APPENDICE III
ETUDE LOCALE D'INTEGRALES DEPENDANT D'UN PARAMETRE (ETAT 1)

Rédaction n° 009

Nombre de pages : 21

Nombre de feuilles : 21

Livre IV

Appendice III

Etude locale d'intégrales dependant d'un paramètre

Etat 1

9

APPENDICE III

ETUDE LOCALE D'INTEGRALES DEPENDANT D'UN PARAMETRE (Etat 1)

1. Position du problème. Soit f une fonction numérique continue, définie dans le produit $I \times E$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, E un ensemble filtré par un filtre $\mathfrak{F}$. Supposons que : 1° pour chaque valeur de $x \in E$, l'intégrale $\int_I f(t,x)dt$ soit définie ; 2° pour chaque valeur de $t \in I$ la fonction $f(t,x)$ admette une partie principale (dépendant en général de t) relativement à une échelle de comparaison $\mathcal{E}$ (les limites étant prises suivant le filtre $\mathfrak{F}$). Dans ces conditions, la fonction $g(x)= \int_I f(t,x)dt$ admet-elle une partie principale relative à l'échelle $\mathcal{E}$, et comment peut-on obtenir cette partie principale ?

Nous n'aborderons que des cas particuliers de ce problème.

Soit $\varphi(t,x)$ la partie principale de $f(t,x)$ pour une valeur donnée de t ; supposons d'abord que, pour tout x appartenant à un ensemble du filtre $\mathfrak{F}$, la fonction de t, $\varphi(t,x)$ soit positive et continue dans I, et que l'intégrale $\int_I \varphi(t,x)dt$ existe ; dans ces conditions, l'intégrale $\int_I \varphi(t,x)dt$ est-elle équivalente à l'intégrale donnée $g(x)$? Par hypothèse, on peut écrire $f(t,x)=\varphi(t,x)(1+\varepsilon(t,x))$, et pour chaque valeur de $t \in I$, $\varepsilon(t,x)$ tend vers 0 suivant $\mathfrak{F}$. Si I est compact et si $\varepsilon(t,x)$ tend vers 0 suivant $\mathfrak{F}$, uniformément pour t variant dans I, pour tout $\delta > 0$, existe un ensemble M du filtre $\mathfrak{F}$ tel que, pour $x \in M$ et $t \in I$ on ait $|\varepsilon(t,x)| \leq \delta$; on en déduit $\left|\int_I f(t,x)dt - \int_I \varphi(t,x)dt\right| \leq \delta \int_I \varphi(t,x)dt$ ce qui prouve que, dans ce cas, $\int_I \varphi(t,x)dt$ est équivalente à $g(x)$. Il en est encore de même si on suppose que les intégrales $\int_I f(t,x)dt$ et $\int_I \varphi(t,x)dt$ sont impropres, mais <u>uniformément convergentes</u> lorsque x varie dans un ensemble du filtre $\mathfrak{F}$, si $\varepsilon(t,x)$ tend vers 0 suivant $\mathfrak{F}$, uniformément pour t variant dans tout intervalle compact contenu dans I , et enfin si $\int_I \varphi(t,x)dt$ ne tend pas vers 0 suivant $\mathfrak{F}$. En effet, pour tout $\delta > 0$, il existe par hypothèse un intervalle compact J contenu dans I , tel que $\left|\int_I f(t,x)dt - \int_J f(t,x)dt\right| \leqslant \delta^2$, et $\left|\int_I \varphi(t,x)dt - \int_J \varphi(t,x)dt\right| \leqslant \delta^2$ pour tout x d'un ensemble M du filtre $\mathfrak{F}$; d'autre part, il existe un ensemble $N \subset M$ du filtre $\mathfrak{F}$ tel que, pour tout $t \in J$, $|\varepsilon(t,x)| \leqslant \delta$ et par suite $\left|\int_J f(t,x)dt - \int_J \varphi(t,x)dt\right| \leqslant \delta \int_J \varphi(t,x)dt \leqslant \delta \int_I \varphi(t,x)dt$; on en déduit $\left|\int_I f(t,x)dt - \int_I \varphi(t,x)dt\right| \leqslant \delta \int_I \varphi(t,x)dt + 2\delta^2$; si δ a été pris assez petit, il existe un ensemble P de $\mathfrak{F}$ tel que, pour $x \in P$, on ait $\int_I \varphi(t,x)dt \geqslant \delta$, donc, pour $x \in P$, on aura $\left|\int_I f(t,x)dt - \int_I \varphi(t,x)dt\right| \leqslant 3\delta \int_I \varphi(t,x)dt$, ce qui démontre la proposition.

<u>Exemple</u>.- Evaluons la partie principale de la fonction $g(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t+x}\,dt$ lorsque x tend vers $+\infty$; on peut écrire $xg(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}dt}{1+\frac{t}{x}}$ et l'intégrale du second membre est uniformément convergente pour $x > 1$; l'application de la proposition précédente montre que cette intégrale tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$, donc $g(x) \sim \frac{1}{x}$; on verrait aisément qu'on a pour g le développement asymptotique

$$g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \ldots + (-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

Nous allons nous limiter dans ce qui suit au cas où $\mathfrak{F}$ est la trace sur $\mathbb{R}$ du filtre des voisinages de $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, et où $\mathcal{E}$ est l'échelle de comparaison formée de fonctions (H) , définie dans l'Appendice I, n° 9 . Si la partie principale $\varphi(t,x)$ de $f(t,x)$ est de la forme $a(t)\varphi_0(x)$, où $\varphi_0 \in \mathcal{E}$, on a aussitôt comme partie principale de $g(x)=\int_I f(t,x)dt$, la fonction $\varphi_0(x)\int_I a(t)dt$ à condition qu'on puisse appliquer les propositions démontrées ci-dessus ; l'évaluation de la partie principale de $\int_I \varphi(t,x)$ ne présente donc dans ce cas aucune difficulté.

Il en est autrement lorsque la partie principale de $f(t,x)$ n'est pas la même (à un simple facteur près, dépendant de t) pour toutes les valeurs de t ; on rencontrera déjà cette difficulté lorsque, pour chaque t, (t,x) est de la forme $be^{a_1\varphi_1(x)+..+a_k\varphi_k(x)}$ où les $\varphi_i(x)$ sont des fonctions de l'échelle $\mathcal{E}_0$ (loc. cit.), mais où b et les a_i <u>dépendent de</u> t. Nous allons nous borner dans ce qui suit au cas le plus simple, celui où $\varphi(t,x)=h(t)e^{a(t)x}$, où $h(t)\geqslant 0$ dans I ; nous allons voir que, suivant la nature des fonctions $a(t)$ et $h(t)$, la partie principale de $g(x)=\int_I \varphi(t,x)dt$ a des formes très différentes.

