CHAPITRE IV (ETAT 1)
CORPS DE HARDY. FONCTIONS (H)
CHAPITRE V (ETAT 1)
ETUDE LOCALE DES FONCTIONS

Rédaction n° 008

Nombre de pages : 74

Nombre de feuilles : 74

Livre IV Chap IV

Corps de Hardy

8

Chapitre IV A 8 2

(Ancien CHAPITRE IV.)

CORPS DE HARDY. FONCTIONS (H). Etat 1

Le but de ce chapitre est essentiellement l'étude d'un ensemble de fonctions élémentaires, dont l'intérêt est de servir en quelque sorte de termes de comparaison dans l'étude au voisinage d'un point des fonctions de variable réelle qui se présentent dans les diverses parties de l'Analyse (voir ch.V). Cet ensemble est un cas particulier d'ensembles de fonctions de variable réelle que nous désignerons sous le nom de corps de Hardy, et dont nous commencerons par donner la définition et les principales propriétés.

§ 1. Corps de Hardy.

Définition 1. Un ensemble $\mathfrak{H}$ de fonctions réelles finies, dont chacune est définie dans un voisinage de $+\infty$ (ce point non compris) et éventuellement dans d'autres parties de R, est dit constituer un corps de Hardy, s'il satisfait aux conditions suivantes :

(CH_I) Toute fonction de $\mathfrak{H}$ garde un signe constant au voisinage de $+\infty$ (c'est-à-dire que, pour tout $f \in \mathfrak{H}$, il existe un voisinage V de $+\infty$, tel que $f(x) > 0$ en tout point de $V \cap R$, ou $f(x) < 0$ en tout point de $V \cap R$, ou $f(x)=0$ en tout point de $V \cap R$).

(CH_{II}) Toute fonction de $\mathfrak{H}$ est continue et dérivable dans un voisinage de $+\infty$, et sa dérivée appartient à $\mathfrak{H}$.

(CH_{III}) Si f et g appartiennent à $\mathfrak{H}$, les fonctions $f+g$, $f-g$, fg, f/g, définies au voisinage de $+\infty$ (la dernière en supposant que g n'est pas nulle dans un voisinage de $+\infty$) appartiennent à $\mathfrak{H}$.

D'après (CH_{III}), un corps de Hardy contient toujours les constantes rationnelles, dont l'ensemble constitue évidemment le plus petit corps de Hardy. Les constantes réelles forment aussi un corps de Hardy ; un exemple plus important est formé par le corps des fonctions rationnelles de x à coefficients réels : cet ensemble de fonctions satisfait évidemment à (CH_{II}) et (CH_{III}) ; d'autre part, si $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynomes à coefficients réels non identiquement nuls, et si a est le maximum des racines réelles de $P(x)$ et $Q(x)$, P/Q garde un signe constant pour $x > a$, d'où (CH_I).

Montrons maintenant comment, par adjonction de fonctions convenables à un corps de Hardy donné, on peut obtenir encore un nouveau corps de Hardy.

Lemme 1. Soient $a(x)$, $b(x)$ des fonctions continues et gardant un signe constant au voisinage de $+\infty$. Si $y(x)$ satisfait, au voisinage de $+\infty$, à l'équation différentielle

$$(1) \qquad y' = ay + b$$

elle garde aussi un signe constant au voisinage de $+\infty$.

Supposons a et b définies et continues pour $x \geqslant x_0$, et posons $z = y.e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$; on a

$$z' = b.e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$$

Il existe par hypothèse un nombre x_1 tel que, pour $x > x_1$, b garde un signe constant ; si $b(x)=0$ pour $x > x_1$, z est constante pour $x > x_1$, donc y garde un signe constant pour $x > x_1$; si $b(x) \neq 0$ pour $x > x_1$, z' garde un signe constant pour $x > x_1$, donc z est fonction monotone pour $x > x_1$; il existe donc un nombre $x_2 \geqslant x_1$ tel que, pour $x > x_2$, z garde un signe constant, donc aussi y.

Remarque. Cette propriété si élémentaire ne s'étend pas aux équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à un ; par exemple la fonction $y = \sin x$ satisfait à $y'' + y = 0$, et ne garde pas un signe constant au voisinage de $+\infty$.

Lemme 2. Soient $a(x)$ et $b(x)$ deux fonctions appartenant à un même corps de Hardy $\mathcal{K}$, y une fonction satisfaisant à (1) au voisinage de $+\infty$, et $P(u)$ un polynôme par rapport à une variable u , dont les coefficients appartiennent à $\mathcal{K}$. La fonction $P(y)$ garde un signe constant au voisinage de $+\infty$.

La proposition est évidente si le degré n de $P(u)$ est 0. Comme $P(u)$ peut se mettre sous la forme

$$c_o(u^n + c_1u^{n-1} + c_2u^{n-2} +\ldots+ c_n)$$

où $c_o, c_1,\ldots,c_n$ sont des fonctions de $\mathcal{K}$, il suffit de démontrer le lemme pour les polynomes dont le coefficient de la plus haute puissance de u est 1. Supposons le lemme démontré pour tous les polynomes de degré $n-1$; on a

$$\begin{aligned}(P(y))' &= (ay+b)(ny^{n-1} +(n-1)c_1y^{n-2}+\ldots+c_{n-1})+c_1'y^{n-1}+\ldots+c_n' \\ &= na.P(y)+ Q(y)\end{aligned}$$

où $Q(u)$ est un polynome de degré $n-1$ au plus, à coefficients dans $\mathcal{K}$. Les fonctions na et $Q(y)$ gardent un signe constant au voisinage de $+\infty$; il en est donc de même de $P(y)$, d'après le lemme 1.

