

COTE : BKI 04-2.2

LIVRE IV
FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE
CHAPITRE IV (ETAT 4)
ETUDE LOCALE DES FONCTIONS

Rédaction n° 010

Nombre de pages : 15

Nombre de feuilles : 15

Université Henri Poincaré - Nancy I
INSTITUT ÉLIE CARTAN - UMR 7502
Bibliothèque de mathématiques
B.P. 239
54506 Vandoeuvre-Lès-Nancy

Livre IV Chap. IV. Etat 4
étude locale des fonctions

10

LIVRE IV
FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

CHAPITRE IV (Etat 4)

ETUDE LOCALE DES FONCTIONS.

§ 1. Comparaison des fonctions dans un ensemble filtré.

Soit E un ensemble, filtré par un filtre \mathcal{F} ; dans ce chapitre, nous considérerons des fonctions dont l'ensemble de définition est une partie de E appartenant à \mathcal{F} (partie dépendant de la fonction considérée), et qui prennent leurs valeurs, soit dans \mathbb{R} , soit plus généralement dans un espace vectoriel normé sur \mathbb{R} .

Dans les applications, E sera le plus souvent une partie d'un espace numérique \mathbb{R}^n , ou de la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$, et \mathcal{F} la trace sur E du filtre des voisinages d'un point adhérent à E , ou encore le filtre des complémentaires des ensembles relativement compacts dans E ("voisinages du point à l'infini").

Il ne suffira pas en général de savoir qu'une telle fonction tend vers une limite donnée suivant \mathcal{F} pour pouvoir traiter tous les problèmes de "passage à la limite suivant \mathcal{F} " où interviennent des expressions formées avec cette fonction.

Par exemple, lorsque la variable réelle x tend vers $+\infty$, les trois fonctions x, x^2 et \sqrt{x} tendent toutes trois vers $+\infty$, mais, des expressions

• $(x+1)^2 - x^2$, $(x+1) - x$, $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

la première tend vers $+\infty$, la seconde vers 1, la troisième vers 0.

Il importe donc de connaître, non seulement la valeur limite d'une fonction, mais encore la "manière" dont elle tend vers cette limite ; en d'autres termes, on est amené à opérer une classification dans l'ensemble des fonctions qui tendent vers une même limite.

1. Relations de comparaison : I. Relations faibles.

Nous désignerons dans ce qui suit par \mathcal{G} un espace vectoriel sur \mathbb{R} , par $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans \mathcal{G} , et dont chacune est définie dans une partie de E appartenant à \mathcal{F} . Les relations que nous allons définir entre fonctions de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ont un caractère local relatif au filtre \mathcal{F} : nous allons préciser ce qu'il faut entendre par là. Si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, la relation "il existe un ensemble $Z \in \mathcal{F}$ tel que f et g soient définies et égales dans Z " est une relation d'équivalence R_∞ dans $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$: en effet, elle est évidemment réflexive et symétrique, et pour voir qu'elle est transitive, il suffit de remarquer que si f et g sont définies et égales dans $X \in \mathcal{F}$, g et h définies et égales dans $Y \in \mathcal{F}$, f et h sont définies et égales dans $X \cap Y$, qui appartient à \mathcal{F} . Cela étant, toutes les relations que nous définirons entre fonctions de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ seront compatibles avec la relation d'équivalence R_∞ ; si on désigne par \tilde{f} la classe modulo R_∞ d'une fonction $f \in \mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, définir une telle relation entre deux fonctions f, g de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ reviendra à définir une relation quelconque entre leurs classes \tilde{f}, \tilde{g} dans $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathcal{G})/R_\infty$.

Pour toute fonction φ définie dans $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$, à valeurs dans un espace vectoriel H , il est clair que si f_i et g_i sont des fonctions de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, G_i)$ définies et égales dans $Z_i \in \mathcal{F}$ ($1 \leq i \leq n$), $\varphi(f_1, f_2, \dots, f_n)$ et $\varphi(g_1, g_2, \dots, g_n)$ sont définies et égales dans $Z_1 \cap Z_2 \cap \dots \cap Z_n \in \mathcal{F}$; par passage au quotient suivant R_∞ , la fonction φ définit donc une application de $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{F}, G_1) \times \dots \times \mathcal{H}_\infty(\mathcal{F}, G_n)$ dans $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{F}, H)$. En particulier, en prenant pour φ les applications $(x, y) \rightarrow x+y$ et $x \rightarrow \lambda x$ (λ réel quelconque) on définit ainsi,