2. <u>Comportement de l'intégrale</u> $\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}h(t)dt$ <u>pour x tendant vers</u> $+\infty$ $(h(t)\geqslant 0)$

Nous commencerons par examiner le cas particulier où $a(t)=t$; on peut toujours supposer que l'intervalle I est la droite $\mathbb{R}$ tout entière, en remplaçant $h(t)$ par 0 aux points où cette fonction n'est pas définie ; nous nous bornerons en outre au cas où $h(t)$ est règlée dans tout intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Cela étant, nous allons voir que le comportement de $g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}h(t)dt$ ne dépend que du comportement de $h(t)$ <u>au voisinage d'un certain point</u>. De façon précise :

<u>Proposition 1. Pour tout nombre</u> α <u>tel que</u> $h(t)$ <u>ne soit pas identiquement nulle dans l'intervalle</u> $[\alpha, +\infty[$ <u>, on a</u>

$$(1)\qquad \int_{-\infty}^{\alpha} e^{xt}h(t)dt \prec \int_{\alpha}^{\infty} e^{xt}h(t)dt$$

L'intégrale $g(x)$ est supposée convergente pour tout x (si elle l'est pour $x=x_0$, elle l'est a fortiori pour $x<x_0$) ; on a donc

(th. de la moyenne), $\int_{-\infty}^{\alpha} e^{xt}h(t)dt = \int_{-\infty}^{\alpha} e^{(x-x_0)t}e^{x_0t}h(t)dt \leqslant e^{\alpha(x-x_0)}$ $\int_{-\infty}^{\alpha} e^{x_0t}h(t)dt$, autrement dit, $\int_{-\infty}^{\alpha} e^{xt}h(t)dt \precsim e^{\alpha x}$. D'autre part, supposons que, pour un nombre $\beta > \alpha$, on ait $h(\beta-) > 0$; il existe donc un nombre $c > 0$ et un intervalle $[\gamma, \beta]$ contenu dans $[\alpha, +\infty[$, tel que $h(t) \geqslant c$ dans cet intervalle ; d'où $\int_{\alpha}^{\infty} e^{xt}h(t)dt \geqslant c\int_{\gamma}^{\beta} e^{xt}dt =$ $= \frac{c}{x}(e^{\beta x} - e^{\gamma x}) \succ e^{\alpha x}$, ce qui établit (1) .

Soit $\lambda(h)$ le plus petit des nombres μ tels que $h(t-)$ soit identiquement nul dans l'intervalle $]\mu, +\infty[$ (s'il n'existe aucun nombre fini ayant cette propriété, nous prendrons $\lambda(h) = +\infty$). Avec cette notation :

<u>Corollaire 1</u>. <u>Si</u> $\lambda(h_1) \leqslant \lambda(h_2)$ <u>et si</u> $h_1(t) \prec h_2(t)$ <u>pour t tendant vers</u> $\lambda = \lambda(h_2)$ <u>à gauche, on a</u>

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt}h_1(t)dt \prec \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt}h_2(t)dt$$

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe par hypothèse un nombre $\alpha < \lambda$ tel que $h_1(t) \leqslant \varepsilon h_2(t)$ pour $\alpha \leqslant t \leqslant \lambda$; on en déduit que pour tout $x > 0$

$$\int_{\alpha}^{\infty} e^{xt}h_1(t)dt \leqslant \varepsilon\int_{\alpha}^{\infty} e^{xt}h_2(t)dt \leqslant \varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt}h_2(t)dt$$

D'autre part, comme $h_2(t-)$ n'est identiquement nul dans aucun intervalle d'extrémité λ , on a, d'après la démonstration de la prop.1 , $\int_{-\infty}^{\alpha} e^{xt}h_1(t)dt \precsim e^{\alpha x}$, et $\int_{\alpha}^{\infty} e^{xt}h_2(t)dt \succ e^{\alpha x}$; donc pour x assez grand, $\int_{-\infty}^{\alpha} e^{xt}h_1(t)dt \leqslant \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}h_2(t)dt$, d'où

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}h_1(t)dt \leqslant 2\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}h_2(t)dt$$

ce qui établit le corollaire.

<u>Corollaire 2</u>. <u>Si</u> $\lambda(h_1) = \lambda(h_2) = \lambda$, <u>et si</u> $h_1 \sim h_2$ <u>pour t tendant à gauche vers</u> λ , <u>on a</u>

(3) $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}h_1(t)dt \sim \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}h_2(t)dt$$

C'est une conséquence immédiate du corollaire 1, appliqué aux fonctions $|h_1-h_2|$ et h_2.

Si on se limite aux fonctions h ayant une <u>partie principale</u>, lorsque t tend vers $\lambda(h)$ à gauche, relativement à l'échelle de comparaison $\mathcal{E}$ (correspondant au point $\lambda(h)$), on voit que l'évaluation de la partie principale de $g(x)$ est ramenée au cas où h est une fonction <u>de l'échelle</u> $\mathcal{E}$. Nous distinguerons deux cas, suivant que le nombre $\lambda(h)$ est fini ou égal à $+\infty$.

<u>Remarque</u>.- On peut parfois obtenir une partie principale de $g(x)$ même lorsque h n'a pas de partie principale au voisinage (à gauche) de $\lambda(h)$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}h(t)dt$ étant convergente pour tout x par hypothèse, et en particulier pour $x=0$, posons $h_1(t)=-\int_t^{\infty} h(u)du$ nous allons voir que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}h_1(t)dt$ est convergente pour tout x, et que

$$g(x) = -x\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}h_1(t)dt \tag{4}$$

En effet, on peut écrire, d'après la formule d'intégration par parties, pour $u>v$

$$\int_v^u e^{xt}h(t)dt = e^{xu}h_1(u)-e^{xv}h_1(v)-x\int_v^u e^{xt}h_1(t)dt$$

Lorsque v tend vers $-\infty$, $h_1(v)$ tend par hypothèse vers une limite finie ; donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{u} e^{xt}h_1(t)dt$ est convergente et on a

$$\int_{-\infty}^{u} e^{xt}h(t)dt = e^{xu}h_1(u)-x\int_{-\infty}^{u} e^{xt}h_1(t)dt \tag{5}$$

Posons $\psi(u)=e^{-xu}\int_{-\infty}^{u} e^{xt}h_1(t)dt$; la fonction ψ admet une dérivée égale à $-xe^{-xu}\int_{-\infty}^{u} e^{xt}h_1(t)dt+h_1(u)$, c'est-à-dire à $e^{-xu}\int_{-\infty}^{u} e^{xt}h(t)dt$ d'après (5). D'après l'hypothèse, on a donc $\psi'(u)\sim ae^{-xu}$, en posant $a=\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}h(t)dt$, d'où $\psi(u)\sim -\frac{1}{x}ae^{-xu}$ et en multipliant cette relation par e^{xu}, on en déduit (4).

On voit donc que l'on obtiendra une partie principale de $g(x)$ si si $h_1(t)$ admet une partie principale, ce qui peut fort bien avoir lieu même lorsque $h(t)$ n'en admet pas (cf. chap. III, §3, n°2). Le procédé peut se répéter, et on aura une partie principale de $g(x)$ lorsqu'une primitive d'ordre quelconque de $h(t)$ admettra une partie principale.

