ESPACES LINEAIRES

Rédaction n° 0-1

Nombre de pages : 72

Nombre de feuilles : 72

Espaces linéaires

(Urédaktion)

-1

Livre V
Chap I à V
Etat 1

A — 1

2

ESPACES LINÉAIRES.

§ 1. Linéarité et convexité.

Dans ce chapitre, il est question d'<u>ensembles vectoriels</u> (Algèbre linéaire, ch. §) dont la structure vectorielle a pour corps d'opérateurs K le corps des nombres réels R, ou le corps $R(i)$ des nombres complexes. Lorsque $K = R(i)$, il y a une seconde structure vectorielle sur l'ensemble considéré, à savoir celle dont le corps d'opérateurs est R ; on les appelle respectivement structure vectorielle <u>complexe</u> et structure vectorielle <u>réelle</u>.

Les éléments d'un ensemble vectoriel $M(K)$ sont appelés indifféremment, suivant les cas, <u>vecteurs</u> ou <u>points</u> (par abus de langage).

Rappelons les principales propriétés des ensembles vectoriels dont nous aurons à faire usage :

1°) Une <u>combinaison linéaire</u> de n points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est un point de la forme $\sum_{i=1}^{n} t_i a_i$, où les t_i sont des nombres de K. S étant une partie quelconque de $M(K)$, l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ses points forme un sous-ensemble vectoriel, le plus petit contenant S ; on dit que cet ensemble est <u>engendré</u> par S. Un ensemble S est dit formé de points <u>linéairement indépendants</u> s'il n'existe aucune combinaison linéaire de ses points qui soit nulle sans que les t_i correspondants soient tous nuls. Si un sous-ensemble B de $M(K)$ engendre $M(K)$ et est formé de points linéairement indépendants, on dit que c'est une <u>base</u> de $M(K)$ Il existe toujours une base d'un ensemble vectoriel quelconque, et toutes les bases sont équipotentes. Si la puissance de la base est un nombre fini n, on dit que $\mathcal{M}(K)$ a *n dimensions*, et sinon, que c'est un ensemble *à une infinité de dimensions*.

2°) Si G est un sous-ensemble vectoriel de $\mathcal{M}(K)$, et B une base de G, on peut trouver dans $\mathcal{M}-G$ un ensemble de points C tel que $B \cup C$ forme une base de $\mathcal{M}(K)$. On appelle ensemble quotient de $\mathcal{M}$ par G l'ensemble quotient de $\mathcal{M}$ par la relation $x-y \in G$; c'est un ensemble vectoriel isomorphe au sous-ensemble vectoriel H engendré par C. $\mathcal{M}$ est *somme directe* de G et H , c'est-à-dire que chacun de ses points x se met d'une manière et d'une seule sous la forme $x = y + z$ où $y \in G$ et $z \in H$. Un sous-ensemble vectoriel G est appelé un *hyperplan homogène* lorsque C n'a qu'un seul élément ; H est dit alors *droite homogène*.

3°) $\mathcal{M}(K)$ et $\mathcal{M}'(K)$ étant deux ensembles vectoriels ayant même corps d'opérateurs, une *application linéaire* (ou *homomorphisme*) de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$ (ou encore une *fonction linéaire* définie dans $\mathcal{M}$, à valeurs dans $\mathcal{M}'$) est une application f de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$ telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(tx) = tf(x)$ quels que soient x,y dans $\mathcal{M}$, $t \in K$. Une application linéaire est déterminée par ses valeurs sur une base de $\mathcal{M}$. Une application linéaire biunivoque de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{M}'$ est un isomorphisme des structures vectorielles de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$.

Une *forme linéaire* est par définition une application linéaire de $\mathcal{M}(K)$ dans son corps d'opérateurs K . L'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{M}$ est appelé *ensemble dual* de $\mathcal{M}$ lorsqu'on le munit de la structure vectorielle où 0 est la forme identiquement nulle, $f+g$ la forme ayant pour valeurs $f(x)+g(x)$, tf la forme ayant pour valeurs $tf(x)$.

4°) A tout hyperplan homogène H dans $\mathcal{M}$ correspond une forme linéaire f non identiquement nulle telle que H soit identique à l'ensemble des points x où $f(x) = 0$; si f et g ont toutes deux cette propriété, on a $f = tg$, $t \in K$. Réciproquement, si f est une forme linéaire non identiquement nulle, l'ensemble des points x tels que $f(x) = 0$ est un hyperplan homogène, dont $f(x) = 0$ est dite <u>l'équation</u>.

Plus généralement, si G est un sous-ensemble vectoriels de $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M}/G$ soit un ensemble à n dimensions, les formes linéaires nulles sur G forment un sous-ensemble vectoriel à n dimensions de l'ensemble dual, G'. Si H est un sous-ensemble vectoriel à n dimensions de $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M}$ soit somme directe de G et H , on peut trouver une base (x_i) de H et une base (f_i) de G' $(i=1,2,\dots,n)$ telles que $f_i(x_j)=0$ si $i \neq j$, $= 1$ si $i = j$. Réciproquement, si G' est un sous-ensemble vectoriel à n dimensions du dual, l'ensemble G des points de $\mathcal{M}$ où toutes les formes de G' s'annulent est tel que $\mathcal{M}/G$ soit à n dimensions, et on peut trouver dans G' et dans H (tel que $\mathcal{M}$ soit somme directe de G et H) deux bases ayant les propriétés précédentes.

On en déduit en particulier que, si g_i $(i=1,2,\dots,n)$ sont n formes linéaires indépendantes, et a_i n nombres quelconques de K , les équations $g_i(x) = a_i$ ont toujours une solution au moins ; si x et y sont deux de ces solutions, x-y appartient au sous-ensemble vectoriel de $\mathcal{M}$ où tous les g_i s'annulent.

<u>Translations. Homothéties.</u> x_0 étant un vecteur fixe de $\mathcal{M}$, l'application biunivoque $y = x+x_0$ de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{M}$ est appelée <u>translation de vecteur</u> x_0 ; les translations forment un groupe de transformations

simplement transitif, isomorphe à $\mathcal{M}$ considéré comme groupe additif.

λ étant un nombre $\neq 0$ de K, $y = \lambda x$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{M}$ qu'on appelle homothétie de rapport λ ; les homothéties forment un groupe (intransitif) qui laisse invariant l'origine, et est isomorphe au groupe multiplicatif des nombres $\neq 0$ de K.

Droites. Demi-droites. Segments. Variétés linéaires. On appelle droite passant par (ou joignant) deux points distincts x, y de $\mathcal{M}$, l'ensemble des points $tx+(1-t)y$, où t parcourt le corps K ; on vérifie immédiatement que la droite qui passe par deux points distincts quelconques d'une droite D est identique à D.

Lorsque $K = R(i)$, les droites dont nous venons de donner la définition seront appelées droites complexes, pour les distinguer des droites dans la structure vectorielle réelle de $\mathcal{M}$, qui seront dites droites réelles.

x et y étant deux points distincts quelconques d'une droite D, tous les vecteurs $y-x$ sont deux à deux homothétiques ; on dit que D a pour direction un quelconque de ces vecteurs, ou encore que D est parallèle à ces vecteurs, ou parallèle à la droite homogène que forment tous les points $y-x$. y étant un vecteur donné $\neq 0$, il passe par un point quelconque x une droite et une seule parallèle à y, à savoir l'ensemble des points $x + ty$, où t parcourt K.

On appelle demi-droite (resp. demi-droite ouverte) d'origine x, orientée par le vecteur $y \neq 0$, l'ensemble des points $x + ty$, où t parcourt l'ensemble des nombres positifs (resp. strictement positifs).

On appelle __segment__ (resp. segment __ouvert__) joignant les points distincts x, y, l'ensemble des points $tx + (1-t)y$, où t parcourt l'intervalle fermé $[0,1]$ (resp. l'intervalle ouvert $(0,1)$) sur R.

Toute translation, et toute application linéaire de $\mathcal{M}$ dans un autre ensemble vectoriel, transforme une droite (resp. droite réelle, demi-droite, segment) en une droite (resp. droite réelle, demi-droite, segment).

Si une translation transforme un point d'une droite en un autre point de cette droite, (c'est-à-dire si le vecteur de cette translation est parallèle à la droite), elle transforme la droite en elle-même ; toute droite homogène est transformée en elle-même par une homothétie (une droite homogène réelle par une homothétie de rapport réel).

Une partie V de $\mathcal{M}$ est dite __variété linéaire__ si elle contient la droite joignant deux quelconques de ses points (distincts) ; toute intersection de variétés linéaires est donc une variété linéaire (en considérant l'ensemble vide et l'ensemble réduit à un point comme des variétés linéaires). S étant une partie quelconque de $\mathcal{M}$, il existe toujours au moins une variété linéaire contenant S, à savoir $\mathcal{M}$ lui-même ; l'intersection de toutes les variétés linéaires contenant S est appelée la variété linéaire $V(S)$ __engendrée__ par S.

Toute translation, et toute application linéaire de $\mathcal{M}$ dans un autre ensemble vectoriel, transforme une variété linéaire en variété linéaire ; on peut donc toujours transformer, par une translation, une variété linéaire en variété linéaire __homogène__, c'est-à-dire passant par l'origine. Or, il résulte de la définition des variétés linéaires que les variétés linéaires homogènes ne sont autres que les <u>sous-ensembles vectoriels</u> de $\mathcal{M}$; si on appelle <u>parallèles</u> deux variétés linéaires déduites l'une de l'autre par translation, on voit que toute variété linéaire est parallèle à un sous-ensemble vectoriel.

On en déduit sans peine que la variété V(S) engendrée par un ensemble S quelconque est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires $\sum_i t_i x_i$ de points de S, qui satisfont à la condition $\sum_i t_i = 1$.

Toute variété linéaire parallèle à un sous-ensemble vectoriel à n dimensions est dite <u>variété linéaire à n dimensions</u> ; elle est engendrée par n+1 quelconques de ses points, pourvu qu'ils n'appartiennent pas à une variété linéaire de dimension $< n$.

Toute variété linéaire parallèle à un hyperplan homogène est dite <u>hyperplan</u> ; tout hyperplan est donc identique à l'ensemble des points qui vérifient $f(x)=a$, où f est une forme linéaire non identiquement nulle, et a un nombre de K ; et réciproquement. n hyperplans <u>linéairement indépendants</u> (c'est-à-dire dont les formes linéaires correspondantes sont linéairement indépendantes) ont toujours des points communs, qui forment une variété linéaire parallèle à un sous-ensemble vectoriel G tel que $\mathcal{M}/G$ ait n dimensions.

Lorsque $K = R(i)$, les variétés linéaires précédentes seront dites variétés linéaires <u>complexes</u> ; celles qui correspondent à la structure vectorielle réelle, variétés linéaires <u>réelles</u>.

Ensembles étoilés et ensembles convexes. Soit x_0 un point de $\mathcal{M}$; on dit qu'un ensemble E $\mathcal{M}$ est étoilé par rapport à x_0 si, quel que soit $x \in E$, tout point du segment joignant x_0 et x appartient aussi à E ; toute intersection d'ensembles étoilés par rapport à x_0 est encore un ensemble étoilé par rapport à x_0 .

Considérons une demi-droite quelconque d'origine x_0, orientée par le vecteur y , et soit t_y la borne supérieure des valeurs de $t \geqslant 0$ telles que $x_0 + ty \in E$; il est immédiat, en vertu de la définition, que l'ensemble des valeurs de t telles que $x_0+ty \in E$ est, soit l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant t_y$, soit l'intervalle $0 \leqslant t < t_y$ (on est toujours dans ce dernier cas si $t_y = +\infty$).

On dit qu'une partie C de $\mathcal{M}$ est convexe si, quels que soient les points distincts x,y de C , tout point du segment joignant x et y appartient à C : cela équivaut à dire que C est étoilé par rapport à chacun de ses points. Toute variété linéaire, toute variété linéaire réelle, toute demi-droite, est convexe ; l'intersection d'une famille d'ensembles convexes est un ensemble convexe.

En particulier, l'intersection d'un ensemble convexe et d'une droite réelle est un ensemble convexe, donc soit l'ensemble vide, soit un point, soit un segment ouvert, augmenté ou non d'une seule de ses extrêmités, ou des deux, soit une demi-droite ouverte ou fermée, soit enfin la droite tout entière.

Soient $x_1,x_2,\dots,x_n$ n points d'un ensemble convexe C ; le point $x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i$, où les t_i sont des nombres de l'intervalle $[0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, appartient aussi à C . On le démontre aisément par récurrence sur n : en supposant $t_n \neq 1$ (sans quoi la proposition est évidente), on peut écrire $x=(1-t_n)\, y + t_n x_n$, où $y = \sum_{i=1}^{n-1} t_i x_i / (1-t_n)$, d'où la proposition, y appartenant par hypothèse à C .

Considérons alors un ensemble quelconque S ; l'intersection $C(S)$ de tous les ensembles convexes contenant S est appelé l'ensemble convexe <u>engendré</u> par S ; on a évidemment $C(S) \subset V(S)$. Si x_ι est une application biunivoque sur S d'un ensemble d'indices , $C(S)$ est identique à l'ensemble des points $x = \sum_{\iota \in I} t_\iota x_\iota$, où les t_ι sont des nombres de $[0,1]$, nuls à l'exception d'un nombre <u>fini</u> d'entre eux et tels que $\sum_{\iota \in I} t_\iota = 1$; en effet, $C(S)$ doit contenir l'ensemble de ces points, d'après ce qui précède, et on vérifie immédiatement que cet ensemble est convexe.

Toute translation, et toute application linéaire de $\mathcal{M}$ dans un autre ensemble vectoriel, transforme un ensemble étoilé par rapport à x_0 en un ensemble étoilé par rapport à l'image de x_0, et tout ensemble convexe en un ensemble convexe.

Considérons maintenant un <u>produit</u> $\mathcal{M}(K) = \prod_{\iota \in I} \mathcal{M}_\iota(K)$ d'ensembles vectoriels ayant le même corps d'opérateurs K ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{R}(i)$) : on rappelle que la structure d'ensemble vectoriel y est définie par $(x_\iota) + (y_\iota) = (x_\iota + y_\iota)$, et, si $\lambda \in K$, $\lambda(x_\iota) = (\lambda x_\iota)$. On voit immédiatement que, si V_ι est une variété linéaire dans $\mathcal{M}_\iota$, $\prod_\iota V_\iota$ est une variété linéaire dans $\mathcal{M}$; de même, si C_ι est un ensemble convexe dans $\mathcal{M}_\iota$, le produit $\prod_\iota C_\iota$ est un ensemble convexe dans $\mathcal{M}$.

<u>Exercice</u>. Appelons <u>surface</u> d'un ensemble convexe C l'ensemble $\mathring{C}$ des points de $\mathcal{M}$ possédant la propriété suivante : à tout $x \in \mathring{C}$ correspond un $y \in C$ tel que tous les points $y+t(x-y)$

appartiennent à C pour $0 \leqslant t < 1$, et au complémentaire de C pour $t > 1$ (x pouvant ou non appartenir à C). Montrer que l'ensemble $C' = C \cup \mathring{C}$ est convexe.

Montrer sur l'exemple suivant que la surface de C' peut comprendre des points n'appartenant pas à C' : on prend pour $\mathcal{M}$ un ensemble vectoriel ayant une base dénombrable (e_n) $(n=0,1,\ldots)$; pour chaque $n > 0$, on considère l'ensemble A_n des points $t_n e_n + (1-1/n)u_n e_o$, où $t_n + u_n \leqslant 1$, t_n et u_n étant positifs et $t_n \neq 0$; on appelle C l'ensemble convexe engendré par la réunion des A_n $(n=1,2,\ldots)$; montrer que le point e_o appartient à la surface de C', mais non à la surface de C.

<u>Fonctions linéaires et fonctions convexes</u>. Dans cette section, nous appelons <u>fonctions linéaires</u> les formes linéaires de la structures vectorielle <u>réelle</u> (ce sont les formes linéaires tout court si $K = R(i)$) sur $\mathcal{M}$; on définit de même les fonctions linéaires sur un sous-ensemble vectoriel réel de $\mathcal{M}$.

Tout hyperplan réel est l'ensemble des points x tels que $f(x)=a$, où f est une fonction linéaire définie sur $\mathcal{M}$, et a un nombre réel; et réciproquement, une telle équation définit un hyperplan réel. Deux points x,y, de $\mathcal{M}$ sont dits <u>d'un même côté</u> de l'hyperplan $f(x)=a$ si $f(x)-a$ et $f(y)-a$ sont tous deux positifs ou tous deux négatifs ; l'ensemble des points situés d'un même côté d'un hyperplan est <u>convexe</u>, comme on le vérifie immédiatement.

Une fonction <u>réelle</u> $p(x)$ définie dans $\mathcal{M}$, est appelée fonction <u>convexe homogène</u>, si, quels que soient x,y, $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$, et si, quel que soit $x \in \mathcal{M}$ et quel que soit t <u>positif</u>, $p(tx) = tp(x)$ (ce qui entraîne en particulier $p(0)=0$).

a étant un nombre **réel** quelconque, l'ensemble C des points x tels que $p(x) < a$, et l'ensemble $\overline{C}$ des points x tels que $p(x) \leq a$ sont des ensembles **convexes**, comme il résulte immédiatement de l'inégalité $p(tx+(1-t)y) \leq tp(x) +(1-t)p(y)$, valable quels que soient x et y, et quel que soit t dans $[0,1]$. Si $a > 0$, ces ensembles contiennent l'origine ; en écartant le cas où p(x) est identiquement nulle, si, en un point $x \neq 0$, $p(x) \leq 0$, la demi-droite issue de l'origine et passant par x est contenue tout entière dans C ; si, au contraire $p(x) > 0$, l'ensemble des points d'intersection de C (resp. $\overline{C}$) avec la demi-droite issue de 0 et passant par x, se compose des points tx, où $0 \leq t < a/p(x)$ (resp. $0 \leq t \leq a/p(x)$).