Proposition 1. Si a et b sont deux fonctions appartenant à un corps de Hardy $\mathcal{K}$, et y une fonction satisfaisant à (1) au voisinage de $+\infty$, l'ensemble des fonctions $R(y)$, où $R(u)$ désigne une fraction rationnelle en u , à coefficients dans $\mathcal{K}$, forme un nouveau corps de Hardy, qu'on désigne par $\mathcal{K}(y)$, et qu'on dit obtenu par adjonction de y à $\mathcal{K}$.

En effet, $\mathcal{K}(y)$ satisfait bien à (CH_{III}), et à (CH_{I}) d'après le lemme 2 ; d'autre part, la dérivée de $R(y)$ est, en vertu de (1), de la forme $S(y)$, où $S(u)$ est une nouvelle fraction rationnelle en u, à coefficients dans $\mathcal{K}$; donc $\mathcal{K}(y)$ vérifie (CH_{II}).

Corollaire 1. Si y est une fonction de $\mathcal{K}$ qui est >0 au voisinage de $+\infty$, $\mathcal{K}(\log y)$ est un corps de Hardy.

En effet, $(\log y)' = y'/y$, qui appartient à $\mathcal{K}$.

Corollaire 2. Si y est une fonction quelconque de $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}(e^y)$ est un corps de Hardy.

En effet, $(e^y)' = e^y.y'$, et y' appartient à $\mathcal{K}$.

La proposition 1 et ses corollaires montrent en particulier que, si f et g appartiennent à un même corps de Hardy $\mathcal{K}$, toutes les fonctions $f, g, e^f, e^g, \log f, \log g, |f|^\alpha, |g|^\alpha$ (α quelconque), $\int_a f$, $\int_a g$ (a quelconque dans un voisinage de $+\infty$ où f et g sont définies) appartiennent encore à un même corps de Hardy, obtenu par extensions successives du corps de Hardy $\mathcal{K}$.

Comparaison des fonctions d'un corps de Hardy.

Proposition 2. Toute fonction appartenant à un corps de Hardy tend vers une limite (finie ou infinie) lorsque x tend vers $+\infty$.

En effet, si f appartient à un corps de Hardy $\mathcal{K}$, $f' \in \mathcal{K}$, donc garde un signe constant au voisinage de $+\infty$; il en résulte que f est monotone au voisinage de $+\infty$, d'où la proposition, d'après le théorème de la limite monotone.

Appliquons en particulier cette proposition au quotient f/g de deux fonctions d'un corps de Hardy (g supposée non identiquement nulle dans un voisinage de $+\infty$); ce quotient tend vers une limite, qui peut être un nombre réel quelconque, fini ou infini.

Définition 2. Soient f et g deux fonctions d'un corps de Hardy. On dit que f est négligeable par rapport à g, ou que g est prépondérante sur f, et on écrit $f \prec g$ (ou $g \succ f$), si le rapport f/g tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$; on dit que f est équivalente à g et on écrit $f \sim g$ si le rapport f/g tend vers 1 ~~vers~~ lorsque x tend vers $+\infty$.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Proposition 3. Si f et g sont deux fonctions appartenant à un même corps de Hardy, ou bien $f \prec g$, ou bien $f \succ g$, ou bien il existe un nombre k fini et $\neq 0$ tel que $f \sim kg$.

Enonçons un certain nombre de propriétés élémentaires des signes "$\prec$" et "$\sim$", dont nous laisserons la plupart des démonstrations au lecteur :

(2) $f \sim g$ entraîne $g \sim f$;

(3) $f \sim g$ et $g \sim h$ entraînent $f \sim h$;

(4) $f \prec g$ et $g \prec h$ (ou $g \sim kh$ où k est une constante $\neq 0$) entraînent $f \prec h$;

Cette propriété montre que la relation "$f \prec g$ ou il existe une constante $k \neq 0$ telle que $f \sim kg$" est transitive et réflexive ; on peut donc, en passant à l'ensemble quotient du corps de Hardy par la relation d'équivalence "il existe $k \neq 0$ tel que $f \sim kg$", en déduire une relation d'ordre sur cet ensemble quotient ; en outre, la proposition 3 montre alors que cet ensemble quotient est totalement ordonné.

(5) $f \prec g$ est équivalente à $f \prec kg$ quelle que soit la constante $k \neq 0$;

Dans le corps des rationnels, on a par exemple $x \prec \varepsilon x^2$, si petit que soit $\varepsilon \neq 0$; une relation telle que $f \prec g$ ne peut donc permettre aucune conclusion sur la grandeur relative de $f(x)$ et $g(x)$ pour une valeur donnée de x.

(6) Si g_1 et g_2 sont <u>de même signe</u> au voisinage de $+\infty$, $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ entraînent $f_1+f_2 \sim g_1+g_2$; $f_1 \prec g_1$ et $f_2 \prec g_2$, $f_1+f_2 \prec g_1+g_2$.

En effet, si par exemple $|f_1(x)| < \varepsilon |g_1(x)|$ et $|f_2(x)| < \varepsilon |g_2(x)|$ pour $x \geqslant x_0$, on aura aussi, puisque $|g_1| + |g_2| = |g_1 + g_2|$,

$$|f_1+f_2| < \varepsilon |g_1+g_2|$$

Ces propositions sont <u>inexactes</u> lorsque g_1 et g_2 sont de signes contraires ; par exemple, si $g_1 = x^2+1$, $g_2 = -x^2$, $f_1 = x^2+x$, $f_2 = -x^2$, on a $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$, mais $f_1+f_2 = x \succ 1 = g_1 + g_2$.