3. L'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-xt}h(t)dt$ pour $h \in \mathcal{E}$ (au voisinage de 0). Lorsque $\lambda(h)=t_0$ est fini, comme $h(t)=0$ pour $t>t_0$, le changement de variable $u=t_0-t$ ramène l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}h(t)dt$ à la forme $e^{t_0x}\int_0^{\infty} e^{-xu}h(t_0-u)du$; il suffit donc d'étudier l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-xt}h(t)dt$ pour les différentes fonctions h de l'échelle $\mathcal{E}$ (correspondant à t tendant vers 0 par valeurs >0).

Proposition 2. Si $h(t) \sim at^{\alpha}$ $(\alpha > -1)$ pour t tendant vers 0, on a

$$g(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt}h(t)dt \sim a\,\frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}} \tag{6}$$

pour x tendant vers $+\infty$.

En effet, dans l'intégrale $\int^{\infty} e^{-xt}t^{\alpha}dt$, posons $xt=u$, il vient

$$\int_0^{\infty} e^{-xt}t^{\alpha}dt = \frac{1}{x^{\alpha+1}}\int_0^{\infty} e^{-u}u^{\alpha}du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}}.$$

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 3. Soit $\varphi(t)$ une fonction règlée définie dans un intervalle $[a,b[$, et possédant les propriétés suivantes :

1° il existe un intervalle $]a,a+\lambda[$ dans lequel φ est strictement croissante, dérivable, et telle que $\varphi'(t) \sim \mu(t-a)^{\alpha}$ (avec $\alpha > -1$) pour t tendant vers a à droite ;

2° pour $t \geq a+\lambda$, on a $\varphi(t) \geq \varphi(a+\lambda)$.

Soit $\psi(t)$ une fonction règlée ≥ 0 dans $]a,b[$ telle que, pour t tendant vers a, on ait $\psi(t) \sim k(t-a)^{\beta}$ $(\beta > -1)$, et que l'intégrale $\int_a^b e^{-x\varphi(t)}\psi(t)dt$ soit convergente pour tout x assez grand.

Dans ces conditions, on a, pour x tendant vers $+\infty$

(7) $$\int_a^b e^{-x\varphi(t)}\psi(t)dt \sim k(\alpha+1)^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha+1}}\,\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha+1}\right) e^{-x\varphi(a)} \frac{1}{(\mu x)^{\frac{\beta+1}{\alpha+1}}}$$

En mettant en facteur $e^{-x\varphi(a)}$ dans l'intégrale, on peut se ramener au cas où $\varphi(a)=0$, donc $\varphi(t)\sim \frac{\mu}{\alpha+1}(t-a)^{\alpha+1}$.

Si l'intégrale $\int_{a+\lambda}^b e^{-x\varphi(t)}\psi(t)dt$ est convergente pour $x \geqslant x_0$, on peut l'écrire $\int_{a+\lambda}^b e^{-(x-x_0)\varphi(t)}e^{-x_0\varphi(t)}\psi(t)dt$; comme $e^{-(x-x_0)\varphi(t)} \leqslant e^{-(x-x_0)\varphi(a+\lambda)}$ pour $t \geqslant a+\lambda$, on a

(8) $$\int_{a+\lambda}^b e^{-x\varphi(t)}\psi(t)dt = O(e^{-x\varphi(a+\lambda)})$$

D'autre part, dans l'intégrale $\int_a^{a+\lambda} e^{-x\varphi(t)}\psi(t)dt$, posons $\varphi(t)=u$. L'intégrale devient $\int_0^{\varphi(a+\lambda)} e^{-xu}\frac{\psi(t)}{\varphi'(t)}du$, où il faut remplacer t par la fonction réciproque de φ (vérifiant donc $u=\varphi(t)$). Comme, pour t tendant vers a, on a $u \sim \frac{\mu}{\alpha+1}(t-a)^{\alpha+1}$, on aura, pour u tendant vers 0 , $t-a \sim \left(\frac{\alpha+1}{\mu}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} u^{\frac{1}{\alpha+1}}$, donc $\frac{\psi(t)}{\varphi'(t)} \sim \frac{k}{\mu}(t-a)^{\beta-\alpha} \sim \frac{k}{\mu}\left(\frac{\alpha+1}{\mu}u\right)^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha+1}}$

La formule (7) résulte par suite de l'application de (6), en tenant compte de (8) .

La prop.3 permettra en général d'avoir la partie principale d'une intégrale de la forme $\int_a^b e^{-x\varphi(t)}\psi(t)dt$ lorsque, dans l'intervalle $]a,b[$, $\psi(t)$ est une fonction règlée $\geqslant 0$, et $\varphi(t)$ une fonction règlée atteignant son <u>minimum absolu</u> en un nombre <u>fini</u> de points, de sorte que $]a,b[$ soit une juxtaposition d'un nombre fini d'intervalles dans chacun desquels $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ (ou $\varphi(-t)$ et $\psi(-t)$) satisfassent aux conditions de la prop.3 .

Nous allons maintenant, à l'aide de la prop.2, étudier l'intégrale $\int_0^\infty e^{-xt}h(t)dt$ lorsque h est une fonction quelconque de $\mathcal{E}$; nous distinguerons deux cas suivant que h est d'ordre fini ou d'ordre infini par rapport à t .

A . <u>h est d'ordre fini</u> $\alpha > -1$ <u>par rapport à t</u> .

On peut alors écrire $h(t)=t^{\alpha}h_1(t)$, où h_1 est d'ordre 0 par rapport à t (autrement dit, $|\log h_1| \prec \log \frac{1}{t}$). Dans ces conditions :

<u>Proposition 4</u>. <u>Si</u> $h(t)=t^{\alpha}h_1(t)$, <u>où</u> h_1 <u>est d'ordre 0 par rapport à</u> t , <u>et</u> $\alpha > -1$, <u>on a</u>

$$g(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt}h(t)dt \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}}\, h_1(\tfrac{1}{x}) \tag{9}$$

<u>pour x tendant vers</u> $+\infty$.

Avec le changement de variables $xt=u$, on a

$$g(x) = \frac{1}{x^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} e^{-u}u^{\alpha}h_1(\tfrac{u}{x})du$$

Posons $\log h_1(e^{-z})=\varphi(z)$; par hypothèse, on a $\varphi(z) \prec z$ lorsque z tend vers $+\infty$, d'où $\varphi'(z) \prec 1$.

Le nombre $\varepsilon > 0$ étant donné arbitrairement, décomposons l'intervalle d'intégration en deux intervalles $[0,\mu]$ et $[\mu,+\infty[$, μ étant un nombre indépendant de x qui sera choisi plus loin.