Réciproquement, soit $\overline{C}$ un ensemble convexe contenant l'origine et tel que l'intersection de $\overline{C}$ avec une demi-droite quelconque issue de l'origine soit un segment joignant ce point à un autre point, ou la demi-droite tout entière ; posons $p(x) = \text{\underline{Borne}}\ 1/t$, où t parcourt l'ensemble des valeurs positives telles que $tx \in \overline{C}$. Il est clair que $\overline{C}$ est l'ensemble des points où $p(x) \leq 1$, et que $p(tx) = tp(x)$ quel que soit $t \geq 0$; reste à montrer que $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$. Or, si $a > p(x)$, $b > p(y)$ les points x/a, y/b appartiennent à $\overline{C}$, donc aussi le point $(x+y)/(a+b)$, d'où $p(x+y) \leq a+b$, et a et b sont aussi voisins qu'on veut de p(x) et p(y). On démontre de la même manière la réciproque relative à l'ensemble C.

Nous arrivons maintenant à un théorème fondamental d'**existence** des fonctions linéaires :

Théorème 1 (Hahn-Banach). Etant donnés une fonction convexe homogène $p(x)$, et une fonction linéaire $f(x)$ définie sur un sous-ensemble vectoriel réel $G \subset \mathcal{M}$, et telle que $f(x) \leqslant p(x)$ quel que soit $x \in G$, il existe une fonction linéaire $\overline{f}$ qui prolonge f à l'ensemble $\mathcal{M}$ tout entier, et qui est telle que $\overline{f}(x) \leqslant p(x)$ quel que soit x.

Soit $\mathcal{L}$ la famille de toutes les fonctions linéaires F qui prolongent f à un sous-ensemble vectoriel réel de $\mathcal{M}$, et satisfont à l'inégalité $F(x) \leqslant p(x)$ en tout point où elles sont définies. A toute fonction F de cette famille, faisons correspondre son ensemble représentatif F^* dans le produit $\mathcal{M} \times R$; on obtient donc une famille $\mathcal{L}^*$ de parties de $\mathcal{M} \times R$ qui contiennent toutes f^*. Or, on voit immédiatement que, si $\mathfrak{M}$ est une partie totalement ordonnée (par inclusion) de $\mathcal{L}^*$, la réunion des ensembles de $\mathfrak{M}$ est encore un ensemble de $\mathcal{L}^*$. On peut donc appliquer à $\mathcal{L}^*$ le théorème de Zorn : il existe un prolongement maximal $\overline{f}$, qui est linéaire sur un sous-ensemble vectoriel réel H de $\mathcal{M}$, et y satisfait à $\overline{f}(x) \leqslant p(x)$. Reste à démontrer que $H = \mathcal{M}$.

Or, supposons que $x_0 \notin H$, et soit H' le sous-ensemble vectoriel réel engendré par H et x_0 : tout point $x \in H'$ se met d'une manière et d'une seule sous la forme $x = y + tx_0$, où t est réel et $y \in H$. Si on montre qu'il existe une fonction linéaire g, prolongeant $\overline{f}$ dans H' et telle que $g(x) \leqslant p(x)$ dans H', on aboutira à une contradiction, $\overline{f}$ étant un prolongement maximal, et le théorème sera donc établi.

Or, si $g(x_0) = \alpha$, il faut montrer qu'on peut trouver α tel que $\overline{f}(y) + t\alpha \leqslant p(y + tx_0)$ quel que soit $y \in H$ et $t \neq 0$, ou encore, en posant $z = y/t$ que (1) $\quad -p(-x_0-z) \leqslant \overline{f}(z) + \alpha \leqslant p(x_0+z)$

quel que soit $z \in H$. Or, quels que soient z' , z'' dans H

$$\overline{f}(z')-\overline{f}(z'')=\overline{f}(z'-z'') \leqslant p(z'-z'') = p\left[(x_0+z')+(-x_0-z'')\right] \leqslant$$
$$\leqslant p(x_0+z')+ p(-x_0-z'')$$

ce qui s'écrit encore

$$-p(-x_0-z'')-\overline{f}(z'') \leqslant p(x_0+z')-\overline{f}(z')$$

et montre par suite que les nombres

$$m = \underset{z \in H}{\underline{\text{Borne}}} \left[p(x_0+z)-\overline{f}(z)\right] \quad \text{et} \quad m = \underset{z \in H}{\overline{\text{Borne}}} \left[-p(-x_0-z)-\overline{f}(z)\right]$$

sont finis, et que $m \leqslant M$; en prenant α tel que $m \leqslant \alpha \leqslant M$, l'inégalité (1) sera donc vérifiée pour tout $z \in H$.

C.Q.F.D.

<u>Corollaire 1</u>. <u>Quels que soient la fonction convexe homogène</u> $p(x)$ <u>et le point</u> $x_0 \neq 0$, <u>il existe une fonction linéaire</u> $f(x)$ <u>telle que</u> $f(x_0) = p(x_0)$ <u>et</u> $f(x) \leqslant p(x)$ <u>quel que soit</u> x .

Prenons en effet pour sous-ensemble vectoriel G la droite réelle passant par x_0 et l'origine ; en posant $g(tx_0)= tp(x_0)$ quel que soit t réel, on définit une fonction linéaire sur G telle que $g(x) \leqslant p(x)$; car si $t \geqslant 0$, cette inégalité est vérifiée par définition, et si $t < 0$, on a $0=p(0)\leqslant p(tx_0)+p(-tx_0)=p(tx_0)-tp(x_0)$.

Il suffit alors d'appliquer le théorème précédent à la fonction g pour en déduire le corollaire.

Etant donné un ensemble convexe C, un hyperplan réel H est dit <u>hyperplan d'appui</u> de C si tous les points de C sont <u>d'un même côté</u> de H , et si de plus H contient au moins un point de C . Le corollaire 1 peut alors s'énoncer encore de la façon suivante :

<u>Corollaire 2</u>. $p(x)$ <u>étant une fonction convexe homogène</u>, <u>soit</u> C <u>l'ensemble convexe des points</u> x <u>tels que</u> $p(x) \leqslant a$ $(a > 0)$; <u>par tout point</u> x_0 <u>tel que</u> $p(x_0)=a$, <u>il passe au moins un hyperplan d'appui de</u> C.

Si, pour chaque hyperplan d'appui de C, on considère l'ensemble convexe formé des points situés par rapport à cet hyperplan du même coté que l'origine, on peut encore dire que C est <u>l'intersection</u> de tous ces ensembles convexes.

§ 2. Espaces linéaires.

Nous ne considérerons tout d'abord dans ce paragraphe, que des ensembles vectoriels dont le corps des opérateurs est le corps des <u>nombres réels</u> ; en terminant, nous indiquerons comment les résultats obtenus se généralisent lorsque $R(i)$ est le corps des opérateurs.

Soit donc M un ensemble vectoriel dont le corps des opérateurs est R ; on sait que, si on considère M comme groupe abélien additif, une structure uniforme séparée sur M définit M comme <u>groupe topologique</u> (ch. III, §) si elle vérifie la condition suivante :

a) <u>La fonction</u> $x-y$ <u>est continue dans</u> $M \times M$.

Nous dirons de plus que M, muni de cette structure uniforme, est un <u>espace linéaire</u> (ou espace <u>vectoriel</u>) si, en outre, la condition suivante est remplie :

b) <u>La fonction</u> λx <u>est continue dans</u> $M \times R$.

Conformément aux définitions générales, si M et M' sont deux espaces linéaires, nous dirons qu'une application biunivoque f de M sur M' est un <u>isomorphisme</u> si c'est à la fois un isomorphisme pour les structures vectorielles de M et M' et un isomorphisme pour leurs structures uniformes.

D'après un résultat général du ch. III (§), $x-y$ est <u>uniformément continue</u> dans $M \times M$ si a) est vérifiée ; de même, quel que soit λ_0, $\lambda_0 x$ est une fonction <u>uniformément continue</u> de x, en vertu de b) et de la relation $\lambda_0(x-x') = \lambda_0 x - \lambda_0 x'$; enfin, de la même manière, on voit que pour un x_0 fixe quelconque, λx_0 est fonction <u>uniformément continue</u> de λ . De ces remarques on déduit en particulier que les translations et homothéties sont des <u>isomorphismes</u> d'un espace linéaire sur lui-même.

Onsait que la structure uniforme d'un groupe topologique est déterminée par la connaissance des voisinages de l'élément unité (ch. III) : nous allons chercher les conditions que doit remplir le filtre des voisinages de l'origine pour qu'il détermine sur $\mathcal{M}$ une structure d'<u>espace linéaire</u>. Nous utiliserons les notations suivantes : A et B étant deux parties quelconques de $\mathcal{M}$, A+B sera l'ensemble des points x+y , où $x \in A$, $y \in B$; λA l'ensemble des points λx , où $x \in A$; enfin, nous désignerons par A_x l'ensemble $A + \{x\}$.

On remarquera qu'en général on n'a pas $A + A = 2A$.

<u>Exercice</u>. Montrer que, si A est étoilé par rapport à l'origine et si toute demi-droite coupe A suivant un ensemble de la forme $y = tx$, $0 \leqslant t < t_x$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit convexe est que $A + A = 2A$.

Pour l'étude des voisinages de l'origine, on sait (ch.III) qu'on peut se limiter à ceux qui sont <u>symétriques</u>, c'est-à-dire tels que $-V = V$, puisqu'ils forment un système fondamental $\mathfrak{S}$. La condition a) se traduit alors ~~x~~ par la condition équivalente sur les ensembles de $\mathfrak{S}$:

a') <u>Quel que soit</u> $V \in \mathfrak{S}$, <u>il existe</u> $W \in \mathfrak{S}$ <u>tel que</u> $W + W \subset V$.

Pour obtenir de même des conditions équivalentes à b), observons d'abord que, quel que soit le point $(\lambda_0, x_0) \in R \times \mathcal{M}$, on peut écrire

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = (\lambda - \lambda_0)x_0 + (x - x_0)\lambda_0 + (\lambda - \lambda_0)(x - x_0)$$

et, par suite, si a) est remplie, la condition b) est équivalente à la conjonction des trois conditions

b_1) <u>Quel que soit</u> $x_0 \in \mathcal{M}$, λx_0 <u>est une fonction continue de</u> λ <u>au point</u> $\lambda = 0$.

b_2) <u>Quel que soit</u> $\lambda_0 \in R$, $\lambda_0 x$ <u>est une fonction continue de</u> x au point $x = 0$.

b_3) λx <u>est continue au point</u> $(0,0)$ <u>de</u> $R \times \mathcal{M}$.

Or la traduction de ces trois conditions en conditions portant sur les ensembles de $\mathfrak{S}$ résulte immédiatement de la définition d'une fonction continue ; elles deviennent respectivement :

b_1') <u>Quel que soit</u> $x_0 \in \mathcal{M}$ <u>et quel que soit</u> $V \in \mathfrak{S}$, <u>il existe</u> $\alpha > 0$ <u>tel que</u> $\lambda x_0 \in V$ <u>pour tout</u> λ <u>tel que</u> $|\lambda| \leqslant \alpha$.

b_2') <u>Quel que soit</u> $\lambda_0 \in R$, <u>et quel que soit</u> $V \in \mathfrak{S}$, <u>il existe</u> $W \in \mathfrak{S}$ <u>tel que</u> $\lambda_0 W \subset V$.

b_3') <u>Quel que soit</u> $V \in \mathfrak{S}$, <u>il existe</u> $W \in \mathfrak{S}$ <u>et</u> $\alpha > 0$ <u>tels que</u> $\lambda W \subset V$ <u>pour tout</u> λ <u>tel que</u> $|\lambda| \leqslant \alpha$.

Les deux dernières conditions peuvent s'exprimer autrement : b_2') signifie que, si $V \in \mathfrak{S}$, $\lambda V \in \mathfrak{S}$ quel que soit $\lambda > 0$; si alors, dans b_3'), on pose $V' = \bigcup_{0<\lambda\leqslant\alpha} \lambda W$, on voit que V' est un voisinage symétrique <u>étoilé</u> contenu dans V. On aboutit donc au théorème suivant :

17

<u>Théorème 1. Si $\mathcal{M}$ est un espace linéaire, il existe un système fondamental de voisinages de l'origine $\mathfrak{S}$ formé d'ensembles symétriques, et vérifiant les trois conditions</u> :

E_I . <u>L'intersection d'un ensemble quelconque de $\mathfrak{S}$ et d'une droite quelconque passant par l'origine est un segment ouvert contenant l'origine ou la droite tout entière</u>, (d'où résulte en particulier que les ensembles de $\mathfrak{S}$ sont <u>étoilés</u>).

E_{II}. <u>Quel que soit</u> $V \in \mathfrak{S}$ <u>et quel que soit</u> $\lambda > 0$, $\lambda V \in \mathfrak{S}$.

E_{III}. <u>Quel que soit</u> $V \in \mathfrak{S}$, <u>il existe</u> $W \in \mathfrak{S}$ <u>tel que</u> $W + W \subset V$.

<u>Réciproquement, si une base de filtre est formée d'ensembles symétriques vérifiant ces trois conditions et dont l'intersection est l'origine elle définit sur $\mathcal{M}$ une structure d'espace linéaire dans laquelle elle forme un système fondamental de voisinages de l'origine</u>.

<u>Remarques</u>. 1) On peut munir un ensemble vectoriel <u>quelconque</u> $\mathcal{M}$ d'une structure d'espace linéaire. Soit en effet B une <u>base vectorielle</u> (Algèbre linéaire, ch.) de $\mathcal{M}$, et e_ι une application biunivoque sur B d'un ensemble d'indices I : tout point $x \in \mathcal{M}$ se met donc d'une manière et d'une seule sous la forme $x = \sum_\iota x_\iota e_\iota$, où les x_ι sont des nombres réels nuls à l'exception d'un nombre fini d'entre eux. Si on pose $p(x) = \operatorname{Max}_\iota |x_\iota|$, $p(x)$ est une fonction convexe homogène; en désignant par V_a l'ensemble $\overset{-1}{p}(z < a)$ (a nombre strictement positif quelconque), on vérifie immédiatement que la famille des ensembles V_a satisfait aux conditions E_I, E_{II}, et E_{III} ; et définit donc sur $\mathcal{M}$ une structure d'espace linéaire (c'est même ce que nous appellerons un peu plus loin une structure d'espace linéaire <u>normé</u>) ; on aurait un <u>résultat</u> analogue en utilisant la fonction convexe $q(x) = \sqrt{\sum x_\iota^2}$.

2) Soit M un espace linéaire, I un ensemble quelconque ; sur le <u>produit</u> M^I on peut définir une structure d'espace linéaire en y prenant la structure uniforme produit des structures uniformes des espaces facteurs ; si $M = R$, on obtient ainsi un espace linéaire qui n'est autre que l'espace $F_0(R)$ des fonctions réelles définies dans I, avec la structure uniforme de la <u>convergence simple</u> (voir ch. VII, §). Mais on peut aussi, comme on le vérifie immédiatement, définir sur ce ~~point~~ produit une structure uniforme d'espace linéaire <u>plus fine</u>, de la manière suivante : V étant un entourage quelconque de M, on considère l'ensemble $\mathring{V}$ des couples (x,y) de points $x = (x_\iota)$, $y = (y_\iota)$ de M^I tels que $(x_\iota, y_\iota) \in V$ <u>quel que soit</u> $\iota \in I$. Lorsque $M = R$, on retrouve ainsi l'espace $F_\infty(R)$ des fonctions numériques définies dans I, avec la structure de la <u>convergence uniforme</u> (ch. VII, §).

<u>Exercice</u>. Généraliser à l'espace $F_{\mathfrak{S}}(R)$, $\mathfrak{S}$ étant une famille de parties de I du type défini au ch. VII, §1.

<u>Complétion d'un espace linéaire</u>. Soit M un espace linéaire, $\tilde{M}$ son espace complété ; montrons que $\tilde{M}$ <u>est encore un espace linéaire</u>.

En effet, comme M est un groupe additif <u>abélien</u>, $\tilde{M}$ est aussi un groupe additif abélien quand la somme de deux éléments est par définition le prolongement de la fonction $x + y$ (ch.III, §). Il nous suffira d'établir que la fonction λx peut être <u>prolongée par continuité</u> dans $R \times \tilde{M}$; on vérifie immédiatement qu'elle définira dans $\tilde{M}$ une multiplication scalaire satisfaisant aux axiomes des ensembles vectoriels et d'autre part, ce prolongement étant continu dans $R \times \tilde{M}$, $\tilde{M}$ sera un espace linéaire.

Pour montrer que le prolongement est possible, nous établirons que l'image par la fonction λx de tout <u>filtre de Cauchy</u> $\mathfrak{F}$ sur $R \times M$ est un <u>filtre de Cauchy</u> sur M : on appliquera ensuite la prop. 7 du § 3 du ch. II, λx étant considérée comme définie sur une partie de $R \times \tilde{M}$, et prenant ses valeurs dans $\tilde{M}$.

Les projections $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ de $\mathfrak{F}$ sur M et R sont des filtres de Cauchy ; $\mathfrak{G}'$ converge donc vers un point λ_0 de R. Donnons-nous arbitrairement un voisinage V de la famille $\mathfrak{S}$: il nous suffira de montrer qu'on peut trouver un ensemble $A \in \mathfrak{G}$ et un ensemble $B \in \mathfrak{G}'$ tels que, quels que soient x', x" dans A, λ', λ'' dans B, $\lambda'' x'' - \lambda' x'$ appartient à V.

On peut écrire $\lambda'' x'' - \lambda' x' = (\lambda'' - \lambda')x' + \lambda''(x'' - x')$; soit W un voisinage tel que $W + W \subset V$, B_1 un ensemble de $\mathfrak{G}'$ contenu dans l'intervalle $(-2|\lambda_0|, +2|\lambda_0|)$, A_1 un ensemble de $\mathfrak{G}$ tel que, pour deux points x', x" de A_1, $x'' - x' \in W/2|\lambda_0|$; ces ensembles existent d'après l'hypothèse sur $\mathfrak{F}$. Soit ensuite W' un voisinage tel que $W' + W' \subset W$; on peut trouver un ensemble $A \in \mathfrak{G}$ contenu dans A_1 et tel que $x'' - x' \in W'$ pour tout couple de points de A. Soit alors x_0 un point de A ; il existe un nombre $\mu > 0$ tel que $\mu x_0 \in W'$ (et on peut supposer $\mu < 1$) ; déterminons alors un ensemble B de $\mathfrak{G}'$ contenu dans l'intersection de B_1 et de l'intervalle $(\lambda_0 - \frac{\mu}{2}, \lambda_0 + \frac{\mu}{2})$; quels que soient λ', λ'' dans B et x' dans A, on aura

$$(\lambda'' - \lambda')x' = (\lambda'' - \lambda')x_0 + (\lambda'' - \lambda')(x' - x_0)$$

et d'après les choix précédents, $(\lambda'' - \lambda')x_0 \in W'$, $(\lambda'' - \lambda')(x' - x_0) \in W'$ parce que $|\lambda'' - \lambda'| < 1$, donc $(\lambda'' - \lambda')x' \in W$;

20

comme d'autre part $|\lambda''| < 2\,|\lambda_0|$, $\lambda''(x''-x') \in W$, ce qui démontre la proposition.

