Si f est un polynome, on a $f(\xi+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi)x^k$, et la formule (18) montre donc que $\underline{U}(f)$ est un polynome ; restreint à l'ensemble des polynomes en x , à coefficients dans $\mathbb{C}$ (ensemble qu'on peut identifier à l'algèbre $\mathbb{C}[X]$), l'opérateur $\underline{U}$ est donc un opérateur de composition au sens de la déf.1, et tous les résultats du n°2 lui sont par suite applicables.

Nous désignerons encore par u_n les polynomes d'Appell attachés à l'opérateur $\underline{U}$. Au développement taylorien généralisé d'un polynome (formule (8)) correspond, pour des fonctions plus générales, le résultat suivant :

THÉORÈME 2.- <u>Soit</u> f <u>une fonction admettant une dérivée</u> (n+1)-<u>ème</u> <u>continue dans</u> I <u>et appartenant à</u> E <u>ainsi que toutes ses dérivées</u> $f^{(m)}$ <u>pour</u> $1 \leqslant m \leqslant n$. <u>Si</u> $\underline{U}$ <u>est un opérateur de composition d'ordre</u> $p \leqslant n$ <u>dans</u> E, <u>on a, pour</u> $x \geqslant 0$ <u>et</u> $h \geqslant 0$

$$(19)\quad f^{(p)}(x+h) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} u_m(x)\underline{U}_h^{\xi}(f^{(m)}(\xi)) - \underline{U}_h^{\xi}\left(\int_0^{\xi-x-h} \frac{1}{n!} u_n(x+\eta) f^{(n+1)}(\xi-\eta)d\eta\right)$$

(<u>développement taylorien généralisé</u>).

Considérons l'intégrale $\int_0^{\xi-x-h} \frac{1}{n!} u_n(x+\eta) f^{(n+1)}(\xi-\eta)d\eta$, définie pour tout $\xi \geqslant 0$, et appliquons-lui la formule d'intégration par parties d'ordre n (chap. II, § 1, formule (12)) en tenant compte des relations $u_n^{(k)} = n(n-1)..(n-k+1)u_{n-k}$ déduites de (5) par récurrence ; il vient

$$(20)\quad \int_0^{\xi-x-h} \frac{1}{n!} u_n(x+\eta) f^{(n+1)}(\xi-\eta)d\eta = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} u_m(x) f^{(m)}(\xi) - \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} u_m(\xi-h) f^{(m)}(x+h) .$$

Appliquons aux deux membres de (20), considérés comme fonctions de ξ, l'opérateur $\underline{U}$, puis prenons la valeur de la fonction obtenue pour la valeur h de la variable ; en remarquant que, d'après les formules (18) et (7), on a

$$\underline{U}_h^{\xi}(u_m(\xi-h)) = \underline{U}_0^{\xi}(u_m(\xi)) = \begin{cases} 0 & \text{pour } m \neq p \\ p! & \text{pour } m = p \end{cases}$$

on obtient finalement la formule (19).

Par hypothèse, $\underline{U}$ est défini pour toute exponentielle $e^{\lambda x}$ (λ complexe) ; la formule (18) montre que

(21) $$\underline{U}_x^{\xi}(e^{\lambda\xi}) = \underline{U}_0^{\xi}(e^{\lambda x}e^{\lambda\xi}) = e^{\lambda x}\underline{U}_0^{\xi}(e^{\lambda\xi}) = u(\lambda)e^{\lambda x}$$

en posant $u(\lambda)=\underline{U}_0^{\xi}(e^{\lambda\xi})$. Appliquons la formule (19) à la fonction $f(x)=e^{\lambda x}$, avec $h=0$; comme $f^{(m)}(\xi)=\lambda^m e^{\lambda\xi}$, on a $\underline{U}_0(f^{(m)}(\xi)) = =\lambda^m u(\lambda)$; il vient donc, pour tout λ tel que $u(\lambda)\neq 0$,

(22) $$\frac{\lambda^p e^{\lambda x}}{u(\lambda)} = \sum_{m=0}^{n} u_m(x)\frac{\lambda^m}{m!} - \frac{\lambda^{n+1}}{u(\lambda)}\underline{U}_0^{\xi}\left(\int_0^{\xi-x}\frac{1}{n!}u_n(x+\eta)e^{\lambda(\xi-\eta)}d\eta\right)$$

et en particulier, pour $x=0$

(23) $$\frac{\lambda^p}{u(\lambda)} = \sum_{m=0}^{n}\beta_m\frac{\lambda^m}{m!} - \frac{\lambda^{n+1}}{u(\lambda)}\underline{U}_0^{\xi}\left(\int_0^{\xi}\frac{1}{n!}u_n(\eta)e^{\lambda(\xi-\eta)}d\eta\right).$$

