LIVRE VII
CHAPITRE II (ETAT 1)
EQUATIONS DIFFERENTIELLES
(THEORIE ELEMENTAIRE)

Rédaction n° 011

Nombre de pages : 36

Nombre de feuilles : 36

Livre VII (Isolé !!!)
Chap II. $\boxed{\text{Etat 1}}$
Equations différentielles

$\boxed{11}$

L I V R E VII

(Ancien CHAPITRE II) (Etat 1)

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

(Théorie élémentaire)

§ 1. Théorèmes d'existence.

1. La notion d'équation différentielle. Soient E et F deux espaces normés sur le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes ; nous désignerons dans ce qui suit par K le corps des scalaires de E et de F (on a donc $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$). Soit A un ensemble ouvert dans K si $K = \mathbb{R}$, un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$ si $K = \mathbb{C}$, B et C deux ensembles ouverts dans E, f une application de $A \times B \times C$ dans F. On dit qu'une fonction g, définie dans un voisinage $V \subset A$ d'un point $x_0 \in A$, et dérivable dans V, est solution (ou intégrale) dans V de l'équation différentielle du premier ordre

(1) $$f(x,y,y')=0$$

si, pour tout $x \in V$, on a $g(x)$ B, $g'(x)$ C, et

$$f(x,g(x),g'(x))=0$$

A cette notion se rattache en premier lieu celle de système d'équations différentielles du premier ordre. Soit (E_i), (F_j) deux familles finies d'espaces normés sur K $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$, A un ensemble ouvert dans K, B_i et C_i deux ensembles ouverts dans E_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, f_j une application de $A \times \prod_{i=1}^{m} B_i \times \prod_{i=1}^{m} C_i$ dans F_j. On dit que m fonctions g_i, définies dans un voisinage $V \subset A$ d'un point $x_0 \in A$, et dérivables dans V, forment un système de solutions (ou d'intégrales) dans V du système d'équations différentielles du premier ordre

(2) $$f_j(x,y_1,\dots,y_m,y'_1,\dots,y'_m)=0 \qquad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

si, pour tout $x \in V$, on a $g_i(x) \in B_i$, $g_i'(x) \in C_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ et

$$f_j(x, g_1(x), \ldots, g_m(x), g_1'(x), \ldots, g_m'(x)) = 0$$

pour $1 \leqslant j \leqslant n$. Si on pose $E = \prod_{i=1}^{m} E_i$, $F = \prod_{j=1}^{n} F_j$, $B = \prod_{i=1}^{m} B_i$, $C = \prod_{i=1}^{m} C_i$ la fonction $f = (f_j)$ est une application de $A \times B \times C$ dans F, et si $g = (g_i)$, la fonction g est solution de l'<u>unique</u> équation différentielle (1), qui est donc équivalente au système (2).

Une seconde extension est la notion d'<u>équation différentielle d'ordre n</u>. Si A est un ouvert dans K, B_p $(0 \leqslant p \leqslant n)$ $n+1$ ensembles ouverts dans E, f une application de $A \times \prod_{p=0}^{n} B_p$ dans F, on dit qu'une fonction g, définie dans un voisinage $V \subset A$ d'un point $x_0 \in A$, et n fois dérivable dans V, est <u>solution</u> (ou <u>intégrale</u>) dans V <u>de l'équation différentielle d'ordre n</u>

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{3}$$

si, pour tout $x \in V$, on a $g(x) \in B_0$, $g^{(p)}(x) \in B_p$ pour $1 \leqslant p \leqslant n$, et

$$f(x, g(x), g'(x), g''(x), \ldots, g^{(n)}(x)) = 0 .$$

Mais cette notion se ramène à celle de système d'équations du premier ordre (et par suite à <u>une seule</u> équation du premier ordre).

En effet, si on pose $g_p = g^{(p)}$ dans V pour $1 \leqslant p \leqslant n-1$, les n fonctions g, g_p $(1 \leqslant p \leqslant n-1)$ satisfont au système d'équations différentielles du premier ordre

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(x, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_{n-1}') = 0 \\ \qquad y_p' = y_{p+1} \qquad (0 \leqslant p \leqslant n-2) \end{array} \right.$$

Réciproquement, si $g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}$ est un système de solutions de ce système d'équations dans V, on voit par récurrence que g_0 est n fois dérivable dans V et satisfait à l'équation (3).

Enfin, ces deux extensions sont des cas particuliers de la notion de <u>système d'équations différentielles d'ordre n</u> : on y considère deux

deux familles finies (E_i), (F_j) d'espaces normés sur K $(1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant q)$, un ensemble A ouvert dans K, $n+1$ ensembles ouverts B_{ik} $(0 \leqslant k \leqslant n)$ dans chacun des E_i, et q applications f_j de $A \times \prod_{i,k} B_{ik}$ dans F_j ; p fonctions g_i, définies dans un voisinage $V \subset A$ de $x_0 \in A$, et n fois dérivables dans V, forment un système de solutions dans V du système d'équations différentielles d'ordre n

$$(5) \qquad f_j(x,y_1,\ldots,y_p,y'_1,\ldots,y'_p,y''_1,\ldots,y''_p,\ldots,y_1^{(n)},\ldots,y_p^{(n)}) = 0$$
$$(1 \leqslant j \leqslant q)$$

si, pour tout $x \in V$, on a $g_i(x) \in B_{i0}$, $g_i^{(k)}(x) \in B_{ik}$ $(1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant k \leqslant n)$ et

$$f_j(x,g_1(x),\ldots,g_p(x),g'_1(x),\ldots,g'_p(x),\ldots,g_1^{(n)}(x),\ldots,g_p^{(n)}(x)) = 0$$
$$(1 \leqslant j \leqslant q)$$

Ici, encore, un tel système est équivalent au système d'équations du premier ordre

$$(6) \qquad f_j(x,y_{10},\ldots,y_{p0},y_{11},\ldots,y_{p1},\ldots,y_{1,n-1},\ldots,y_{p,n-1},y'_{1,n-1},\ldots,y'_{p,n-1})=0$$
$$y'_{ik} = y_{i,k+1}$$
$$(1 \leqslant j \leqslant q\ ,\ 1 \leqslant i \leqslant p\ ,\ 0 \leqslant k \leqslant n-2)$$

et finalement à <u>une seule</u> équation du premier ordre, dont la solution prend ses valeurs dans un espace normé convenable.

Un système (5) est dit <u>scalaire</u> lorsque tous les espaces normés E_i et F_j sont identiques au corps des scalaires K ; les systèmes scalaires (et en particulier les <u>équations scalaires</u>) sont ceux qui interviennent le plus souvent dans les applications.

Si $(g_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est (dans le voisinage V) un système d'intégrales d'un système scalaire (5), la partie de l'espace K^{p+1} définie par les relations $x \in V$, $y_1=g_1(x)$, $y_2=g_2(x),\ldots,y_p=g_p(x)$ est apelée une <u>courbe intégrale</u> du système (5) .

<u>Exemples</u>. 1) La fonction x^2 est (dans K) une intégrale de chacune des équations différentielles

$$y'=2x\ ,\ y''=2\ ,\ y'''=0\ ,\ xy'-2y=0\ ,\ xy''-y'=0\ ,\ y'^2-4y=0$$
$$x^2y''-2xy'+2y=0\ ,\quad y'^2=2yy''$$

2) Quelle que soit la fonction f , dérivable dans un ensemble ouvert V , et pour tout couple de nombres a,b , le système des fonctions $af(x)$, $bf(x)$ est solution dans V de l'équation différentielle

$$yz'-zy'=0\ .$$

<u>2. Transformation d'une équation différentielle</u>. Considérons une équation différentielle du premier ordre (1). Soit E_1 un second espace normé sur le corps K , A_1 un ensemble ouvert dans K , B_1 un ensemble ouvert dans E_1 , et soit $(x_1,y_1)\to(u(x_1,y_1),v(x_1,y_1))$ une application différentiable de $A_1\times B_1$ dans $A\times B$. Supposons qu'on remplace, dans $u(x_1,y_1)$, y_1 par une application dérivable de A_1 dans B_1 ; on obtient alors une application u_1 de A_1 dans A , dont la dérivée est donnée par la formule

$$u_1'(x_1)=\frac{\partial u}{\partial x_1}+d_2u(x_1,y_1;y_1')$$

Si on suppose que cette dérivée ne s'annule pas dans A_1 , et que u_1 soit une application biunivoque de A_1 dans A , elle admet une application réciproque u_2 (appliquant sur A_1 une partie ouverte A_2 de A) dont la dérivée est $1/u_1'(u_2(x))$; remplaçant, dans $v(x_1,y_1)$, y_1 par $y_1(u_2(x))$ et x_1 par $u_2(x)$, on obtient une application y de A dans B dont la dérivée est donnée par

$$y'=\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}+d_2v(x_1,y_1;y_1')\right)\Big/\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}+d_2u(x_1,y_1;y_1')\right)\tag{7}$$

où x_1 est remplacé partout par $u_2(x)$.

Cela étant, supposons que la fonction y_1 soit telle que les valeurs de y' données par la formule (7) appartiennent à C lorsque x parcourt A_2

6

si en outre y_1 satisfait à l'équation différentielle

$$(8)\qquad f\left(u(x_1,y_1),\ v(x_1,y_1),\ \frac{\frac{\partial v}{\partial x_1}+d_2v(x_1,y_2;\ y_1')}{\frac{\partial u}{\partial x_1}+d_2u(x_1,y_1;y_1')}\right)=0$$

la fonction $y(x)=v(u_2(x),y_1(u_2(x))$ sera une solution de l'équation(1). On dit que l'équation différentielle (8) est <u>transformée</u> de l'équation (1) par l'application (u,v) .

3. <u>Equations résolues du premier ordre</u>. Nous allons étudier dans ce qui suit les équations du premier ordre dites "résolues par rapport à y' " ; ce sont les équations (1) dont le premier membre est de la forme $y'-g(x,y)$, où g est une application de $A\times B$ dans E ; une telle équation s'écrit plus souvent sous la forme

$$(9)\qquad y'=g(x,y)$$

Dans le cas particulier où g est une fonction ne dépendant pas de y , c'est-à-dire une application de A dans E , l'équation différentielle $y'=g(x)$ a pour solutions dans A toutes les <u>primitives</u> de la fonction g; on sait (Livre IV) que s'il existe au moins une primitive de g , toutes les autres n'en diffèrent que par une constante ; il revient au même de dire que dans ce cas, pour tout point (x_0,y_0) de $A\times B$, il existe <u>une solution et une seule</u> de l'équation telle que $y(x_0)=y_0$.