Posons $x=e^z$, $u=e^v$, on peut écrire $h_1(\frac{u}{x})= e^{\varphi(z-v)}$; on peut écrire $\varphi(z-v)=\varphi(z)-v\varphi'(z-\theta v)$ avec $0<\theta<1$; dès que z sera assez grand on aura $|\varphi'(z-\theta v)| < \varepsilon$ pour tout v dans l'intervalle $]-\infty, \log\mu]$, donc l'intégrale $\int_0^{\mu} e^{-u}u^{\alpha}h_1(\frac{u}{x})du$ sera comprise entre

$$h_1(\tfrac{1}{x})\int_0^{\mu} e^{-u}u^{\alpha-\varepsilon}du \qquad \text{et} \qquad h_1(\tfrac{1}{x})\int_0^{\mu} e^{-u}u^{\alpha+\varepsilon}du$$

et les deux intégrales qui figurent dans ces expressions diffèrent d'aussi peu qu'on veut de $\Gamma(\alpha+1)$ si ε a été pris assez petit et μ assez grand.

D'autre part, on peut remplacer $h(t)$ par 1 dans un intervalle $[a,+\infty[$ $(a>0)$ sans changer la partie principale de $g(x)$.
Comme $\varphi'(z)$ tend vers 0 lorsque z tend vers $+\infty$, $\varphi'(z)$ est bornée dans tout l'intervalle $]-\infty,+\infty[$; il existe donc une constante $\beta > 0$, indépendante de μ , telle que $|\varphi(z-v)-\varphi(z)| \leq \beta v$ quels que

soient z et $v>0$, et par suite on a $\left|e^{\varphi(z-v)-\varphi(z)}\right| \leqslant u^{\beta}$ pour $u \geqslant 1$.

On aura donc

$$e^{-u}u^{\alpha}h_1\left(\frac{u}{x}\right) \leqslant h_1\left(\frac{1}{x}\right)e^{-u}u^{\alpha+\beta}$$

pour $u>1$. Par suite, on a pour $\mu>1$

$$\int_{\mu}^{\infty} e^{-u}u^{\alpha}h_1\left(\frac{u}{x}\right)du \leqslant h_1\left(\frac{1}{x}\right)\int_{\mu}^{\infty} e^{-u}u^{\alpha+\beta}du$$

et le facteur de $h_1\left(\frac{1}{x}\right)$ est aussi petit qu'on veut pourvu qu'on ait pris μ assez grand, ce qui achève de démontrer la proposition.

<u>Remarque</u>.- La prop.4 permet aussi d'élucider le cas où h est d'ordre -1 par rapport à t , l'intégrale $\int_0^t h(t)dt$ étant naturellement supposée convergente. Posons en effet $H(t)=\int_0^t h(u)du$; en intégrant par parties, on a

$$g(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt}h(t)dt = x\int_0^{\infty} e^{-xt}H(t)dt$$

car on peut toujours supposer h nul, et par suite H bornée à partir d'une certaine valeur de t . On est donc ramené au même problème où h est remplacé par H ; comme H est d'ordre 0 par rapport à t , tout revient, d'après la prop.4, à trouver la partie principale de H lorsque t tend vers 0 , ce qu'on sait toujours faire (Appendice I).

<u>B. h est d'ordre $-\infty$ par rapport à t</u> .

On peut écrire $h(t)=e^{-\varphi(t)}$, où $\varphi(t)$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers 0 , et $\varphi(t) \succ \log\frac{1}{t}$. Dans ces conditions :

<u>Proposition 5</u>. <u>On a</u>

$$g(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt}h(t)dt \sim e^{-\varphi(y)+y\varphi'(y)}\sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(y)}} \tag{10}$$

<u>lorsque x tend vers</u> $+\infty$, y <u>étant déterminé en fonction de x par</u>

$$\varphi'(y)=-x . \tag{11}$$

En effet, faisons dans $g(x)$ le changement de variable $t=y(1+v)$ et remplaçons par ailleurs x par sa valeur tirée de (11) ; il vient

$$g(x)=y\int_{-1}^{\infty} e^{y\varphi'(y)(1+v)-\varphi(y+yv)}\,dv$$
$$= ye^{-\varphi(y)+y\varphi'(y)}\int_{-1}^{\infty} e^{\varphi(y)+y\varphi'(y)v-\varphi(y+yv)}\,dv$$

Soit α une fonction de y tendant vers 0 avec y , et que nous déterminerons plus loin de façon plus précise ; nous décomposerons l'intégrale en trois intégrales prises dans les intervalles $[-1,-\alpha]$, $[-\alpha, +\alpha]$, $[\alpha,+\infty]$.

Etudions d'abord l'intégrale $\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{\varphi(y)+y\varphi'(y)v-\varphi(y+yv)}\,dv$. On peut écrire $\varphi(y+yv)-\varphi(y)-yv\varphi'(y)=\frac{1}{2}y^2v^2\varphi''(y+\theta yv)$ avec $0<\theta<1$. Posons $z=1/y$ et $\psi(z)=-\varphi'(y)$; l'hypothèse $\varphi(1/z)\succ \log z$ donne, en dérivant $\psi(z)\succ z$, donc $\psi'(z)\succ 1$; d'autre part, on a $\varphi''(y)=z^2\psi'(z)$ donc l'intégrale étudiée peut s'écrire

$$(12)\qquad \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-\frac{v^2}{2(1+\theta v)^2}\psi'\left(\frac{z}{1+\theta v}\right)}\,dv$$

$\psi'\left(\frac{z}{1+\theta v}\right)$ est compris entre $\psi'\left(z-\frac{\alpha z}{1-\alpha}\right)$ et $\psi'\left(z+\frac{\alpha z}{1-\alpha}\right)$; par hypothèse, on a $\frac{\alpha z}{1-\alpha}<1$; si en outre, on a $\alpha z<\frac{\psi'(z)}{\psi''(z)}$, on en déduira (Appendice I) que pour z assez grand (c'est-à-dire x assez grand) le rapport de $\psi'\left(\frac{z}{1+\theta v}\right)$ à $\psi'(z)$ est aussi voisin de 1 qu'on veut lorsque v varie de $-\alpha$ à α . Autrement dit, le nombre $\varepsilon>0$ étant donné arbitrairement, dès que x est assez grand, l'intégrale (12) est comprise entre les intégrales

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-(1+\varepsilon)\frac{\psi'(z)}{2}v^2}\,dv \quad \text{et} \quad \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-(1-\varepsilon)\frac{\psi'(z)}{2}v^2}\,dv$$

Supposons enfin que α soit tel que $\alpha\sqrt{\psi'(z)}$ tende vers $+\infty$ avec z ; les intégrales précédentes s'écrivant respectivement

$$\sqrt{\frac{2}{(1+\varepsilon)\psi'}}\int_{-\alpha\sqrt{\frac{(1+\varepsilon)\psi'}{2}}}^{\alpha\sqrt{\frac{(1+\varepsilon)\psi'}{2}}} e^{-w^2}\,dw \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{2}{(1-\varepsilon)\psi'}}\int_{-\alpha\sqrt{\frac{(1-\varepsilon)\psi'}{2}}}^{\alpha\sqrt{\frac{(1-\varepsilon)\psi'}{2}}} e^{-w^2}\,dw$$

on voit finalement que dès que z est assez grand, le rapport de l'intégrale (12) à $\sqrt{\frac{2\pi}{\psi'(z)}} = \frac{1}{y}\sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(y)}}$ est aussi voisin de 1 que l'on veut.