La démonstration serait beaucoup plus simple si λx était <u>uniformément continue dans un voisinage de l'origine</u> ; mais <u>ce n'est pas le cas</u> en général. Soit en effet V_0 un voisinage fixe de l'origine ; pour que λx soit uniformément continue dans $V_0 \times I_0$, où I_0 est un certain voisinage de l'origine dans R, il faudrait en particulier qu'à tout voisinage V corresponde un nombre $\varepsilon > 0$ tel que, si $|\lambda'| < \varepsilon$ et $|\lambda''| < \varepsilon$, on ait $(\lambda'' - \lambda')x \in V$ <u>quel que soit</u> $x \in V_0$; or cela ne signifie pas autre chose que le fait que <u>la famille des ensembles</u> λV_0 <u>forme un système fondamental de voisinages de l'origine</u>, ce qui n'a pas lieu en général.

<u>Exercice</u>. Montrer que, si cette condition est satisfaite, λx est bien uniformément continue dans tout voisinage de l'origine.

<u>Propriétés topologiques des variétés linéaires et des ensembles convexes</u>.

<u>Proposition 1</u>. <u>Dans un espace linéaire, l'adhérence d'une variété linéaire est une variété linéaire</u> ; <u>l'adhérence d'un ensemble convexe est un ensemble convexe</u>.

En effet, soit V une variété linéaire, x_0 et y_0 deux points adhérents à V , t un nombre réel quelconque ; montrons que $z_0 = tx_0 + (1-t)y_0$ est aussi adhérent à V. Pour cela, soit U un voisinage quelconque du système $\mathfrak{S}$, U_{z_0} le voisinage correspondant de z_0 ; choisissons dans $\mathfrak{S}$ le voisinage W tel que $W+W \subset U$, puis, si $\alpha = \mathrm{Max}(|t|, |1-t|)$, posons $W' = \frac{1}{\alpha} W$. Par hypothèse, il existe un point $x \in V$

dans le voisinage W'_{x_0} , et un point $y \in V$ dans W'_{y_0} ; on a d'autre part $z_0 - \left[tx+(1-t)y\right] = t(x_0-x)+(1-t)(y_0-y)$; ce point se trouve donc dans U , et par suite $tx+(1-t)y \in U_{z_0}$, ce qui montre bien que $z_0 \in \overline{V}$. Le raisonnement est tout à fait analogue pour un ensemble convexe.

S étant une partie quelconque d'un espace linéaire $\mathcal{M}$, on appelle variété linéaire fermée <u>engendrée</u> par S l'adhérence de la variété linéaire V(S) engendrée par S. On dit que S est un ensemble <u>total</u> si $\overline{V(S)} = \mathcal{M}$. <u>Tout ensemble ouvert Ω est total</u> : car si $x_0 \in \Omega$, et si x est un point quelconque de $\mathcal{M}$, $x_0 + \lambda(x-x_0) \in \Omega$ pour une valeur convenable de λ d'après E_I , et par suite $V(\Omega)$ contient x, donc $V(\Omega) = \mathcal{M}$. Il en résulte qu'une variété linéaire <u>distincte de $\mathcal{M}$</u> ne peut contenir de point intérieur ; une variété linéaire <u>fermée</u> distincte de $\mathcal{M}$ est donc <u>éparse</u>, et il en est de même par suite de toute variété linéaire <u>non totale</u>.

> On aura soin de ne pas confondre les notions de <u>base</u> et <u>d'ensemble total</u> ; une base est toujours un ensemble total, mais un ensemble total n'est pas une base en général, puisque l'ensemble vectoriel qu'il engendre est seulement partout dense, et non identique à l'espace $\mathcal{M}$.

Il résulte de la définition d'une structure d'espace linéaire que la structure uniforme induite d'une variété linéaire homogène d'un espace linéaire $\mathcal{M}$ est, sur cette variété, une structure d'espace linéaire ; il en est de même pour une variété linéaire quelconque, qu'on peut considérer comme ensemble vectoriel en y prenant une origine arbitraire. Lorsque nous parlerons d'une variété linéaire de $\mathcal{M}$, considérée en tant qu'espace linéaire, ce sera toujours de cette structure <u>induite</u> qu'il s'agira.

<u>Proposition 2. Dans un espace linéaire, toute variété linéaire à n dimensions est un sous-espace linéaire isomorphe à $\mathbb{R}^n$.</u>

Il nous suffira de considérer les variétés <u>homogènes</u> ; si $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ sont n points linéairement indépendants d'une telle variété, à tout point $x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i$ de la variété correspond biunivoquement le point $(t_i) \in \mathbb{R}^n$, et cette correspondance est <u>linéaire</u>. La proposition sera démontrée si nous établissons que, <u>sur</u> $\mathbb{R}^n$, <u>il n'existe qu'une seule structure d'espace linéaire</u>.

Supposons donc donnée sur $\mathbb{R}^n$ une structure d'espace linéaire, définie par un système fondamental $\mathfrak{S}$ de voisinages symétriques de l'origine satisfaisant aux axiomes E_I, E_{II}, E_{III} ; il nous faut montrer que :

1° <u>Tout ensemble</u> $V \in \mathfrak{S}$ <u>contient un intervalle ouvert contenant l'origine</u>.

2° <u>Tout intervalle ouvert contenant l'origine contient un ensemble de</u> $\mathfrak{S}$.

1° La propriété est une conséquence immédiate de E_{III} : il existe en effet un ensemble $W \in \mathfrak{S}$ tel que $\underbrace{W+W+\ldots+W}_{n \text{ fois}} \subset V$; W contient les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ situés respectivement sur les n axes de coordonnées et $\neq 0$; donc V contient l'ensemble des points $\sum_{i=1}^{n} t_i a_i$, où les t_i parcourent $(-1,+1)$, c'est-à-dire un intervalle ouvert contenant l'origine.

2° En vertu de E_{II}, il suffit de montrer qu'il existe dans $\mathfrak{S}$ un ensemble <u>borné</u>. A chaque $V \in \mathfrak{S}$ faisons correspondre l'ensemble V_s des points x de la périsphère S^{n-1} tels que, dans tout voisinage de x sur S^{n-1} , il existe des points y tels que la droite passant par 0 et y coupe V suivant un segment arbitrairement grand ; on voit immédiatement que V_s est <u>fermé</u> (la topologie qui intervient ici est la topologie ordinaire de $\mathbb{R}^n$). L'intersection des ensembles V_s, lorsque V parcourt $\mathfrak{S}$, est <u>vide</u>:car, dans le cas contraire, il existerait x_0 commun à tous les V_s ; V étant quelconque dans $\mathfrak{S}$, soit $W \in \mathfrak{S}$ tel que $W+W \subset V$; W contient un intervalle ouvert A contenant l'origine ; quel que soit $\lambda > 0$, l'ensemble des droites issues de 0 et de direction $\lambda x_0 - x$, où x parcourt A, coupe S^{n-1} suivant un voisinage de x_0 ; comme $x_0 \in W_s$, il existerait donc un $y \in W$ tel que $x = \lambda x_0 - y$ soit dans A, ce qui entraîne $\lambda x_0 \in V$; par suite la droite passant par 0 et x_0 appartiendrait tout entière à V, quel que soit $V \in \mathfrak{S}$, ce qui est absurde, puisque la structure uniforme d'un espace linéaire est <u>séparée</u>. Comme S^{n-1} est <u>compact</u>, il existe alors un nombre <u>fini</u> d'ensembles $V \in \mathfrak{S}$ tels que l'intersection des V_s correspondants soit <u>vide</u> ; mais alors l'intersection des V appartient à $\mathfrak{S}$ et est bornée.

C.Q.F.D.

<u>Corollaire 1</u>. <u>Dans un espace linéaire, toute variété linéaire à n dimensions est fermée</u>.

En effet, c'est un sous-espace <u>complet</u>.

<u>Corollaire 2</u>. <u>Tout ensemble convexe dans un espace linéaire est connexe</u>.

En effet, deux points quelconques peuvent être joints par un segment, qui est homéomorphe à un intervalle fermé sur la droite numérique, c'est-à-dire à un ensemble connexe.

L'hypothèse de la continuité de λx par rapport à l'ensemble des deux arguments λ et x (ou, ce qui revient au même, l'existence d'un système fondamental de voisinages

<u>étoilés</u> de l'origine) intervient de façon essentielle dans la proposition 2. On peut en effet construire, sur le groupe additif des nombres réels, une structure uniforme de groupe topologique, pour laquelle la fonction λx est continue par rapport à <u>chacun</u> des arguments λ, x, mais non par rapport à l'ensemble des deux arguments ; et cette structure est <u>distincte</u> de celle de R (voir Appendice).

<u>Proposition 3</u>. <u>Soit</u> C <u>un ensemble convexe contenant un point intérieur</u> x_0 ; <u>si</u> x <u>est un point quelconque de</u> C, <u>tout point de la forme</u> $x_0+t(x-x_0)$ <u>où</u> $0 \leqslant t < 1$, <u>est intérieur à</u> C.

En effet, C contient par hypothèse un voisinage V_{x_0} ; donc, quel que soit $z \in V_{x_0}$, C contient aussi le point $z+t(x-z)$; mais si on pose $y=x_0+t(x-x_0)$ et $W = \frac{1}{1-t} V$, l'ensemble des points $z+t(x-z)$ n'est autre que W_y, ce qui montre que y est intérieur à C.

<u>Corollaire</u>. <u>Si</u> C <u>est un ensemble convexe fermé contenant un point intérieur</u> x_0, <u>toute demi-droite issue de</u> x_0 <u>et non contenue dans</u> C <u>coupe</u> C <u>suivant un segment d'extrêmités</u> x_0 <u>et</u> $x \neq x_0$; <u>l'ensemble des points</u> x <u>est identique à la frontière de</u> C.

En effet, x ne peut être intérieur à C, puisqu'il existe une droite passant par x et coupant C suivant un segment (ou une demi-droite) auquel x n'est pas intérieur ; d'autre part, si y est un point frontière quelconque, la demi-droite issue de x_0 et passant par y ne peut couper C que suivant le segment joignant x_0 et y, en vertu de la proposition précédente.

Un ensemble convexe <u>fermé et contenant un point intérieur</u> est appelé <u>corps convexe</u>.

Dans l'espace numérique R^n, la structure des ensemble convexes <u>fermés</u> est particulièrement simple ; on a en effet la proposition suivante : <u>si un ensemble convexe fermé contient n+1 points linéairement indépendants, c'est un corps convexe</u>. Il suffit pour le voir de faire une transformation linéaire non dégénérée qui amène les n+1 points considérés respectivement en 0 et en n points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ situés chacun sur un des demi-axes de coordonnées : l'ensemble convexe transformé contient alors l'intervalle $\prod_{i=1}^{n} \left[0, a_i/n\right]$, donc contient un point intérieur, et il en est par suite de même de l'ensemble initial. De cette proposition résulte immédiatement que, si un ensemble fermé convexe dans R^n engendre une variété linéaire à p dimensions, c'est un corps convexe <u>dans cette variété</u> (corps convexe à p dimensions).

On voit aussi que, dans R^n, un point intérieur à un ensemble convexe est <u>caractérisé</u> par le fait que, sur toute demi-droite issue de ce point, il existe au moins un autre point de l'ensemble.

Dans un espace linéaire quelconque, cette dernière proposition est inexacte : on peut donner des exemples d'ensembles convexes <u>sans point intérieur</u> et tels que toute demi-droite issue d'un quelconque de leurs points contienne au moins un autre point de l'ensemble (voir Appendice) ; la variété linéaire engendrée par un tel ensemble convexe est alors identique à l'espace tout entier.

<u>Fonctions linéaires continues</u>. Une fonction linéaire f, définie dans un espace linéaire $\mathcal{M}$, prenant ses valeurs dans un espace linéaire $\mathcal{M}'$, est en particulier un <u>homomorphisme</u> du groupe additif $\mathcal{M}$ dans le groupe

additif $\mathcal{M}'$; on sait donc que pour que f soit continue dans $\mathcal{M}$, il faut et il suffit qu'elle soit continue en un point ; de plus, si f est continue, elle est aussi uniformément continue.

Inversement, tout homomorphisme continue f de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$ est une fonction linéaire : car de la relation $f(x+y)= f(x)+f(y)$, on déduit immédiatement que $f(rx)=rf(x)$ quel que soit le nombre rationnel r ; si maintenant t est un nombre réel quelconque, c'est la limite d'une suite (r_n) de nombres rationnels, donc $f(tx)= \lim_{n\to\infty} f(r_n x) = \lim_{n\to\infty} r_n f(x) = tf(x)$, en vertu de la continuité de f(x) et de l'axiome E_I.

Si f est un isomorphisme de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{M}'$, c'est une fonction linéaire et continue, ainsi que sa fonction réciproque ; et inversement, si f vérifie ces conditions, c'est un isomorphisme.

Mais bien entendu, f peut être une application linéaire biunivoque et continue de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{M}'$ sans être bicontinue.

Nous porterons notre attention plus spécialement, dans les paragraphes suivants, sur les fonctions linéaires continues réelles, c'est-à-dire, puisque le corps des opérateurs est $\mathbb{R}$, sur les formes linéaires continues. Mais il est bon de remarquer qu'il peut n'exister aucune forme linéaire continue non identiquement nulle.

Exemple. Considérons l'ensemble vectoriel $\mathcal{M}$ formé de toutes les fonctions réelles et bornées sur l'intervalle $[0, 1)$ et munissons-le de la structure d'espace linéaire suivante : à tout couple (δ, ε) de nombres strictement positifs, faisons correspondre l'ensemble $V_{\delta,\varepsilon}$ des fonctions bornées x(t) telles que $|x(t)| < \delta$ sauf sur un ensemble formé d'un nombre fini d'intervalles de longueur totale ε . Si (δ', ε') est un second couple de nombres strictement positifs tels que $\delta' \leqslant \delta$, $\varepsilon' \leqslant \varepsilon$, il est clair que $V_{\delta',\varepsilon'} \subset V_{\delta,\varepsilon}$; donc les $V_{\delta,\varepsilon}$ forment une base de filtre $\mathfrak{S}$. D'autre part, on vérifie immédiatement que les $V_{\delta,\varepsilon}$ sont symétriques, et satisfont aux axiomes E_I, E_{II}, E_{III} ; ils forment donc un système fondamental de voisinages de l'origine d'un espace linéaire ayant $\mathcal{M}$ comme support.

Soit alors f une forme linéaire continue dans $\mathcal{M}$; à tout $\alpha > 0$ correspond un voisinage $V_{\delta,\varepsilon}$ tel que, pour tout $x \in V_{\delta,\varepsilon}$, $|f(x)| < \alpha$. Prenons n entier tel que $1/n < \varepsilon$, et considérons une fonction $x_k(t)$ de $\mathcal{M}$, nulle dans le complémentaire de l'intervalle $[(k-1)/n, k/n)$ $(k=1,2,\dots,n)$. Quel que soit $\lambda > 0$, λx_k appartient à $V_{\delta,\varepsilon}$, donc $|f(\lambda x_k)| = \lambda |f(x_k)| < \alpha$ ce qui entraîne $f(x_k)=0$. Or, si x est une fonction quelconque de $\mathcal{M}$, on peut écrire $x = \sum_{k=1}^{n} x_k$, où $x_k(t) = x(t)$ dans l'intervalle $[(k-1)/n, k/n)$, et $x_k(t) = 0$ ailleurs ; par suite

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = 0$$

autrement dit, f est identiquement nulle.

__Exercice__. Trouver la forme générale des formes linéaires continues dans l'espace $\mathbb{R}^I$, où I est un ensemble __infini__ quelconque (la structure linéaire de cet espace étant celle de la convergence simple).

Nous avons vu que, dans un ensemble vectoriel $\mathcal{M}$ ($\mathbb{R}$), tout hyperplan homogène était identique à l'ensemble des points où $f(x)=0$, f étant une forme linéaire non identiquement nulle déterminée à un facteur près. Dans un espace linéaire, on a de plus la propriété suivante :

Proposition 4. La forme linéaire correspondant à un hyperplan homogène fermé est continue, et réciproquement.

La réciproque est triviale ; démontrons la proposition directe. Soit donc H un hyperplan homogène fermé ; si $x_0 \notin H$, tout point $x \in \mathcal{M}$ se met d'une manière et d'une seule sous la forme $x = y + tx_0$, où $y \in H$ et t est réel, et la forme linéaire f(x) associée à H est par définition $f(x) = t$. Pour établir que f(x) est continue, il suffit de montrer qu'elle l'est en un point tel que $f(x) \neq 0$. Or un tel point est dans $\complement H$, et H est fermé ; il existe donc un voisinage V de l'origine tel que $V_x \subset \complement H$. Soit $x' = y' + t'x_0$ un point quelconque de V_x ; le point $x + \lambda(x'-x)$ appartient aussi à V_x pour tout λ compris dans $[-1, +1]$, ce qui entraîne $t+\lambda(t'-t) \neq 0$ pour $-1 \leqslant \lambda \leqslant +1$, ou encore, $|t'-t| < |t|$. Soit alors $\varepsilon > 0$ arbitraire, et $W = \frac{\varepsilon}{|t|} V$; quel que soit $x' \in W_x$, on aura $|f(x')-f(x)| < \varepsilon$, ce qui montre la continuité de f.

Le fait qu'il n'existe pas de forme linéaire non identiquement nulle dans certains espaces linéaires peut donc encore s'exprimer en disant que, dans un tel espace, il n'existe pas d'hyperplans fermés : l'adhérence d'un hyperplan est donc toujours l'espace tout entier, dans ce cas.