Toutefois, lorsque $g_1 = \alpha g$, $g_2 = \beta g$, où α et β sont des constantes de signe quelconque, les relations $f_1 \sim \alpha g$, $f_2 \sim \beta g$ entraînent $f_1+f_2 \sim (\alpha+\beta)g$, $\alpha+\beta \neq 0$, et $f_1+f_2 \prec g$ si $\alpha+\beta = 0$.

Comme cas particulier de (6), on voit que si $f_1 \prec g$, $f_2 \prec g$, on a $f_1+f_2 \prec g$; autrement dit, <u>la somme d'un nombre fini de fonctions négligeables par rapport à une fonction</u> g, <u>est encore négligeable par rapport à</u> g ;

(7) $f \succ g$ entraîne $f+g \sim f$; $f \sim g$ est équivalente à $f-g \prec f$; En particulier, si $g \prec f$, $f+g$ a <u>le signe de f</u> au voisinage de $+\infty$.

(8) $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ entraînent $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$;

(9) $f_1 \prec g_1$ et $f_2 \prec g_2$ (ou $f_2 \sim kg_2$, où k est une constante $\neq 0$) entraînent $f_1 f_2 \prec g_1 g_2$;

(10) Si $a > 0$, $f \prec g$ entraîne $|f|^a \prec |g|^a$; $f \sim g$ entraîne $|f|^a \sim |g|^a$.

(11) $f \sim g$ entraîne $1/f \sim 1/g$; $f \prec g$ entraîne $1/g \prec 1/f$.

(12) Soit $\varphi(x)$ une fonction continue tendant vers $+\infty$ avec x ; si f et g sont deux fonctions d'un corps de Hardy telles que $f \circ \varphi$ et $g \circ \varphi$ soient encore des fonctions d'un même corps de Hardy, la relation $f \sim g$ entraîne $f \circ \varphi \sim g \circ \varphi$; la relation $f \prec g$ entraîne $f \circ \varphi \prec g \circ \varphi$.

Ces propriétés de la composition <u>à droite</u> sont inexactes en général pour la composition <u>à gauche</u> : par exemple, on a $x \prec x^2$, mais $\log x^2 \sim 2\log x$; de même $x^2 \sim x^2+x$, mais $e^{x^2} \prec e^{x^2+x}$. Citons seulement les résultats suivants :

(13) Si g tend vers $+\infty$ avec x, la relation $f \prec g$ entraîne $e^f \prec e^g$; la relation $f \sim g$ entraîne $\log f \sim \log g$.

Soient f et g deux fonctions d'un même corps de Hardy, et supposons que g <u>tende vers</u> $+\infty$ <u>avec x</u>. On appelle <u>ordre de f par rapport à</u> g la borne inférieure ρ de l'ensemble des nombres finis a tels que $f \prec g^a$ (et $+\infty$ si cet ensemble est vide). Il peut se produire plusieurs cas :

1°- $\rho = -\infty$; on a alors $f \prec g^a$ quel que soit a fini.

2°- $\rho = +\infty$; on a alors $f \succ g^a$ quel que soit a fini ; dans le cas contraire, on aurait $f \sim kg^a$ pour une certaine valeur de a, k étant une constante $\neq 0$; par suite, pour $\beta > a$, $f \prec g^\beta$, contrairement à l'hypothèse.

3°- $-\infty < \rho < +\infty$; posons $f_1 = f/g^\rho$; il est clair qu'on a $f_1 \prec g^\lambda$ quel que soit $\lambda > 0$; d'autre part, on a aussi $g^{-\lambda} \prec f_1$ quel que soit $\lambda > 0$, sans quoi on aurait pour une de ces valeurs $f_1 \sim kg^{-\lambda}$, avec k constante $\neq 0$, et pour $-\lambda < -\mu < 0$, $f_1 \prec g^{-\lambda}$, d'où $f \prec g^{\rho-\mu}$, contrairement à l'hypothèse.

Lorsque $\rho = +\infty$ ou $\rho = -\infty$, on a $\log|f| \succ \log g$. En effet, si par exemple $\rho = +\infty$, on a , quel que soit α , $f \succ g^\alpha$, donc à tout $\alpha > 0$ correspond un nombre x_0 tel que, pour $x \geqslant x_0$, $\log|f| > \alpha \log g$, ce qui montre que $\log|f| / \log g$ tend vers $+\infty$ avec x ; raisonnement analogue si $\rho = -\infty$.

Lorsque ρ est fini et $\neq 0$, on a $\log|f| \sim \rho \log g$; en effet, $\log|f| = \rho \log g + \log|f_1|$; pour tout $\lambda > 0$, il existe x_0 tel que, pour $x \geqslant x_0$, $g^{-\lambda} < |f_1| < g^\lambda$, d'où $|\log|f_1|| < \lambda \log g$, ce qui entraîne $\log|f_1| \prec \log g$.

Le même raisonnement montre que, si $\rho = 0$, $\log|f| \prec \log g$.