pour deux éléments quelconques \tilde{f}, \tilde{g} de $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{F}, G)$, les éléments $\tilde{f} + \tilde{g}$ et $\lambda \tilde{f}$, et on vérifie aussitôt que les lois de composition $(\tilde{f}, \tilde{g}) \rightarrow \tilde{f} + \tilde{g}$ et $(\lambda, \tilde{f}) \rightarrow \lambda \tilde{f}$ définissent sur $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{F}, G)$ une structure d'espace vectoriel sur le corps \mathbb{R} ; dans cet espace, $\tilde{0}$ est la classe des fonctions nulles dans un ensemble de \mathcal{F} et pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\mathcal{F}, G)$, $-\tilde{f}$ est la classe des fonctions égales à $-f$ dans un ensemble de \mathcal{F} . De même, si G est une algèbre sur \mathbb{R} , on définit dans $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{F}, G)$ une seconde loi de composition interne $(\tilde{f}, \tilde{g}) \rightarrow \tilde{fg}$ en prenant $\varphi(x, y) = xy$; avec les précédentes, elle définit sur $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{F}, G)$ une structure d'algèbre par rapport à \mathbb{R} ; si G admet un élément unité e , $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{F}, G)$ admettra pour élément unité la classe \tilde{e} des fonctions égales à e dans un ensemble de \mathcal{F} ; pour que \tilde{f} soit inversible dans $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{F}, G)$, il faut et il suffit que, pour une fonction $f \in \tilde{f}$, il existe $Z \in \mathcal{F}$ tel que $f(t)$ soit inversible dans G pour tout $t \in Z$ (auquel cas, cette condition est vérifiée pour toute fonction de la classe \tilde{f}). Ces considérations s'appliqueront surtout lorsque $G = \mathbb{R}$ ou $G = \mathbb{C}$.

Remarque.- Pour tout couple (f, g) de fonctions de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, G)$, on désignera par $f+g$ la fonction égale à $f(t)+g(t)$ en tout point de l'ensemble de \mathcal{F} où f et g sont toutes deux définies ; il convient d'observer que $(f, g) \rightarrow f+g$ n'est pas une loi de groupe, car si f n'est pas définie dans E tout entier, il n'existe pas de fonction $g \in \mathcal{H}(\mathcal{F}, G)$ telle que $f+g=0$. De même, si G est une algèbre sur \mathbb{R} , fg désignera la fonction égale à $f(t)g(t)$ aux points où f et g sont toutes deux définies ; enfin, si G admet un élément unité et si $f(t)$ est inversible dans un ensemble de \mathcal{F} ,

1/f désignera la fonction égale à 1/f(t) aux points où f(t) est inversible.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que G est un espace normé sur le corps R. Nous allons faire jouer le rôle de "fonctions de comparaison" aux fonctions numériques finies définies dans un ensemble de F.

L'ensemble des classes modulo R_∞ de ces fonctions est identique à l'anneau $\mathcal{B}_\infty(F, R)$ une partie stable pour les deux lois $\tilde{f} + \tilde{g}$ et $\tilde{f} \tilde{g}$.

DÉFINITION 1.- Etant donnée une fonction $f \in \mathcal{B}(F, G)$ et une fonction numérique $g \in \mathcal{B}(F, R)$, on dit que f est dominée par g, ou que g domine f (suivant F), et on écrit $f \preceq g$ ou $g \succ f$ s'il existe un ensemble $X \in \mathcal{F}$ et un nombre $k > 0$ tels que

$$\|f(t)\| \leq k |g(t)| \text{ dans } X.$$

La relation $f \preceq g$ est donc équivalente à $\|f\| \preceq |g|$. Par définition si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{B}(F, G)$, la relation $f \preceq g$ (ou $g \succ f$) est équivalente à $\|f\| \preceq \|g\|$.