Nous allons généraliser ce résultat à certaines équations (9) .
Nous nous restreindrons d'abord au cas où A est une partie ouverte de $\mathbb{R}$ (K étant indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ; nous supposerons que g est une application <u>continue</u> et <u>bornée</u> de $A\ \ B$ dans E ; si f est une solution de l'équation (9) dans un voisinage V d'un point $x_0\in A$, f est continue dans V et y admet une dérivée <u>continue</u> égale à $g(x,f(x))$; on peut par suite écrire

$$(10)\qquad f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}g(t,f(t))dt$$

Inversement, supposons que f soit une application <u>continue</u> de V dans B, satisfaisant à la relation (10) dans V ; le second membre de (10) admet alors pour dérivée $g(x,f(x))$ pour tout point $x \in V$, et par suite f est une solution de l'équation (9).

Si on se propose de rechercher seulement les solutions de (9) dans V pour lesquelles $f(x_0)$ prend une valeur <u>donnée</u> $y_0 \in B$, on voit donc que ce problème équivaut à trouver les fonctions continues qui satisfont identiquement à la relation

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t,f(t))dt \tag{11}$$

Ce dernier problème peut se formuler en termes différents : considérons l'espace vectoriel H des applications continues et bornées de V dans E, normé par la norme $\|u\| = \sup_{x \in V} \|u(x)\|$. Soit H' le sous-espace de H formé des applications continueset bornées de V dans B ; l'application

$$u \to y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t,u(t))dt = L(u)$$

est une application de H' dans H ; dire qu'une fonction f est solution de (10) dans V signifie que f est un élément de H' <u>invariant</u> pour l'application L. Nous allons chercher à appliquer à L le "théorème du point fixe" (<u>Esp. vect. top.</u>, chap.V, §3, prop.1) ; il faut d'abord pour cela que H soit <u>complet</u>, ce qui équivaut à la condition que E est <u>complet</u> ; il faut ensuite qu'il existe un nombre $k < 1$ tel que, dans une partie ouverte de H' (qui est un ensemble ouvert dans H), on ait $\|L(u)-L(v)\| \leqslant k.\|u-v\|$. Pour assurer cette dernière condition, nous allons faire sur la fonction g l'hypothèse suivante :

(L) <u>Il existe une boule ouverte</u> $S \subset B$ <u>de centre</u> y_0, <u>et une fonction scalaire</u> $\geqslant 0$, $h(x)$, <u>définie et continue dans un intervalle ouvert</u> $]x_0,x_1[$ <u>contenu dans</u> A, <u>telle que l'intégrale impropre</u> $\int_{x_0}^{x_1} h(t)dt$ <u>soit convergente, et que pour tout x tel que</u> $|x-x_0| \leqslant x_1-x_0$, <u>et tout couple de points</u> $y_1 \in S$, $y_2 \in S$, <u>on ait</u>

(12) $$\| g(x,y_1)-g(x,y_2)\| \leqslant h(x_0+|x-x_0|).\|y_1-y_2\|$$

Supposons en outre que V soit contenu dans un intervalle <u>assez petit</u> $]x_0-\ell,x_0+\ell[$, tel que $\ell < x_1-x_0$; et soit U la partie ouverte de H formée des applications continues de V dans S ; pour $u \in U$, $v \in U$, si on pose $w=L(u)-L(v)$, on aura pour tout $x \in V$,

$$w(x) = \int_{x_0}^{x}(g(t,u(t))-g(t,v(t)))dt$$

d'où, en vertu de (12)

(13) $$\|w(x)\| \leqslant \|u-v\| . \int_{x_0}^{x_0+|x-x_0|} h(t)dt = K(x)\|u-v\|$$

Comme par hypothèse $K(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0 , on peut trouver ℓ assez petit pour que la relation $|x-x_0| \leqslant \ell$ entraîne $K(x) \leqslant \frac{1}{2}$ (par exemple), d'où

$$\|L(u)-L(v)\| \leqslant \frac{1}{2}\|u-v\|$$

d'après la définition de la norme dans H .

D'autre part, si V est pris assez petit, la borne supérieure de $\|L(u)-u_0\|$ dans U est arbitrairement petite, u_0 désignant la fonction constante égale à y_0 ; en effet, si M est la borne supérieure de $\|g(x,y)\|$ pour $|x-x_0| < x_1-x_0$, et $y \in S$, on a, en posant $v=L(u)-u_0$

$$v(x) = \int_{x_0}^{x} g(t,u(t))dt$$

d'où $$\|v(x)\| \leqslant M\ell$$

pour tout $x \in V$, c'est-à-dire $\|L(u)-u_0\| \leqslant M\ell$.

L'application du théorème du point fixe donne alors le résultat suivant :

<u>Théorème 1.</u> <u>Si la fonction</u> g <u>satisfait à la condition</u> (L), <u>et si l'intervalle</u> $V =]x_0-\ell,x_0+\ell[$ <u>est assez petit, il existe une solution u et une seule de l'équation</u> (9) <u>définie dans cet intervalle, et telle que</u> $u(x_0)=y_0$.

L'existence de u est en effet une conséquence du théorème du point fixe, d'après les remarques qui précèdent ; mais l'<u>unicité</u> de la solution de (9) dans V ne découle pas immédiatement de ce théorème, car il n'est pas certain a priori qu'une solution de (9) dans V prenne ses valeurs dans S . On peut toutefois raisonner comme suit : si v est une solution de (9) définie dans V et telle que $v(x_0)=y_0$, v est continue au point x_0 , donc il existe un voisinage $W\subset V$ de x_0 (dépendant a priori de la solution v) dont l'image par v est contenue dans S ; d'après le théorème du point fixe, on a $v(x)=u(x)$ dans W . Supposons que V ait été pris assez petit pour que $\overline{u(V)}\subset S$, et soit x_2 la borne supérieure de l'ensemble des $x\in V$ tels que $u(z)=v(z)$ pour $x_0\leqslant z\leqslant x$; on a $u(x_2)=v(x_2)$ par continuité, donc, au voisinage de x_2 , v prend ses valeurs dans S ; en raisonnant au voisinage de x_2 comme précédemment au voisinage de x_0 , on voit qu'il existe un voisinage de x_2 dans lequel $u(x)=v(x)$, et cela entraîne nécessairement $x_2=x_0+\ell$

De la même manière, on voit que la borne inférieure de l'ensemble des $x\in V$ tels que $u(z)=v(z)$ pour $x\leqslant z\leqslant x_0$, est $x_0-\ell$, ce qui achève la démonstration.

<u>Remarque.</u> Soit A' le complémentaire de $\{x_0\}$ dans A ; si on suppose seulement g définie et continue dans $A'\times B$ toute fonction f solution de (9) dans $V\cap A'$, et continue au point x_0 , satisfera encore à l'équation (10) (et réciproquement) si, dans $A'\times B$, on a $\|g(x,y)\|\leqslant r(x)$, r étant une fonction scalaire définie dans A' et telle que l'intégrale $\int_{x_0}^{x} r(t)dt$ soit convergente. Si $v=L(u)-u_0$, $\|v(x)\|$ aura encore dans V une borne supérieure arbitrairement petite avec ℓ , puisque $\|v(x)\|\leqslant\int_{x_0}^{x_0+\ell} r(t)dt$, et que l'intégrale du second membre tend vers 0 avec ℓ par hypothèse. Le th.1 s'applique donc encore dans ces conditions.

Corollaire. Soit A un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$, B un ensemble ouvert dans E ; on suppose que la fonction g, continue et bornée dans A B, satisfait à une condition (L) au voisinage de chaque point $(x,y)\in A\times B$ (le voisinage V, la boule S et la fonction scalaire h qui figurent dans cette condition dépendant éventuellement du point (x,y) considéré). Dans ces conditions, pour tout point $(x_0,y_0)\in A\times B$, il existe un plus grand intervalle ouvert I contenant x_0, et dans lequel il existe une intégrale u de $y'=g(x,y)$, prenant ses valeurs dans B et telle que $u(x_0)=y_0$. Cette intégrale est unique ; si l'origine α (resp. l'extrémité β) de I est finie, la limite à droite (resp. à gauche) de u au point α (resp. β) existe ; en outre, si α (resp. β) n'est pas une extrémité de A, cette limite appartient à la frontière de B.

Tout d'abord, si J, J' sont deux intervalles ouverts contenus dans A, contenant x_0, u et v deux intégrales de $y'=g(x,y)$ définies respectivement dans J et J' à valeurs dans B, et prenant toutes deux la valeur y_0 au point x_0, le même raisonnement que dans le th. 1 prouve que u=v dans $J\cap J'$. Il en résulte que si I désigne la réunion de tous les intervalles $J\subset A$ dans lesquels existe une intégrale de $y'=g(x,y)$ à valeurs dans B et prenant la valeur y_0 au point x_0, ces intégrales sont toutes les restrictions d'une même intégrale u définie dans I. Supposons maintenant par exemple $\beta<+\infty$; si M est la borne supérieure de $\|g(x,y)\|$ dans $A\times B$, on a $\|u'(x)\|\leqslant M$ pour $x\in I$ donc, d'après le th. des accroissements finis, $\|u(t)-u(t')\|\leqslant M|t-t'|$ pour $t\leqslant t'<\beta$; le critère de Cauchy prouve par suite que u a une limite à gauche z au point β. Si $\beta\in A$, montrons que l'on ne peut avoir $z\in B$; sinon, en prolongeant u par continuité au point β, u admettrait en ce point une dérivée à gauche satisfaisant à $u'_s(\beta)=g(\beta,u(\beta))=g(\beta,z)$ (Fonct. var. réelle, chap. I, § 1, prop.) ; or, comme $(\beta,z)\in A\times B$, il existerait un intervalle ouvert V contenant β, contenu dans A, et une intégrale v de $y'=g(x,y)$ définie dans V , à valeurs dans B , et telle que $v(\beta)=z$. On aurait $u=v$ dans $I\cap V$, et la fonction égale à u dans I , à v dans V , serait une intégrale de $y'=g(x,y)$, à valeurs dans B , prenant la valeur y_0 au point x_0 , et définie dans un intervalle $I\cup V$ contenant I et distinct de I , ce qui contredit la définition de I.