<u>Dérivation et intégration des relations de comparaison</u>. <u>Lemme 3</u>. <u>Soient f et g deux fonctions strictement positives et continues par morceaux dans un intervalle</u> $[a, +\infty[$; <u>si</u> $\int_a^{+\infty} g(t)dt < +\infty$, <u>on a</u>

$$\limsup_{x \to +\infty} \frac{\int_x^{+\infty} f(t)dt}{\int_x^{+\infty} g(t)dt} \leqslant \limsup_{x \to +\infty} f(x)/g(x)$$

<u>Si</u> $\int_a^{+\infty} g(t)dt = +\infty$, <u>on a</u>

$$\limsup_{x \to +\infty} \frac{\int_a^{x} f(t)dt}{\int_a^{x} g(t)dt} \leqslant \limsup_{x \to +\infty} f(x)/g(x)$$

En effet, supposons d'abord $\int_a^x g(t)dt < +\infty$; d'après le théorème de la moyenne, $f(x) \leqslant kg(x)$ pour $x \geqslant x_0$ entraîne $\int_x^{+\infty} f(t)dt \leqslant k \int_x^{+\infty} g(t)dt$ pour $x \geqslant x_0$, d'où la première partie de la proposition.

En second lieu, supposons $\int_a^{+\infty} g(t)dt = +\infty$, et $f(x) \leqslant kg(x)$ pour $x \geqslant x_0$; on a

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^x f(t)dt \leqslant \int_a^{x_0} f(t)dt + k\int_{x_0}^x g(t)dt =$$
$$= k\int_{a_0}^x g(t)dt + \int_a^{x_0}\left[f(t)-kg(t)\right]dt$$

Or, quel que soit $\varepsilon > 0$ on peut trouver x_1 tel que, pour $x \geqslant x_1$,

$$\int_a^{x_0}\left|f(t)-kg(t)\right|dt \leqslant \varepsilon\int_a^x g(t)dt$$

d'où, pour $x \geqslant x_1$

$$\int_a^x f(t)dt \leqslant (k+\varepsilon)\int_a^x g(t)dt$$

et comme ε est arbitraire, on en déduit la seconde partie du lemme

Proposition 4. Soient f et g deux fonctions appartenant à un même corps de Hardy et définies pour $x \geqslant a$; si $\int_a^{+\infty}|g(t)|dt = +\infty$, la relation $f \prec g$ (resp. $f \succ g$, $f \sim g$) entraîne $\int_a^x f(t)dt \prec \int_a^x g(t)dt$ (resp. $\int_a^x f(t)dt \succ \int_a^x g(t)dt$, $\int_a^x f(t)dt \sim \int_a^x g(t)dt$). Si $\int_a^{+\infty}|g(t)|dt < +\infty$, la relation $f \prec g$ (resp. $f \sim g$) entraîne $\int_x^{+\infty} f(t)dt \prec \int_x^{+\infty} g(t)dt$ (resp. $\int_x^{+\infty} f(t)dt \sim \int_x^{+\infty} g(t)dt$).

Il suffit d'appliquer le lemme 3, en remarquant dans le premier cas que $f \succ g$ (ou $f \sim g$) et $\int_a^{+\infty}|g(t)|dt = +\infty$, entraîne $\int_a^{+\infty}|f(t)|dt = +\infty$ (car $|f(x)| \geqslant \frac{1}{2}|g(x)|$ dans les deux cas, dans un voisinage convenable de $+\infty$) ; de même, dans le second cas, les relations $f \sim g$ et $\int_a^{+\infty}|g(t)|dt < +\infty$ entraînent $\int_a^{+\infty}|f(t)|dt < +\infty$.

On peut donc passer dans tous les cas de relations de comparaison entre fonctions d'un même corps de Hardy, aux relations de comparaison de même nature entre des primitives convenablement choisies de ces fonctions.

D'après l'axiome (CH_{II}), on en tire la proposition suivante :

<u>Proposition 5</u>. <u>Soient f et g deux fonctions d'un même corps de Hardy; sauf lorsque</u> $g \sim k$ (k constante $\neq 0$), <u>la relation</u> $f \prec g$ (resp. $f \sim g$) <u>entraîne</u> $f' \prec g'$ (resp. $f' \sim g'$).

En effet, supposons $f' \succ g'$; si $g \succ 1$, on en déduit, d'après la prop.4 , $f \succ g$; si $g \prec 1$, on a soit $f \sim k'$ (k' constante $\neq 0$), soit $f \succ 1$ soit $f \prec 1$; dans les trois cas, d'après la prop. 4, on a encore $f \succ g$. On voit de même que $f' \sim g'$ entraîne, lorsqu'on suppose que l'on n'a pas $g \sim k$, que $f \sim g$. Comme une des trois relations $f' \prec g'$, $f' \sim kg'$, $f' \succ g'$, existe entre f' et g' , on voit que la seule relation entre f' et g' compatible avec la relation $f \prec g$, dans le cas où on n'a pas $g \sim k$, est $f' \prec g'$.

Démonstration analogue lorsque $f \sim g$.

Lorsqu'on est dans le cas d'exception $g \sim k$, on ne peut rien conclure, pour les dérivées f' et g', d'une relation telle que $f \prec g$ ou $f \sim g$. Par exemple, on a $1/x \prec 1 + 1/x$, bien que les dérivées des deux membres soient équivalentes ; de même $1/x \prec 1+1/x^2$, mais $-1/x^2 \succ -2/x^3$.