Pour que cette conclusion soit rigoureuse, il faut encore prouver qu'on peut trouver une fonction $\alpha(z)$ satisfaisant aux trois conditions imposées. Or, on satisfera à ces conditions en prenant par exemple $\alpha(z) = \frac{1}{\psi'^{\mu}}$, avec $0<\mu<\frac{1}{2}$; il suffit en effet de vérifier la relation $z\alpha < \frac{\psi'}{\psi''}$, c'est-à-dire $\frac{\psi''}{\psi'^{1+\mu}} < \frac{1}{z}$; or cette relation s'obtient par dérivation de $\frac{1}{\psi'^{\mu}} < \log z$, qui est évidente puisque $\psi'(z)$ tend vers $+\infty$.

Etudions maintenant l'intégrale étendue à l'intervalle $[\alpha, +\infty]$. Nous pouvons toujours supposer (en remplaçant au besoin φ par une constante à partir d'une certaine valeur de t) que $\varphi(t)$ est <u>convexe</u> dans l'intervalle $[0,+\infty[$ tout entier. Pour $v \geqslant \alpha$, on a donc

$$\varphi(y+yv) \geqslant \varphi(y+\alpha y)+y\varphi'(y+\alpha y)(v-\alpha)$$

On en déduit l'inégalité

$$\int_\alpha^{+\infty} e^{\varphi(y)+y\varphi'(y)v-\varphi(y+yv)}\,dv \leqslant e^{\varphi(y)-\varphi(y+\alpha y)+\alpha y\varphi'(y+\alpha y)}\int_\alpha^{+\infty} e^{y[\varphi'(y)-\varphi'(y+\alpha y)]v}\,dv$$

$$= \frac{1}{y[\varphi'(y+\alpha y)-\varphi'(y)]}\; e^{\varphi(y)+\alpha y\varphi'(y)-\varphi(y+\alpha y)}$$

ce qu'on peut encore écrire

$$\int_\alpha^{+\infty} e^{\varphi(y)+y\varphi'(y)v-\varphi(y+yv)}\,dv \leqslant \frac{e^{-\frac{\alpha^2y^2}{2}\varphi''(y+\theta\alpha y)}}{\alpha y^2\varphi''(y+\theta'\alpha y)}$$

avec $0<\theta<1$, $0<\theta<1$. D'après le choix de α , pour z assez grand, on aura aussi

$$\int_\alpha^{+\infty} e^{\varphi(y)+y\varphi'(y)v-\varphi(y+yv)}\,dv \leqslant \frac{e^{-(1-\varepsilon)\frac{\alpha^2y^2}{2}\varphi''(y)}}{(1-\varepsilon)\alpha y^2\varphi''(y)}$$

Or, le second membre est négligeable devant $\frac{1}{y\sqrt{\varphi''(y)}}$: cela revient en effet à voir que $\frac{e^{-(1-\varepsilon)\frac{\alpha^2y^2}{2}\varphi''(y)}}{\alpha y\sqrt{\varphi''(y)}}$ tend vers 0 ; or, $y\sqrt{\varphi''(y)}$ tend vers $+\infty$, et la fonction $e^{-(1-\varepsilon)w^2}$ est négligeable devant w lorsque w tend vers $+\infty$.

On montre de la même manière que l'intégrale étendue à l'intervalle $[-1,-\alpha]$ est négligeable devant l'intégrale étendue à $[-\alpha,\alpha]$, ce qui achève de démontrer la prop.5 .

4. <u>L'intégrale</u> $\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}h(t)dt$ <u>pour</u> $h \in \mathcal{E}$ (<u>au voisinage de</u> $+\infty$). Nous poserons $h(t)=e^{-\varphi(t)}$; pour que l'intégrale soit convergente pour toute valeur de x , il faut et il suffit que $\varphi(t) \succ t$. Alors :

<u>Proposition 6</u>. <u>On a</u>

(13) $$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}h(t)dt \sim e^{-\varphi(y)+y\varphi'(y)}\sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(y)}}$$

<u>lorsque</u> x <u>tend vers</u> $+\infty$, y <u>étant déterminé en fonction de</u> x <u>par</u>

(14) $$\varphi'(y)=x .$$

Faisons le changement de variable $t=y(1+v)$, et remplaçons x par $\varphi'(y)$; il vient

$$g(x)=y\int_{-\infty}^{+\infty} e^{y\varphi'(y)(1+v)-\varphi(y+yv)}dv = ye^{-\varphi(y)+y\varphi'(y)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\varphi(y)+y\varphi'(y)v-\varphi(y+yv)}dv$$

Soit α une fonction >0 de y tendant vers 0 avec $1/y$; décomposons l'intervalle d'intégration en les intervalles $]-\infty,-\alpha]$, $[-\alpha,\alpha]$, $[\alpha,+\infty]$. Dans le second intervalle, on a $\varphi(y+yv)-\varphi(y)-yv\varphi'(y) = \frac{1}{2}y^2v^2\varphi''(y+\theta yv)$ avec $0<\theta<1$. La fonction $\varphi''(y+\theta yv)$ est comprise entre $\varphi''(y-\alpha y)$ et $\varphi''(y+\alpha y)$; si α est prise de sorte que $y\alpha < \frac{\varphi''(y)}{\varphi'''(y)}$ le rapport de $\varphi''(y+\theta yv)$ à $\varphi''(y)$ est aussi voisin de 1 qu'on veut lorsque v varie de $-\alpha$ à $+\alpha$ dès que y est assez grand. De façon précise, le nombre $\varepsilon>0$ étant pris arbitrairement, l'intégrale

$\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{\varphi(y)+y\varphi'(y)v-\varphi(y+yv)}dv$ sera comprise entre les intégrales

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-(1+\varepsilon)\frac{y^2\varphi''(y)}{2}v^2}\,dv \quad \text{et} \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-(1-\varepsilon)\frac{y^2\varphi''(y)}{2}v^2}\,dv$$

dès que x (et par suite y) est assez grand. Si on suppose que α est telle que $\alpha y\sqrt{\varphi''(y)}$ tend vers $+\infty$ avec y, le même raisonnement que dans la prop.5 prouve que, pour x assez grand, le rapport de l'intégrale $\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{\varphi(y)+yv\varphi'(y)-\varphi(y+yv)}\,dv$ à $\frac{1}{y}\sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(y)}}$ est aussi voisin de 1 que l'on veut. Il faut toutefois vérifier que le choix de α est possible. De $\varphi(y) > y$ on déduit $\varphi'(y) > 1$, donc $\varphi''(y) > 1/y^2$; en prenant $\alpha(y) = \frac{1}{(y^2\varphi''(y))^{\mu}}$ avec $0 < \mu < \frac{1}{2}$, on aura bien $\alpha < 1$ et $y\alpha\sqrt{\varphi''(y)} > 1$; reste à montrer qu'on aura aussi $y\alpha < \frac{\varphi''}{\varphi'''}$, c'est-à-dire $\frac{\varphi'''}{\varphi''^{1+\mu}} < y^{2\mu-1}$; or, cette relation s'obtient par dérivation de $\frac{1}{\varphi''^{\mu}} < y^{2\mu}$ qui est vérifiée par hypothèse.