Comme on l'a vu plus haut, l'ensemble $\mathcal{B}_\infty(F, R)$ est un anneau et à partir de l'application $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ de $R \times G$ dans G on peut définir sur $\mathcal{B}_\infty(F, G)$ une structure de module par rapport à l'anneau $\mathcal{B}_\infty(F, R)$. Cela étant, l'ensemble \mathcal{D}_G des classes modulo R_∞ des fonctions $f \in \mathcal{B}(F, G)$ qui sont bornées dans un ensemble de F est évidemment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}_\infty(F, G)$; la relation $f \preceq g$ peut encore s'écrire sous la forme équivalente $f \in g \mathcal{D}_G$.

On notera que, pour tout $\lambda \neq 0$, la relation $\lambda f \preceq g$ est équivalente à $f \preceq g$.

Si $f \preceq g$, il existe un ensemble $X \in \mathcal{F}$ tel que pour tout point $x \in X$ où $g(x) = 0$, on ait aussi $f(x) = 0$.

On aura soin de ne pas confondre la relation $f \prec g$ avec $f \leq g$ lorsque f et g sont deux fonctions numériques.

Exemples. - 1) La relation $f \prec 1$ signifie que f est bornée dans un ensemble de \mathcal{F} .

2) Pour toute fonction numérique f et pour toute constante k , on a $f \prec kf$.

3) Lorsque x tend vers $+\infty$, on a $\sin^2 x \prec \sin x$.

4) Lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$ dans \mathbb{R}^2 , on a $xy \prec x^2 + y^2$.

Les propositions suivantes sont des conséquences immédiates de la déf.1:

PROPOSITION 1. - Si f, g, h sont trois fonctions de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$, les relations $f \prec g$ et $g \prec h$ entraînent $f \prec h$.

PROPOSITION 2. - Soient f_1, f_2 deux fonctions de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, G)$, g une fonction de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$. Les relations $f_1 \prec g$ et $f_2 \prec g$ entraînent $f_1 + f_2 \prec g$.

En outre :

PROPOSITION 3. - Soient G_1, G_2, G trois espaces normés sur \mathbb{R} , $(x, y) \rightarrow [x \cdot y]$ une application bilinéaire continue de $G_1 \times G_2$ dans G . Si f_1 et f_2 sont des fonctions de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, G_1)$ et $\mathcal{H}(\mathcal{F}, G_2)$ respectivement, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ deux fonctions de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ telles que $f_1 \prec \varepsilon_1$ et $f_2 \prec \varepsilon_2$, on a $[f_1 \cdot f_2] \prec \varepsilon_1 \varepsilon_2$.

En effet (Top.gén., chap.IX, § 3, th.1), il existe un nombre $a > 0$ tel que $\|[f_1 \cdot f_2]\| \leq \|f_1\| \cdot \|f_2\|$.

COROLLAIRE. - Si G est une algèbre normée sur \mathbb{R} , f_1, f_2 deux fonctions de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, G)$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ deux fonctions de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$, les relations $f_1 \prec \varepsilon_1$, $f_2 \prec \varepsilon_2$ entraînent $f_1 f_2 \prec \varepsilon_1 \varepsilon_2$.

- 6 -

La prop. 2 équivaut au fait que D_G est un sous-groupe additif de $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{F}, G)$, et le cor. de la prop. 3 au fait que cet ensemble est une sous-algèbre lorsque G est une algèbre normée.

La relation $f \preceq g$ entre fonctions de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, G)$ est transitive d'après la prop. 1 ; comme elle est réflexive, la relation " $f \preceq g$ et $g \preceq f$ " est une relation d'équivalence dans $\mathcal{H}(\mathcal{F}, G)$ (Ens. R, § 6, n° 1).

DÉFINITION 2. - Etant données deux fonctions f, g de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, G)$, on dit que f et g sont semblables (suivant \mathcal{F}) et on écrit $f \asymp g$ si on a $f \preceq g$ et $g \preceq f$.

La relation $f \asymp g$ est équivalente à $\lambda f \asymp g$ pour tout $\lambda \neq 0$. Elle entraîne l'existence d'un ensemble $X \in \mathcal{F}$ tel que, dans X , les relations $f(x)=0$ et $g(x)=0$ soient équivalentes.

Exemples. - 1) Pour une fonction numérique $f \in \mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$, la relation $f \asymp 1$ signifie qu'il existe deux nombres $a > 0$, $b > 0$ tels que $a \leq |f(x)| \leq b$ dans un ensemble de \mathcal{F} ; on dit que f est multiplicativement bornée dans un ensemble de \mathcal{F} .