Espace quotient d'un espace linéaire par une variété linéaire fermée. Montrons que l'espace quotient d'un espace linéaire $\mathcal{M}$ par une variété linéaire homogène fermée G est un espace linéaire. On sait (ch. III) que cet espace est un groupe topologique, autrement dit que $\dot{x}-\dot{y}$ est uniformément continue. D'autre part, la relation d'équivalence $x-y \in G$ est telle que l'ensemble des points équivalents aux points d'un ensemble ouvert est ouvert ; les voisinages de l'origine dans

$\mathcal{M}/G$ seront donc les images canoniques des ensembles V+G , où V parcourt $\mathfrak{S}$; il suffit donc de vérifier que ces ensembles satisfont à E_I et E_{II} (E_{III} est vérifié puisque $\dot{x}-\dot{y}$ est uniformément continue ; on le vérifierait d'ailleurs directement sans difficulté). Pour E_{II}, c'est immédiat, car $\lambda(V+G) = \lambda V + G$; d'autre part, comme $\lambda V \subset V$ pour $|\lambda| < 1$, on voit que E_I est aussi vérifié.

En tant qu'<u>ensemble vectoriel</u>, on sait que $\mathcal{M}/G$ est isomorphe à une variété linéaire homogène H de $\mathcal{M}$; mais en général cette variété <u>ne sera pas fermée</u> dans $\mathcal{M}$, et $\mathcal{M}/G$ ne lui sera pas isomorphe en tant qu'<u>espace linéaire</u>.

<u>Exercice</u>. Montrer que si H est fermée dans $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}/G$ et H sont des espaces linéaires isomorphes.

<u>Les espaces pseudo-normés</u>. Dans tous les exemples d'espaces linéaires donnés ci-dessus, comme dans tous ceux qui se sont présentés jusqu'ici en Analyse, on peut trouver un système fondamental de voisinages de l'origine $\mathfrak{S}$ satisfaisant à E_I, E_{II}, E_{III} , et formé d'ensembles convexes. Cependant, on peut construire des espaces linéaires qui ne possèdent pas cette propriété (voir Appendice); aussi les espaces qui la possèdent forment une catégorie particulière d'espaces linéaires, qu'on appelle espace <u>pseudo-normés</u> pour la raison suivante : à tout voisinage convexe symétrique V de l'origine correspond une fonction convexe homogène p(x), positive et symétrique (c'est-à-dire telle que p(-x)= p(x)), telle que V soit identique à l'ensemble des points où $p(x) < 1$ (§ 1) . Il est clair que p(x-y) est une <u>pseudo-métrique</u> ;

si on considère la sous-famille $\mathfrak{S}'$ de $\mathfrak{S}$ formée des voisinages de $\mathfrak{S}$ tels que deux d'entre eux ne soient pas homothétiques, il résulte immédiatement de la définition de la structure uniforme de $\mathcal{M}$ que cette structure est attachée à la famille des pseudo-métriques $p(x-y)$, où p parcourt la famille des fonctions convexes correspondant aux voisinages de $\mathfrak{S}'$; on dit que cette famille de fonctions est une famille de pseudo-normes à laquelle est attachée la structure de l'espace $\mathcal{M}$.

Inversement, toute famille Φ de fonctions convexes homogènes, positives et symétriques, définit une structure d'espace pseudo-normé sur un ensemble vectoriel $\mathcal{M}$, pourvu qu'elle satisfasse à la condition suivante : quel que soit $x \neq 0$, il existe une fonction $p \in \Phi$ telle que $p(x) \neq 0$. En effet, soit $\mathfrak{S}$ la famille des ensembles $\overset{-1}{p}(t < a)$ où p parcourt Φ, et a l'ensemble des nombres > 0 ; on voit sans peine que $\mathfrak{S}$ vérifie les axiomes E_I, E_{II}, E_{III} : ce dernier résulte de ce que, pour un ensemble convexe V contenant l'origine, $V+V = 2V$. Enfin l'intersection des ensembles de $\mathfrak{S}$ se réduira à l'origine en vertu de la condition imposée aux fonctions de Φ.

Il est clair que la structure uniforme définie par la famille Φ est la moins fine qui rende uniformément continues dans $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ les fonctions $p(x-y)$ (ch. VI, § 1).

En ce qui concerne les propriétés établies dans ce paragraphe, les espaces pseudo-normés ne se distinguent pas des espaces linéaires généraux : ils jouent par contre un rôle particulier dans la théorie de l'Intégration.

<u>Extension aux espaces linéaires complexes</u>. Soit $\mathcal{M}$ un ensemble vectoriel dont le corps des opérateurs est $\mathbb{R}(i)$; on dira qu'on y a défini une structure d'<u>espace linéaire complexe</u> si x-y est continue dans $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ et λx continue dans $\mathbb{R}(i) \times \mathcal{M}$; il en résulte que tout espace linéaire complexe est aussi un espace linéaire <u>réel</u>. La caractérisation d'un espace linéaire complexe par les voisinages de l'origine se fait suivant la même marche que ci-dessus : il existe un système fondamental $\mathfrak{S}$ de voisinages de l'origine formé d'ensembles qui vérifient les conditions :

E'_I. <u>Quel que soit</u> $V \in \mathfrak{S}$, <u>toute droite complexe passant par</u> 0 <u>contient au moins un point de V distinct de 0 ; de plus, si</u> $x \in V$, $\lambda x \in V$ <u>quel que soit le nombre complexe</u> λ <u>tel que</u> $|\lambda| \leqslant 1$.

(On peut dire que les ensembles de $\mathfrak{S}$ sont <u>étoilés et cerclés</u>)

E_{II} et E_{III} : mêmes énoncés que pour les espaces linéaires réels.

Cela étant, tous les énoncés formulés ci-dessus pour les variétés linéaires d'un espace linéaire réel s'étendent aussitôt aux variétés linéaires d'un espace linéaire complexe, les démonstrations étant tout à fait analogues ; les énoncés sur les ensembles convexes restent inchangés. En ce qui concerne les fonctions linéaires, on observera qu'un homomorphisme continu d'un espace linéaire complexe sur un espace linéaire complexe n'est pas nécessairement linéaire : il faut de plus supposer que $f(ix) = if(x)$. Enfin, la proposition 4 s'étend sans difficulté aux hyperplans (complexes) d'un espace linéaire complexe.

§ 3. Les espaces linéaires normés.

Dans tout ce paragraphe et le suivant, nous ne considérons que des espaces linéaires <u>réels</u>.

On dit qu'un espace linéaire $\mathcal{M}$ est <u>normé</u> lorsque sa structure d'espace linéaire peut être attachée à <u>une seule pseudo-norme</u> $p(x)$: cette fonction, qui prend alors le nom de <u>norme</u>, est donc une fonction <u>convexe</u>, <u>homogène</u>, <u>symétrique</u>, <u>positive</u>, <u>et telle que</u> $p(x) \neq 0$ <u>pour</u> $x \neq 0$; autrement dit, elle satisfait aux conditions :

N_I. $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$

N_{II}. $p(tx) = |t|\, p(x)$ <u>pour tout nombre réel</u> t ; <u>en particulier</u> $p(0)=0$.

N_{III}. $p(x) > 0$ <u>pour</u> $x \neq 0$.

Inversement, toute fonction définie sur un ensemble vectoriel $\mathcal{M}$ et satisfaisant à ces trois conditions y définit une structure d'espace linéaire normé.

Etant donné un <u>espace linéaire</u> $\mathcal{M}$, il est facile de voir à quelle condition il est normé : <u>il faut et il suffit qu'il existe un voisinage ouvert convexe et symétrique V de l'origine, tel que les voisinages</u> λV <u>forment un système fondamental de voisinages lorsque</u> λ <u>parcourt l'ensemble des nombres</u> > 0 ; cette condition implique en effet que V ne peut contenir une droite tout entière passant par l'origine ; si $p(x)$ est la fonction convexe homogène telle que V soit identique à l'ensemble des points $p(x) < 1$, la structure de $\mathcal{M}$ est bien attachée à la norme $p(x)$.

Deux normes distinctes $p(x)$, $q(x)$ peuvent définir la même structure d'espace linéaire normé : il faut et il suffit évidemment pour cela qu'à tout $a > 0$ corresponde un $b > 0$ tel que $\overset{-1}{q}(t < b)$ soit contenu dans $\overset{-1}{p}(t < a)$, et $\overset{-1}{p}(t < b)$ dans $\overset{-1}{q}(t < a)$; en vertu de l'homogénéité de p et q, cela peut encore s'exprimer de la manière suivante : il faut et il suffit qu'il existe un nombre $\alpha \geqslant 1$ tel que, pour tout $x \neq 0$, $1/\alpha \leqslant p(x)/q(x) \leqslant \alpha$. Lorsqu'il en est ainsi, on dit que $p(x)$ et $q(x)$ sont deux normes <u>équivalentes</u>.

<u>Exercice</u> . Montrer que, dans un espace normé, l'adhérence d'une sphère ouverte est la sphère fermée de même centre et de même rayon, que sa frontière est la périsphère de même centre et de même rayon, que son diamètre est égal au double de son rayon.

<u>Exemples</u>. 1) R^n est un espace normé, et d'après la prop. 2 du § 2, toutes les normes dans R^n sont équivalentes, et tout espace linéaire à n dimensions est normé. Au § 2, nous avons donné deux exemples de normes sur un ensemble vectoriel quelconque $\mathcal{M}$, à savoir $p(x) = \operatorname{Max}_\iota |x_\iota|$ et $q(x) = \sqrt{\sum_\iota x_\iota^2}$, où les x_ι sont les composantes de x par rapport à une base de $\mathcal{M}$; mais ces deux normes ne sont pas équivalentes.

2) Nous avons donné au § 2 des exemples d'espaces linéaires <u>non normés</u>. Tout d'abord, un espace linéaire qui n'est pas pseudo-normé ne peut évidemment être normé ; il est à noter cependant qu'un tel espace peut avoir une structure uniforme métrisable (voir Appendice). En second lieu, aucun espace R^I , où I est infini, ne peut être normé, bien qu'il soit pseudo-normé (et que sa structure uniforme soit métrisable quand I est dénombrable) : en effet tout voisinage de l'origine contient des droites tout entières passant par ce point. Enfin, l'espace linéaire où toute forme linéaire continue est identiquement nulle, que nous avons donné en exemple ci-dessus, ne peut être normé : on peut le voir sans peine directement, et cela résulte aussi de ce que sur tout espace normé, il existe des formes linéaires non identiquement nulles (voir ci-dessous).

3) Voici encore quelques exemples importants d'espaces normés : E étant un fondamental quelconque, l'espace $\mathcal{B}(E)$ des

fonctions numériques <u>bornées</u> sur E, avec la structure de la convergence uniforme (c'est-à-dire comme sous-espace de $F_\infty(R, E)$) est un espace linéaire normé, où on peut prendre comme norme $p(x) = \overline{\text{Borne}}_{u \in E} |x(u)|$. Si E est un espace topologique, le sous-espace $C_b(E)$ ~~est un espace~~ de $B(E)$ formé des fonctions continues bornées, est aussi un espace linéaire normé ; il en est de même du sous-espace C_0 de C_b, formé des fonctions continues nulles en dehors d'un ensemble compact.

En particulier, si E est l'ensemble N des entiers positifs, $B(N)$ est l'espace des suites bornées (x_n) avec la norme $p(x) = \overline{\text{Borne}} |x_n|$. Nous aurons à considérer le sous-espace S de $B(N)$ dont les points sont les suites <u>convergentes</u> (x_n) ; il y a aussi lieu parfois de faire intervenir le sous-espace S_0 de S formé des suites (x_n) <u>de limite 0</u> .

Enfin, considérons l'ensemble $L_1(N)$ (notation dont nous verrons l'origine dans la théorie de l'Intégration) des suites (x_n) de nombres réels telles que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ soit finie. On voit immédiatement que c'est un ensemble vectoriel, et que la fonction $q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ est une <u>norme</u> sur cet ensemble ; nous désignerons encore par $L_1(N)$ l'espace linéaire normé qui lui correspond.

<u>Exercice</u>. L'<u>ensemble</u> $L_1(N)$ est une partie de l'<u>ensemble</u> S_0 : montrer que sur cet ensemble les normes $p(x)$ et $q(x)$ ne sont pas équivalentes.

Nous rencontrerons plus tard bien d'autres exemples d'espaces linéaires normés ; ils interviennent dans presque toutes les branches de l'Analyse.

Il est clair que toute variété linéaire homogène (et toute variété linéaire, en y prenant une origine arbitraire) d'un espace normé est un espace linéaire normé avec la structure induite. De même, tout produit d'un nombre <u>fini</u> d'espaces normés est un espace normé : car si $M_1, M_2, \dots, M_n$ sont ces espaces, V_i un voisinage de l'origine dans M_i, l'ensemble $V = \prod_{i=1}^{n} V_i$ est, dans $\prod_{i=1}^{n} M_i$, un voisinage de l'origine convexe, symétrique, et tel que les voisinages λV ($\lambda > 0$) forment un système fondamental. Si $p_i(x_i)$ est une norme dans M_i, et si $V_i = \overset{-1}{p_i}(t < 1)$, on a $V = \overset{-1}{p}(t < 1)$, où $p(x) = \operatorname{Max}_i p_i(x_i)$; $p(x)$ est donc une norme pour le produit.

Au contraire, l'espace produit d'une infinité d'espaces linéaire normé ne peut être normé, car tout voisinage de l'origine contient une droite tout entière passant par l'origine. Mais si M_ι sont les espaces linéaires normés considérés, $p_\iota(x_\iota)$ une norme pour M_ι, on peut, à l'aide de ces fonctions, définir des structures d'espaces normés sur certains sous-ensembles vectoriels de l'<u>ensemble vectoriel</u> produit $M = \prod_\iota M_\iota$; par exemple, l'ensemble M_B des points $x = (x_\iota)$ tels que $p(x) = \overline{\text{Borne}}_\iota\, p_\iota(x_\iota)$ soit finie, forme un sous-ensemble vectoriel, sur lequel $p(x)$ est une norme ; il en est de même de l'ensemble M_L des points où $q(x) = \sum_\iota p_\iota(x_\iota)$ est fini, et $q(x)$ est aussi une norme sur ce sous-ensemble. On reconnaît là la généralisation des définitions des espaces normés $B(E)$ et $L(N)$ données ci-dessus.

Enfin, il résulte de ce qu'on a vu pour les espaces linéaires quelconques, et de la condition pour qu'un espace soit normé, que <u>l'espace quotient d'un espace normé par une variété linéaire fermée est encore</u>

un espace normé. On voit immédiatement qu'on peut prendre comme norme pour cet espace quotient l'expression $\dot{p}(\dot{x}) = \underset{x \in \dot{x}}{\underline{\text{Borne}}}\ p(x)$ ($\dot{x}$ classe d'équivalence de x).

Espaces normés complets. Séries. Nous avons vu (§ 2) que le complété d'un espace linéaire est un espace linéaire ; de plus, si l'espace initial est normé, il en est de même de son complété : on le voit, soit directement en considérant les voisinages de l'origine de l'espace complété, soit en remarquant que la norme est uniformément continue et se prolonge en une norme de l'espace complété.

Un espace linéaire normé et complet est encore appelé espace de Banach.

Parmi les exemples donnés ci-dessus, nous savons déjà que $\mathbb{R}^n$ est complet ; il en est de même de $\mathcal{B}(E)$, comme partie fermée de l'espace complet $\mathcal{F}_\infty(\mathbb{R}, E)$, et de $\mathcal{C}_b(E)$, comme partie fermée de $\mathcal{C}(E)$, lorsque E est un espace topologique ; par contre lorsque E n'est pas compact, $\mathcal{C}_0(E)$ n'est pas fermé dans $\mathcal{C}(E)$, donc n'est pas complet.

$\mathcal{S}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{B}(\mathcal{N})$, comme on le voit aisément ; donc c'est un espace complet ; il en est de même de $\mathcal{S}_0$. Montrons enfin que $\mathcal{L}_1(\mathcal{N})$ est complet : soit donc $(x^{(m)}) = ((x_n^{(m)}))$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(\mathcal{N})$; à tout $\varepsilon > 0$ correspond donc un entier p_0 tel que, pour $p \geqslant p_0$, $q \geqslant p_0$ $\sum_{n=1}^{\infty} \left| x_n^{(p)} - x_n^{(q)} \right| \leqslant \varepsilon$. On en déduit d'abord que, pour chaque valeur de n, la suite $(x_n^{(m)})$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc converge vers une valeur y_n;

de plus, quel que soit N $\sum_{n=1}^{N} \left| y_n - x_n^{(p)} \right| = \lim_{q\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left| x_n^{(q)} - x_n^{(p)} \right| \leqslant \varepsilon$ d'où résulte que $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$ est finie autrement dit que $y = (y_n) \in L(\mathcal{N})$, et enfin que $\sum_{n=1}^{\infty} \left| y_n - x_n^{(p)} \right| = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left| y_n - x_n^{(p)} \right| \leqslant \varepsilon$ pour $p \geqslant p_o$, autrement dit que y est limite de la suite $(x^{(m)})$ dans $L(\mathcal{N})$.

__Exercice__. Montrer que l'espace normé défini sur un ensemble vectoriel de base __infinie__, en prenant comme norme $p(x) = \operatorname{Max}_{\iota} |x_\iota|$ (où les x_ι sont les composantes de x par rapport à la base) n'est pas complet.

Lorsque nous envisagerons par la suite un espace linéaire normé, nous y choisirons une fois pour toutes une norme, que nous désignerons par la notation $\| x \|$.

Etant donnée une suite (x_n) de points d'un espace linéaire normé $\mathcal{M}$, on appelle __série de terme général__ x_n la suite (s_n), où $s_n = \sum_{p=1}^{n} x_p$. On dit que la série est __sommable__-C_o si (s_n) a une limite s ; s est appelée la C_c-__somme__ (ou simplement la somme) de la série, et se note $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. On a les propriétés élémentaires suivantes :

1° Si une série est sommable-C_o, son terme général tend vers 0.

2° Si on permute un nombre fini de termes d'une série sommable-C_o, la série obtenue est sommable-C_o et a même somme.

3° Si les séries de terme général x_n et y_n respectivement sont sommables-C_o et si $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ la série de terme général $\lambda x_n + \mu y_n$ est sommable-C_o et a pour somme $\lambda x + \mu y$.