La fonction $u(\lambda)$ est dite l'<u>indicatrice</u> de l'opérateur $\underline{U}$; on notera que si la restriction de $\underline{U}$ à l'anneau $\mathbb{C}[X]$ des polynomes est égale à la série $D^p\sum_{n=0}^{\infty}a_nD^n$, la série à termes <u>complexes</u> dont le terme général est $a_n\lambda^{n+p}$ <u>n'est pas nécessairement convergente</u> pour $\lambda\neq 0$, et que, même si elle converge, sa somme <u>n'est pas nécessairement égale à</u> $u(\lambda)$ (exerc.3). Nous dirons que l'opérateur $\underline{U}$ est <u>régulier</u> si la série de terme général $a_n\lambda^{n+p}$ est <u>absolument convergente</u> dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, et a une somme <u>égale à</u> $u(\lambda)$ dans ce voisinage.

Si $\underline{U}$ est un opérateur régulier, pour tout λ tel que les séries $u(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\lambda^{n+p}$ et $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\frac{\lambda^n}{n!}$ soient absolument convergentes (*), il résulte de la formule (10) et de la formule donnant le produit de deux séries absolument convergentes (<u>Top.gén.</u>, chap.VIII, § 3, prop.1) que l'on a

(24) $$\frac{\lambda^p}{u(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\frac{\lambda^n}{n!} ;$$

(*) Il résulte de la théorie des séries entières (séries de terme général $c_n\lambda^n$) que tout λ contenu dans un voisinage convenable de l'origine possède cette propriété.

13

de même, puisque le développement en série de Taylor de $e^{\lambda x}$ est absolument convergent pour tout λ et tout x, on a aussi, pour les valeurs de λ considérées et pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$(25) \qquad \frac{\lambda^p e^{\lambda x}}{u(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \frac{\lambda^n}{n!}$$

formules qui précisent dans ce cas les développements (22) et (23).

Remarque.- On peut utiliser la formule (24) (resp.(25)) pour le calcul des β_n (resp. des $u_n(x)$) en utilisant le lemme suivant de la théorie des séries entières :

Lemme.- Si deux séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} d_n \lambda^n$ sont absolument convergentes pour tout λ dans un voisinage de 0 et si on a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \lambda^n$ pour ces valeurs de λ, alors $c_n = d_n$ pour tout n (*).

Si, par un procédé quelconque, on peut obtenir une série entière convergente égale à $\lambda^p/u(\lambda)$ dans un voisinage de 0, les coefficients de cette série seront donc égaux aux β_n. C'est ce procédé que nous allons appliquer dans les exemples qui suivent.

Exemples.- 1) Si $\underline{U}$ est l'application identique, on a $u(\lambda)=1$, et l'opérateur $\underline{U}$ est évidemment régulier ; comme $u_n(x)=x^n$, la formule (19) s'écrit, en posant $t = \xi - \eta$

$$f(x+h) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} f^{(m)}(h)x^m + \int_h^{x+h} f^{(n+1)}(t) \frac{(x+h-t)^n}{n!} dt$$

c'est-à-dire la formule de Taylor démontrée au chap. II, §1, n°6.

(*) Ce lemme est un cas particulier d'un résultat général que nous démontrerons plus tard ; en voici la démonstration. Si une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$ est absolument convergente pour $\lambda = \lambda_0$ pour tout entier k, la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} \lambda^n$ est normalement convergente pour $|\lambda| \leq |\lambda_0|$ donc est continue dans ce disque ; on en conclut que $\sum_{n=k+1}^{\infty} c_n \lambda^n = o(\lambda^k)$ au voisinage de 0. Le lemme résulte alors de l'unicité des coefficients du développement asymptotique d'une fonction suivant les λ^n (chap. V, §2, n°2).

2) Prenons pour $\underline{U}$ l'opérateur de composition qui, à toute fonction f définie dans $\mathbb{R}_+$, fait correspondre la fonction $x \to f(x+1)-f(x)$; on a donc $\underline{U}_x^{\xi}(f(\xi))=f(x+1)-f(x)$; nous avons vu ($n^o 2$) que la restriction de $\underline{U}$ à $\mathbb{C}[X]$ est égale à e^D-1 . Comme d'autre part $u(\lambda)=e^{\lambda}-1$, l'opérateur $\underline{U}$ est <u>régulier</u> ; nous verrons au § 2 comment on peut déterminer les coefficients b_n en calculant un développement en série entière convergente de $\dfrac{\lambda}{e^{\lambda}-1}$. En appliquant la formule (19) à une primitive de la fonction f , il vient

(26) $$f(x+h)=\int_h^{h+1} f(t)dt+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}B_m(x)(f^{(m-1)}(h+1)-f^{(m-1)}(h))+R_n(x,h)$$

avec

(27) $$R_n(x,h)=-\int_0^{1-x}\frac{B_n(x+\eta)}{n!}f^{(n)}(h+1-\eta)d\eta+\int_0^{-x}\frac{B_n(x+\eta)}{n!}f^{(n)}(h-\eta)d\eta .$$