2) Si f est un polynôme à coefficients réels (resp. complexes) d'une variable réelle (resp. complexe) x , de degré n , on a $f(x) \asymp x^n$ lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. vers ∞).

3) Nous avons vu qu'on a $\sin^2 x \preceq \sin x$ lorsque x tend vers $+\infty$, mais on n'a pas $\sin x \asymp \sin^2 x$, bien que les deux fonctions s'annulent aux mêmes points.

4) On a $x^2 + xy + y^2 \asymp x^2 + y^2$ lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 , mais non $xy \asymp x^2 + y^2$.

Il résulte aussitôt de la prop. 3 que si f_1, f_2, g_1, g_2 sont des fonctions de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ ou de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{C})$, les relations $f_1 \asymp g_1$ et $f_2 \asymp g_2$ entraînent $f_1 f_2 \asymp g_1 g_2$.

Z

On notera par contre que, même dans ce cas, les relations $f_1 \asymp g_1$, $f_2 \asymp g_2$ n'entraînent pas $f_1+f_2 \asymp g_1+g_2$, comme le montre l'exemple où $f_1(x)=g_1(x)=x^2$, $f_2(x)=-(x^2+x)$, $g_2(x)=-(x^2+1)$, x tendant vers $+\infty$.

Les relations de comparaison $f \leq g$, $f \lesssim g$, $f \asymp g$ sont dites relations faibles. On dit que deux fonctions f, g de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, G)$ sont faiblement comparables si elles vérifient l'une (au moins) des deux relations $f \lesssim g$, $g \lesssim f$.

Deux fonctions de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ ne sont pas nécessairement faiblement comparables, comme le montre l'exemple des fonctions 1 et $x \sin x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Désignons par R_0 la relation $f \asymp g$ dans $\mathcal{H}(\mathcal{F}, G)$, et par $\mathcal{H}_0(\mathcal{F}, G)$ l'ensemble quotient $\mathcal{H}(\mathcal{F}, G)/R_0$; on notera que la relation R_∞ entraîne R_0 . Par passage au quotient, la relation $f \lesssim g$ donne, d'après la prop.1, une relation d'ordre dans $\mathcal{H}_0(\mathcal{F}, G)$; l'exemple qui précède montre que $\mathcal{H}_0(\mathcal{F}, G)$ n'est pas totalement ordonné par cette relation.

2. Relations de comparaison ; II. Relations fortes.

DÉFINITION 3.- Etant donnée une fonction $f \in \mathcal{H}(\mathcal{F}, G)$ et une fonction numérique $g \in \mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$, on dit que f est négligeable devant g , ou que g est prépondérante sur f (suivant \mathcal{F}) et on écrit $f \ll g$ ou $g \gg f$, si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $X \in \mathcal{F}$ tel que $\|f(x)\| \leq \varepsilon |g(x)|$ dans X .

La relation $f \ll g$ est équivalente à $\|f\| \ll \|g\|$; par définition, si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, G)$, la relation $f \ll g$ (ou $g \gg f$) est équivalente à $\|f\| \ll \|g\|$.

L'ensemble \mathcal{O}_G des classes modulo \mathbb{R}_∞ des fonctions $f \in \mathcal{H}(\mathcal{F}, G)$ qui tendent vers 0 suivant \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{F}, G)$ contenu dans \mathcal{D}_G ; la relation $f \ll_G g$ peut encore s'écrire $f \in g \mathcal{O}_G$. On notera que \mathcal{D}_G est un module par rapport à l'anneau $\mathcal{D}_\mathbb{R}$, et \mathcal{O}_G un sous-module de ce module. Si G est une algèbre normée, \mathcal{O}_G est un idéal de l'algèbre \mathcal{D}_G .

La relation $f \ll g$ entraîne $f \ll g$, mais ne lui est naturellement pas équivalente. Pour tout $\lambda \neq 0$, la relation $\lambda f \ll g$ est équivalente à $f \ll g$.

On aura soin de ne pas confondre les relations $f \ll g$ et $f < g$ lorsque f et g sont deux fonctions numériques.

Exemples. - 1) La relation $f \ll 1$ signifie que f tend vers 0 suivant le filtre \mathcal{F} .

2) Lorsque α et β sont deux nombres réels tels que $\alpha < \beta$, on a $x^\alpha \ll x^\beta$ lorsque x tend vers $+\infty$. De même, lorsque m et n sont deux entiers rationnels tels que $m < n$, on a $z^m \ll z^n$ lorsque le nombre complexe z tend vers ∞ .