4° Si la série de terme général x_n est sommable-C_o, on a

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|$$

C'est en effet évident si $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| = +\infty$; dans le cas contraire quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe par hypothèse un entier n_o tel que, si on pose $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\left\| x - \sum_{n=1}^{m} x_n \right\| \leqslant \varepsilon$ pour $m \geqslant n_0$; on en tire

$$\|x\| \leqslant \left\| \sum_{n=1}^{m} x_n \right\| + \varepsilon \leqslant \sum_{n=1}^{m} \|x_n\| + \varepsilon \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| + \varepsilon$$

et comme ε est arbitraire,

$$\|x\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|.$$

Une série de terme général x_n est dite <u>absolument sommable</u> si la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ est <u>finie</u>.

<u>Proposition 1</u>. <u>Pour qu'un espace normé soit complet, il faut et il suffit que toute série absolument sommable soit sommable-C_0</u>.

C'est en effet suffisant, car si une série de terme général x_n est absolument sommable, on a, si $s_n = \sum_{p=1}^{n} x_p$,

$$\|s_m - s_n\| = \left\| \sum_{p=n+1}^{m} x_p \right\| \leqslant \sum_{p=n+1}^{m} \|x_p\| \qquad (n < m)$$

donc (s_n) est une suite de Cauchy, qui est convergente puisque l'espace est complet par hypothèse. Réciproquement, supposons que toute série absolument sommable soit sommable-C_0, et considérons une suite de Cauchy quelconque (y_n) ; on peut en extraire une suite (y_{n_k}) telle que $\left\| y_{n_{k+1}} - y_{n_k} \right\| \leqslant 2^{-k}$ pour $k = 1, 2, \dots$. La série de terme général $x_k = y_{n_{k+1}} - y_{n_k}$ est donc absolument sommable, et par suite aussi sommable-C_0, ce qui signifie que la suite (y_{n_k}) est convergente ; la suite (y_n) dont le filtre associé est plus fin que le filtre associé à (y_{n_k}), est donc aussi convergente (ch.II, cor. de la prop. 4 du § 3). C.Q.F.D.

Bien entendu, une série peut être sommable-C_0 sans être absolument sommable : nous ne donnons pas d'exemple de ce fait, car on en rencontrera à chaque pas dans toute l'Analyse. Si une série est absolument sommable, toute série partielle (c'est-à-dire une série dont les termes forment une suite partielle de la suite des termes de la série donnée) est aussi absolument sommable ; cette proposition est inexacte quand on y remplace les mots "absolument sommable" par "sommable-C_o". Enfin, lorsque l'espace est complet, on peut changer arbitrairement l'ordre des termes d'une série absolument sommable sans changer sa somme : en effet, soit x_n le terme général d'une série absolument sommable, et soit $y_n = x_{\varphi(n)}$, où $\varphi(n)$ est une application biunivoque de l'ensemble $\mathcal{N}$ sur lui-même. Quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n_o tel que $\sum_{n=n_o}^{\infty} \| x_n \| < \varepsilon$ par hypothèse ; soit n_1 le plus grand des nombres $\varphi(n)$ pour $1 \leqslant n < n_o$; on aura donc, (en posant $s_n = \sum_{p=1}^{\infty} x_p$, $s'_n = \sum_{p=1}^{\infty} y_p$, $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $s' = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$) quel que soit $n \geqslant n_1$

$$\| s'_n - s_n \| \leqslant 2 . \sum_{n=n_o}^{\infty} \| x_n \| < 2\varepsilon$$

ce qui entraîne $s = s'$. Ici encore, le théorème est inexact pour les séries non absolument sommables.

__Fonctions linéaires continues dans un espace normé.__ Soient $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ deux espaces linéaires normés, u une application linéaire de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$.

__Théorème 1.__ __Pour que u soit continue, il faut et il suffit qu'il existe un nombre positif__ a __tel que__ $\|u(x)\| \leqslant a . \|x\|$ __quel que soit__ $x \in \mathcal{M}$.

En effet, écrivons que u est continue au point $x = 0$; à tout $\varepsilon > 0$ correspond un $\delta > 0$ tel que, pour $\|x\| \leqslant \delta$, $\|u(x)\| \leqslant \varepsilon$; en particulier, pour $\|x\| = \delta$, $\|u(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta} \|x\|$, et par suite cette inégalité a lieu quel que soit x en vertu de l'homogénéité de u(x) et de $\|x\|$. Réciproquement, si $\|u(x)\| \leqslant a . \|x\|$ quel que soit x, on aura $\|u(x)\| \leqslant \varepsilon$ pour $\|x\| \leqslant \frac{\varepsilon}{a}$.

Considérons l'ensemble $\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$ des applications linéaires continues de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$; c'est un <u>ensemble vectoriel</u>, si on désigne par $\lambda u + \mu v$ l'application linéaire continue dont la valeur en x est $\lambda u(x) + \mu v(x)$. Pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$, soit $\|u\|$ la borne inférieure des nombres $a \geqslant 0$ tels que $\|u(x)\| \leqslant a \|x\|$ quel que soit x ; on a aussi

$$(1) \qquad \|u\| = \overline{\mathrm{Borne}}_{\|x\|=1} \|u(x)\|$$

comme il résulte immédiatement de la définition. La fonction $\|u\|$ est une <u>norme</u> dans $\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$, car elle est convexe d'après (1), elle est évidemment positive et homogène ; enfin, si u n'est pas identiquement nulle, $\|u\| > 0$; l'espace normé qu'on a ainsi défini sera appelé <u>l'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$</u>. On voit sans peine que, si on remplace, dans $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$, les normes par d'autres normes équivalentes, la norme correspondante dans $\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$ est équivalente à la précédente.

<u>Proposition 2</u>. <u>Si $\mathcal{M}'$ est complet, $\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$ est complet</u>.

En effet, soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$; quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe donc un entier n_0 tel que $\|u_m - u_n\| \leqslant \varepsilon$ pour $m > n_0$ et $n > n_0$, c'est-à-dire $\|u_m(x) - u_n(x)\| \leqslant \varepsilon \|x\|$ quel que soit $x \in \mathcal{M}$. Donnons à x une valeur fixe : la relation précédente montre que $(u_n(x))$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{M}'$, donc, puisque cet espace est complet, elle converge vers une valeur u(x) telle que $\|u(x) - u_n(x)\| \leqslant \varepsilon \|x\|$ pour $n > n_0$. On a évidemment $u(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to\infty} u_n(\lambda x + \mu y) = \lambda \lim u_n(x) + \mu \lim u_n(y) =$ $= \lambda u(x) + \mu u(y)$; d'autre part $\|u(x)\| \leqslant \|u_n(x)\| + \varepsilon \|x\| \leqslant$ $\leqslant (\|u_n\| + \varepsilon) . \|x\|$ quel que soit x, ce qui montre que u est une application linéaire continue de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$, et comme

41

$\|u-u_n\| \leqslant \varepsilon$ pour $n > n_0$, u est la limite de la suite (u_n).

L'espace $\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{R})$ joue un rôle important dans la théorie des espaces normés, comme nous le verrons au § 4 ; on l'appelle espace dual de $\mathcal{M}$, et on le désigne par la notation abrégée $\mathcal{M}^*$, la proposition 2 montre qu'il est complet.

Exercice. Montrer que l'espace $\mathcal{D}(\mathcal{R}^n, \mathcal{M})$ est isomorphe au produit de n espaces identiques à $\mathcal{M}$, et que toute fonction linéaire dans $\mathcal{R}^n$ est continue.

Remarquons encore que, si u est une application linéaire continue de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$, et si x_n est le terme général d'une série sommable-C_0 (resp. absolument sommable) dans $\mathcal{M}$, $u(x_n)$ est le terme général d'une série sommable-C_0 (resp. absolument sommable) dans $\mathcal{M}'$, et on a $u(\sum_{n=1}^{\infty} x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u(x_n)$.

Formes linéaires continues dans un espace normé. Soit G une variété linéaire homogène dans un espace normé ; si u est une forme linéaire continue définie dans G, on désignera par $\|u\|_G$ sa norme dans le sous-espace G, c'est-à-dire, d'après (1)

$$\|u\|_G = \overline{\text{Borne}}_{\substack{x \in G \\ \|x\|=1}} |u(x)|$$

Si u est définie sur un sous-espace linéaire homogène H contenant G, on a donc $\|u\|_G \leqslant \|u\|_H$.

Théorème 2. u étant une forme linéaire continue définie dans un sous-espace linéaire homogène G d'un espace normé $\mathcal{M}$, il existe une forme linéaire continue v définie dans $\mathcal{M}$ qui prolonge u et est telle que $\|v\| = \|u\|_G$.

C'est une conséquence du théorème de prolongement de Hahn-Banach (§ 1) : il suffit de poser $p(x) = \|u\|_G . \|x\|$ pour voir que les conditions d'application de ce théorème sont remplies ; comme on a alors $|v(x)| \leqslant \|u\|_G . \|x\|$ quel que soit x , on voit que v est continue et que $\|v\| \leqslant \|u\|_G$; mais comme v prolonge u , on a $\|v\| = \|u\|_G$.

Ce théorème permet tout d'abord de montrer que, dans un espace normé, <u>il existe des formes linéaires continues non identiquement nulles</u> ; de façon plus précise:

<u>Proposition 3</u>. <u>Quel que soit</u> $x_0 \in \mathcal{M}$, <u>il existe une forme linéaire continue u définie dans</u> $\mathcal{M}$ <u>et telle que</u> $u(x_0) = \|x_0\|$ <u>et</u> $\|u\| = 1$.

Prenons en effet comme variété linéaire homogène G la droite passant par l'origine et x_0, et considérons, en tout point $x = tx_0$ de cette droite, la fonction $u_0(x) = t\|x_0\|$; c'est une forme linéaire continue, et $\|u_0\|_G = 1$; il suffit alors de prolonger la fonction u_0 à tout l'espace en appliquant le théorème 2.

Cette dernière proposition admet l'interprétation "géomètrique" suivante : en tout point de la sphère $\|x\| \leqslant \|x_0\|$, on a $u(x) \leqslant u(x_0)$; autrement dit, <u>en tout point de la frontière d'une sphère il passe un hyperplan d'appui fermé</u>. Il est facile de généraliser :

<u>Proposition 4</u>. <u>En tout point de la frontière d'un corps convexe dans un espace linéaire, il passe un hyperplan d'appui fermé</u>.

Supposons en effet que l'origine soit un point intérieur au corps convexe : celui-ci est alors identique à l'ensemble des points où $p(x) \leqslant 1$, $p(x)$ étant une fonction convexe homogène, positive, et telle que $p(x) \leqslant k\|x\|$, où k est une constante > 0 (puisque le corps contient une sphère de centre 0). Si x_0 est un point quelconque de la frontière du corps, il existe une forme linéaire $f(x)$ telle que $f(x_0) = p(x_0)$, et $f(x) \leqslant p(x) \leqslant k. \|x\|$ quel que soit x, ce qui entraîne que f est continue, et par suite que l'hyperplan d'appui $f(x) = f(x_0)$ qui passe par x_0 est fermé.

Il peut naturellement passer plusieurs hyperplans d'appui fermés (ou une infinité) par un point de la frontière d'un corps convexe ; c'est ce que montre déjà l'exemple d'un intervalle fermé, dans R^n. Cela peut même se produire pour une "sphère" et ce fait dépend du choix de la norme dans l'espace considéré, comme le montre encore l'exemple de R^n.

Du théorème 2 on déduit encore la conséquence suivante :

Proposition 5. G étant une variété linéaire homogène dans un espace normé $\mathcal{M}$, et x_0 un point à une distance $d > 0$ de G, il existe une forme linéaire continue $u(x)$ définie dans $\mathcal{M}$ et telle que $u(x_0)=1$, $u(x)=0$ quel que soit $x \in G$, et $\|u\| = 1/d$.

En effet, soit H la variété linéaire homogène engendrée par G et le point x_0 ; tout point de H se met d'une manière et d'une seule sous la forme $x = y+tx_0$, où $y \in G$ et t est réel. Posons, dans H $u_0(x)=t$; si $t \neq 0$, on a $\|x\| = \|y+tx_0\| = |t| . \|x_0+y/t\| \geqslant |t|.d$ d'après l'hypothèse ; donc, quel que soit x , $|u_0(x)| = |t| \leqslant \|x\| . 1/d$, d'où $\|u_0\|_H \leqslant 1/d$. Par ailleurs, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $y \in G$ tel que $\|y-x_0\| \leqslant d+\varepsilon$, d'où $|u_0(y-x_0)| = 1 \leqslant \|u_0\|_H . (d+\varepsilon)$, autrement dit $1/(d+\varepsilon) \leqslant \|u_0\|_H$, et comme ε est arbitraire, $\|u_0\|_H = 1/d$.

En prolongeant alors u_0 à tout l'espace, on obtient bien une forme linéaire u qui satisfait aux conditions de l'énoncé.

Cette proposition peut aussi s'interprèter "géomètriquement" : par le même raisonnement que dans la démonstration précédente, on montre que la <u>distance</u> d'un point x_0 à un hyperplan fermé d'équation $u(x)=0$ a pour valeur $|u(x_0)| / \|u\|$. La proposition 5 s'énonce alors de la manière suivante : <u>si un point</u> x_0 <u>est à une distance</u> d <u>d'une variété linéaire</u> G , <u>il passe par</u> G <u>un hyperplan fermé tel que la distance de</u> x_0 <u>à cet hyperplan soit égale à</u> d.

<u>Corollaire</u>. <u>Toute variété linéaire fermée est l'intersection des hyperplans fermés qui la contiennent</u>.

En effet, si G est une variété linéaire fermée, l'intersection des hyperplans fermés passant par G est une variété linéaire fermée $G' \supset G$; mais, si $x_0 \notin G$, il est à une distance <u>positive</u> de G (puisque G est fermé) donc il existe un hyperplan fermé contenant G et ne passant pas par x_0 , ce qui montre que $G' = G$.

Il existe des espaces linéaires <u>non normés</u> où ce corollaire est encore vrai.

<u>Exercice</u>. Démontrer qu'il en est ainsi dans tout produit R^I où I est un ensemble d'indices quelconque.

Ce corollaire montre encore que, si S est une partie quelconque d'un espace normé $\mathcal{M}$, la <u>variété linéaire fermée</u> $\overline{V(S)}$ engendrée par S est <u>l'intersection des hyperplans fermés contenant</u> S.

<u>Formes linéaires continues dans les espaces</u> $\mathcal{S}$ <u>et</u> $L(\mathcal{N})$. A titre d'exemple, et aussi pour des applications ultérieures, nous allons déterminer explicitement les formes linéaires continues dans les deux espaces $\mathcal{S}$ et $L(\mathcal{N})$ définis ci-dessus.

A. <u>Espace</u> $\mathcal{S}$. Montrons d'abord que tout point de $\mathcal{S}$ est égal à la somme d'une série sommable-C_0 formée de la manière suivante :

posons $e^n_m = 0$ si $m \neq n$, $=1$ si $m=n$ (m et n entiers >0), et considérons les points $e_0 = (e^n_m)$ et $e_n(e^n_m)$ qui appartiennent évidemment à $\mathcal{S}$; soit alors $x = (x_n)$ un point de S et soit $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, qui existe par hypothèse : on a $x = \alpha e_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n - \alpha) e_n$; il suffit en effet de remarquer que $\left\| x - \alpha e_0 - \sum\limits_{n=1}^{r} (x_n - \alpha) e_n \right\| = \overline{\text{Borne}}_{n>r} |x_n - \alpha|$ d'après la définition de la norme dans $\mathcal{S}$, et par suite tend vers 0 quand r croît indéfiniment. Si $u(x)$ est une forme linéaire continue dans $\mathcal{S}$, on a donc, en posant $u(e_0) = a$, $u(e_n) = a_n$

$$(2) \qquad u(x) = \alpha a + \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - \alpha) a_n$$

t étant un nombre réel, posons $\operatorname{sig} t = 0$ si $t=0$, $=+1$ si $t > 0$, $=-1$ si $t < 0$. Soit alors $x = (x_n)$ avec $x_n = \operatorname{sig} a_n$ pour $n \leqslant r$, et $x_n = 0$ pour $n > r$; $x \in \mathcal{S}$, $\|x\| = 1$, $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$, et d'après (2) $u(x) = \sum\limits_{n=1}^{r} |a_n|$; comme $u(x) \leqslant \|u\| . \|x\|$, on a $\sum\limits_{n=1}^{r} |a_n| \leqslant \|u\|$, ce qui montre que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ est finie ; donc la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ est sommable-C_0. En posant $a_0 = a - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, la formule (2) s'écrit donc encore

$$(3) \qquad u(x) = a_0 \lim x_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

Prenons maintenant $x_n = \operatorname{sig} a_n$ pour $n \leqslant r$, et $x_n = \operatorname{sig} a_0$ pour $n > r$; $x = (x_n) \in \mathcal{S}$, $\|x\| = 1$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \operatorname{sig} a_0$, et

$$u(x) = |a_0| + \sum_{n=1}^{r} |a_n| + (\operatorname{sig} a_0) . \sum_{n=r+1}^{\infty} a_n \leqslant \|u\|$$

d'où , comme r est arbitraire et que $\sum\limits_{n=r+1}^{\infty} a_n$ tend vers 0 avec $1/r$

$$|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leqslant \|u\|$$

Mais d'autre part, d'après (3) et la définition de la norme dans $\mathcal{S}$

$$|u(x)| \leqslant \left(|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \right) . \|x\|$$

d'où l'égalité

$$(4) \qquad \|u\| = |a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

B. **Espace** $L(N)$. Les points e_n définis ci-dessus appartiennent évidemment à $L(N)$ pour $n > 0$; montrons que si $x = (x_n) \in L(N)$, on a $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$. En effet, d'après la définition de la norme dans $L(N)$ $\left\| x - \sum_{n=1}^{r} x_n e_n \right\| = \sum_{n=r+1}^{\infty} |x_n|$, qui tend vers 0 avec $1/r$. Si u est une forme linéaire continue dans $L(N)$, on a donc, en posant $u(e_n) = a_n$

$$(5) \qquad u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

p étant un entier quelconque, prenons $x_p = \text{sig } a_p$, et $x_n = 0$ pour $n \neq p$; alors $u(x) = |a_p| \leq \|u\|$. D'autre part, d'après (5), on a

$$|u(x)| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \right). \overline{\text{Borne}}\, |a_n| = \|x\| . \overline{\text{Borne}}\, a_n$$

d'où

$$(6) \qquad \|u\| = \overline{\text{Borne}}\, |a_n|$$

Ces résultats montrent immédiatement que <u>l'espace dual de</u> S <u>est isomorphe à</u> $L(N)$, et que <u>l'espace dual de</u> $L(N)$ <u>est isomorphe à</u> $B(N)$.