<u>Remarque</u>. La condition (L) n'est pas nécessaire pour qu'il existe une intégrale et une seule de $y'=g(x,y)$ définie dans un voisinage V de x_0 et prenant la valeur y_0 en ce point (cf. exerc. 9). Mais si on n'impose à la fonction g aucune autre condition que d'être continue et bornée dans $A\times B$, il peut se faire qu'il existe <u>une infinité d'intégrales</u> de $y'=g(x,y)$ prenant la même valeur en un point donné. Par exemple, l'équation différentielle scalaire $y'= 2\sqrt{|y|}$ admet pour intégrales prenant la valeur 0 pour $x=0$ toutes les fonctions définies par

$$u(x) = 0 \quad \text{pour} \quad -\alpha < x < \alpha$$
$$u(x) = -(x+\alpha)^2 \quad \text{pour} \quad x \leqslant -\alpha$$
$$u(x) = (x-\alpha)^2 \quad \text{pour} \quad x \geqslant \alpha$$

quel que soit $\alpha \geqslant 0$.

Tout ce qui précède se généralise aussitôt au cas où on considère au lieu de l'équation (9), l'équation différentielle "à droite"

$$y'_d = g(x,y) \tag{14}$$

c'est-à-dire où on recherche une fonction f, continue dans un intervalle $[x_0,x_1]$, dérivable à droite dans cet intervalle, satisfaisant à $f(x_0)=y_0$, et à l'identité $f'_d(x)=g(x,f(x))$; dans l'équation (14), la fonction g est supposée telle que pour toute application continue h de A dans B , $g(x,h(x))$ soit <u>réglée</u> dans A (Livre IV, chap.I, §2) . Alors toute solution f du problème précédent satisfait aussi à la relation (11), et les raisonnements qui conduisent au th.1 restent valables (en se bornant à un intervalle semi-ouvert d'origine x_0) .

4. Intégration approchée d'une équation différentielle. Nous allons préciser le résultat du th.1 en faisant sur la fonction g une hypothèse plus restrictive que la condition (L), hypothèse qui est dite condition de Lipschitz :

(L_0) Il existe une boule ouverte $S \subset B$ de centre y_0, et une constante $k \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in V$ et tout couple de points y_1, y_2 de S, on ait

$$\| g(x,y_1)-g(x,y_2) \| \leqslant k . \| y_2-y_1 \| \tag{15}$$

Lorsque cette condition est remplie, on dit que g est lipschitzienne (pour la constante k) dans $V \times S$.

Toute fonction g admettant une différentielle par rapport à y dans $V \times S$, cette différentielle étant bornée dans $V \times S$, satisfait à une condition de Lipschitz dans $V \times S$, k étant la borne supérieure de la norme de la différentielle de g par rapport à y dans cet ensemble.

Sous cette hypothèse, nous allons d'abord établir la proposition suivante :

Proposition 1. Soient u et v deux fonctions dérivables à droite définies dans V, à valeurs dans S, et satisfaisant dans V aux inégalités

$$\| u'_d(x)-g(x,u(x)) \| \leqslant \varepsilon_1 , \qquad \| v'_d(x)-g(x,v(x)) \| \leqslant \varepsilon_2$$

Dans ces conditions, si g vérifie l'hypothèse (L_0), on a, pour tout $x \in V$

$$\| u(x)-v(x) \| \leqslant \| u(x_0)-v(x_0) \| e^{k|x-x_0|}+(\varepsilon_1+\varepsilon_2) \frac{(e^{k|x-x_0|}-1)}{k} \tag{16}$$

En effet, on déduit d'abord des hypothèses, par application du th. des accroissements finis, que

$$\| u(x)-u(x_0)- \int_{x_0}^{x} g(t,u(t))dt \| \leqslant \varepsilon_1 |x-x_0|$$
$$\| v(x)-v(x_0)- \int_{x_0}^{x} g(t,v(t))dt \| \leqslant \varepsilon_2 |x-x_0|$$

d'où

$$\| u(x)-v(x) \| \leq \| u(x_0)-v(x_0) \| + \left\| \int_{x_0}^{x} (g(t(u(t))-g(t,v(t)))dt \right\| + (\varepsilon_1+\varepsilon_2)|x-x_0|$$

Or, on a, d'après (L_0), en supposant $x > x_0$

$$\left\| \int_{x_0}^{x} (g(t,u(t))-g(t,v(t)))dt \right\| \leq \int_{x_0}^{x} \| g(t,u(t))-g(t,v(t)) \| dt \leq$$

$$\leq k. \int_{x_0}^{x} \| u(t)-v(t) \| dt$$

ou, en posant $w(x) = \| u(x)-v(x) \|$, $a = \| u(x_0)-v(x_0) \|$, $b = \varepsilon_1+\varepsilon_2$

(17) $\quad w(x) \leq a+b\,|x-x_0| + k \int_{x_0}^{x} w(t)dt$

si $f(x) = \int_{x_0}^{x} w(t)dt$, cette relation s'écrit aussi

$$f'_d(x)-kf(x) \leq a+b(x-x_0)$$

ou encore, si $h(x) = f(x)e^{-k(x-x_0)}$

$$h'_d(x) \leq (a+b(x-x_0))e^{-k(x-x_0)}$$

Appliquant le théorème des accroissements finis à cette inégalité il vient, par un calcul élémentaire

$$f(x) \leq \left(\frac{a}{k} + \frac{b}{k^2}\right)(e^{k(x-x_0)} - 1) - \frac{b(x-x_0)}{k}$$

et, en portant dans (17)

$$w(x) \leq a.e^{k(x-x_0)} + \frac{b}{k}(e^{k(x-x_0)} - 1)$$

ce qui n'est autre que (16). Démonstration analogue pour $x < x_0$.

Nous allons en déduire le théorème suivant :

Théorème 2. Soient V un voisinage de $x_0 \in R$, S une boule ouverte de centre y_0 et de rayon r dans E ; g une fonction lipschitzienne pour la constante k dans $V \times S$, h une fonction lipschitzienne (pour une constante quelconque) dans $V \times S$ telle que, dans $V \times S$, on ait $\| h(x,y)-g(x,y) \| \leq \varepsilon$. On suppose qu'il existe dans V une intégrale u de $y'=g(x,y)$ à valeurs dans S telle que $u(x_0) = y_0$. Dans ces conditions, si on pose $\varphi(x) = \frac{\varepsilon}{k}(e^{k|x-x_0|} - 1)$, et si on désigne par I le plus grand intervalle ouvert contenu dans V , contenant x_0 et dans lequel on a $\| u(x)-y_0 \| + \varphi(x) < r$, il existe dans I une intégrale et

<u>une seule</u> v <u>de</u> $y'=h(x,y)$, <u>prenant ses valeurs dans</u> S , <u>telle que</u> $v(x_0)=y_0$, <u>et on a</u> $\|u(x)-v(x)\| \leqslant \varphi(x)$ <u>pour tout</u> $x \in I$.

D'après le cor. du th.1, il existe un plus grand intervalle ouvert J contenant x_0 , tel que, dans J , il existe une intégrale et une seule v de $y'=h(x,y)$, satisfaisant à $v(x_0)=y_0$ et prenant ses valeurs dans S ; nous allons prouver que $J \supset I$.

Dans le cas contraire, l'extrémité x_1 de J , par exemple, appartiendrait à I ; montrons que cette hypothèse est absurde. On a, d'après l'hypothèse, $\|v'(x)-g(x,v(x))\| \leqslant \varepsilon$ dans J , donc, d'après la prop.1, on a

$$(18) \qquad \|u(x)-v(x)\| \leqslant \varphi(x)$$

dans J . On sait (cor. du th.1) que $v(x)$ a une limite à gauche z_1 au point x_1 ; passant à la limite dans (18) , il vient $\|u(x_1)-z_1\| \leqslant \varphi(x_1)$, et comme on a supposé $x_1 \in I$, on a $z_1 \in S$, ce qui contredit le cor. du th.1 .

<u>Proposition 2</u>. <u>Les notations étant les mêmes que dans le th.2, on suppose qu'il existe dans</u> V <u>une fonction dérivable</u> v , <u>à valeurs dans</u> S , <u>telle que</u> $v(x_0)=y_0$, <u>et</u> $\|v'(x)-g(x,v(x))\| \leqslant \varepsilon$ <u>dans</u> V . <u>Dans ces conditions, il existe une intégrale</u> (et une seule) <u>u de</u> $y'=g(x,y)$ <u>dans</u> I , <u>telle que</u> $u(x_0)=y_0$, <u>et on a</u> $\|u(x)-v(x)\| \leqslant \varphi(x)$ <u>dans</u> I .

Nous laissons au lecteur la démonstration, qui est tout à fait analogue à celle du th. 2 .

Le théorème 2, la prop.2 et leurs démonstrations s'étendent immédiatement au cas où on considère deux équations différentielles <u>à droite</u> $y'_d = g(x,y)$ $\quad y'_d = h(x,y)$; il faut y supposer g lipschitzienne pour la constante k , h lipschitzienne pour une constante quelconque, et g et h telles que $g(x,f(x))$ et $h(x,f(x))$ soient des fonctions <u>réglées</u> pour toute fonction continue f à valeurs dans S .

5. Applications : I. La méthode de Cauchy-Lipschitz. On peut déduire des propositions précédentes une méthode d'approximation d'une intégrale u d'une équation $y'=g(x,y)$. Nous supposerons que g est uniformément continue et lipschitzienne pour la constante k dans $V\times S$, V étant un voisinage de x_0, S une boule ouverte de centre y_0 ; supposons que u soit une intégrale de $y'=g(x,y)$, définie dans V, prenant ses valeurs dans S et telle que $u(x_0)=y_0$. Soit $I=[\alpha,\beta]$ un intervalle compact contenu dans V ; pour tout $\varepsilon>0$ assez petit, nous allons montrer qu'on peut calculer une fonction continue v, définie dans I, et telle que $\|u(x)-v(x)\|\leqslant\varepsilon$ pour tout $x\in I$.