Dans les deux propositions qui suivent, on suppose que f est une fonction appartenant à un corps de Hardy qui contient x et les constantes réelles. On peut alors avoir dans la plupart des cas, des expressions équivalentes aux dérivées d'ordre quelconque et aux primitives de f , et qui ne contiennent que f, f' et x :

<u>Proposition 6</u>. 1° <u>Si f est d'ordre infini par rapport à x , on a</u>

$$f^{(n)} \sim f'^n / f^{n-1} \tag{14}$$

2° <u>Si f est d'ordre</u> μ <u>par rapport à x, et si</u> μ <u>n'est pas entier positif, on a</u>

$$f^{(n)} \sim \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\, f/x^n \tag{15}$$

3^o <u>Si f est d'ordre entier positif p par rapport à x , on a</u>

(16) $$f^{(n)} \sim p(p-1)\ldots(p-n+1)f/x^n$$

<u>pour</u> $n \leqslant p$. <u>Si on pose</u> $f=x^p f_1$, <u>et si on n'a pas</u> $f_1 \sim k$ (k constante $\neq 0$), <u>on a, pour</u> $n > p$,

(17) $$f^{(n)} \sim p!f_1^{(n-p)} \sim (-1)^{n-p-1}\, p!(n-p-1)!f_1'/x^{n-p-1}$$

<u>Enfin, si</u> $f_1 \sim k$, <u>en posant</u> $f = kx^p + f_2$, <u>on a</u> $f^{(n)} = f_2^{(n)}$ <u>pour</u> $n > p$, <u>et il faut recommencer à distinguer les divers cas précédents pour la fonction</u> f_2.

1^o Si f est d'ordre infini par rapport à x , on a $\log|f| > \log x$, donc (prop.5), $f'/f > 1/x$; posons $t=f'/f$; on a $1/t \prec x$, donc $t'/t^2 \prec 1$, et par suite $t'/t \prec t = f'/f$ ou encore $ft' \prec tf'$. De la relation $f' = ft$, on déduit en dérivant

$$f'' = ft' + f't \sim f't ,$$

ou encore $f''/f' \sim f'/f$; on démontre ainsi de proche en proche que $f^{(n)}/f^{(n-1)} \sim f'/f$, d'où (14).

2^o Soit $f = x^{\mu} f_1$, f_1 étant d'ordre 0 par rapport à x ; on a donc $\log|f_1| \prec \log x$, d'où $f_1'/f_1 \prec 1/x$, ou encore $xf_1' \prec f_1$. Or

$$f' = x^{\mu-1}(xf_1' + \mu f_1) \sim \mu x^{\mu-1} f_1 = \mu f/x$$

et on démontre ainsi (15) de proche en proche, tant que le coefficient numérique qui figure au second membre est $\neq 0$, et il ne peut s'annuler que pour μ entier $\geqslant 0$.

3^o On peut se borner, d'après ce qui précède, au cas où $\mu = 0$, $f_1 = f$. Alors, si on n'a pas $f \sim k$, de $xf' \prec f$, on déduit en dérivant
$$xf'' + f' \prec f'$$
ce qui entraîne $xf'' \sim -f'$. Remarquons maintenant qu'on a certainement f' d'ordre $\leqslant -1$ par rapport à x ; supposons démontré que

(18) $$f^{(n)} \sim (-1)^{n-1}(n-1)!f'/x^{n-1}$$

Le second membre est d'ordre $\leqslant -n$ par rapport à x , donc on peut dériver, ce qui donne immédiatement la formule (18) pour l'indice n+1, compte tenu de $f'' \sim -f'/x$.

Proposition 7. On pose $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est infini, et $F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt$ dans le cas contraire.

1° Si f est d'ordre infini par rapport à x , on a

$$F \sim f^2/f' \tag{19}$$

2° Si f est d'ordre μ par rapport à x , et $\mu \neq -1$, on a

$$F \sim xf/(\mu+1) \tag{20}$$

D'après le lemme 3, il suffit de vérifier que les relations obtenues en dérivant (19) et (20) respectivement sont bien satisfaites.

Or, en dérivant (19), on obtient

$$f \sim 2f - f^2 f''/f'^2$$

ce qui est bien vérifié, puisque $f'' \sim f'^2/f$ en vertu de (14).

En dérivant (20), on obtient de même

$$f \sim (f+xf')/(\alpha+1)$$

Or, si $\mu \neq 0$, $xf' \sim \mu f$, et, si $\mu = 0$, $xf' \prec f$, d'où la proposition.

Pour obtenir une expression équivalente à F lorsque $\mu = -1$, il faut envisager l'ordre de $f_1 = xf$, par rapport à log x. En effet, $F(e^t)$ est alors la primitive de $f_1(e^t) = g(t)$ et on est ramené au même problème que précédemment, pour la fonction g , dont l'ordre par rapport à x est égal à celui de f_1 par rapport à log x (on suppose naturellement que g(t) appartient encore à un corps de Hardy contenant t).

Exemple. Soit $f(x)=x^{\alpha}e^{x^{\beta}}$, où $\beta > 0$; on a $f' \sim x^{\alpha+\beta-1}e^{x^{\beta}}$ donc $f'/f \sim \beta x^{\beta-1} \succ 1/x$, ce qui montre que $\log|f| \succ \log x$, et par suite que f est d'ordre infini par rapport à x ; on en déduit que

$$f^{(n)} \sim \beta^n x^{\alpha+n(\beta-1)} e^{x^{\beta}}$$

et

$$F(x) = \int_a^x t^{\alpha} e^{t^{\beta}} dt \sim x^{\alpha-\beta+1} e^{x^{\beta}}/\beta \qquad (a > 0).$$

§ 2. Fonctions (H).

Définition 1. On dit qu'une fonction f est une fonction (H) s'il existe un nombre fini de corps de Hardy $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{K}_n$ satisfaisant aux conditions suivantes :

a) $\mathfrak{K}_0$ est le corps des fractions rationnelles en x, à coefficients réels ;

b) pour $0 < i < n$, $\mathfrak{K}_{i+1}$ se déduit de $\mathfrak{K}_i$ par adjonction d'une fonction u_{i+1}, qui est égale, soit à $\log|z_i|$, soit à e^{z_i}, z_i étant une fonction appartenant à $\mathfrak{K}_i$ et non identiquement nulle au voisinage de $+\infty$.

c) $\mathfrak{K}_n$ contient f.