Les démonstrations précédentes montrent en passant que l'ensemble des e_n ($n=0,1,2,\ldots$), resp. des e_n ($n=1,2,\ldots$) est <u>total</u> dans S , resp. $L(N)$; comme ces ensembles sont dénombrables, il en résulte immédiatement que les espaces S et $L(N)$ admettent une <u>base topologique dénombrable</u> : car les points $\sum r_n e_n$ ($n \geq 0$ pour S , $n \geq 1$ pour $L(N)$), où les r_n sont <u>rationnels</u>, et nuls sauf un nombre fini d'entre eux, forment un ensemble partout dense dans S ou $L(N)$ respectivement.

<u>Exercices</u>. 1) Montrer que, dans $B(N)$, il n'existe pas d'ensemble dénombrable partout dense.

2) Montrer (avec les définitions précédentes des normes)

que sur la frontière d'une sphère de S ou de $L(N)$, il existe des points par lesquels passent plusieurs hyperplans d'appui fermés ; caractériser ces points.

__Ensembles compacts dans un espace linéaire normé.__

__Proposition 6.__ __Soit__ C __un ensemble compact dans un espace linéaire normé__ $\mathcal{M}$; __quel que soit__ $\varepsilon > 0$, __ià existe une variété linéaire homogène__ V __à un nombre fini de dimensions telle que la distance de tout point de C à V soit__ $< \varepsilon$.

Il suffit ên effet de remarquer qu'on peut recouvrir C par un nombre fini d'ensembles de diamètre $< \varepsilon$; en prenant un point dans chacun de ces ensembles, la variété linéaire V engendrée par ces points répond évidemment à la question.

__Proposition 7.__ __Si, dans un espace linéaire normé, tout ensemble borné est relativement compact, l'espace a un nombre fini de dimensions__ (et est donc isomorphe à un R^n).

Il suffit de montrer que, si $\mathcal{M}$ est un espace à une infinité de dimensions, il n'existe pas de variété linéaire homogène à un nombre fini de diemensions telle que tout point de la sphère $\|x\| \leq 1$ soit distant de moins de ε de cette variété. C'est ce qui résulte du lemme suivant :

__Lemme.__ __Dans un espace linéaire normé__ $\mathcal{M}$, __soit__ G __une variété linéaire homogène fermée distincte de__ $\mathcal{M}$; __quel que soit__ $\varepsilon > 0$, __il existe un point__ x_0 __de__ $\mathcal{M}$ __tel que__ $\|x_0\| = 1$ __et que la distance de__ x_0 __à G soit supérieure à__ $1-\varepsilon$.

En effet, soit $x \in \complement G$, et soit $d > 0$ sa distance à G ; il existe un point $y \in G$ tel que $d \leq \|x-y\| \leq d/(1-\varepsilon)$.

Posons $x_0=(x-y)/\|x-y\|$; si $z \in G$, $y+\|x-y\|.z$ est aussi dans G, d'où

$$\|x_0-z\| = \|x-(y+\|x-y\|.z)\| / \|x-y\| \geqslant d/\|x-y\| \geqslant 1-\varepsilon$$

ce qui établit le lemme.

On peut encore dire que, dans un espace linéaire normé à une infinité de dimensions, <u>il n'existe pas d'ensemble ouvert relativement compact</u>, ou bien qu'<u>un espace linéaire normé à une infinité de dimensions n'est jamais localement compact</u>.

§ 4. L'espace dual et les structures faibles.

<u>Propriétés de l'espace dual</u>. On a vu au § 3 que l'espace dual d'un espace linéaire normé $\mathcal{M}$ est toujours <u>complet</u>. On a de plus la proposition suivante :

<u>Proposition 1</u>. <u>Si $\mathcal{M}$ n'est pas complet, le dual de l'espace complété $\tilde{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M}$ est isomorphe au dual de $\mathcal{M}$</u>.

En effet, en considérant $\mathcal{M}$ comme sous-espace linéaire partout dense de $\tilde{\mathcal{M}}$, toute forme linéaire continue sur $\mathcal{M}$ est uniformément continue, donc se prolonge en une forme linéaire continue sur $\tilde{\mathcal{M}}$, et réciproquement toute forme linéaire continue sur $\tilde{\mathcal{M}}$ est le prolongement d'une forme linéaire continue sur $\mathcal{M}$; il y a donc correspondance biunivoque (et évidemment linéaire) entre les espaces duals de $\mathcal{M}$ et $\tilde{\mathcal{M}}$; de plus, cette correspondance est un isomorphisme, car si $\bar{X}$ est le prolongement à $\tilde{\mathcal{M}}$ de la forme linéaire continue X sur $\mathcal{M}$, on a

$$\|\bar{X}\| = \overline{\text{Borne}}_{\substack{x \in \tilde{\mathcal{M}} \\ \|x\|=1}} |\bar{X}(x)| = \overline{\text{Borne}}_{\substack{x \in \mathcal{M} \\ \|x\|=1}} |X(x)| = \|X\|$$

en vertu de la continuité de $\bar{X}$ et du fait que $\mathcal{M}$ est partout dense dans $\tilde{\mathcal{M}}$.

<u>Proposition 2. Si $\mathcal{M}^*$ possède une base topologique dénombrable, il en est de même de $\mathcal{M}$</u> .

$\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^*$ étant métrisables, il suffit de montrer que s'il existe un ensemble dénombrable (x_n) partout dense dans $\mathcal{M}$, il existe aussi un ensemble dénombrable partout dense dans $\mathcal{M}$. Tout d'abord, il existe dans $\mathcal{M}^*$ un ensemble dénombrable (Y_n) de formes linéaires continues, de norme 1, dense sur la périsphère $\|X\| = 1$. Pour chaque n, soit x_n un point de $\mathcal{M}$ tel que $\|x_n\| = 1$ et $|Y_n(x_n)| > \frac{1}{2}$. S'il n'existait pas d'ensemble dénombrable partout dense dans $\mathcal{M}$, la variété linéaire fermée V engendrée par l'ensemble des x_n serait distincte de $\mathcal{M}$, donc (§ 3, prop. 5), il existerait une forme linéaire continue X telle que $\|X\| = 1$ et $X(x_n)=0$ pour $n=1,2,\ldots$. Si on pose $Z_n = Y_n - X$, on aurait donc $|Z_n(x_n)| = |Y_n(x_n)| > \frac{1}{2}$, et comme $\|x_n\| = 1$, $\|Z_n\| = \|Y_n - X\| \geqslant \frac{1}{2}$ quel que soit n, ce qui est absurde, puisque X est sur la périsphère unité, où (Y_n) forme un ensemble dense.

La réciproque de cette proposition est <u>inexacte</u>, comme le montre l'exemple de l'espace $L(N)$.

<u>Orthogonalité</u>. Un point $x \in \mathcal{M}$ et un point $X \in \mathcal{M}^*$ sont dits <u>orthogonaux</u> si on a $X(x)=0$. Ce n'est donc qu'une autre manière d'exprimer que l'hyperplan d'équation $X(x)=0$ passe par le point x. Par exemple, comme, par définition, un ensemble $S \subset \mathcal{M}$ est total si la variété linéaire fermée qu'il engendre est identique à $\mathcal{M}$, c'est-à-dire (d'après la prop. 5 du § 3) s'il ne passe pas d'hyperplan fermé par tous les points de S, on peut exprimer cette propriété en disant que, <u>pour qu'un ensemble S soit total, il faut et il suffit qu'il n'y ait aucun point de $\mathcal{M}$ autre que 0, qui soit orthogonal à tous les points de S</u>.

Soit G une variété linéaire homogène <u>fermée</u> dans $\mathcal{M}$; l'ensemble des points $X \in \mathcal{M}^*$ orthogonaux à tous les points de G forme une variété linéaire homogène G', qui est appelée <u>la variété orthogonale à G.</u> G' est <u>fermée</u>, car si X_0 est adhérent à G', quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $X \in G'$ tel que $\|X_0 - X\| \leqslant \varepsilon$; on aura donc, pour tout $x \in G$ tel que $\|x\| = 1$, $|X_0(x)| \leqslant \varepsilon$, et comme ε est arbitraire, $X_0(x)=0$, autrement dit, $X_0 \in G'$.

De même, H étant une variété linéaire fermée dans $\mathcal{M}^*$, on appellera <u>variété orthogonale à H</u> l'ensemble H_1 des points de $\mathcal{M}$ orthogonaux à tous les points de H ; on voit de la même manière que H_1 est <u>fermée</u> dans $\mathcal{M}$.

Soit G' la variété orthogonale à une variété fermée G de $\mathcal{M}$, et G'_1 la variété orthogonale à G' ; on a $G'_1 = G$. En effet, il est évident que $G \subset G'_1$; et s'il existait $x_0 \in G'_1$ et n'appartenant pas à G, il existerait aussi (G étant fermée) un $X \in \mathcal{M}^*$ orthogonal à G mais non à x_0 (prop. 5 du §3), ce qui est contradictoire d'après la définition de G'_1.

Par contre, si H_1 est la variété orthogonale à une variété linéaire fermée H de $\mathcal{M}^*$, et H'_1 la variété orthogonale à H_1, il peut se faire que H et H'_1 soient <u>distincts</u> (naturellement $H \subset H'_1$) ; autrement dit, la relation d'orthogonalité des variétés fermées n'est en général <u>réciproque que dans un sens</u> ; nous reviendrons là-dessus un peu plus loin.

<u>Dual d'un sous-espace</u> ; <u>dual d'un espace quotient</u> ; <u>bidual</u>. Soit G une variété linéaire homogène <u>fermée</u> dans $\mathcal{M}$; cherchons son espace dual, lorsqu'on la considère comme un sous-espace normé. Toute forme linéaire continue dans G se prolonge (§3, th.2) dans $\mathcal{M}$, et

inversement, toute forme linéaire continue dans $\mathcal{M}$ est un prolongement d'une forme linéaire continue dans G ; de plus deux formes linéaires sur $\mathcal{M}$ prolongent la même forme sur G si, et seulement si, leur différence est nulle sur G ; enfin, si X est une forme linéaire continue sur G, $\overline{\text{Borne}} \|\overline{X}\| = \|X\|$ lorsque $\overline{X}$ parcourt tous les prolongements de X (§ 3, th. 2). Donc <u>l'espace dual de G est isomorphe à l'espace quotient de $\mathcal{M}^*$ par la variété orthogonale à G</u> .

Cherchons de même l'espace dual de l'<u>espace quotient</u> $\mathcal{M}/G$: toute forme linéaire continue sur cet espace correspond à une forme linéaire continue sur $\mathcal{M}$, et constante sur chaque classe d'équivalence ; il faut et il suffit pour cela qu'elle soit <u>nulle sur G</u>. Il y a donc correspondance biunivoque et linéaire entre les formes linéaires continues sur $\mathcal{M}/G$ et les points de G' ; de plus, si à la forme linéaire continue $\dot{X}$ sur $\mathcal{M}/G$ correspond le point $X \in G'$, la norme de $\dot{X}$ est égale à $\overline{\text{Borne}} |X(x)|$, lorsque x parcourt l'ensemble des points tels que $\underset{y \in G}{\underline{\text{Borne}}} \|x+y\| \leqslant 1$; d'où résulte d'abord que $\|\dot{X}\| \geqslant \|X\|$, puisque l'ensemble de ces points comprend évidemment la sphère unité ; d'autre part, si $\underset{y \in G}{\underline{\text{Borne}}} \|x+y\| = 1$, il existe un $y \in G$ tel que $\|x+y\| \leqslant 1 + \varepsilon$, donc $|X(x)| = |X(x+y)| \leqslant (1+\varepsilon). \|X\|$, et comme ε est arbitraire, $\|\dot{X}\| \leqslant \|X\|$.

On voit donc que <u>l'espace dual de l'espace quotient $\mathcal{M}/G$ est isomorphe à la variété orthogonale à G</u>.

> <u>Exercice</u>. Montrer que l'espace dual du produit d'un nombre fini d'espaces normés est isomorphe au produit des espaces duals de ces espaces.

L'espace dual $\mathcal{M}^{**}$ de l'espace dual $\mathcal{M}^*$ d'un espace normé $\mathcal{M}$ est appelé l'espace <u>bidual</u> de $\mathcal{M}$. Soit x un point quelconque de $\mathcal{M}$;

faisons lui correspondre, la forme linéaire u_x définie sur $\mathcal{M}^*$ par la condition $u_x(X) = X(x)$. On a $|u_x(X)| = |X(x)| \leq \|X\| \cdot \|x\|$, donc u_x est <u>continue</u>, et par suite appartient à $\mathcal{M}^{**}$; autrement dit, on a défini une application linéaire de $\mathcal{M}$ <u>dans</u> $\mathcal{M}^{**}$, que nous appellerons application <u>canonique</u> ; elle est <u>biunivoque</u>, car on ne peut avoir $X(x)=0$ quel que soit X que si $x=0$ (§ 3, prop. 3) ; enfin elle est <u>bicontinue</u>, car, quel que soit $x \in \mathcal{M}$, il existe $X \in \mathcal{M}^*$ telle que $\|X\| = 1$ et $X(x) = \|x\|$, ce qui montre que $\|u_x\| \geqslant \|x\|$, et comme par ailleurs $\|u_x\| \leqslant \|x\|$, on a $\|u_x\| = \|x\|$. Autrement dit, on a un <u>isomorphisme</u> de $\mathcal{M}$ sur un sous-espace linéaire homogène de son bidual $\mathcal{M}^{**}$.

Lorsque $\mathcal{M} = R^n$, le dual $\mathcal{M}^*$ est isomorphe à R^n, ainsi que le bidual $\mathcal{M}^{**}$, donc l'isomorphisme canonique précédent est ici un isomorphisme de $\mathcal{M}$ <u>sur</u> $\mathcal{M}^{**}$; mais il n'en est pas ainsi en général, comme le montre l'exemple de l'espace $\mathcal{S}$.

Remarquons encore que le cas où $\mathcal{M}$ est un espace à n dimensions est le <u>seul</u> cas où le dual $\mathcal{M}^*$ est aussi un espace à n dimensions : car s'il en est ainsi, $\mathcal{M}^{**}$ est un espace à n dimensions, et comme $\mathcal{M}$ est isomorphe à une partie de $\mathcal{M}^{**}$, c'est un espace à n dimensions au plus, et par suite à n dimensions exactement, puisque son dual a n dimensions.

<u>Les structures faibles</u>. La notion d'espace dual permet de définir, sur les ensembles supports d'un espace linéaire normé $\mathcal{M}$ et de son dual $\mathcal{M}^*$, de nouvelles structures uniformes d'espaces linéaires, de la manière suivante :

Quel que soit $X \in \mathcal{M}^*$, la fonction $|X(x)|$ est une <u>pseudo-norme</u> sur $\mathcal{M}$; si Φ est la famille de ces fonctions, et $x \neq 0$, il existe un $X \in \mathcal{M}^*$ tel que $X(x) \neq 0$ (§ 3, prop. 3); donc Φ définit sur $\mathcal{M}$ une structure d'espace pseudo-normé, que nous appellerons structure faible sur $\mathcal{M}$.

Si on répète cette définition en remplaçant $\mathcal{M}$ par $\mathcal{M}^*$ et $\mathcal{M}^*$ par $\mathcal{M}^{**}$, on obtient la définition d'une structure d'espace pseudo-normé sur $\mathcal{M}^*$, que nous appellerons <u>structure faible supérieure</u>. Mais on peut aussi définir une autre structure pseudo-normée sur $\mathcal{M}^*$ de la façon suivante : quel que soit $x \in \mathcal{M}$, la fonction $|u_x(X)| = |X(x)|$ est une <u>pseudo-norme</u> sur $\mathcal{M}^*$; et si Φ' est la famille de ces fonctions, et $X \neq 0$, il existe un $x \in \mathcal{M}$ tel que $X(x) \neq 0$. La structure d'espace pseudo-normé définie par cette famille sera dite <u>structure faible inférieure</u> sur $\mathcal{M}^*$. Il est immédiat que la <u>structure faible inférieure</u> est <u>moins fine</u> que la <u>structure faible supérieure</u>.

Par opposition, les structures définies par les normes sur $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^*$ sont dites <u>structures fortes</u>. Comme les fonctions $|X(x)|$ sont continues en x (relativement à la structure forte), il est clair que <u>la structure faible de $\mathcal{M}$ est moins fine que la structure forte</u> : de plus, elle est <u>strictement moins fine</u> si $\mathcal{M}$ a <u>une infinité de dimensions</u> : car dans ce cas, il existe toujours des points $x \neq 0$ qui annulent simultanément un nombre fini de formes linéaires.

<u>La structure faible sur $\mathcal{M}$</u> . Dans cette section, chaque fois qu'une locution topologique se rapportera à la structure faible de $\mathcal{M}$, nous la ferons précéder de l'adverbe "faiblement" : on dira par exemple "ensemble faiblement fermé" ou "filtre faiblement convergent" pour ensemble fermé, ou filtre convergent, relativement à la structure faible.

L'absence du terme "faiblement" signifiera qu'il s'agit d'une propriété relative à la structure forte : "ensemble fermé" signifiera, par exemple, ensemble fermé relativement à la structure forte.

Pour définir la structure faible de $\mathcal{M}$, on peut se borner à prendre une famille Ψ de pseudo-normes $|X_\iota(x)|$ ($\iota \in I$) correspondant à un ensemble de points X_ι de $\mathcal{M}$ <u>linéairement indépendants</u> (par exemple une base vectorielle) : en effet, si X_i ($i=1,2,\dots,n$) sont n points quelconques de $\mathcal{M}$, et a_i n nombres $\neq 0$, on aura $\sum_{i=1}^{n} |a_i X_i(x)| \leq 1$ si on a simultanément $|X_i(x)| \leq 1/n\,|a_i|$ quel que soit i. En particulier, on pourra toujours supposer $\|X_\iota\| = 1$. Les voisinages faibles de l'origine peuvent être définis de la manière suivante : X_ι étant une quelconque des pseudo-normes telle que $\|X_\iota\| = 1$ et α un nombre > 0 , appelons <u>tranche</u> d'épaisseur 2α relative à X_ι l'ensemble des points de $\mathcal{M}$ tels que $|X_\iota(x)| \leq \alpha$: c'est l'ensemble des points "compris entre" les deux hyperplans $X_\iota(x) = -\alpha$ et $X_\iota(x) = \alpha$. Un voisinage faible de l'origine sera l'intersection d'un nombre fini de tranche (ou tout ensemble contenant une telle intersection), qu'on peut appeler, si on veut, un <u>prismatoïde</u>.