Définissons d'abord v dans l'intervalle $[x_0,\beta]$; on raisonnera de même ensuite dans $[\alpha,x_0]$. Prenons ε assez petit pour que la distance de l'ensemble compact $u(I)$ à la frontière de S soit $>\varepsilon$; soit δ un nombre >0 assez petit pour que, dans I, on ait $\frac{\delta}{k}(e^{k|x-x_0|}-1)\leqslant\varepsilon/2$; soit ensuite μ un nombre >0 et $<\varepsilon/2$ tel que les relations $|x_1-x_2|\leqslant\mu$, $\|y_1-y_2\|\leqslant\mu$ entraînent $\|g(x_1,y_1)-g(x_2,y_2)\|\leqslant\delta$

Cela étant, soit $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une suite croissante de n points de $[x_0,\beta]$, telle que $x_n=\beta$, et que $|x_{i+1}-x_i|\leqslant\mu/(M+1)$, où M est la borne supérieure de $\|g(x,y)\|$ dans $V\times S$. Nous allons voir qu'on peut définir v par récurrence sur i de la façon suivante : pour $x_0\leqslant x\leqslant x_1$, $v(x)=y_0+g(x_0,y_0)(x-x_0)$; pour $x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$, $v(x)=v(x_i)+g(x_i,v(x_i))(x-x_i)$. En effet, dans $[x_0,x_1]$, on a $\|v(x)-y_0\|=\|g(x_0,y_0)\|(x-x_0)\leqslant\mu$, donc $v(x)\in S$; comme $v(x_0)=y_0$ et $\|v'_d(x)-g(x,v(x))\|=\|g(x,v(x))-g(x_0,y_0)\|\leqslant\delta$ d'après le choix de μ, la prop. 2 prouve que, dans $[x_0,x_1]$, on a $\|u(x)-v(x)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. Supposons maintenant prouvé que la définition de $v(x)$ est possible dans $[x_0,x_i]$, et que, dans cet intervalle, on a $\|u(x)-v(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$; si, dans $[x_i, x_{i+1}]$, on définit v comme ci-dessus, on a $\|v(x)-v(x_i)\| = \|g(x_i,v(x_i))\| (x-x_i) \leqslant \mu$, donc, puisque $\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $\|v(x)-u(x_i)\| \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve que v(x) prend ses valeurs dans S . En outre, dans $[x_i, x_{i+1}]$, on a $\|v'_d(x)-g(x,v(x))\| = \|g(x,v(x))-g(x_i,v(x_i))\| \leqslant \delta$, donc la prop.2 prouve que, dans $[x_0, x_{i+1}]$, on a encore $\|u(x)-v(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Exemple. Considérons l'équation scalaire $y'=y$, et prenons $x_0=0$ $y_0=1$, et pour tout $\beta > 0$, $x_i = i\frac{\beta}{n}$. L'application de la méthode précédente donne, dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$

$$v(x) = (1 + \frac{\beta}{n})^i \; (1+x-x_i)$$

comme on le voit par récurrence ; la propositæon précédente prouve donc que cette fonction tend uniformément vers e^x dans l'intervalle $[0,\beta]$ lorsque n croît indéfiniment.

Si inversement, pour μ assez petit, la construction précédente est possible (c'est-à-dire que les $v(x_i)$ appartiennent tous à S), la prop.2 prouve l'existence d'une intégrale u de $y'=g(x,y)$ dans un intervalle $[0,\gamma]$ dont l'extrémité diffère de β d'aussi peu que l'on veut. Or, la construction de v sera certainement possible si $\beta < \frac{r}{M}$, r étant le rayon de S , car on voit aisément par récurrence qu'on a $\|v(x_i)-y_0\| \leqslant M(x_i-x_0)$. En résumé :

Proposition 3. Soient V un voisinage de $x_0 \in R$, S une boule ouverte de centre y_0 et de rayon r dans E ; g une fonction lipschitzienne dans $V \times S$, telle que $\|g(x,y)\| \leqslant M$ dans $V \times S$. Dans ces conditions, il existe une intégrale et une seule u de $y'=g(x,y)$, définie dans l'intersection de V et de l'intervalle $]x_0 - \frac{r}{M}, x_0 + \frac{r}{M}[$, et telle que $u(x_0)=y_0$.

Il est remarquable que l'intervalle ainsi déterminé ne dépende pas de la constante k qui figure dans la condition de Lipschitz à laquelle satisfait g .

- Exemple. Considérons l'équation scalaire $y'=1+y^2$, et prenons $x_0=0$, $y_0=0$. Dans l'intervalle $[-r,+r]$, on a $|1+y^2| \leqslant 1+r^2$, donc pour tout $r>0$, il existera une intégrale et une seule u de l'équation, telle que $u(0)=0$, dans l'intervalle $|x| \leqslant \frac{r}{1+r^2}$; en prenant la valeur $r=1$ pour laquelle $\frac{r}{1+r^2}$ admet un maximum, on voit que u est continue pour $|x|<\frac{1}{2}$. Par ailleurs, on a $u(x)=\operatorname{tg} x$, donc on sait que u est continue pour $|x|<\frac{\pi}{2}$. Cet exemple montre en passant que la fonction g peut être définie et continue dans tout l'espace $R \times E$ sans qu'il existe des intégrales de l'équation $y'=g(x,y)$ continues dans R tout entier.

Z

On peut montrer en outre qu'il n'est pas possible d'améliorer la valeur $\frac{r}{M}$ qui intervient dans la prop.3, sans faire d'hypothèses supplémentaires sur la fonction g (exerc.1) .

6. Applications. II. Dépendance des conditions initiales. Le th. 2 permet d'étudier de façon plus précise la façon dont l'intégrale $u(x,z)$ de $y'=g(x,y)$ qui prend une valeur z (assez voisine de y_0) au point x_0 , dépend de z . Posons en effet $u(x,z)=z+v(x,z)$; v est l'intégrale de l'équation différentielle $y'=g(x,z+y)$ qui prend la valeur 0 au point $x=0$. Soit r le rayon de la boule S où $g(x,y)$ est lipschitzienne ; nous supposerons dans ce qui suit que $\|z-y_0\| \leqslant \frac{r}{2}$; alors la fonction $h_z(x,y)=g(x,y+z)$ est lipschitzienne pour la constante k dans $V \times S'$, où S' est la boule $\|y\| \leqslant \frac{r}{2}$. Donnons à z deux valeurs z_1, z_2 ; on a,

18

on a, dans $V\times S'$, $\|h_{z_1}(x,y)-h_{z_2}(x,y)\| \leq k\|z_1-z_2\|$. L'application du th.2 aux deux équations $y'=h_{z_1}(x,y)$, $y'=h_{z_2}(x,y)$ donne l'existence de $v(x,z_1)$ et $v(x,z_2)$ et l'inégalité $\|v(x,z_1)-v(x,z_2)\| \leq \|z_1-z_2\|\cdot(e^{k|x-x_0|}-1)$ dans un intervalle I que nous allons préciser. D'après le th.2, l'inégalité précédente aura lieu pour $\|v(x,z_1)\| + \|z_1-z_2\|(e^{k|x-x_0|}-1) < r$, et a fortiori pour $\|v(x,z_1)\| + r(e^{k|x-x_0|}-1) < r$. Mais on a de même $\|v(x,z_1)-v(x,y_0)\| \leq \frac{r}{2}(e^{k|x-x_0|}-1)$ dans l'intervalle où $\|v(x,z_0)\| + \frac{r}{2}(e^{k|x-x_0|}-1) < r$; donc, dans cet intervalle $\|v(x,z_1)\| \leq \|v(x,y_0)\| + \frac{r}{2}(e^{k|x-x_0|}-1)$. Finalement, si I est le plus grand intervalle ouvert où $\|v(x,y_0)\| + \frac{3}{2}r(e^{k|x-x_0|}-1) < r$, on aura

(19) $$\|v(x,z_1)-v(x,z_2)\| \leq \|z_1-z_2\|(e^{k|x-x_0|}-1)$$

quels que soient z_1,z_2 dans la boule $\|z-y_0\| \leq \frac{r}{2}$, et quel que soit x dans I. En outre, quels que soient x,x' dans I et z dans la boule $\|z-y_0\| \leq \frac{r}{2}$, on a $\|v(x',z)-v(x,z)\| \leq M|x'-x|$, et en particulier

(20) $$\|v(x,z)\| \leq M|x-x_0|$$

où M est la borne supérieure de $\|g(x,y)\|$ dans $V\times S$.

Cela étant, le théorème du point fixe est applicable à l'application $z \to z+v(x,z) = u(x,z)$ si $|x-x_0|$ est assez petit ; par suite :

<u>Théorème 3</u>. <u>Soient</u> V <u>un voisinage de</u> x_0 <u>dans</u> $\mathbb{R}$, S <u>une boule ouverte de centre</u> y_0 <u>dans</u> E, g <u>une fonction lipschitzienne dans</u> $V\times S$. <u>Il existe un intervalle ouvert</u> J <u>contenant</u> x_0 <u>et une boule</u> T <u>de centre</u> y_0, <u>tels que, pour tout</u> $z\in T$, <u>il existe dans</u> J <u>une intégrale et une seule</u> $u(x,z)$ <u>de</u> $y'=g(x,y)$, <u>prenant ses valeurs dans</u> S <u>et telle que</u> $u(x_0,z)=z$. <u>En outre il existe une boule</u> U <u>de centre</u> y_0, <u>telle que pour tout</u> $x\in J$ <u>et tout</u> $y\in U$, <u>il existe un</u> $z\in T$ <u>et un seul tel que</u>

$y = u(x,z)$; si on pose $z = w(x,y)$, w est une application continue de $J \times U$ dans T .

7. Extension aux fonctions d'une variable complexe. Supposons maintenant que K soit le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$; si f est une solution de l'équation (9), on a encore dans V la relation (10), en convenant que si $x = x_0 + re^{i\theta}$, l'intégrale $\int_{x_0}^{x} g(t,f(t))dt$ signifie $\int_0^t g(x_0 + ue^{i\theta}, f(x_0+ue^{i\theta}))e^{i\theta}du$. Mais inversement, il n'est plus évident qu'une solution de (10) satisfasse aussi à l'équation différentielle (9) dans V . Nous verrons plus tard (Livre IX) qu'il en est bien ainsi si g est fonction "analytique" de (x,y) dans $A \times B$, et qu'on peut alors généraliser les th. 1, 2 et 3 et la prop. 3 en remplaçant partout les intervalles par des disques de centre x_0 .