* 3) Soit E l'espace vectoriel des fonctions f définies et continues dans $\mathbb{R}$, telles en outre que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi$ soit convergente pour tout $x \geqslant 0$. L'opérateur $\underline{U}$ défini par

$$\underline{U}_x^{\xi}(f(\xi)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} f(x+\xi)d\xi$$

est donc défini dans E et est évidemment un opérateur de composition. L'espace E contient toutes les exponentielles $e^{\lambda x}$ (λ complexe quelconque), et on a

$$u(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}+\lambda\xi}d\xi=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{\frac{\lambda^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\xi-\lambda)^2/2}d\xi= e^{\frac{\lambda^2}{2}}$$

(cf. chap. III, § 1, exerc. 24, et chap. VII, § 1, formule (22)).

On a $n!a_n=\underline{U}_0^{\xi}(\xi^n)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\xi^n d\xi$. Pour tout entier n , on peut écrire

$$\sum_{k=0}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\lambda\xi|^k}{k!}e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi \leqslant 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}+|\lambda|\xi}d\xi$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \frac{(\lambda\xi)^n}{n!}$ peut donc être intégrée terme à terme dans $\mathbb{R}$ (chap.II, §3,cor.1 de la prop.3), ce qui prouve que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n$ converge absolument pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, et a une somme égale à $u(\lambda) = e^{\frac{\lambda^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{2^n n!}$; l'opérateur $\underline{U}$ est donc <u>régulier</u>. L'application du lemme énoncé ci-dessus montre donc que $a_{2n} = \frac{1}{2^n n!}$ $a_{2n+1}=0$ pour tout $n \geqslant 0$; l'opérateur $\underline{U}$ est donc d'ordre 0.

On a $1/u(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^{2n}}{2^n n!}$, la série étant absolument convergente pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$; une nouvelle application du lemme montre que $\beta_{2n} = (-1)^n/2^n$, $\beta_{2n+1}=0$; en outre, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} u_n(x)$ est absolument convergente pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} u_n(x) = \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}+\lambda x\right) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}(\lambda - x)^2\right).$$

En appliquant la formule de Taylor à la fonction $\exp(-\frac{x}{2})$, on obtient donc l'expression suivante des polynomes $u_n(x)$

$$u_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

Ce polynome est appelé <u>polynome d'Hermite</u> de degré n, et se note le plus souvent $H_n(x)$. Les formules (5), (6) et (7) donnent ici

$$\frac{dH_n}{dx} = nH_{n-1}(x)$$

$$H_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_{n-k}(x) y^k$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(x+\xi)\, d\xi = x^n$$

et la formule (19) devient, pour $h=0$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, f(x) = \sum_{m=0}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} f^{(m)}(\xi)\, d\xi\right) \frac{H_m(x)}{m!}$$
$$- \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_0^{\xi} \frac{H_n(x+\eta)}{n!} e^{-(\xi+x)^2/2} f^{(n+1)}(x+\xi-\eta)\, d\eta \qquad *$$

4. La formule sommatoire d'Euler-Maclaurin.

Dans la formule (26), remplaçons x par 0, et h par x ; comme $B_m(0)=b_m$, il résulte des relations (16) et de la définition des nombres de Bernoulli, qu'on peut écrire, pour tout entier $p > 0$

$$(28)\qquad f(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt - \frac{1}{2}(f(x+1)-f(x)) + \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k-1}B_k}{(2k)!}(f^{(2k-1)}(x+1)-f^{(2k-1)}(x))+R_p(x)$$

avec

$$(29)\qquad R_p(x) = \frac{-1}{(2p+1)!}\int_0^1 B_{2p+1}(t)f^{(2p+1)}(x+1-t)dt$$

Dans cette formule, remplaçons successivement x par $x+1, x+2, \ldots, x+n$, et ajoutons les formules obtenues membre à membre ; il vient

$$(30)\qquad f(x)+f(x+1)+\ldots+f(x+n) = \int_x^{x+n+1} f(t)dt - \frac{1}{2}(f(x+n+1)-f(x)) + \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k-1}B_k}{(2k)!}(f^{(2k-1)}(x+n+1)-f^{(2k-1)}(x))+T_p(x,n)$$

avec

$$(31)\qquad T_p(x,n) = -\frac{1}{(2p+1)!}\int_0^1 B_{2p+1}(t)\left(\sum_{k=0}^{n} f^{(2p+1)}(x+k+1-t)\right)dt .$$

La formule (30) est dite formule sommatoire d'Euler-Maclaurin ; elle est applicable à toute fonction complexe ayant une dérivée (2p+1)-ème continue dans un intervalle $[x_0, +\infty[$, pour tout $x \geqslant x_0$. Nous verrons au § 3 comment on peut majorer le reste $T_p(x,n)$ de cette formule.

\- - - - - - - - - - - - -