Etudions maintenant l'intégrale étendue à $[\alpha,+\infty[$ en procédant toujours comme dans la prop.5, la fonction φ étant supposée convexe dans tout l'intervalle $]-\infty,+\infty[$ (ce qu'on peut toujours faire en la remplaçant au besoin par une constante pour les valeurs de t inférieures à une certaine valeur). Pour $v \geqslant \alpha$, on a $\varphi(y+yv) \geqslant \varphi(y+\alpha y)+y\varphi'(y+\alpha y)(v-\alpha)$, et le raisonnement se poursuit comme dans la prop.5, sans aucune modification. On majore de même l'intégrale étendue à l'intervalle $]-\infty,-\alpha]$, et on arrive ainsi à la prop.6 .

<u>Exemples</u>. 1) Si $\varphi(t)=t^2$, on a $2y = x$, et la formule (13) donne

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt-t^2}\,dt \sim \sqrt{\pi}\; e^{\frac{x^2}{4}}$$

Ici l'intégrale $g(x)$ est non seulement équivalente, mais <u>égale</u> au second membre, car on peut l'écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{x^2}{4}-(\frac{x}{2}-t)^2}\,dt = e^{\frac{x^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du$$

2) Si $\varphi(t)=e^t$, on a $y=\log x$, d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt-e^t}\,dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\; e^{-x+x\log x} = \sqrt{2\pi}\; x^{x-\frac{1}{2}}\, e^{-x}$$

Cette formule redonne la formule de Stirling, car par le changement de variable $e^t=u$, l'intégrale devient

15

$$\int_0^\infty u^{x-1}\, e^{-u}\, du = \Gamma(x)$$

La méthode suivie dans les démonstrations des prop.5 et 6 est dite <u>méthode de Laplace</u> ou <u>méthode du col</u> ; elle consiste, comme on a pu le voir, à étudier l'intégrale étendue à un intervalle partiel, de longueur convenable, ayant pour milieu le point où la fonction intégrée <u>atteint son maximum</u>. Cette méthode est susceptible de s'appliquer à beaucoup d'autres intégrales dépendant d'un paramètre ; nous allons en voir un exemple dans le n° suivant (voir aussi exerc.).

<u>5. L'intégrale</u> $\int_0^\infty e^{-xt}h(t)\,dt$ <u>pour x tendant vers 0</u>. Dans tout ce qui précède l'intégrale $\int_I f(t,x)dt$ étudiée était telle que, pour la partie principale $\varphi(t,x)$ de $f(t,x)$, l'intégrale $\int_I \varphi(t,x)dt$ était convergente. Il se pose d'autres problèmes lorsque cette intégrale est <u>divergente</u>. Nous allons encore nous borner à un cas particulier, celui où $I=\left[0,+\infty\right]$, où $f(x,t)=e^{-xt}h(t)$, h étant une fonction réglée et <u>positive</u> dans I, et x tendant vers 0 par valeurs >0. Alors, pour tout $t\in I$, la partie principale de $f(t,x)$ est la constante (par rapport à x) $h(t)$; si l'intégrale $\int_0^\infty h(t)dt$ est convergente, le raisonnement du n°1 prouve que la partie principale de $\int_0^\infty e^{-xt}h(t)dt$ est la constante $\int_0^\infty h(t)dt$. Nous nous proposons d'obtenir une partie principale de l'intégrale $\int_0^\infty e^{-xt}h(t)dt$ lorsque l'intégrale $\int_0^\infty h(t)dt$ est <u>divergente</u> ; il faut naturellement supposer que, pour tout $x>0$, l'intégrale $\int_0^\infty e^{-xt}h(t)dt$ est <u>convergente</u>.

En premier lieu, on a la proposition analogue au cor.1 de la prop.1 :

<u>Proposition 7</u>. <u>Si</u> $h_1(t) \prec h_2(t)$ <u>pour t tendant vers</u> $+\infty$, <u>on a</u>

(15) $$\int_0^\infty e^{-xt}h_1(t)dt \prec \int_0^\infty e^{-xt}h_2(t)dt$$

Remarquons d'abord que, lorsque x tend vers 0, l'intégrale $\int_0^\infty e^{-xt}h(t)dt$ tend vers $+\infty$; en effet, pour tout nombre $k>0$, il existe par hypothèse un intervalle $[0,\alpha]$ tel que $\int_0^\alpha h(t)dt \geqslant k$; si x est assez petit pour que, dans l'intervalle $[0,\alpha]$, on ait $e^{-xt} \geqslant 1-\varepsilon$, on aura $\int_0^\infty e^{-xt}h(t)dt \geqslant \int_0^\alpha e^{-xt}h(t)dt \geqslant \cancel{e^{-xt}h(t)dt} \geqslant (1-\varepsilon)k$, quantité qui est arbitrairement grande.

Cela étant, si $h_1 \prec h_2$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un β tel que, pour $t \geqslant \beta$, $h_1(t) \leqslant \varepsilon h_2(t)$; on a donc

$$\int_0^\infty e^{-xt}h_1(t)dt \leqslant \varepsilon \int_0^\infty e^{-xt}h_2(t)dt + \int_0^\beta e^{-xt}(h_1(t)-\varepsilon h_2(t))dt$$

d'où

$$\frac{\int_0^\infty e^{-xt}h_1(t)dt}{\int_0^\infty e^{-xt}h_2(t)dt} \leqslant \varepsilon + \frac{\int_0^\beta e^{-xt}(h_1(t)-\varepsilon h_2(t))dt}{\int_0^\infty e^{-xt}h_2(t)dt}$$

Lorsque x tend vers 0, $\int_0^\beta e^{-xt}h_1(t)dt$ et $\int_0^\beta e^{-xt}h_2(t)dt$ tendent vers des limites finies, et $\int_0^\infty e^{-xt}h_2(t)dt$ tend vers $+\infty$; donc pour x assez petit, on aura

$$\int_0^\infty e^{-xt}h_1(t)dt \leqslant 2\varepsilon \int_0^\infty e^{-xt}h_2(t)dt$$

ce qui démontre la proposition.

<u>Corollaire</u>. <u>Si</u> $h_1 \sim h_2$, <u>on a</u>

$$\int_0^\infty e^{-xt}h_1(t)dt \sim \int_0^\infty e^{-xt}h_2(t)dt \tag{16}$$

Il suffit d'appliquer la prop.7 à $|h_1-h_2|$ et h_2.