Les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont dites former une suite de définition de f ; il n'est naturellement pas exclu que f possède plusieurs suites de définition.

Proposition 1. Les fonctions (H) forment un corps de Hardy.

Il est clair en effet que, si f est une fonction (H), f' est encore une fonction (H), et admet d'ailleurs la même suite de définition que f. Il suffit donc d'établir que les fonctions (H) forment un corps. Or, soient f et g deux fonctions (H) quelconques, $u_1, u_2, \ldots, u_m$ une suite de définition de f, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ une suite de définition de g ; posons

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_0(u_1),\ \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_1(u_2), \dots,\ \mathcal{K}_m = \mathcal{K}_{m-1}(u_m)$$

$$\mathcal{K}_{m+1} = \mathcal{K}_m(v_1),\ \mathcal{K}_{m+2} = \mathcal{K}_{m+1}(v_2), \dots,\ \mathcal{K}_{m+n} = \mathcal{K}_{m+n-1}(v_n)$$

La suite de corps ainsi formée satisfait évidemment aux conditions a) et b) de la définition 1, et $\mathcal{K}_{m+n}$ contient f et g , donc il contient aussi $f+g$, $f-g$, fg et f/g (si g n'est pas identiquement nulle au voisinage de $+\infty$); ces fonctions sont donc aussi des fonctions (H).

D'après la définition 1 , si f est une fonction (H), $\log|f|$ et e^f sont aussi des fonctions (H). Il en résulte que, parmi tous les corps de Hardy $\mathcal{K}$ contenant le corps des fractions rationnelles, et tels que, si $f \in \mathcal{K}$ et n'est pas identiquement nulle au voisinage de $+\infty$, on ait aussi $\log|f| \in \mathcal{K}$ et $e^f \in \mathcal{K}$, le corps des fonctions (H) est <u>le plus petit</u>.

<u>Exponentielles et logarithmes itérés</u>. On pose $e_2(x)=e^{e^x}$, $e_3(x)=e^{e^{e^x}}$, et, en général, $e_n(x)=e^{e_{n-1}(x)}$; $e_n(x)$ est dite <u>exponentielle d'ordre n</u>. De même, on pose $l_2(x)=\log\log x$ et, en général $l_n(x)=\log(l_{n-1}(x))$; $l_n(x)$ est dite <u>logarithme d'ordre n</u>. Ces fonctions sont évidemment des fonctions (H) ; elles jouent un rôle important dans la théorie générale de ces fonctions. De la relation $1/x \prec 1$, on déduit en intégrant $\log x \prec x$, d'où , en remplaçant x par x^μ , où μ est une constante >0 quelconque, $\log x \prec x^\mu$. De $\log x \prec x$, on déduit aussi, en remplaçant x par e^x , que $x \prec e^x$, puis, en remplaçant x par x/μ dans cette relation, et élevant à la puissance μ ($\mu > 0$) , $x^\mu \prec e^x$.

Ces relations de comparaison entre les fonctions x^μ , log x et e^x sont fondamentales. On en déduit aussitôt

(1) $\quad 1_n(x) \prec (1_{n-1}(x))^\mu \quad$ quel que soit $\mu > 0$

(2) $\quad e_n(x) \succ (e_{n-1}(x))^\mu$

En outre, on a vu que, si f et g sont deux fonctions (H) telles que $g \succ 1$ et $f \prec g$, on a $e^f \prec e^g$; par récurrence, on en déduit $e_n(f) \prec e_n(g)$; en particulier

(3) $\quad e_n(\alpha x) \prec e_n(x^{1+\beta})$

quelles que soient les constantes strictement positives α et β ; de même

(4) $\quad e_{n-1}(x^\mu) \prec e_n(x) \quad$ quel que soit $\mu > 0$

Notons aussi que, pour $n > 1$, on a

(5) $\quad (e_n(x))^\alpha \prec e_n((1+\beta)x)$ quels que soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

On a $\quad (e_n(x^\mu))' = \mu x^{\mu-1} e^{x^\mu} e_2(x^\mu) \ldots e_{n-1}(x^\mu) e_n(x^\mu)$

$\quad (1_n(x))' = 1/x . \log x . \; 1_2(x) \ldots 1_{n-1}(x)$

comme on le voit par récurrence. On en tire

$$(e_n(x^\mu))' \prec e_n(x^\lambda) \quad \text{pour tout} \quad \lambda > \mu > 0$$

et, d'après la proposition 7 , pour $\mu > 0$

$$\int_a^x e_n(t^\mu)dt \sim e_n(x^\mu)/\mu x^{\mu-1} e^{x^\mu} e_2(x^\mu) \ldots e_{n-1}(x^\mu) \prec e_n(x^\mu)$$

$$\int_x^{+\infty} dt/e_n(t^\mu) \sim 1/\mu x^{\mu-1} e^{x^\mu} e_2(x^\mu) \ldots e_{n-1}(x^\mu) e_n(x^\mu) \succ 1/e_n(x^\lambda)$$

pour $\lambda > \mu$.

Les fonctions $e_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ forment une échelle de comparaison <u>valable pour toutes les fonctions</u> (H) ; autrement dit, il n'existe pas de fonction (H) telle que $f \succ e_n(x)$ quel que soit n. C'est ce qui résulte de la proposition plus précise suivante :

Proposition 2. <u>Si f est une fonction (H) possédant une suite de définition formée de n fonctions au plus, il existe un nombre</u> $\mu > 0$ <u>tel que</u> $f \prec e_n(x^\mu)$ (en posant $e_0(x)=x$, $e_1(x)=e^x$).