Exercices. 1) Etant donnés deux nombres >0 , b et M , et un nombre arbitraire $\varepsilon > 0$, donner un exemple d'une équation différentielle scalaire $y' = g(y)$ telle que $|g(y)| \leqslant M$ pour $|y| \leqslant b$, et qui admet une intégrale $y = u(x)$ continue dans l'intervalle $\left[-\frac{b}{M}, +\frac{b}{M}\right]$, mais n'ayant pas de limite finie au point $x = \frac{b}{M} + \varepsilon$ (définir g de sorte que l'intégrale en question ait une dérivée continue dans $\left]-\frac{b}{M} - \varepsilon, \frac{b}{M} + \varepsilon\right[$, cette dérivée étant égale à M dans $\left]-\frac{b}{M}, +\frac{b}{M}\right[$).

2) Soit $V = \left]x_0 - a, x_0 + a\right[$ un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}$, S une boule ouverte de centre y_0 et de rayon r dans E , g une fonction lipschitzienne dans $V \times S$. Soit $h(t,z)$ une fonction $\geqslant 0$ des variables réelles t, z , définie pour $0 \leqslant t \leqslant a$ et $0 \leqslant z \leqslant r$, telle que pour tout t , $z \to h(t,z)$ soit croissante, et supposons que, dans $V \times S$, on ait $\|g(x,y)\| \leqslant h(|x - x_0|, \|y - y_0\|)$.

Soit φ une fonction numérique définie dans un intervalle $[0, a]$ où $\alpha < a$, à valeurs dans $[0, r[$, telle que $\varphi'_d(t) \geqslant h(t, \varphi(t))$ pour $0 \leqslant t < \alpha$ et que $\varphi(0)=0$. Montrer que l'équation différentielle $y'=g(x,y)$ admet, dans l'intervalle $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ une intégrale et une seule $u(x)$ telle que $u(x_0)=y_0$, et que $\|u(x)-y_0\| \leqslant \varphi(|x-x_0|)$; en outre, les fonctions définies par les approximations successives

$$u_0(x)=y_0 \quad u_n(x)= y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t,u_{n-1}(t))dt$$

sont telles que $\|u_n(x)-y_0\| \leqslant \varphi(|x-x_0|)$, et convergent uniformément vers $u(x)$ dans cet intervalle (pour prouver cette convergence, majorer $\|u_n-u_{n-1}\|$ en remarquant que $\|u_1(x)-u_0(x)\| \leqslant M|x-x_0|$, où M est la borne supérieure de $\|g(x,y)\|$ dans $V \times S$.

En déduire en particulier que les approximations successives u_n convergent uniformément vers une intégrale de $y'=g(x,y)$ prenant la valeur y_0 au point x_0, dans l'intervalle $[x_0-\beta, x_0+\beta]$, où $\beta = \mathrm{Min}(a, \frac{r}{M})$.

3) Soit V un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}$, S une boule de centre y_0 dans E, g une fonction continue dans $V \times S$. Soit u_1 une fonction définie dans un intervalle $I \subset V$, à valeurs dans S ; on suppose que les fonctions

$$u_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t,u_{n-1}(t))dt$$

peuvent être définies par récurrence dans I, c'est-à-dire que u_n prend ses valeurs dans S pour tout $n > 1$.

a) Montrer que si la suite (u_n) converge simplement dans une partie partout dense de I, elle converge uniformément dans I vers une intégrale de $y'=g(x,y)$ prenant la valeur y_0 au point x_0 (remarquer que l'ensemble des u_n est équicontinu dans I).

b) Montrer que, s'il existe une constante $k<1$ telle que, dans $V \times S$, on ait $\|g(x,y_1)-g(x,y_2)\| \leqslant \frac{k}{|x-x_0|} \cdot \|y_1-y_2\|$, la suite (u_n) converge uniformément dans I (remarquer qu'on a $\|u_3(x)-u_2(x)\| \leqslant 2M\,|x-x_0|$, M étant la borne supérieure de $\|g(x,y)\|$ dans $V \times S$).

c) On suppose que $E = R$, V le voisinage $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ de 0, $S = R$, et on prend $g(x,y)=0$ pour $x \leqslant 0$, $g(x,y) = -\frac{y}{x}\left(1+\frac{1}{|\log x|}\right)$ pour $|y| \leqslant \frac{x}{|\log x|}$ et $x>0$

$$g(x,y) = -\left(\frac{1}{|\log x|}+\frac{1}{|\log x|^2}\right) \quad \text{pour } x>0,\ y>\frac{x}{|\log x|}$$

$$g(x,y) = \frac{1}{|\log x|}+\frac{1}{|\log x|^2} \quad \text{pour } x>0,\ y<-\frac{x}{|\log x|}$$

Montrer qu'on a $|g(x,y_1)-g(x,y_2)| < \frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{|\log x|}\right)|y_1-y_2|$ mais que si on prend $u_1(x)=0$ pour $x \leqslant 0$, $u_1(x)=\frac{x}{|\log x|}$ pour $x \geqslant 0$, la suite (u_n) ne converge simplement dans aucun voisinage de 0.

d) Etendre le résultat de l'exerc.2 au cas où, au lieu de supposer g lipschitzienne dans $V \times S$, on suppose qu'elle satisfait à la condition de b).

4) Soit V un voisinage de x_0 dans R, S une boule de centre y_0 dans E, G l'espace normé des applications bornées de $V \times S$ dans E (avec $\|g\| = \sup \|g(x,y)\|$). Soit L la partie de G formée des applications lipschitziennes de $V \times S$ dans E ; pour toute fonction $g \in L$, il existe une intégrale et une seule $u = U(g)$ de l'équation $y' = g(x,y)$, définie dans un intervalle I_g contenu dans V, et telle

et telle que $u(x_0)=y_0$; si $V =]x_0-a, x_0+a[$, et si $g \in G_M$, où G_M est l'ensemble des applications de $V \times S$ dans E telles que $\|g\| \leq M$, on peut prendre pour I_g l'intervalle $I =]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ où $\alpha = \mathrm{Min}(a, \frac{r}{M})$ (r rayon de S).

a) Si une suite (g_n) de fonctions appartenant à $L \cap G_M$ converge uniformément vers une fonction f, toute valeur d'adhérence de la suite $u_n=U(g_n)$ dans l'espace normé F des applications continues de I dans E est une intégrale de $y'=f(x,y)$ prenant la valeur y_0 au point x_0 (utiliser le fait que l'ensemble des u_n est équicontinu). Réciproquement, si v est une intégrale de $y'=f(x,y)$ telle que $v(x_0)=y_0$, v est aussi intégrale d'une équation $y'=g(x,y)$, où g est lipschitzienne et arbitrairement voisine de f dans G_M (considérer l'équation $y'=v'(x)+g_n(x,y)-g_n(x,v(x))$).

b) Déduire de a) que, si E est de dimension finie, et f une application continue de $V \times S$ dans E, telle que $\|f\| \leq M$, l'équation $y'=f(x,y)$ admet au moins une intégrale dans I prenant la valeur y_0 au point x_0 (utiliser le th. d'approximation de Weierstrass).

c) Dans les mêmes hypothèses, montrer que, pour tout $x \in I$, l'ensemble des valeurs en x des intégrales de $y'=f(x,y)$ qui prennent la valeur y_0 au point x_0, est un ensemble <u>compact</u> et <u>connexe</u> (pour voir qu'il est fermé, utiliser le th. d'Arzela ; pour voir qu'il est connexe, utiliser a) : si y_1, y_2 sont deux éléments de l'ensemble considéré, pour tout $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe un ensemble connexe Φ de fonctions g appartenant à $L \cap G_M$, telles que $\|f-g\| \leq \varepsilon$ pour toute $g \in \Phi$, et que l'ensemble des valeurs des fonctions $U(g)$ au point x soit connexe et contienne y_1 et y_2. Conclure en passant à la limite suivant un ultrafiltre plus fin que le filtre des voisinages de 0 dans R_+).

5) Soit g une fonction continue dans le pavé $|x-x_0| \leqslant a$, $|y-y_0| \leqslant b$ de $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'enveloppe inférieure et l'enveloppe supérieure de l'ensemble Φ des intégrales u de $y'=g(x,y)$ telles que $u(x_0)=y_0$, dans l'intervalle $I =]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$, où $\alpha=\mathrm{Min}(a, \frac{b}{M})$ (M maximum de $|g(x,y)|$), sont encore des intégrales de $y'=g(x,y)$ dans I, qu'on appelle respectivement intégrale minimale et intégrale maximale correspondant au point (x_0,y_0) (remarquer que l'ensemble Φ est équicontinu et fermé pour la topologie de la convergence uniforme dans I).

Pour tout $\xi \in I$, soit η la valeur de l'intégrale minimale (correspondant au point (x_0,y_0)) au point ξ. Montrer que l'intégrale minimale correspondant au point (ξ,η) est identique à l'intégrale minimale correspondant au point (x_0,y_0) dans un intervalle $[\xi, \xi+h[$ si $\xi > x_0$, dans un intervalle $]\xi-h, \xi]$ si $\xi < x_0$.

En déduire que l'intégrale minimale u correspondant au point (x_0,y_0) peut être prolongée par continuité dans un intervalle $]x_1,x_2[$ contenu dans $]x_0-a, x_0+a[$, de sorte qu'en tout point x de cet intervalle, u soit identique à l'intégrale minimale correspondant à $(x,u(x))$ dans un intervalle $[x,x+h[$ si $x > x_0$, dans un intervalle $]x-h, x]$ si $x < x_0$, et que l'on ait, soit $x_1=x_0-a$ (resp. $x_2=x_0+a$), soit $\lim_{x \to x_1} u(x)=y_0 \pm b$ (resp. $\lim_{x \to x_2} u(x)=y_0 \pm b$).

6) a) Dans le pavé $|x-x_0| \leqslant a$, $|y-y_0| \leqslant b$, soient g et h deux fonctions continues telles que $g(x,y) < h(x,y)$. Soit u (resp. v) une intégrale de $y'=g(x,y)$ (resp. $y'=h(x,y)$) telle que $u(x_0)=y_0$

(resp. $v(x_0)=y_0$), définie dans un intervalle $[x_0, x_0+c[$; montrer que, pour $x_0 < x < x_0+c$ on a $u(x) < v(x)$ (considérer la borne supérieure ξ des x tels que cette inégalité ait lieu).

b) Soit u l'intégrale maximale de $y'=g(x,y)$ au point (x_0, y_0), définie dans l'intervalle $[x_0, x_0+c[$. Montrer que, pour tout intervalle compact $[x_0, x_0+d[$ contenu dans $[x_0, x_0+c[$, l'intégrale minimale et l'intégrale maximale au point (x_0, y_0) de l'équation $y'=g(x,y)+\varepsilon$ sont définies pour $\varepsilon > 0$ assez petit, et convergent uniformément vers u lorsque ε tend vers 0 par valeurs >0.

c) On suppose que $g(x,y) \leqslant h(x,y)$ dans le pavé $|x-x_0| \leqslant a$, $|y-y_0| \leqslant b$. Dans un intervalle $[x_0, x_0+c[$, on suppose défini une intégrale u de $y'=g(x,y)$ telle que $u(x_0)=y_0$, et l'intégrale maximale v de $y'=h(x,y)$ au point (x_0, y_0). Montrer que, dans cet intervalle, on a $u(x) \leqslant v(x)$ (se ramener au cas a) à l'aide de b)).