Si on se limite aux fonctions h ayant une <u>partie principale</u> relativement à l'échelle de comparaison $\mathcal{E}$ (relative au point $+\infty$), on voit que la recherche de la partie principale de $\int_0^\infty e^{-xt}h(t)dt$ lorsque x tend vers 0, est ramenée au cas où h <u>appartient à</u> $\mathcal{E}$.

<u>Remarque</u>.- Ici encore, on peut avoir une partie principale pour $g(x)$ lorsque la fonction $h \geqslant 0$ n'a pas de partie principale, mais que sa primitive $h_1(t) = \int_0^t h(u)du$ en a une. En effet, on a, en intégrant par parties

(17) $$\int_0^t e^{-xu}h(u)du = e^{-xt}h_1(t)+x\int_0^t e^{-xu}h_1(u)du$$

On tire d'abord de cette relation, compte tenu de ce que h et h_1 sont $\geqslant 0$, que

$$e^{-xt}h_1(t) \leqslant \int_0^t e^{-xu}h(u)du$$

Comme l'intégrale du second membre est convergente lorsque t tend vers $+\infty$, on voit qu'il existe une constante a (dépendant de x) telle que $h_1(t) \leqslant ae^{xt}$. Comme cette relation a lieu pour tout x assez petit, on voit que $h_1(t)e^{-xt}$ tend vers 0 pour tout $x>0$, lorsque t tend vers $+\infty$. Faisons alors tendre t vers $+\infty$ dans (17), on voit que l'intégrale $\int_0^\infty e^{-xt}h_1(t)dt$ est convergente, et que

(18) $$g(x)=x\int_0^\infty e^{-xt}h_1(t)dt$$

d'où le résultat annoncé.

Pour étudier l'intégrale $\int_0^\infty e^{-xt}h(t)dt$ lorsque $h\in\mathcal{E}$, nous distinguerons deux cas suivant que h est d'ordre fini ou d'ordre infini par rapport à t .

A . <u>h est d'ordre fini α par rapport à t</u> .

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(t)dt$ est par hypothèse divergente, on a nécessairement $\alpha \geqslant -1$. Nous supposerons d'abord que $\alpha > -1$. On peut alors écrire $h(t)=t^\alpha h_1(t)$, où h_1 est d'ordre 0 par rapport à t . Dans ces conditions :

<u>Proposition 8</u>. <u>Si</u> $h(t)=t^\alpha h_1(t)$, <u>où</u> h_1 <u>est d'ordre 0 par rapport à</u> t , <u>et</u> $\alpha > -1$, <u>on a</u>

(19) $$g(x) = \int_0^\infty e^{-xt}h(t)dt \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}}h_1(\tfrac{1}{x})$$

<u>pour x tendant vers 0</u> .

En effet, avec le changement de variable $xt=u$, on a

$$g(x) = \frac{1}{x^{\alpha+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^\alpha h_1(\tfrac{u}{x})du$$

Posons $h_1(t)=e^{\varphi(t)}$; par hypothèse, on a $\varphi \prec \log t$, donc si on pose $\log t=v$ et $\varphi(e^v)=\psi(v)$, on aura $\psi \prec v$, d'où en dérivant $\psi' \prec 1$. Cela étant, le nombre $\varepsilon > 0$ étant donné arbitrairement, nous allons décomposer l'intervalle d'intégration en deux intervalles $[0,\lambda]$ et $[\lambda,+\infty[$, λ étant un nombre indépendant de x qui sera choisi plus loin.

Si on pose $y=\log\frac{1}{x}$, $w=\log u$, on a, dans l'intervalle $[\log\lambda,+\infty[$ $h_1(\frac{u}{x})=e^{\psi(y+w)}$ et $\psi(y+w)=\psi(y)+w\psi'(y+\theta w)$ avec $0<\theta<1$. Dès que y est assez grand, on aura $|\psi'(y+\theta w)| \leqslant \varepsilon$ pour tout w dans l'intervalle $[\log\lambda,+\infty[$ donc l'intégrale $\int_\lambda^\infty e^{-u}u^\alpha h_1(\frac{u}{x})du$ sera comprise entre les intégrales

$$h_1(\tfrac{1}{x})\int_\lambda^\infty e^{-u}u^{\alpha-\varepsilon}du \quad \text{et} \quad h_1(\tfrac{1}{x})\int_\lambda^\infty e^{-u}u^{\alpha+\varepsilon}du$$

et les deux intégrales qui figurent dans ces expressions diffèrent d'aussi peu qu'on veut de $\Gamma(\alpha+1)$ si ε et λ ont été pris assez petits.

On a d'autre part

$$\int_0^\lambda e^{-u}u^\alpha h_1(\tfrac{u}{x})du \leqslant \int_0^\lambda u^\alpha h_1(\tfrac{u}{x})du = x^{\alpha+1}\int_0^{\frac{\lambda}{x}} h(t)dt$$

Comme h est d'ordre $\alpha \neq -1$, on a (Appendice 1)

$$\int_0^y h(t)dt \sim \frac{1}{\alpha+1}\, yh(y)$$

lorsque y tend vers $+\infty$, donc, lorsque x tend vers 0

$$x^{\alpha+1}\int_0^{\frac{\lambda}{x}} h(t)dt \sim \frac{\lambda^{\alpha+1}}{\alpha+1}\, h_1(\tfrac{\lambda}{x})$$

Or, pour λ fixe, le rapport $h_1(\frac{\lambda}{x})/h_1(\frac{1}{x})$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0 ; on peut donc prendre λ assez petit, puis x assez petit pour que le rapport de $\int_0^\lambda e^{-u}u^\alpha h_1(\frac{u}{x})du$ à $h_1(\frac{1}{x})$ soit arbitrairement petit, ce qui démontre la proposition a .

Ici encore, ce résultat permet d'élucider aussi le cas où h est d'ordre -1 par rapport à t , l'intégrale $\int_0^\infty h(t)dt$ étant toujours supposée divergente. Il suffit d'utiliser la formule (18) en en remarquant que dans ce cas la primitive $\int_0^t h(u)du$ est d'ordre 0 par rapport à t , et qu'on sait trouver sa partie principale d'après l'Appendice I .

<u>B.</u> <u>h est d'ordre</u> $+\infty$ <u>par rapport à t</u> .

Ecrivons $h(t)=e^{\varphi}(t)$, $\varphi(t)$ tendant vers $+\infty$ avec t . Par hypothèse, on a $\varphi(t) > \log t$; d'autre part, comme l'intégrale $\int_0^\infty e^{-xt}h(t)dt$ est supposée convergente pour tout $x > 0$, on a nécessairement $\varphi(t) < t$.