Remarquons d'abord que, si a et b sont deux fonctions (H) telles que $1/e_n(x^\mu) \prec a \prec e_n(x^\mu)$, $1/e_n(x^\mu) \prec b \prec e_n(x^\mu)$ on a

$$1/(e_n(x^\mu))^2 \prec ab \prec (e_n(x^\mu))^2$$

et, par suite, pour $\lambda > 2\mu$,

$$1/e_n(x^\lambda) \prec ab \prec e_n(x^\lambda)$$

Démontrons la proposition par récurrence sur n. Comme $x^p \prec x^q$ pour $p \prec q$, tout polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré, toute fraction rationnelle à une fonction de la forme ax^h , où h est un entier positif ou négatif, d'où la proposition pour n=0. Supposons-là démontrée pour les valeurs de n jusqu'à m-1, et démontrons-là pour n=m. Une fonction possédant une suite de définition formée de m fonctions est de la forme R(u) où R est une fraction rationnelle dont les coefficients appartiennent à un corps de Hardy $\mathfrak{K}$ dont toutes les fonctions ont une suite de définition formée de m-1 fonctions au plus, et $u=\log|z|$ ou $u=e^z$, où z est une fonction de $\mathfrak{K}$. D'après la remarque du début, on peut se borner à montrer que pour tout polynôme $P(u)=c_0+\ldots+c_pu^p$ à coefficients dans $\mathfrak{K}$, on a, pour un $\mu > 0$ convenable

$$1/e_m(x^\mu) \prec P(u) \prec e_m(x^\mu)$$

en supposant bien entendu que P(u) ne soit pas identiquement nul au voisinage de $+\infty$.

Raisonnons par récurrence sur p ; la proposition est évidente si p=0 ; supposons-là démontrée pour les polynomes de degré $\leqslant p-1$.

Nous distinguerons deux cas, suivant la forme de u.

1° $u=\log|z|$. D'après la remarque du début, on peut, en divisant par une fonction de $\mathfrak{K}$, supposer que $c_p=1$. Alors, comme $u'=z'/z$ appartient à $\mathfrak{K}$, $(P(u))'$ est un polynôme en u à coefficients dans $\mathfrak{K}$, de degré $\leq p-1$; donc

$$1/e_m(x^\mu) \prec (P(u))' \prec e_m(x^\mu)$$

et, en intégrant, on en tire, pour une valeur $\lambda > \mu$

$$1/e_m(x^\lambda) \prec P(u) \prec e_m(x^\lambda)$$

2° $u=e^z$; comme $1/e_{m-1}(x^\mu) \prec z \prec e_{m-1}(x^\mu)$, on a

$$1/e_m(x^\mu) \prec u \prec e_m(x^\mu)$$

En divisant au besoin par une fonction de $\mathfrak{K}$, on peut supposer que $c_0=0$ ou $c_0=1$; alors

$$(P(u))' = c_1'u+c_2'u^2+\ldots+c_p'u^p+(c_1+2c_2u+\ldots+pc_pu^{p-1})u'$$

et comme $u'=uz'$, $(P(u))'$ est de la forme $uQ(u)$, où Q est un polynôme de degré $\leq p-1$ en u , à coefficients dans $\mathfrak{K}$; on a donc encore

$$1/e_m(x^\mu) \prec (P(u))' \prec e_m(x^\mu)$$

d'après la remarque initiale, et on conclut comme dans le premier cas. C.Q.F.D.

<u>Exercices</u>. 1) Comparer entre elles les fonctions $e_p(1_q(x))^\mu$ suivant les valeurs des entiers p,q et du nombre réel $\mu > 0$ et $\neq 1$.

2) Montrer que toute fonction (H) dont la suite de définition se compose d'une seule fonction est équivalente à une fonction de la forme

$$x^p(\log x)^q e^{P(x)} \tag{1}$$

où p et q sont des entiers positifs ou négatifs, $P(x)$ un polynome en x. (Se ramener à un polynome $Q(u)$, où $u=e^z$ ou $u = \log|z|$, z étant rationnelle, puis raisonner par récurrence sur le degré de Q , de manière analogue à la démonstration de la prop. 2).

3) Déduire de l'exercice 2 que toute fonction (H) de la forme $R(u_1,u_2,\ldots,u_k)$, où R est une fraction rationnelle en k variables, à coefficients fonctions rationnelles de x , et $u_1, u_2,\ldots,u_k$ des fonctions (H) dont la suite de définition se compose d'une seule fonction, est encore équivalente à une fonction de la forme (1). (Se ramener à un polynome, raisonner par récurrence sur k , puis sur le degré du polynôme en u_k).

---

chapitre IV

(Ancien CHAPITRE V.)

ETUDE LOCALE DES FONCTIONS. Etat 1

De très nombreux problèmes, dans la plupart des théories mathématiques se présentent sous la forme suivante : étant donnée une fonction <u>numérique</u> f , définie dans une partie A d'un espace topologique E , comment "se comporte-t-elle" au voisinage d'un point donné $a \in \bar{A}$? Ce sont ces problèmes que nous appelons d'une manière générale problèmes d'<u>étude locale</u> d'une fonction.