7) On considère dans le plan R^2 l'ensemble défini par les relations $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+c$, $\omega(x) \leqslant y \leqslant \Omega(x)$, où ω et Ω sont continues et dérivables pour $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+c$; on suppose que la fonction $g(x,y)$ est définie et continue dans cet ensemble, et qu'on a pour $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+c$, $\omega'(x) \leqslant g(x, \omega(x))$ et $\Omega'(x) \geqslant g(x, \Omega(x))$. Montrer qu'il existe une intégrale u de $y'=g(x,y)$ définie pour $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+c$, telle que $u(x_0)=y_0$ et que $\omega(x) \leqslant u(x) \leqslant \Omega(x)$. (Prolonger la fonction g pour $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+c$ et y quelconque en posant $g(x,y)=g(x,\omega(x))$ si $y < \omega(x)$ et $g(x,y)=g(x,\Omega(x))$ si $y > \Omega(x)$; montrer ensuite que toute intégrale u de l'équation $y'=g(x,y)$, telle que $u(x_0)=y_0$, est telle que $\omega(x) \leqslant u(x) \leqslant \Omega(x)$. Pour cela, raisonner par l'absurde, on remarquant que si on avait $\omega(x) > u(x)$ pour une valeur de x, il existerait un $\alpha > 0$ assez petit et un $x > x_0$ tel que $u(x)=\omega(x)-\alpha(x-x_0)$, et en conclure une contradiction).

8) a) Soit $\omega(x,z)$ une fonction continue définie pour $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+c$, $z \in \mathbb{R}$, et $\geqslant 0$ dans cet ensemble. Soit g une application définie dans $I \times S$, où $I = [x_0, x_0+c]$, et S est une boule de centre y_0 dans un espace complet E ; g prend ses valeurs dans E, et on suppose que, quels que soient $x \in I$, y_1 et y_2 dans S, on a $\|g(x,y_1)-g(x,y_2)\| \leqslant \omega(x, \|y_1-y_2\|)$. Soient u et v deux intégrales de $y'=g(x,y)$, définies dans I, telles que $u(x_0)=y_1$, $v(x_0)=y_2$; soit w l'intégrale <u>maximale</u> de $z'=\omega(x,z)$ correspondant au point $(x_0, \|y_1-y_2\|)$; montrer que, dans I, on a $\|u(x)-v(x)\| \leqslant w(x)$. (Soit $w(x,\varepsilon)$ l'intégrale maximale de $z'=\omega(x,z)+\varepsilon$ correspondant au point $(x_0, \|y_1-y_2\|)$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Montrer que $\|u(x)-v(x)\| \leqslant w(x,\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$, en raisonnant par l'absurde ; on remarquera que, si f est une application de I dans E, on a $\dfrac{\|f(x+h)\| - \|f(x)\|}{h} \leqslant \dfrac{\|f(x+h)-f(x)\|}{h}$).

b) Dans les hypothèses de a), on remplace l'intervalle I par l'intervalle $I' =]x_0-c, x_0]$. Montrer que, si w est, dans cet intervalle, l'intégrale <u>minimale</u> de $z'=\omega(x,z)$ correspondant au point $(x_0, \|y_1-y_2\|)$, on a, dans I', $\|u(x)-v(x)\| \geqslant w(x)$ (même méthode).

9) Soit $\omega(x,z)$ une fonction continue et $\geqslant 0$ définie pour $0 < x < a$ et $z \geqslant 0$. On suppose que $z=0$ est la seule intégrale de $z'=\omega(x,z)$ définie pour $0 < x < a$ et telle que $\lim\limits_{x \to 0} z(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{z(x)}{x} = 0$. Soit g une application continue de $I \times S$, où $I = [x_0, x_0+a[$ dans E ; on suppose que, quels que soient y_1 et y_2 dans S, on a $\|g(x,y_1)-g(x,y_2)\| \leqslant \omega(|x-x_0|, \|y_1-y_2\|)$. Montrer que dans l'intervalle I, l'équation $y'=g(x,y)$ possède une seule intégrale u telle que $u(x_0)=y_0$. (Raisonner par l'absurde ;

si v est une seconde intégrale de $y'=g(x,y)$ telle que $v(x_0)=y_0$, minorer $\|v(x)-u(x)\|$ dans un intervalle $]x_0, x_0+c[$ à l'aide de l'exerc. 8b), et obtenir ainsi une contradiction).

10) Soit $\omega(x,z)$ une fonction continue et $\geqslant 0$ définie pour $0<x<a$ et $z\geqslant 0$, telle que $\omega(x,0)=0$. On suppose qu'il existe une intégrale z_1 de $z'=\omega(x,z)$ définie pour $0<x<a$, telle que $z_1(x)>0$ dans cet intervalle et que $\lim_{x\to 0} z_1(x)=0$. Soit g une fonction numérique continue définie pour $x_0\leqslant x\leqslant x_0+a$, $|y-y_0|\leqslant b$; on suppose qu'il existe une intégrale u de $y'=g(x,y)$ définie pour $x_0\leqslant x\leqslant x_0+a$, telle que $u(x_0)=y_0$, et telle que, pour tout y tel que $|y-y_0|\leqslant b$, on ait $|g(x,y)-g(x,u(x))|\leqslant \omega(x-x_0, |y-u(x)|)$.

Soit x_1 un point quelconque tel que $x_0<x_1<x_0+a$, r un nombre >0 tel que $r\leqslant z_1(x-x_0)$. Montrer qu'il existe une intégrale v de $y'=g(x,y)$, définie pour $x_0\leqslant x\leqslant x_1$, telle que $v(x_0)=y_0$ et que $|v(x_1)-u(x_1)|=r$ (considérer l'intégrale minimale de l'équation $y'=g(x,y+u(x))-g(x,u(x))$ correspondant au point (x_1,r), et montrer que pour $x\leqslant x_1$ on a $w(x)\leqslant z_1(x-x_0)$, en utilisant l'exerc. 6c)).

11) Soit $V=[x_0-a, x_0+a]$ un voisinage de x_0 dans $\mathbf{R}$, S une boule de centre y_0 et de rayon r dans E, g une fonction continue définie dans $V\times S$, à valeurs dans E, telle que $\|g(x,y)\|\leqslant M$ dans $V\times S$. Soit I l'intervalle $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$, où $\alpha=\min(a, \frac{r}{M})$; on suppose que l'équation différentielle $y'=g(x,y)$ admet <u>une seule</u> intégrale u définie dans I et telle que $u(x_0)=y_0$. Soit (ε_n) une suite de nombres >0 tendant vers 0 ; pour chaque indice n, soit $(x_{in})_{1\leqslant i\leqslant p_n}$ une suite croissante de points de $[x_0, x_0+\alpha]$ telle que $x_{p_n,n}=x_0+\alpha$, $x_{1,n}=x_0$, et $|x_{i+1,n}-x_{i,n}|\leqslant\varepsilon_n$ pour tout i.

Soit v_n la fonction définie dans l'intervalle $[x_0, x_0+a]$ par application de la méthode de Cauchy-Lipschitz à partir de la suite des x_{in} ; montrer que la suite v_n converge uniformément vers u dans $[x_0, x_0+a]$ (utiliser le fait que la suite (v_n) est équicontinue dans cet intervalle).

§ 2. Equations différentielles linéaires.

1. Existence et limitation des intégrales. Soit E un espace normé complet sur le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une équation différentielle $y'=g(x,y)$ où g est définie dans $I\times E$, est une équation linéaire si la fonction g est de la forme $g(x,y)=A_x(y)+b(x)$, où pour tout $x\in E$, A_x est une application linéaire de E dans lui-même, et où b est une application de I dans E ; l'équation linéaire est dite homogène si $b=0$.

Lorsque $E=\mathbb{R}^n$, on peut identifier A_x à sa matrice $(a_{ij}(x))$ lorsqu'on rapporte cette application à une base de E ; si, comme d'ordinaire, on identifie un vecteur $y\in E$ à la matrice à une colonne (y_j) de ses composantes, l'équation linéaire $y'=A_x.y+b(x)$ est équivalente au système scalaire

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j+b_i(x) \qquad (1\leqslant i\leqslant n)$$

Nous commencerons par étudier les équations linéaires homogènes. Nous supposerons que la fonction $g(x,y)=A_x(y)$ est continue dans $V\times E$, où V est un intervalle ouvert contenu dans I et contenant un point $x_0\in I$. On sait (Livre VI) que, pour qu'il en soit ainsi, il suffit que, pour tout $x\in V$, A_x soit une application linéaire continue de E dans lui-même, et que, pour tout $y\in E$, $x\to A_x(y)$ soit continue dans V.

En outre, dans tout intervalle compact K contenu dans V, on a $\sup_{x\in K}\|A_x\| < +\infty$ (on rappelle que $\|A_x\|$, norme de A_x dans l'espace $\mathcal{L}$(E) des applications linéaires continues de E dans lui-même, est égale à $\sup_{\|y\|=1}\|A_x(y)\|$).

Il faut noter que les conditions précédentes sont entraînées par la continuité de l'application $x \to A_x$ de V dans $\mathcal{L}(E)$, mais <u>ne l'entraînent pas</u> si E est de dimension infinie (Livre VI et exerc. 5).