Dans ces conditions :

<u>Proposition 9. On a</u>

$$(20) \qquad g(x) = \int_0^\infty e^{-xt}h(t)dt \sim e^{\varphi(y)-y\varphi'(y)} \sqrt{\frac{2\pi}{-\varphi''(y)}}$$

<u>lorsque</u> x <u>tend vers</u> 0 , y <u>étant déterminé en fonction de</u> x <u>par</u>

$$(21) \qquad \varphi'(y) = x .$$

Notons d'abord qu'en vertu de $\varphi(t) < t$, on a $\varphi' < 1$, donc y tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 . Faisons le changement de variables $t=y(1+v)$, et remplaçons x par $\varphi'(y)$; il vient

$$g(x)=y\int_{-1}^{+\infty} e^{\varphi(y+yv)-y\varphi'(y)(1+v)}dv = ye^{\varphi(y)-y\varphi'(y)}\int_{-1}^{+\infty} e^{\varphi(y+yv)-\varphi(y)-yv\varphi'(y)}dv$$

Cela étant, on procédera comme dans la prop.6 en décomposant l'intervalle d'intégration en trois autres : $[-1,-\alpha]$, $[-\alpha,+\alpha]$, $[+\alpha,+\infty[$, α étant une fonction de y tendant vers 0 avec $1/y$. Dans le second intervalle, on écrit $\varphi(y+yv)-\varphi(y)-yv\varphi'(y)=\frac{1}{2}y^2v^2\varphi''(y+\theta yv)$ avec $0<\theta<1$; on notera que φ' tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, donc φ'' est négative pour t assez grand ; d'autre part, de la relation $\varphi(t) > \log t$ on tire $\varphi'(t) > 1/t$, d'où $\varphi''(t) > 1/t^2$. On voit alors comme dans la prop.6 que le rapport de l'intégrale $\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{\varphi(y+yv)-\varphi(y)-yv\varphi'(y)} dw$ à $\frac{1}{y}\sqrt{\frac{2\pi}{-\varphi''(y)}}$ est aussi voisin de 1 qu'on veut dès que y est assez grand, pourvu qu'on ait pu choisir α de sorte que $\alpha y\sqrt{-\varphi''(y)}$ tende vers $+\infty$, et que $\alpha y < \frac{\varphi''}{\varphi'''}$; on vérifie sans peine que ce choix est possible, en prenant par exemple $\alpha = \frac{1}{(-y\,\varphi'')^{\mu}}$

avec $0 < \mu < \frac{1}{2}$.

Pour étudier l'intégrale étendue à l'intervalle $[a, +\infty[$, il faut remarquer qu'ici la fonction φ est <u>concave</u> pour t assez grand, et peut par suite être supposée concave pour tout t , d'après le cor. de la prop.7 . On aura donc, pour $v \geqslant a$, $\varphi(y+yv) \leqslant \varphi(y+ay)+(v-a)y\varphi'(y+ay)$; cela étant, on termine le raisonnement comme dans la prop.5 , et on traite de même l'intégrale étendue à $[-1,-a]$, achevant ainsi la démonstration de la formule (20) .

<u>Exemple</u>. Cherchons la partie principale de

$$f(x) = \int_1^\infty e^{-x(\log t)^2}\, dt$$

lorsque x tend vers 0 . En posant $(\log t)^2 = u$, l'intégrale s'écrit

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-xu+\sqrt{u}-\log\sqrt{u}}\, du$$

et on est donc ramené à la forme (20), avec $\varphi(u) = \sqrt{u} - \log\sqrt{u}$. La relation $\varphi'(y)=x$ donne en développant au voisinage de $x=0$ $\sqrt{y} = \frac{1}{2x} - 1 + ..$ les termes non écrits étant d'ordre 1 au moins. D'autre part, on a $\varphi(y)-y\varphi'(y) = \frac{1}{2}\sqrt{y} - \log\sqrt{y} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{2}$, ce qui donne le développement en fonction de x

$$\varphi(y)-y\varphi'(y) = \frac{1}{4x} + \log 2x + \dots$$

les termes non écrits tendant vers 0 avec x. Comme d'autre part, on a $\varphi''(y) = -\frac{1}{4y^{3/2}} + \frac{1}{2y^2} \sim -2x^3$, la formule (20) donne finalement

(22) $$f(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{\frac{1}{4x}}$$

On peut ici obtenir plus rapidement le résultat par une autre voie. Posons log t=v dans l'intégrale, il vient

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xv^2+v} dv = e^{\frac{1}{4x}}\int_0^\infty e^{-\left(\sqrt{x}\, v - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dv$$

ou, en posant $w = \sqrt{x}\, v - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{\frac{1}{4x}} \int_{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}^{\infty} e^{-w^2} dw \sim \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{\frac{1}{4x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2} dw = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{\frac{1}{4x}}$$

Exercices.- 1) Soit α un nombre fixe >0, $h(t)$ une fonction $\geqslant 0$ dans $\left[\alpha,+\infty\right[$, telle que l'intégrale $\int_\alpha^\infty h(t)dt$ soit divergente, mais que l'intégrale $\int_\alpha^\infty \frac{h(t)}{t}\, dt$ soit convergente. On considère la fonction de $x>0$

$$f(x) = \int_\alpha^\infty \frac{h(t)dt}{1+xt}$$

lorsque x tend vers 0 .

a) Montrer que si $h_1 \prec h_2$ (resp. $h_1 \sim h_2$) lorsque t tend vers $+\infty$, on a $f_1(x) \prec f_2(x)$ (resp. $f_1(x) \sim f_2(x)$) lorsque x tend vers 0 .

b) On suppose que h appartient à l'échelle $\mathcal{E}$ relative au voisinage de $x=\infty$; h est donc d'ordre $-a$ par rapport à t , avec $0<a<1$; montrer que l'on a

$$f(x) \sim \frac{\pi}{\sin a\pi}\, \frac{h(\frac{1}{x})}{x}$$

(décomposer l'intervalle d'intégration en deux autres par le point $\frac{\lambda}{x}$, où λ est indépendant de x , mais arbitrairement petit, et raisonner comme dans la prop. 8).

2) Soit $\varphi(t)$ une fonction >0 de l'échelle $\mathcal{E}$ au voisinage de $+\infty$, telle que $\varphi(t) \succ t$. Si μ est un nombre réel quelconque <1, montrer que, lorsque x tend vers $+\infty$

$$f(x) = \int_0^\infty e^{xt-x^\mu \varphi(t)} dt \sim e^{x^\mu (y\varphi'(y)-\varphi(y))} \sqrt{\frac{2\pi}{x^\mu \varphi''(y)}}$$

où y est donné par la relation $\varphi'(y)=x^{1-\mu}$.

3) Etudier de même, pour $\mu<1$, l'intégrale

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt+x^\mu \varphi(t)} dt$$

où x tend vers $+\infty$, $\varphi(t)$ étant une fonction >0 de l'échelle $\mathcal{E}$ au voisinage de $t=0$; étudier la même intégrale lorsque x tend vers 0 , $\varphi(t)$ étant cette fois une fonction >0 de l'échelle $\mathcal{E}$ au voisinage de $+\infty$, telle que $\varphi(t) \prec t$.