Cette définition permet de démontrer aisément la proposition suivante

<u>Proposition 3</u>. <u>Tout ensemble convexe fermé est faiblement fermé</u>.

Montrons-le d'abord pour un <u>corps convexe</u> C ; nous pouvons supposer que l'origine en est un point intérieur. Soit x_0 un point n'appartenant pas à C, et x_1 le point où la demi-droite issue de O et passant par x_0 rencontre la frontière de C ; il passe par x_1 un hyperplan d'appui fermé $X(x) = X(x_1)$ de C , et on a donc $X(x_0)-X(x_1)$ du même signe que $X(x_1)$; par suite, la tranche $|X(x)-X(x_0)| \leq |X(x_0)-X(x_1)|/2$

ne contiendra aucun point de C, ce qui montre que x_o n'est pas faiblement adhérent à C. Comme d'autre part tout point adhérent à C est aussi faiblement adhérent, la proposition est démontrée dans ce cas.

Passons maintenant au cas général ; nous pouvons supposer cette fois que l'origine est un point frontière de l'ensemble convexe fermé C. Soit x_o un point n'appartenant pas à C, $d > 0$ sa distance à C , et r le minimum des nombres $\|x_o\|$ et d . Soit C' l'ensemble convexe engendré par C et une sphère de centre O et de rayon r/2 ; tout point $x \in C'$ est donc sur un segment joignant un point y de la sphère à un point z de C , autrement dit $x = ty+(1-t)z$ avec $0 \leqslant t \leqslant 1$.
Donc $\|x_o - x\| = \|x_o-(1-t)z-ty\| \geqslant \|x_o-(1-t)z\| - \|y\|$; comme $(1-t)z$ appartient à C, $\|x_o-(1-t)z\| \geqslant d \geqslant r$, et comme $\|y\| \leqslant r/2$, on a $\|x_o-x\| \geqslant r/2$. Il en résulte que x_o n'est pas adhérent à C' ; comme $\overline{C'}$ est un corps convexe, x_o n'est pas non plus faiblement adhérent à C', ni à C par conséquent. C.Q.F.D.

Il est facile de donner des exemples d'ensembles fermés bornés non convexes qui ne sont pas faiblement fermés : par exemple l~~ø~~'adhérence faible d'une périsphère est la sphère fermée de même rayon.

<u>Proposition 4.</u> <u>L'ensemble des points faiblement adhérents à un ultrafiltre est identique à l'intersection des ensembles fermés convexes engendrés par les ensembles de l'ultrafiltre.</u>

Supposons en effet qu'un point x_o de cette intersection ne soit pas adhérent à l'ultrafiltre $\mathfrak{U}$ considéré ; il existe alors n tranches $|X_i(x-x_o)| < \alpha_i$ contenant x_o , et dont l'intersection n'appartient pas à $\mathfrak{U}$. Or, cette intersection peut aussi être considérée comme l'intersection de 2n demi-espaces de la forme $X(x) < \alpha$; un au moins de ces demi-espaces n'appartient pas à $\mathcal{U}$, donc son complémentaire est dans $\mathcal{U}$; mais ce complémentaire est un corps convexe ne contenant pas x_0 , ce qui est contradictoire.

On peut rattacher à cette proposition, ou démontrer directement de la même manière, la suivante :

Pour qu'un point x_0 soit limite faible d'une suite (x_n) , il faut et il suffit qu'il soit l'intersection des ensembles fermés convexes engendrés par les ensembles formés d'une infinité de points de la suite.

La proposition 3 entraîne en particulier la suivante :

Proposition 5. Toute variété linéaire fermée est faiblement fermée.

Il y a donc identité entre les variétés linéaires fermées dans la structure forte et dans la structure faible.

Comme toute variété linéaire fermée est l'intersection d'hyperplans fermés, la proposition 5 peut aussi s'établir en montrant qu'elle est vraie pour les hyperplans ; or, elle résulte alors de la proposition suivante :

Proposition 6. $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ étant deux espaces normés, toute application linéaire continue de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$ est aussi faiblement continue (c'est-à-dire continue relativement aux structures faibles de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$).

Soit en effet f une application linéaire continue de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$, et soient X'_i des formes linéaires continues en nombre fini, dans $\mathcal{M}'$. Comme les fonctions composées $X'_i \circ f$ sont des formes linéaires continues dans $\mathcal{M}$, l'image réciproque par f d'un prismatoïde relatif aux X'_i sera un prismatoïde, d'où la proposition.

La structure faible est la structure uniforme la moins fine qui rende uniformément continues les pseudo-normes X_ι ($\iota \in I$) qui la définissent ; par suite (ch.II, § 5), $\mathcal{M}$, muni de sa structure faible, est isomorphe à un sous-espace linéaire de R^I. Mais nous allons voir que ce sous-espace ne peut être fermé dans R^I que si $\mathcal{M}$ est un espace à un nombre fini de dimensions ; autrement dit

Proposition 7. Un espace normé à une infinité de dimensions n'est jamais faiblement complet.

Nous allons en effet construire un filtre de Cauchy non convergent, au sens de la structure faible. Prenons pour les X_ι une base vectorielle du dual $\mathcal{M}^*$, base infinie par hypothèse, et supposons de plus que $\|X_\iota\| = 1$. Soit (X_n) une suite dénombrable extraite de l'ensemble des X_ι , et, pour chaque valeur de n, soit x_n un point tel que $\|x_n\| = 1$, $|X_n(x_n)| > \frac{1}{2}$. Considérons, pour chaque n, les tranches $|X_n(x) - X_n(nx_n)| \leqslant \alpha$, α prenant toutes les valeurs > 0 ; en chaque point d'un de ces ensembles, on a donc $|X_n(x)| \geqslant n/2 - \alpha$, donc la distance de l'origine à l'ensemble est au moins égale à $n/2 - \alpha$. Pour les autres X_ι , nous considérerons pour chacun d'eux les tranches contenant l'origine et relative à cet X_ι .

Considérons alors la famille $\mathcal{G}$ de tous les ensembles que nous venons de définir : elle engendre un filtre, car un nombre fini quelconque de ces ensembles a une intersection non vide, les X_ι étant linéairement indépendants. D'autre part, pour chaque X_ι , il existe une tranche relative à X_ι et d'épaisseur aussi faible qu'on veut dans la famille $\mathcal{G}$, donc le filtre qu'elle engendre est de Cauchy pour la structure faible. Or, il ne peut avoir de point adhérent, car les ensembles de $\mathcal{G}$ sont convexes et fermés, donc faiblement fermés, et il en existe dont la distance à l'origine est arbitrairement grande. C.Q.F.D.

Il se peut par contre que les <u>sphères</u> fermées de $\mathcal{M}$ soient des sous-espaces faiblement complets ; nous reviendrons sur ce point important un peu plus loin.

<u>Exercice</u>. Montrer que toute sphère de $\mathcal{M}$ est un sous-espace précompact pour la structure faible.

<u>La structure faible de $\mathcal{M}^*$</u>. Il n'y a rien à ajouter à ce qui précède en ce qui concerne la <u>structure faible supérieure</u> du dual $\mathcal{M}^*$. Aussi, dans cette section, étudions-nous exclusivement la <u>structure faible inférieure</u>, et quand nous parlons de"structure faible" de $\mathcal{M}^*$, il doit être entendu que c'est de celle-là qu'il s'agit ; l'adverbe "faiblement" se rapportera à toutes les notions relatives à cette structure.

On voit tout d'abord que, pour définir la structure faible sur $\mathcal{M}^*$ on peut se borner à considérer une famille Ψ' de pseudo-normes $|X(x_\nu)|$, les x_ν formant un ensemble de points <u>linéairement indépendants</u> de $\mathcal{M}$; on peut toujours supposer en particulier que $\|x_\nu\| = 1$.

Une famille de voisinages engendrent le filtre des voisinages faibles de l'origine est encore formée des ensembles de la forme $|X(x_\nu)| \leqslant \alpha$, qu'on peut encore appeler "tranches", bien que ce terme n'évoque ici aucune représentation intuitive.

Si on conserve, pour définir la structure faible de $\mathcal{M}^*$, toutes les pseudo-normes de la famille Φ' , on voit que $\mathcal{M}^*$, muni de sa structure faible, peut être considéré comme un sous-espace de

<u>l'espace</u> $F_0(R, \mathcal{M}) = R^{\mathcal{M}}$ <u>des fonctions numériques sur</u> $\mathcal{M}$, <u>avec la structure de la convergence simple</u>. Ici encore, ce sous-espace n'est pas fermé, car on a l'analogue de la prop. 7 :

<u>Proposition 8</u>. <u>Si</u> $\mathcal{M}$ <u>a une infinité de dimensions, son espace dual n'est jamais faiblement complet</u>.

La démonstration se fait de la même manière : on prend pour les x_ι une <u>base</u> vectorielle de $\mathcal{M}$, telle que $\| x_\iota \| = 1$, et on en extrait une suite dénombrable (x_n). Pour chaque n, on prend un point X_n de $\mathcal{M}^*$ tel que $\| X_n \| = 1$, et $X_n(x_n)=1$ (ce qui est possible d'après la prop. 3 du § 3), et on considère les tranches $| X(x_n) - X_n(nx_n) | \leqslant \alpha$; si X appartient à un tel ensemble, on a $X(x_n) \geqslant n-\alpha$, donc, comme $\| x_n \| = 1$, $\| X \| \geqslant n-\alpha$. Pour les autres x_ι , on considère les tranches contenant l'origine qui leur sont relatives. La famille $\mathfrak{F}'$ d'ensembles ainsi obtenue <u>engendre un filtre</u>, car en vertu du théorème 2 du § 3, il est toujours possible, les x_i étant un nombre fini de points indépendants, de trouver un $X \in \mathcal{M}^*$ tel que $X(x_i)=a_i$, quels que soient les a_i donnés. La fin du raisonnement est analogue.

Mais ici on a l'important théorème suivant :

<u>Théorème 1</u>. <u>Dans</u> $\mathcal{M}^*$, <u>toute sphère fermée est un sous-espace faiblement compact</u> (<u>et par suite faiblement complet</u>).

Il suffit de le montrer pour la sphère unité S ; pour cela, nous allons établir que S est un ensemble <u>fermé dans</u> $R^{\mathcal{M}}$; ses projections sur les espaces facteurs étant <u>bornées</u>, donc <u>compactes</u>, S sera compacte.

Or, soit X_0 un point de $R^{\mathcal{M}}$ adhérent à S ; quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans $\mathcal{M}$ et quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un X dans

S tel que $|X_0(x_i)-X(x_i)| < \varepsilon$ $(i=1,2,\dots,n)$; si on applique cela en particulier aux trois points $x,y,x+y$, on a

$$|X_0(x+y)-X_0(x)-X_0(y)| < 3\varepsilon$$

et comme ε est arbitraire, on voit que X_0 est additive, et de la même manière, on montre qu'elle est homogène ; d'autre part, on a encore $|X_0(x)| \leqslant |X(x)| + \varepsilon \leqslant \|x\| + \varepsilon$, et comme ε est arbitraire, $|X_0(x)| \leqslant \|x\|$ quel que soit x, ce qui montre que X_0 est une forme linéaire continue, et que sa norme est $\leqslant 1$, autrement dit que $X_0 \in S$.

<u>Remarque</u> . $\mathcal{M}^*$ n'est pas localement compact pour la structure faible, car un voisinage quelconque d'un point arbitraire contient toujours une droite tout entière, et ne peut donc être compact : cependant le théorème 1 montre que $\mathcal{M}^*$ est réunion dénombrable d'ensembles compacts, les sphères de rayon $n (n=1,2,\dots)$; ces ensembles sont d'ailleurs <u>épars</u> , puisqu'aucun voisinage faible n'est borné ; ainsi, pour la structure faible, $\mathcal{M}^*$ est un ensemble de $1^{\text{ère}}$ catégorie.

Les sphères fermées dans $\mathcal{M}^*$ sont donc aussi faiblement fermées ; mais ce résultat ne s'étend pas en général aux <u>ensembles convexes fermés</u> quelconques, contrairement à ce qui se passe dans $\mathcal{M}$; en particulier, il peut exister des <u>variétés linéaires fermées, mais non faiblement fermées</u>, comme nous allons le voir un peu plus loin. Nous commencerons par donner, dans le cas où $\mathcal{M}$ est un espace de Banach (normé et <u>complet</u>) un résultat fondamental, qui permet de caractériser autrement les variétés linéaires (homogènes) <u>faiblement fermées</u> dans $\mathcal{M}^*$:

<u>Théorème 2</u>. <u>Si $\mathcal{M}$ est un espace de Banach, et V une variété linéaire homogène dans $\mathcal{M}^*$, distincte de $\mathcal{M}^*$, il y a équivalence entre les trois propositions suivantes</u> :

a) <u>V est faiblement fermée</u>.

b) <u>L'intersection de V et d'une sphère fermée est un ensemble faiblement compact</u>.

c) <u>V est la variété orthogonale à une variété linéaire fermée de $\mathcal{M}$</u>.

D'après le théorème 1, il est immédiat que a) entraîne b) (que $\mathcal{M}$ soit complet ou non). D'autre part, c) entraîne a) : soit en effet V l'ensemble des $X \in \mathcal{M}^*$ tels que $X(x)=0$ en tout point d'une variété linéaire homogène fermée $G \subset \mathcal{M}$; si X_0 est faiblement adhérent à V, à tout $x \in G$ et $\varepsilon > 0$ correspond un $X \in V$ tel que $|X_0(x)-X(x)| < \varepsilon$ c'est-à-dire $|X_0(x)| < \varepsilon$, et comme ε est arbitraire, $X_0(x)=0$ en tout point de G, c'est-à-dire que $X_0 \in V$ (ici encore l'hypothèse que $\mathcal{M}$ est complet n'intervient pas).

Reste à démontrer que b) entraîne c). Montrons tout d'abord que, si la variété linéaire V vérifie b), elle est <u>fermée</u>. En effet, si X_0 est adhérent à V, il est adhérent à l'intersection de V et d'une sphère fermée de centre X_0 ; mais cette intersection est faiblement compacte, donc faiblement fermée, donc fermée, ce qui montre que $X_0 \in V$.

La proposition résultera alors du lemme suivant :

<u>Lemme (Banach)</u>. <u>Soit V une variété linéaire homogène dans $\mathcal{M}^*$, satisfaisant à la condition b), et soit X_0 un point dont la distance à V est $> k > 0$. Il existe un $x_0 \in \mathcal{M}$ tel que $\|x_0\| \leq 1/k$, que $X_0(x_0)=1$ et que $X(x_0)=0$ quel que soit $X \in V$</u>.

En effet, ce lemme étant supposé démontré, si on désigne par G l'intersection des hyperplans $X(x)=0$ pour tout $X \in V$, G est une variété linéaire fermée dans $\mathcal{M}$; si $X_0 \notin V$, il existe d'après le lemme un point x_0 de $\mathcal{M}$ orthogonal à tous les $X \in V$, donc dans G, et tel que $X_0(x_0) \neq 0$; par suite les seules formes linéaires continues qui s'annulent sur G sont les points de V, ce qui démontre c).

Démontrons maintenant le lemme. A chaque partie <u>finie</u> P de $\mathcal{M}$ faisons correspondre l'ensemble H_P des points $X \in V$ tels que $\|X-X_0\| \leqslant 2k$ et $|X(x)-X_0(x)| \leqslant k\|x\|$ pour tout $x \in P$. Si aucun des H_P n'était vide, il est clair que ces ensembles formeraient la base d'un <u>filtre</u> $\mathfrak{F}$ sur l'intersection de V par la sphère de centre X_0 et de rayon $2k$; comme cette intersection est <u>faiblement compacte</u>, $\mathfrak{F}$ aurait un point faiblement adhérent $Y \in V$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, et $x \in \mathcal{M}$, il existerait donc un $X \in V$ tel qu'on ait à la fois $|X(x)-X_0(x)| \leqslant k\|x\|$, et $|X(x)-Y(x)| \leqslant \varepsilon$, d'où $|X_0(x)-Y(x)| \leqslant k\|x\| + \varepsilon$, et comme ε est arbitraire, $|X_0(x)-Y(x)| \leqslant k\|x\|$. Comme x est quelconque dans $\mathcal{M}$, il en résulterait que $\|X_0-Y\| \leqslant k$, contrairement à l'hypothèse que X_0 est distant de plus de k de V.

Il existe donc une partie finie $P_1 \subset \mathcal{M}$ telle qu'il n'existe aucun point $X \in V$ satisfaisant aux conditions $\|X_0-X\| \leqslant 2k$, et $|X_0(x)-X(x)| \leqslant k\|x\|$ en tout point de P_1.

Procédons maintenant par récurrence ; on définira successivement des parties finies $P_n (n=1,2,\ldots.)$ telles qu'il n'existe aucun point $X \in V$ satisfaisant simultanément aux conditions

$$\|X_0-X\| \leqslant (n+1)k$$

$$|X_0(x)-X(x)| \leqslant k\,\|x\| \text{ en tout point de } P_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|X_0(x)-X(x)| \leqslant nk\,\|x\| \text{ en tout point de } P_n$$

Il suffit pour cela de considérer l'ensemble des points X qui satisfont aux n premières de ces conditions, et de plus à $\left|X_0(x)-X(x)\right| \leqslant \leqslant nk \|x\|$ en tout point d'une partie finie P ; en supposant ces ensembles non vides, ils formeraient une base de filtre, qui aurait un point adhérent Y , et Y satisferait aux n premières conditions précédentes, (où on a remplacé n+1 par n dans la première), contrairement à l'hypothèse.

En vertu de l'homogénéité des X et de la norme, on peut supposer que tous les points de P_n ont une norme égale à $1/n$; on voit donc que nous avons démontré l'existence d'une suite (x_n) de points de $\mathcal{M}$ telle que $\|x_n\| \leqslant 1$ quel que soit n , que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, et enfin que, si X est un point de $\mathcal{M}$ tel que $\left|X_0(x_n)-X(x_n)\right| \leqslant k$ quel que soit n, X <u>n'appartienne pas à</u> V .