Soit K un intervalle compact quelconque contenu dans V, et auquel x_0 est intérieur ; soit $k = \sup_{x\in K}\|A_x\|$; quels que soient $x\in K$, y_1 et y_2 dans E, on a donc $\|A_x(y_1)-A_x(y_2)\| = \|A_x(y_1-y_2)\| \leq k\|y_1-y_2\|$, autrement dit, dans $K\times E$, g est <u>lipschitzienne pour la constante</u> k. Or, la fonction 0 est intégrale de $y'=A_x(y)$ dans V et prend la valeur 0 au point x_0. Soit y_0 quelconque dans E ; appliquons le th2 à l'équation $y'=A_x(y)$ et à l'équation $y'=A_x(y+y_0)$; on voit que cette dernière admet dans K une intégrale et une seule v prenant la valeur 0 au point x_0, et comme $\|A_x(y+y_0)-A_x(y)\| \leq k\|y_0\|$ dans $K\times E$, on a, dans K, $\|v(x)\| \leq \|y_0\|(e^{k|x-x_0|}-1)$. Par suite :

<u>Théorème 1. Soit</u> V <u>un intervalle ouvert contenant</u> x_0 <u>et tel que</u> $(x,y)\to A_x(y)$ <u>soit continue dans</u> $V\times E$. <u>Pour tout</u> $y_0\in E$, <u>l'équation linéaire homogène</u> $y'=A_x(y)$ <u>admet une intégrale et une seule</u> $u(x,y_0)$ <u>définie dans</u> V <u>et telle que</u> $u(x_0,y_0)=y_0$. <u>En outre, pour tout intervalle compact</u> K <u>contenu dans</u> V <u>et auquel</u> x_0 <u>est intérieur, si on pose</u> $k=\sup_{x\in K}\|A_x\|$, <u>on a, pour tout</u> $x\in K$

$$\|u(x,y_0)-y_0\| \leq \|y_0\|(e^{k|x-x_0|}-1). \tag{1}$$

2. Dépendance des conditions initiales. Soient y_1, y_2 deux points quelconques de E ; on a identiquement, pour $x \in V$, $u(x,y_1)+u(x,y_2)=u(x,y_1+y_2)$; en effet, il est immédiat que $u(x,y_1)+u(x,y_2)$ est une intégrale de $y'=A_x(y)$ définie dans V et prenant la valeur y_1+y_2 au point x_0 . De même, pour tout scalaire λ , on a $u(x,\lambda y) = \lambda u(x,y)$ identiquement dans $V \times E$, par le même raisonnement ; autrement dit, on peut écrire $u(x,y_0)=C_x(y_0)$, où C_x est une application linéaire de E dans lui-même.

Théorème 2. Avec les hypothèses du th.1, pour tout $x \in V$, l'application linéaire C_x est un automorphisme de la structure d'espace vectoriel topologique de E ; les applications $x \to C_x$ et $x \to C_x^{-1}$ sont des applications continues de V dans l'espace normé $\mathcal{L}(E)$; en outre, si l'application $x \to A_x$ de V dans $\mathcal{L}(E)$ est continue dans V , $x \to C_x$ est dérivable dans V et on a

$$\frac{d}{dx} C_x = A_x \circ C_x \tag{2}$$

En premier lieu, pour tout $x \in V$, C_x est une application linéaire biunivoque de E dans lui-même ; en effet, si $C_x(y_0)=0$, cela signifie que l'intégrale de $y'=A_x(y)$ qui prend la valeur y_0 au point x_0 s'annule au point x ; or, le th.1 appliqué à V , voisinage de x , prouve qu'il existe une seule intégrale de $y'=A_x(y)$ définie dans V et prenant la valeur 0 en x , savoir la fonction 0 ; on a par suite $y_0=0$

Montrons ensuite que C_x est une application de E sur E ; en effet, ~~xx~~ soit y_1 un point quelconque de E ; d'après le th.1, il existe dans V une intégrale et une seule u de $y'=A_x(y)$, telle que $u(x)=y_1$; si on pose $y_0=u(x_0)$, on aura donc nécessairement $u(x)=C_x(y_0)=y_1$.

Enfin, montrons que C_x et C_x^{-1} sont <u>continues</u> dans E . Soit K un intervalle compact contenu dans V , et auquel x_0 et x soient intérieurs, et $k = \sup_{x\in K} \|A_x\|$; d'après (1), on a $\|C_x(y_0)\| \leq e^{k|x-x_0|}\|y_0\|$ pour tout $y_0 \in E$, et le même raisonnement appliqué en intervertissant les rôles de x et x_0 montrent que $\|C_x^{-1}(y)\| \leq e^{k|x-x_0|}\|y\|$ pour tout $y \in E$, d'où la continuité de C_x et de C_x^{-1} .

Montrons maintenant que l'application $x \to C_x$ de V dans $\mathcal{L}(E)$ est <u>continue</u>. Dans le voisinage compact K de x , on a, pour tout $x' \in K$, $\|u'(x',y_0)\| \leq k\,\|u(x',y_0)\| \leq ke^{k|x'-x_0|}\|y_0\|$, ou en posant $k' = \sup_{x\in K} ke^{k|x-x_0|}$, $\|u'(x',y_0)\| \leq k'\|y_0\|$; d'après le théorème des accroissements finis, on a donc $\|u(x',y_0)-u(x,y_0)\| \leq k'\,\|y_0\|.|x'-x|$ quel que soit $y_0 \in E$, c'est-à-dire, d'après la définition de la norme dans $\mathcal{L}(E)$, $\|C_{x'}-C_x\| \leq k'|x'-x|$, ce qui prouve la continuité de $x \to C_x$ au point x . La continuité de $x \to C_x^{-1}$ résulte de la continuité de l'application $u \to u^{-1}$ dans le groupe des automorphismes de E (éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$).

Enfin, montrons que, si $x \to A_x$ est continue dans V , $x \to C_x$ admet une dérivée donnée par la formule (2) (cf. exerc.5). D'après le th. des accroissements finis, on a, dans le voisinage compact K

$$(3)\qquad \|u(x+h,y_0)-u(x,y_0)-hu'(x,y_0)\| \leq |h| \sup_{x\leq z\leq x+h}\|u'(z,y_0)-u'(x,y_0)\|$$

Or, on peut écrire $u'(z,y_0)-u'(x,y_0)=A_z(C_z(y_0))-A_x(C_x(y_0))$, donc, d'après la définition de la norme dans $\mathcal{L}(E)$

$$\sup_{x\leq z\leq x+h}\|u'(z,y_0)-u'(x,y_0)\| \leq \|y_0\| . \sup_{x\leq z\leq x+h}\|A_z\circ C_z-A_x\circ C_x\|$$

Par hypothèse, l'application $x \to A_x$ est continue, et nous venons de prouver qu'il en est de même de $x \to C_x$; l'application $A \to A_x\circ C_x$ est par suite continue, donc il existe $\delta > 0$ tel que $|h| < \delta$ entraîne $\|A_z\circ C_z-A_x\circ C_x\| \leq \varepsilon$ pour $x \leq z \leq x+h$. Dans ces conditions, la formule (3) prouve que

$$\left\| \frac{1}{h}\left(C_{x+h}-C_x\right)-A_x\circ C_x \right\| \leqslant \varepsilon$$

pour $x \leqslant z \leqslant x+h$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire. Soit G un espace topologique ; si l'application $(x,\alpha) \to A_{x,\alpha}$ de $V\times G$ dans $\mathcal{L}(E)$ est continue, et si $C_{x,\alpha}(y_0)$ est l'intégrale de $y'=A_{x,\alpha}(y)$ prenant la valeur y_0 au point x_0 , l'application $(x,\alpha)\to C_{x,\alpha}$ est continue dans $V\times G$.

Il existe par hypothèse un voisinage K de x , un visinage U de α et un nombre k tel que $\|A_{x',\beta}\| \leqslant k$ pour $(x',\beta)\in K\times U$. Le raisonnement du th.2 montre d'abord que pour $x'\in K$, on a $\|C_{x',\beta}-C_{x,\beta}\| \leqslant k'|x'-x|$, où $k' = \sup\limits_{z\in K} ke^{k|z-x_0|}$. D'autre part, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un voisinage W de α , contenu dans U , et tel que $\|A_{x,\beta}-A_{x,\alpha}\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $\beta\in W$. Soit a un majorant de $\|C_{z,\alpha}\|$ pour z dans un voisinage compact H de x_0 contenant x ; si on pose $u(x) = C_{x,\alpha}(y_0)$, $v(x)=C_{x,\beta}(y_0)$, on a $\|u(x)\| \leqslant a\|y_0\|$, et

$$\|u'(x)-C_{x,\beta}(u(x))\| = \|C_{x,\alpha}(u(x))-C_{x,\beta}(u(x))\| \leqslant \varepsilon\|u(x)\| \leqslant a\varepsilon\|y_0\|;$$

d'après la prop.1 du §1, on a donc

$$\|u(x)-v(x)\| \leqslant \frac{a}{b}\varepsilon\left(e^{b|x-x_0|}-1\right).\|y_0\|$$

où b est un majorant de $\|A_{z,\beta}\|$ pour $z\in H$ et $\beta\in W$ (il existe toujours un tel majorant, car on peut recouvrir H par un nombre fini d'intervalles I_k , à chacun desquels correspond un voisinage W_k de α , de sorte que pour $(z,\beta)\in I_k\times W_k$, $\|A_{z,\beta}\|$ soit borné ; on prendra W contenu dans l'intersection des W_k). L'inégalité précédente signifie encore que $\|C_{x,\alpha}-C_{x,\beta}\| \leqslant \varepsilon\frac{a}{b}\left(e^{b|x-x_0|}-1\right)$, ce qui achève de démontrer le corollaire.

32

3. Intégration de l'équation linéaire non homogène. L'intégration de l'équation non homogène $y'=A_x(y)+b(x)$ se ramène à celle de l'équation homogène correspondante $y'=A_x(y)$, et au calcul d'une primitive lorsque $x \to A_x$ est continue dans V . En effet, soit $u(x)=C_x(y_0)$ l'intégrale de l'équation homogène prenant la valeur y_0 au point x_0 . Si y est une intégrale de $y'=A_x(y)+b(x)$, $z=C_x^{-1}(y)$ est une intégrale de $\frac{d}{dx}(C_x(z)) = A_x(C_x(z))+b(x)$; comme $(v,w) \to v(w)$ est une application bilinéaire continue de $\mathcal{L}(E)\times E$ dans E , on a $\frac{d}{dx}(C_x(z)) = C'_x(z)+C_x(z')$ (chap.I, § 1), et d'après l'équation (2), on a $C'_x(z)=A_x(C_x(z))$; donc l'équation en z se réduit à $C_x(z')=b(x)$, ou encore $z'=C_x^{-1}(b(x))$. Le second membre de cette équation est une fonction continue dans V , donc on en tire $z(x)-z(x_0)=\int_{x_0}^{x} C_t^{-1}(b(t))dt$; la relation $y(x)=C_x(z(x))$ donnera ensuite toutes les intégrales de l'équation $y'=A_x(y)+b(x)$.