3) Lorsque x tend vers $+\infty$, on a $x^n \ll e^x$ pour tout entier $n > 0$ (chap. III, § 2, n° 1).

4) Dans \mathbb{R}^2 , on a, au voisinage de $(0,0)$

$$x^2 + y^2 \ll |x| + |y|.$$

Les propositions suivantes se déduisent immédiatement de la déf. 2 :

PROPOSITION 4. - Si f, g, h sont trois fonctions de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$, les relations $f \ll g$ et $g \ll h$ (resp. $f \ll g$ et $g \ll h$) entraînent $f \ll h$.

PROPOSITION 5.- Soient f_1, f_2 deux fonctions de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, G)$, g une fonction de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$. Les relations $f_1 \ll g$ et $f_2 \ll g$ entraînent $f_1 + f_2 \ll g$.

D'autre part, le même raisonnement que pour la prop.3 montre que :

PROPOSITION 6.- Soient G_1, G_2, G trois espaces normés sur \mathbb{R} , $(x, y) \rightarrow [x \cdot y]$ une application bilinéaire continue de $G_1 \times G_2$ dans G .

Soient f_1, f_2 des fonctions de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, G_1)$ et $\mathcal{H}(\mathcal{F}, G_2)$ respectivement, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ deux fonctions de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$; les relations

$f_1 \ll \varepsilon_1$ et $f_2 \ll \varepsilon_2$ (resp. $f_1 \ll \varepsilon_1$ et $f_2 \ll \varepsilon_2$) entraînent $[f_1 \cdot f_2] \ll \varepsilon_1 \varepsilon_2$.

La prop.1 montre que la relation $f \ll g$ entre fonctions de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, G)$ est transitive; mais elle n'est pas réflexive, et de façon précise, la relation $f \ll f$ entraîne que f est nulle dans un ensemble de \mathcal{F} ; en effet, pour un ε tel que $0 < \varepsilon < 1$, il existe un $x \in \mathcal{F}$ tel que $\|f(x)\| \leq \varepsilon \|f(x)\|$ pour tout $x \in X$, ce qui n'est possible que si $f(x) = 0$ dans X .

PROPOSITION 7.- Si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, G)$, la relation $f - g \ll f$ est équivalente à $f - g \ll g$ et entraîne $f \ll g$.

En effet, $f - g \ll f$ signifie, que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \mathcal{F}$ tel que $\|f(x) - g(x)\| \leq \varepsilon \|f(x)\|$ pour tout $x \in X$.

On en tire $(1 - \varepsilon) \|f(x)\| \leq \|g(x)\|$, et par suite $f \ll g$, d'où (prop.4) $f - g \ll g$.

COROLLAIRE.- La relation $f - g \ll f$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{H}(\mathcal{F}, G)$.

En effet, si on a $f - g \ll f$ et $g - h \ll g$, on a $f - g \ll g$ et $g \ll f$, d'où (prop.5) $f - h \ll g$ et par suite (prop.4) $f - h \ll f$, ce qui montre que la relation considérée est transitive;

elle est symétrique d'après la prop.7 et est trivialement réflexive, d'où le corollaire.

DÉFINITION 4.- Etant données deux fonctions f, g de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{G})$, on dit que f et g sont équivalentes (suivant \mathcal{F}) et on écrit $f \sim g$ si on a $f - g \ll \rho$.

Exemples.- 1) Pour une fonction numérique $f \in \mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$, la relation $f \sim 1$ signifie que f tend vers 1 suivant le filtre \mathcal{F} .

2) Si $f(x) = a_0 x^n + \dots + a_n$ est un polynôme de degré n par rapport à la variable réelle (resp. complexe) x , on a $f(x) \sim a_0 x^n$ lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. vers ∞) d'après la prop.5.

3) Lorsque x tend vers $+\infty$, $(1 + \frac{1}{x}) \sin x \sim \sin x$.

4) Lorsque la variable complexe z tend vers 0, $e^z - 1 \sim z$.

Plus généralement, si f est une fonction d'une variable réelle (resp. complexe) définie dans un voisinage de x_0 , et ayant une dérivée $\neq 0$ au point x_0 , on a $f(x) - f(x_0) \sim f'(x_0)(x - x_0)$ lorsque x tend vers x_0 .

5) Lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$, on a

$$\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y} \sim \sqrt{x^2 + y^2}$$

6) Soit $f(x, y)$ un polynôme à coefficients réels et sans terme constant par rapport aux deux variables réelles x, y . Si, lorsque x tend vers 0 en restant > 0 , il existe une fonction $\varphi(x)$ continue dans un intervalle $[0, a]$ et telle que $f(x, \varphi(x)) = 0$ dans $[0, a]$, on peut montrer qu'il existe un nombre rationnel r et un nombre réel $\lambda \neq 0$ tels que $\varphi(x) \sim \lambda x^r$ (exerc. 3).

7) Pour tout $x > 0$, soit $\bar{\omega}(x)$ le nombre des nombres premiers $\leq x$; on a pu démontrer que, lorsque x tend vers $+\infty$ on a $\bar{\omega}(x) \sim x / \log x$ (*).

Z

Remarque. - On notera que la relation $f \sim g$ ne signifie nullement que la différence $f-g$ tende vers 0 ; cette différence peut même être non bornée, comme le montre l'exemple $x^2+x \sim x^2$, x tendant vers $+\infty$.

PROPOSITION 8. - Soient f_1, f_2, g_1, g_2 quatre fonctions de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ (ou de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{C})$) ; les relations $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ entraînent $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.

En effet, on a $f_1 f_2 - g_1 g_2 = f_1(f_2 - g_2) + g_2(f_1 - g_1)$; comme $f_1 \ll g_1$, $f_1 - g_1 \ll g_1$ et $f_2 - g_2 \ll g_2$, on a bien $f_1 f_2 - g_1 g_2 \ll g_1 g_2$ (prop. 4 et 5). Par contre, nous avons donné plus haut un exemple où on avait $f_1 = g_1$, $f_2 \sim g_2$, mais où la relation $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ n'était même pas vraie (ni a fortiori $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$).

Les relations de comparaison $f \ll g$, $f \ll k g$ et $f \sim g$ sont dites relations fortes. Deux fonctions f, g de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{G})$ sont dites comparables (ou fortement comparables lorsqu'on veut éviter toute confusion) si elles vérifient l'une (au moins) des trois relations $f \ll g$, $f \sim k g$, $g \ll f$ (k constante $\neq 0$).

Deux fonctions peuvent être faiblement comparables sans être fortement comparables, par exemple $\sin x$ et 1 lorsque x tend vers $+\infty$.

Désignons par R_1 la relation "il existe $k \neq 0$ tel que $f \sim k g$ " dans $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{G})$: il est immédiat que c'est une relation d'équivalence, qui entraîne R_0 et est entraînée par R_∞ ; soit $\mathcal{H}_1(\mathcal{F}, \mathbb{G})$ l'ensemble quotient $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{G})/R_1$. Par passage au quotient, la relation " $f \ll g$ ", ou il existe $k \neq 0$ tel que $f \sim k g$ " donne une relation d'ordre dans $\mathcal{H}_1(\mathcal{F}, \mathbb{G})$; l'exemple qui précède montre que $\mathcal{H}_1(\mathcal{F}, \mathbb{G})$ n'est pas totalement ordonné par cette relation.

Soit φ une application d'un ensemble E' dans E , telle que $\varphi^{-1}(\mathcal{F})$ soit une base de filtre sur E' . Il est clair que si f, g sont deux fonctions de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, G)$, $f \circ \varphi$ et $g \circ \varphi$ sont deux fonctions de $\mathcal{H}(\varphi^{-1}(\mathcal{F}), G)$, et que la relation $f \approx g$ (resp. $f \times g, f \ll g, f \sim g$) est équivalente à $f \circ \varphi \approx g \circ \varphi$ (resp. $f \circ \varphi \times g \circ \varphi, f \circ \varphi \ll g \circ \varphi, f \circ \varphi \sim g \circ \varphi$).