Considérons alors, dans l'espace $\mathfrak{S}$, l'ensemble G des suites $(X(x_n))$ pour tous les $X \in V$; il est linéaire, et la définition de la suite (x_n) signifie que, dans $\mathfrak{S}$, la distance du point $(X_0(x_n))$ à G est <u>au moins égale à</u> k . D'après la prop. 5 du § 3 et les résultats sur les formes linéaires continues dans $\mathfrak{S}$, il existe une suite (a_n) $(n=0,1,2,\ldots)$ de nombres réels, telle que

$$a_0 \lim_{n\to\infty} X_0(x_n) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_0(x_n) = 1$$

$$a_0 \lim_{n\to\infty} X(x_n) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n X(x_n) = 0 \quad \text{pour tout} \quad X \in V$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leqslant 1/k$$

Comme $\|x_n\| \leqslant 1$, la série de terme général $a_n x_n$ est absolument sommable, donc, puisque $\mathcal{M}$ est <u>complet</u>, elle est sommable-C_0 ; en posant $x_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, on a donc (en se rappelant que X_0 et les X sont des formes linéaires continues.)

$$X_o(x_o)=1 \ , \quad X(x_o)=0 \ \text{ quel que soit } \ X \in V$$

$$\| x_o \| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot \| x_n \| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leqslant 1/k$$

C.Q.F.D.

Remarque. Lorsque $\mathcal{M}$ n'est pas complet, on peut cependant montrer que a) entraîne c), et par suite que ces deux propositions sont équivalentes : en supposant V faiblement fermée, et en désignant par G la variété fermée dans $\mathcal{M}$, intersection des hyperplans $X(x)=0$, où X parcourt V , on montre que, si X_o est une forme linéaire continue telle que $X_o(x)=0$ en tout point de G , et si $x_1,\ldots,x_n$ sont n points quelconques de $\mathcal{M}$, on peut trouver $X \in V$ tel que $X(x_i)= X_o(x_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$, ce qui montre que X_o est faiblement adhérent à V , et par suite dans V.

Exercice. Développer la démonstration (on pourra procéder par récurrence sur n).

On peut montrer au contraire, par un exemple (voir Appendice) que, si $\mathcal{M}$ n'est pas complet, la proposition b) peut être vraie sans que c) le soit .

Le théorème 2 permet de déterminer les formes linéaires faiblement continues dans $\mathcal{M}^*$.

Proposition 9. Toute forme linéaire faiblement continue dans $\mathcal{M}^*$ est de la forme $u_{x_o}(X) = X(x_o)$, où $x_o \in \mathcal{M}$.

Soit f une forme linéaire faiblement continue dans $\mathcal{M}^*$; si elle n'est pas identiquement nulle, elle définit un hyperplan faiblement fermé H d'équation $f(X)=0$ dans $\mathcal{M}^*$. Soit X_o un point de $\mathcal{M}^*$ non situé dans H ; on peut supposer que $f(X_o)=1$; d'après le th. 2 , il existe un $x_o \in \mathcal{M}$ tel que $X_o(x_o)=1$ et $X(x_o)=0$ pour tout $X \in H$.

Posons $Y = X-X_0f(X)$ pour tout $X \in \mathcal{M}^*$; on a $f(Y)=f(X)-f(X)f(X_0)=0$, donc $Y \in H$, et par suite $Y(x_0)=0$, ce qui donne, quel que soit $X \in \mathcal{M}$, $f(X)=X(x_0)$.

On remarquera que la proposition utilise seulement l'équivalence des propositions a) et c) du th.2, donc ne suppose pas $\mathcal{M}$ complet.

Le théorème de réciprocité. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat fondamental de ce paragraphe :

Théorème 3 (théorème de réciprocité). $\mathcal{M}$ étant un espace linéaire normé, il y a équivalence entre les propositions suivantes :

a) Toute sphère fermée dans $\mathcal{M}$ est faiblement compacte.

b) L'isomorphisme canonique de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}^{**}$ applique $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{M}^{**}$.

c) La structure faible supérieure et la structure faible inférieure sur $\mathcal{M}^*$ sont identiques.

d) Toute forme linéaire continue dans $\mathcal{M}^*$ est aussi faiblement continue (au sens de la structure inférieure).

e) Toute variété linéaire fermée dans $\mathcal{M}^*$ est faiblement fermée (au sens de la structure inférieure).

f) Toute variété linéaire fermée dans $\mathcal{M}^*$ est la variété orthogonale à une variété linéaire fermée dans $\mathcal{M}$.

De plus, chacune de ces propositions entraîne que $\mathcal{M}$ est complet.

1° a) et b) sont équivalentes. Soit G l'image canonique de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}^{**}$; il résulte immédiatement des définitions des structures faibles que l'application de $\mathcal{M}$ sur G n'est pas seulement un isomorphisme des structures fortes (avec conservation de la norme), mais aussi un isomorphisme de la structure faible de $\mathcal{M}$ sur la structure induite sur G par la structure faible inférieure de $\mathcal{M}^{**}$. Cela étant, si a) est vraie, G est, dans $\mathcal{M}^{**}$ une variété linéaire dont l'intersection avec une sphère fermée est faiblement compacte. Si on avait $G \neq \mathcal{M}^{**}$, on pourrait appliquer à G le th. 2, puisque $\mathcal{M}^{*}$ est complet. Il existerait donc dans $\mathcal{M}^{*}$ un point $X_0 \neq 0$ et orthogonal à G, c'est-à-dire tel que $X_0(x)=0$ quel que soit $x \in \mathcal{M}$, ce qui est absurde, et montre donc que $G = \mathcal{M}^{**}$. Réciproquement, si b) est vraie, toute sphère fermée dans G est faiblement compacte, d'après le th. 1 appliqué à $\mathcal{M}^{**}$, donc a) est vraie.

Comme d'autre part $\mathcal{M}^{**}$ est toujours complet, il est clair que b) entraîne que $\mathcal{M}$ est complet.

2° b), c) et d) sont équivalentes. D'après la prop. 9, il est évident que b) et d) sont équivalentes. D'autre part, b) entraîne c) d'après la définition des structures faibles sur $\mathcal{M}^{*}$; et c) entraîne que toute forme linéaire sur $\mathcal{M}^{*}$ continue au sens de la structure forte, donc (prop.6) continue au sens de la structure faible supérieure, est aussi continue au sens de la structure faible inférieure, c'est-à-dire d).

3° d), e) et f) sont équivalentes. D'après le th. 2, e) et f) sont équivalentes. D'autre part e) est équivalente à la même proposition formulée pour les <u>hyperplans</u>, puisque toute variété linéaire fermée est une intersection d'hyperplans fermés ; mais pour les hyperplans e) et d) sont équivalentes en vertu de la prop. 4 du § 2.

C.Q.F.D.

Nous appellerons <u>espaces involutifs</u> ceux pour lesquels les six propositions équivalentes énoncées dans le th. 3 sont vraies.

Les R^n sont évidemment des espaces involutifs ; le plus important des espaces normés à une infinité de dimensions, <u>l'espace de Hilbert</u>, dont nous ferons plus loin une étude approfondie, est involutif. On rencontrera encore d'autres espaces involutifs (généralisant l'espace de Hilbert) dans la théorie de l'Intégration.

D'autre part, nous avons rencontré des espaces non involutifs par exemple l'espace $\mathcal{S}$.

Remarquons que toute variété linéaire homogène fermée d'un espace involutif est un espace involutif. En effet, la structure faible sur un sous-espace linéaire fermé V d'un espace normé $\mathcal{M}$ est identique à la structure induite sur V par la structure faible de $\mathcal{M}$, puisque toute forme linéaire continue sur V est la restriction d'une forme linéaire continue sur $\mathcal{M}$. Il en résulte que, si $\mathcal{M}$ est involutif, toute sphère fermée dans V , étant la trace d'un ensemble faiblement compact, est faiblement compacte, autrement dit V est un sous-espace involutif.

Ceci montre en particulier que, si un espace complet n'est pas involutif, son dual ne peut être involutif ; car dans le cas contraire, l'espace bidual $\mathcal{M}^{**}$ serait aussi involutif ; or, comme $\mathcal{M}$ est complet, son image canonique G dans $\mathcal{M}^{**}$ est une variété linéaire fermée, qui serait donc un espace involutif, contrairement à l'hypothèse.

Il en résulte que, si un espace n'est pas involutif, ses espaces duals successifs sont tous distincts, en ce sens qu'un isomorphisme canonique transforme un dual d'ordre n en une partie du dual d'ordre n+2k , partie non identique à ce dernier ; de plus, tous ces espaces sont non involutifs.

Par exemple, les deux premiers duals de l'espace S , à savoir $L(N)$ et $B(N)$ ne sont pas involutifs.

<u>Propriétés des suites dénombrables</u>. Lorsque M est <u>complet</u>, les suites dénombrables de points dans M et dans M^* possèdent des propriétés particulières dont l'origine réside dans les propriétés des espaces métriques complets relativement à la notion de <u>catégorie</u> (de Baire), et plus précisément dans le théorème suivant, dont nous rappelons l'énoncé (ch.VII, § 5, th.2) : <u>Si, dans un espace métrique complet E , une suite (f_n) de fonctions continues numériques non négatives est telle qu'en chaque point $\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$ soit finie, il existe une sphère de E dans laquelle les fonctions f_n sont uniformément bornées</u>.

Nous en déduirons d'abord la proposition suivante :

<u>Proposition 10</u>. <u>M étant un espace de Banach, M' un espace linéaire normé, (f_n) une suite d'applications linéaires continues de M dans M' telle que $\overline{\lim_{n\to\infty}} \|f_n(x)\|$ soit finie quel que soit $x \in M$, la suite $(\|f_n\|)$ des normes des f_n est bornée</u>.

En effet, si on applique aux fonctions numériques $\|f_n(x)\|$ le théorème que nous venons de rappeler, on voit qu'il existe une sphère $\|x-x_0\| \leq r$, et un nombre $K > 0$ tels que $\|f_n(x)\| \leq K$ pour $\|x-x_0\| \leq r$ quel que soit n ; on en déduit, pour les mêmes valeurs de x , que $\|f_n(x-x_0)\| \leq 2K$, d'où $\|f_n\| \leq 2K/r$.

L'hypothèse de cette proposition est en particulier remplie si la suite (f_n) converte <u>simplement</u> dans M , et aussi dans le cas où la suite $(f_n(x))$ est une <u>suite de Cauchy</u> dans M' , quel que soit $x \in M$ (les deux cas coïncidant lorsque M' est complet). On a ainsi une condition <u>nécessaire</u> pour que cette dernière propriété ait lieu ;

elle n'est pas suffisante, bien entendu, mais on a le critère suivant, fréquemment utile :

<u>Proposition 11.</u> <u>Soient</u> $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ <u>deux espaces linéaires normés</u>, (f_n) <u>une suite d'applications linéaires continues de</u> $\mathcal{M}$ <u>dans</u> $\mathcal{M}'$; <u>si la suite des normes</u> $(\|f_n\|)$ <u>est bornée et si la suite</u> $(f_n(x))$ <u>est une suite de Cauchy pour tout</u> $x \in E$, <u>où</u> E <u>est partout dense dans</u> $\mathcal{M}$, <u>alors</u> $(f_n(x))$ <u>est une suite de Cauchy quel que soit</u> $x \in \mathcal{M}$.

En effet, supposons que $\|f_n\| \leqslant K$ quel que soit n. Quel que soit $\varepsilon > 0$, et $x \in \mathcal{M}$, il existe $y \in E$ tel que $\|y-x\| \leqslant \varepsilon/K$, et d'autre part, on peut trouver un entier n_0 tel que, pour $m \geqslant n_0$ et $n \geqslant n_0$, $\|f_m(y)-f_n(y)\| < \varepsilon$; on en déduit immédiatement que

$$\|f_m(x)-f_b(x)\| \leqslant \|f_m(x)-f_m(y)\| + \|f_n(x)-f_n(y)\| + \|f_m(y)-f_n(y)\| \leqslant 3\varepsilon$$

d'où la proposition. On peut remplacer E par un ensemble <u>total</u>, ou par un ensemble dense dans une sphère, en raison de la linéarité des f_n.

<u>Proposition 12.</u> $\mathcal{M}$ <u>étant un espace de Banach</u>, $\mathcal{M}'$ <u>un espace linéaire normé, si la suite</u> (f_n) <u>d'applications linéaires continues de</u> $\mathcal{M}$ <u>dans</u> $\mathcal{M}'$ <u>converge simplement dans</u> $\mathcal{M}$, <u>la limite</u> f <u>est une application linéaire continue de</u> $\mathcal{M}$ <u>dans</u> $\mathcal{M}'$.

En effet, la suite des normes $(\|f_n\|)$ a une borne finie K d'après la prop. 10 ; d'autre part, si x et y sont deux points quelconques de $\mathcal{M}$, il existe n tel que l'on ait simultanément $\|f(x)-f_n(x)\| < \varepsilon$, $\|f(y)-f_n(y)\| < \varepsilon$ et $\|f(x+y)-f_n(x+y)\| < \varepsilon$, d'où $\|f(x+y)-f(x)-f(y)\| < 3\varepsilon$ et comme ε est arbitraire, on voit dans f est additive, et de la même façon on montre qu'elle est linéaire ; enfin, quel que soit x, il existe n tel que

$\|f(x)\| \leqslant \|f_n(x)\| + \varepsilon \leqslant K \|x\| + \varepsilon$, et comme ε est arbitraire, $\|f(x)\| \leqslant K \|x\|$, ce qui montre que f est continue.

Appliquons ces résultats aux suites dénombrables dans le dual d'un espace complet $\mathcal{M}$; on voit que

Toute suite de Cauchy (X_n) de points de $\mathcal{M}^*$ (au sens de la structure faible inférieure) converge faiblement vers un point X_0 de $\mathcal{M}^*$, et la suite des normes (X_n) est bornée. Réciproquement, si la suite des normes des X_n est bornée, et si la suite $(X_n(x))$ converge pour tout x d'un ensemble E , total dans $\mathcal{M}$, (X_n) est une suite faiblement convergente dans $\mathcal{M}^*$.

> Bien entendu, ce résultat n'est pas en contradiction avec la prop. 8, d'après laquelle $\mathcal{M}^*$ n'est pas faiblement complet : il signifie simplement qu'il y a toujours des filtres de Cauchy non convergents dans la structure faible (inférieure), de $\mathcal{M}^*$, mais que toute suite de Cauchy est faiblement convergente.

Remarquons encore que, d'après le th. 1, toute suite (X_n) de points de $\mathcal{M}^*$ dont les normes sont bornées admet un point faiblement adhérent $X_0 \in \mathcal{M}^*$; mais il ne faut pas en conclure qu'on peut en général extraire de (X_n) une suite convergeant faiblement vers X_0 , car la structure faible de $\mathcal{M}^*$ n'est pas métrisable. Toutefois, cette proposition est vraie s'il existe un ensemble dénombrable E total dans $\mathcal{M}$ (ce qui revient à dire que $\mathcal{M}$ admet (pour sa structure forte) une base topologique dénombrable) : en effet, d'après la prop. 11, pour qu'une suite bornée de points de $\mathcal{M}^*$ soit convergente vers X_0 , il suffit alors que le filtre associé soit plus fin qu'un filtre ayant pour base une infinité

<u>dénombrable</u> de voisinages de X_o , ce qui permet immédiatement d'établir la proposition.

Etudions maintenant la convergence des suites de points de $\mathcal{M}$ (complet ou non) dans la <u>structure faible</u> de $\mathcal{M}$. Si on remarque que l'isomorphisme canonique de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}^{*}$ fait correspondre à la structure faible de $\mathcal{M}$ la structure induite sur son image canonique G par la structure faible inférieure de $\mathcal{M}^{**}$; on voit qu'on est ramené à étudier les suites de points de G relativement à cette structure, c'est-à-dire la convergence faible de certaines suites de formes linéaires continues définies <u>dans le dual</u> $\mathcal{M}^{*}$.

On voit donc (prop. 10) que <u>si</u>, <u>pour la suite</u> (x_n) <u>de points de</u> $\mathcal{M}$, $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, X(x_n)$ <u>est finie pour toute forme linéaire continue</u> $X \in \mathcal{M}^{*}$, <u>la suite des normes</u> $(\|x_n\|)$ <u>est bornée</u>. Il en est ainsi en particulier quand (x_n) <u>converge faiblement</u> vers un point $x_o \in \mathcal{M}$, ou quand (x_n) est une <u>suite de Cauchy pour la structure faible</u> de $\mathcal{M}$. Mais ici, par contre, <u>une suite faible de Cauchy dans</u> $\mathcal{M}$ <u>n'est pas toujours faiblement convergente</u> : cela tient à ce que G n'est pas une variété linéaire <u>faiblement fermée</u> (pour la structure inférieure) dans $\mathcal{M}^{**}$ (elle ne peut l'être que si $\mathcal{M}$ est involutif) : à toute suite faible de Cauchy dans $\mathcal{M}$ correspond une suite faible de Cauchy dans $\mathcal{M}^{**}$, qui est convergente, mais dont la limite peut ne pas être dans G. Lorsque $\mathcal{M}$ est involutif, ce fait ne se produit pas, puisque $\mathcal{M}^{**} = G$, et d'ailleurs la convergence faible dans $\mathcal{M}$ se ramène à la convergence faible (pour la structure inférieure) dans $\mathcal{M}^{**}$, qui a été étudiée plus haut. Cependant, il y a aussi des espaces <u>non-involutifs</u> pour lesquels toute suite faible de Cauchy est faiblement convergente.

<u>Exercice</u>. Montrer qu'il en est ainsi pour l'espace $\mathbb{L}(N)$ (avec la structure supérieure) et que, de plus, toute suite faiblement convergente est aussi convergente pour la structure forte (ce qui ne veut naturellement pas dire que la structure faible et la structure forte soient identiques).

On voit par cet exemple que la considération exclusive des suites dénombrables masque complètement les propriétés générales des structures faibles exposées ci-dessus.

Le reste du chapitre, comprenant un paragraphe sur la généralisation des résultats des §§3 et 4 aux espaces normés complexes, et un paragraphe sur diverses propriétés des applications linéaires, en vue des applications à la théorie des équations linéaires, sera rédigé ultérieurement.