On notera que, lorsqu'on connaît une intégrale v de l'équation non homogène, $v(x)+C_x(y_0)$ donne l'intégrale prenant la valeur $y_0+v(x_0)$ au point x_0 , donc on obtient ainsi toutes les intégrales de l'équation non homogène.

4. Equation adjointe. Soit E' l'espace dual (Esp. vect. top., chap.III) de l'espace normé E , A_x^* l'application linéaire de E' dans lui-même, transposée de A_x . Si on suppose l'application $x \to A_x$ de V dans $\mathcal{L}(E)$ continue, il en est de même de l'application $x \to A_x^*$ de V dans $\mathcal{L}(E')$, en vertu de la relation $\|A_{x+h}^* - A_x^*\| = \|A_{x+h} - A_x\|$ .Dans cette hypothèse, on appelle équation adjointe de l'équation homogène $y'=A_x(y)$, l'équation homogène $z'=-A_x^*(z)$, où z est une application dérivable (inconnue) de V dans E' .

<u>Proposition 1. Si u est une intégrale de</u> $y'=A_x(y)$, v <u>une intégrale de</u> $z'=-A_x^*(z)$ <u>dans</u> V , <u>la fonction scalaire</u> $\langle u(x),v(x)\rangle$ <u>est constante dans</u> V .

En effet, comme $(y,z)\to\langle y,z\rangle$ est une application bilinéaire continue de $E\times E'$ dans $\mathcal{C}$, on a $\frac{d}{dx}\langle u(x),v(x)\rangle=\langle u'(x),v(x)\rangle+$ $+\langle u(x),v'(x)\rangle=\langle A_x(u),v\rangle-\langle u,A_x^*(v)\rangle$; or, cette dernière fonction est identiquement nulle, d'après la définition de la transposée d'une application linéaire.

5. <u>Systèmes différentiels scalaires</u>. Tout ce qui précède s'applique en particulier au cas où E est de dimension <u>finie</u> n sur le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathcal{C}$; ayant rapporté E à une base, et identifié tout vecteur de E à la matrice à une colonne de ses composantes, toute application linéaire de E dans lui-même à la matrice carrée d'ordre n qui lui correspond, la continuité de $x\to A_x=(a_{ij}(x))$ est ici équivalente à la continuité de chacune des n^2 fonctions scalaires a_{ij} . Si les a_{ij} sont continues dans un intervalle ouvert V contenant x_0 , les th.1 et 2 montrent que, pour tout $y_0=(y_{io})\in E$, il existe une intégrale et une seule u de $y'=A_x.y$ dans V , prenant la valeur y_0 au point x_0, et qu'on peut écrire $u(x)=C_x.y_0$, où $C_x=(c_{ij}(x))$ est une matrice carrée inversible, dans laquelle les c_{ij} sont dérivables dans V et satisfont à la relation $C'_x=A_xC_x$.

Dans le cas particulier où $n=1$, le système se réduit à une seule équation scalaire $y'=a(x)y$, dont l'intégrale prenant la valeur y_0 au point x_0 est donnée par la formule $y(x)=y_0e^{\int_{x_0}^{x}a(t)dt}$.

On dit que p intégrales u_i sont <u>linéairement indépendantes</u> si pour tout $x\in V$ les p vecteurs $u_i(x)$ forment un système libre ; comme $u_i(x)=C_x.u_i(x_0)$, il faut et il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que les p vecteurs $u_i(x_0)$ forment un système libre, puisque C_x est une matrice inversible pour tout $x \in V$. En particulier, on dit que n intégrales linéairement indépendantes forment un <u>système fondamental</u> d'intégrales du système donné ; si (e_i) est une base de E, les $u_i(x)=C_x.e_i$ forment un système fondamental d'intégrales ; l'intégrale prenant au point x_0 une valeur quelconque $y_0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i$ est alors $C_x.y_0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i C_x.e_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i(x)$.

Si $u_i(x)=(u_{ji}(x))$, nous appellerons <u>déterminant</u> du système fondamental (u_i) (rapporté à la base choisie dans E), le déterminant

$\Delta(x)=\left|u_{ij}(x)\right|$.

<u>Proposition 2</u>. <u>Le déterminant d'un système fondamental d'intégrales est donné par la formule</u>

$$\Delta(x)=\Delta(x_0)e^{\int_{x_0}^{x}\mathrm{tr}(A_t)dt} \tag{4}$$

En effet, on a, d'après la définition de $\Delta(x)$

$$\frac{d}{dx}\Delta(x)=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} u_{11}(x) & u_{12}(x) & \dots & u_{1n}(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ u'_{i1}(x) & u'_{i2}(x) & \dots & u'_{in}(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ u_{n1}(x) & u_{n2}(x) & \dots & u_{nn}(x)\end{vmatrix}$$

Mais comme $u'_{ji}(x)=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}(x)u_{ki}(x)$ $(1\leqslant j\leqslant n)$, on a aussi

$$\begin{vmatrix} u_{11}(x) & u_{12}(x) & \dots & u_{1n}(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ u'_{i1}(x) & u'_{i2}(x) & \dots & u'_{in}(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ u_{n1}(x) & u_{n2}(x) & \dots & u_{nn}(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u_{11}(x) & \dots & u_{1n}(x)\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{ii}(x)u_{11}(x)+\sum_{k\neq i}a_{ik}(x)u_{k1}(x) & \dots & a_{ii}(x)u_{in}(x)+\sum_{k\neq i}a_{ik}(x)u_{kn}(x)\\ \dots & \dots & \dots\\ u_{n1}(x) & \dots & u_{nn}(x)\end{vmatrix}$$

$$= a_{ii}(x) \begin{vmatrix} u_{11}(x) & \ldots & u_{1n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{i1}(x) & \ldots & u_{in}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n1}(x) & \ldots & u_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

en développant suivant la ligne d'indice i ; d'où

$$\frac{d}{dx} \Delta(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x) \right) \Delta(x) = \mathrm{tr}(A_x) . \Delta(x)$$

ce qui donne (4) .

Si on rapporte l'espace dual E' de E à la base duale (Alg.,chap.II) de celle de E , le système scalaire équivalent à l'équation adjointe de $y'=A_x.y$ est $z'=-A_x^*.z$, où A_x^* est la matrice transposée de A_x . D'après la prop.1 et la définition des bases duales, si $u(x)=(u_j(x))$ est une intégrale de $y'=A_x.y$, $v(x)=(v_j(x))$ une intégrale de l'équation adjointe, $\sum_{j=1}^{n} u_j(x)v_j(x)$ est constante dans V .

De cette propriété, on déduit que la connaissance d'un système fondamental d'intégrales (v_i) de l'équation adjointe permet d'obtenir toutes les intégrales de l'équation donnée. En effet, toute intégrale u de $y'=A_x.y$ satisfait à n relations identiques $\langle u(x),v_i(x)\rangle = \alpha_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, où les α_i sont des constantes ; or, ces n équations linéaires en u(x) ont une solution et une seule, qu'on obtient par exemple par les formules de Cramer.

Plus généralement, si on connaît p intégrales linéairement indépendantes v_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ de l'équation adjointe, l'intégration du système donné ~~par~~ peut se ramener à celle d'un système non homogène de n-p équations linéaires ; en effet, des p équations linéaires $\langle u(x),v_i(x)\rangle = \alpha_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$, on tire p des composantes de u(x), par exemple $u_1(x),..,u_p(x)$

en fonction des n-p autres : $u_j(x)=\varphi_j(x)+\sum_{k=p+1}^{n} c_k(x)u_k(x)$ $(1\leqslant j\leqslant p)$; portant dans les n-p dernières équations $u'_h(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{hk}(x)u_k(x)$ $(p+1\leqslant h\leqslant n)$, il vient $u'_h(x)=\psi_h(x)+\sum_{k=p+1}^{n} d_{hk}(x)u_k(x)$, c'est-à-dire un système de n-p équations linéaires non homogènes.

On conclut de là que si on connait p intégrales linéairement indépendantes u_i $(1\leqslant i\leqslant p)$ <u>de l'équation</u> $y'=A_x.y$, l'intégration de ce système se ramène à celle d'un système non homogène de n-p équations ; en effet, E est ici le dual de E' , donc $y'=A_x.y$ est l'adjointe de son équation adjointe ; d'après ce qui précède, l'intégration du système adjoint est ramené à celle d'un système non homogène de n-p équations ; et on a vu plus haut que lorsqu'on connaît les intégrales du système adjoint, on en déduit celles du système donné sans nouvelle intégration.

On peut procéder autrement pour ramener le système à un système de n-p équations. En effet, pour tout $x\in V$, les p vecteurs $u_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant p)$ forment un système libre ; si $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est la base de E , il y a donc n-p des vecteurs e_i qui forment avec les $u_i(x)$ une base de E ; supposons par exemple que ce soient $e_{p+1},\dots,e_n$ pour $x=x_0$. Il existe donc une matrice inversible B_x dont les éléments sont fonctions dérivables de x dans un voisinage W de x_0 , telle que $B_x.e_i=u_i(x)$ pour $1\leqslant i\leqslant p$, $B_x.e_i=e_i$ pour $p+1\leqslant i\leqslant n$. Posons $y=B_x.z$; z satisfait à l'équation $B'_x.z+B_x.z'=A_xB_x.z$, ou $z'=B_x^{-1}(A_xB_x-B'_x).z = D_x.z$, où $D_x=(d_{ij}(x))$ est une matrice à coefficients continus dans W ; d'après la définition de B_x , cette équation admet les p vecteurs constants e_i $(1\leqslant i\leqslant p)$ comme intégrales ; on en conclut aussitôt qu'on a nécessairement $d_{ij}(x)=0$ pour $1\leqslant j\leqslant p$; les composantes z_j d'indices $j\geqslant p+1$ satisfont donc à un système linéaire homogène de n-p équations ; si on peut intégrer ce système, on en déduit les composantes z_j d'indices $\leqslant p$ par p quadratures, puisque les z'_j d'indice $j\leqslant p$ sont fonctions linéaires des z_k d'indice $k\geqslant p+1$.