3. Relations de comparaison entre fonctions strictement positives.

Soit g une fonction de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$, strictement positive dans un ensemble de \mathcal{F} . Les relations de comparaison où figure g peuvent alors se formuler d'une autre manière : la relation $f \ll g$ équivaut à dire que la fonction f/g (qui est définie dans un ensemble de \mathcal{F}) est bornée dans un ensemble de \mathcal{F} ; la relation $f \lll g$ équivaut à dire que f/g tend vers 0 suivant \mathcal{F} . Si f est une fonction de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$, la relation $f \times g$ signifie que f/g est multiplicativement bornée dans un ensemble de \mathcal{F} , et la relation $f \sim g$, que f/g tend vers 1 suivant \mathcal{F} . Il en résulte aussitôt que si $f \sim k.g$ (k constante $\neq 0$) f a le signe de k dans un ensemble de \mathcal{F} .

Dans $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$, l'ensemble Γ des fonctions strictement positives dans un ensemble de \mathcal{F} est tel que $\Gamma / \mathbb{R}_\infty$ est un groupe multiplicatif Γ_∞ dans $\mathcal{H}_\infty(\mathcal{F}, \mathbb{R})$. De même, Γ / \mathbb{R}_0 et Γ / \mathbb{R}_1 sont des groupes, quotients de Γ_∞ par le sous-groupe des classes de fonctions de Γ multiplicativement bornées et le sous-groupe des classes de fonctions de Γ tendant vers 1 suivant \mathcal{F} , respectivement. Cela résulte aussi des propositions plus générales suivantes :

PROPOSITION 9.- Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ strictement positives dans un ensemble de \mathcal{F} ; pour tout a réel et $\neq 0$,

la relation $f \asymp g$ (resp. $f \sim g$) est équivalente à $f^a \asymp g^a$ (resp. $f^a \sim g^a$) ; si $a > 0$, la relation $f \lesssim g$ (resp. $f \ll g$) est équivalente à $f^a \lesssim g^a$ (resp. $f^a \ll g^a$) ; si $a < 0$, elle est équivalente à $f^a \gtrsim g^a$ (resp. $f^a \gg g^a$).

Les démonstrations sont immédiates.

On notera, d'après les prop. 3 et 6, que sur Γ/R_0 (resp. Γ/R_1), la relation d'ordre déduite de la relation $f \lesssim g$ (resp. " $f \ll g$ ou il existe une constante $k \neq 0$ telle que $f \sim kg$ ") est compatible avec la structure de groupe de Γ/R_0 (resp. Γ/R_1), et en fait donc des groupes ordonnés (mais non totalement ordonnés, comme nous l'avons vu).

PROPOSITION 10.- Soit g une fonction de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ telle que $\lim_{\mathcal{F}} g = +\infty$; la relation $f \ll g$ entraîne $e^f \ll e^g$; la relation $f \sim g$ entraîne $\log f \sim \log g$.

En effet, si $f \ll g$, $f-g = g(\frac{f}{g} - 1)$ tend vers $-\infty$ suivant \mathcal{F} . De même, si $f \sim g$, on a $\log f = \log g + \log \frac{f}{g}$, donc $\log f - \log g$ tend vers 0, et il en est de même de $\frac{\log f}{\log g} - 1 = \frac{\log f - \log g}{\log g}$.

Par contre, on notera que la relation $f \sim g$ n'entraîne pas $e^f \sim e^g$, comme le montre l'exemple où $f(x)=x^2$, $g(x)=x^2+x$, x tendant vers $+\infty$; de même, la relation $f \ll g$ n'entraîne pas $\log f \ll \log g$, comme le montre l'exemple $f(x)=x$, $g(x)=x^2$, x tendant encore vers $+\infty$.

DÉFINITION 5.- Soit g une fonction de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$, strictement positive dans un ensemble de \mathcal{F} , et telle que $\lim_{\mathcal{F}} g=0$ ou $\lim_{\mathcal{F}} g = +\infty$.

On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ est d'ordre ρ (fini ou infini) par rapport à g si on a $\lim_{\mathcal{F}} \frac{\log |f|}{\log g} = \rho$.

On notera que si f est d'ordre ρ par rapport à g , elle est d'ordre $-\rho$ par rapport à $1/g$; on peut donc se limiter au cas où $g(x)$ tend vers $+\infty$ suivant \mathcal{F} .

PROPOSITION 11. - Soit g une fonction de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ telle que $\lim_{\mathcal{F}} g = +\infty$; soit f une fonction de $\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$.

a) Pour que f soit d'ordre $+\infty$ par rapport à g , il faut et il suffit que $f \ll g^a$ pour tout $a > 0$.

b) Pour que f soit d'ordre $-\infty$ par rapport à g , il faut et il suffit que $f \ll g^{-a}$ pour tout $a > 0$.

c) Pour que f soit d'ordre fini et égal à ρ par rapport à g , il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, on ait $g^{\rho-\varepsilon} \ll f \ll g^{\rho+\varepsilon}$.

Démontrons par exemple c). Si l'ordre de f par rapport à g est ρ , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $M \in \mathcal{F}$ tel que, dans M , on ait $(\rho - \frac{\varepsilon}{2}) \log g(x) \leq \log f(x) \leq (\rho + \frac{\varepsilon}{2}) \log g(x)$, ou encore $(g(x))^{\rho - \frac{\varepsilon}{2}} \leq f(x) \leq (g(x))^{\rho + \frac{\varepsilon}{2}}$; comme $\lim_{\mathcal{F}} g = +\infty$, on a donc $g^{\rho-\varepsilon} \ll f \ll g^{\rho+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$; la réciproque est immédiate. Les démonstrations de a) et b) sont analogues.

On notera que si f est d'ordre fini ρ par rapport à g , $fg^{-\rho}$ est d'ordre 0 par rapport à g , et réciproquement; si f_1 (resp. f_2) est d'ordre ρ_1 (resp. ρ_2) par rapport à g , et si $\rho_1 + \rho_2$ est défini $f_1 f_2$ est d'ordre $\rho_1 + \rho_2$ par rapport à g .

Remarques. - 1) On observera que lorsque f est d'ordre fini ρ par rapport à g , le rapport f/g^ρ ne tend pas nécessairement vers une limite suivant \mathcal{F} ; par exemple, toute fonction multiplicativement bornée est d'ordre 0 par rapport à g , mais n'a pas nécessairement de limite suivant \mathcal{F} .

2) Une fonction f définie dans un ensemble de \mathcal{F} n'a pas nécessairement un ordre déterminé (fini ou non) par rapport à g , car cette propriété implique en particulier que f est comparable à toutes les puissances de g , sauf une au plus. Or il n'en est pas nécessairement ainsi, comme le montre l'exemple où $g(x)=x$, $f(x)=1+x^2\sin^2 x$ (x tendant vers $+\infty$). Dans cet exemple, f est comparable à g^a pour $a < 0$ et $a > 2$; si on prenait au contraire $f(x)=e^x\sin^2 x + e^{-x}\cos^2 x$, f ne serait comparable à aucune puissance (positive ou négative) de g .

4. Notations.

Etant donnée une fonction numérique $f \in \mathcal{R}(\mathcal{F}, \mathbb{R})$, il est souvent commode de noter $O_1(f), O_2(f), \dots$, les diverses fonctions qui interviennent dans une démonstration et qui sont toutes dominées par f ; on notera de même $o_1(f), o_2(f), \dots$, les fonctions qui sont négligeables devant f .

Bien entendu, s'il n'intervient qu'une seule fonction dominée par f (resp. négligeable devant f) on la notera $O(f)$ (resp. $o(f)$). Beaucoup d'auteurs, par abus de langage, notent $O(f)$ (resp. $o(f)$) toutes les fonctions d'une démonstration (distinctes ou non) qui sont dominées par f (resp. négligeables devant f). Dans ce Traité, nous éviterons toujours cet abus de langage, qui n'est pas sans créer des risques de confusion.

Avec ces notations, les prop. 1, 2, 3 se traduisent comme suit : si $g=O(f)$ et $h=O(g)$, alors $h=O(f)$; on peut écrire

(1)
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i O_i(f) = O_{n+1}(f) \quad (\lambda_i \text{ constantes})$$

(2)
$$O(f)O(g) = O(fg)$$

De même, la prop. 4 prouve que si $g=O(f)$ et $h=o(g)$ (resp. $g=o(f)$ et $h=O(g)$), on a $h=o(f)$, et les prop. 5 et 6 permettent d'écrire

(3)
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i o_i(f) = o_{n+1}(f)$$

(4)
$$o(f)o(g) = o(fg)$$

La relation $f \sim g$ équivaut à $f = g + o(g)$.

$O_k(1)$ (resp. $o_k(1)$) désigne une fonction bornée dans un ensemble de \mathcal{F} (resp. une fonction tendant vers 0 suivant \mathcal{F}).