Il faut d'abord les poser de façon précise. On a défini, au point a , les expressions $\liminf_{x \to a, x \in A} f(x)$ et $\limsup_{x \to a, x \in A} f(x)$. On peut donc penser que le problème dont nous venons de parler comporte uniquement la détermination de ces deux nombres (et éventuellement de toutes les valeurs d'adhérence de f au point a , relativement à A). Mais on s'aperçoit vite que les renseignements obtenus ainsi sont <u>insuffisants</u> ; par exemple, lorsque x tend vers $+\infty$, les trois fonctions x, x^2 et $\sqrt{x}$ tendent toutes trois vers $+\infty$; mais, des expressions

$$(x+1)-x \quad , \quad (x+1)^2-x^2 \quad , \quad \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

la première tend vers 1 , la seconde vers $+\infty$, la troisième vers 0. La valeur limite d'une fonction n'est donc pas seule importante, mais encore la <u>manière</u> dont cette fonction tend vers sa limite. Tout le problème consiste à distinguer à cet égard les diverses fonctions ayant au point a mêmes limites inférieure et supérieure, autrement dit, à les <u>comparer</u> entre elles.

Comment faire cette comparaison ? On est guidé par le fait que, dans la plupart des questions, il n'y a pas lieu de considérer comme très différentes l'une de l'autre, au point de vue de leur comportement en un point, deux fonctions qui ne diffèrent que par un facteur constant. Ceci conduit tout naturellement à comparer une fonction f à une fonction g en étudiant le rapport f/g (supposé exister) dans un voisinage de a ; suivant les valeurs des limites inférieure et supérieure de cette fonction en a, on est amené à considérer l'allure de f au voisinage de a comme très différente ou au contraire semblable à celle de g. Nous commencerons par énumérer les différents cas possibles, en indiquant les notations qui permettent de les désigner de façon abrégée ; nous considérerons ensuite plus particulièrement les fonctions d'une variable réelle, où la comparaison aux fonctions (H) permet de pousser beaucoup plus loin la notion d'étude locale ; enfin, nous exposerons des méthodes générales d'étude locale de fonctions définies par certains procédés qu'on rencontre très fréquemment en Analyse.

§ 1. Définitions et notations.

Parmi les fonctions numériques définies sur A, on est amené à distinguer les deux classes suivantes :

1° Les fonctions bornées dans un voisinage du point $a \in \bar{A}$; dans l'étude locale des fonctions au voisinage de a, on les désignera par la notation $B(x)$, la lettre B étant affectée d'indices lorsque plusieurs fonctions de cette nature figurent dans les raisonnements.

2° Les fonctions tendant vers 0 lorsque x tend vers a en restant dans A ; on les désignera par la notation $\varepsilon(x)$, la lettre ε étant affectée d'indices pour distinguer les différentes fonctions de cette nature dans un raisonnement.

Enfin, on désignera par la lettre K , affectée d'indices, les constantes $\neq 0$ intervenant dans les raisonnements.

Pour éviter tout malentendu, il y aura lieu de rappeler brièvement ces conventions chaque fois qu'on les utilisera dans une question de manière systématique.

Cela posé, examinons les différents cas qui peuvent se produire quand on compare, au sens défini ci-dessus, une fonction f à une fonction g au voisinage de a . Nous supposons une fois pour toutes, dans ce chapitre, que les fonctions g qui servent de termes de comparaison, sont finies et strictement positives dans un voisinage de a ; le rapport f/g est alors défini dans un voisinage de a .

Posons $\alpha = \liminf_{x\to a, x\in A} |f(x)|/g(x)$, $\beta = \limsup_{x\to a, x\in A} |f(x)|/g(x)$

on a $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant +\infty$. Nous distinguerons les cas suivants :

1° $\beta < +\infty$, α quelconque ; on a alors $f(x) = B(x)g(x)$, et on dit (par un abus de langage) que f croît moins vite que g au voisinage de a .

2° $\alpha = 0$, β quelconque ; on a $f(x)=g(x)/B(x)$ aux points où f est finie, et on dit que f croît plus vite que g au voisinage de a .

3° $0 < \alpha \leqslant \beta < +\infty$; on a $f(x) = B_1(x)g(x)$, et $f(x)=g(x)/B_2(x)$ aux points où f est finie ; on dit que f croît aussi vite que g au voisinage de a .

4° $\alpha = \beta = 0$; on a $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$; on dit que f est négligeable par rapport à (ou devant) g au voisinage de a .

5^o $\alpha = \beta = +\infty$; alors $f(x) = g(x)/\varepsilon(x)$ aux points où f est finie ; on dit que f <u>est prépondérante sur</u> g au voisinage de a .

6^o $0 < \alpha = \beta < +\infty$; alors $|f(x)| = \alpha(1+\varepsilon(x))g(x)$; on dit que $|f|$ est <u>équivalente à</u> αg au voisinage de a . Ce cas est surtout intéressant lorsque f garde un signe constant au voisinage de a ; alors, si $f \geqslant 0$, f est équivalente à αg ; si $f \leqslant 0$, on dit que f est équivalente à $-\alpha g$.

Plus généralement, on dit encore que deux fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de a (même si g ne satisfait pas aux hypothèses énoncées ci-dessus), lorsque on a $f(x) = (1+\varepsilon(x))g(x)$.

Le cas 1^o (resp. 2^o) peut encore s'exprimer comme suit : il existe une constante K telle que $0 < K < +\infty$ et un voisinage V de a tels que, dans $V \cap A$, on ait $|f(x)| \leqslant Kg(x)$ (resp. $|f(x)| \geqslant Kg(x)$).

Il peut se faire qu'aucun de ces deux cas ne soit réalisé, mais qu'il existe cependant une constante K et un voisinage V de a tels que $f(x) \leqslant Kg(x)$ (ou $f(x) \geqslant Kg(x)$) dans $V \cap A$; il y a parfois lieu, dans certaines questions, de considérer ces cas.

Enfin, on peut avoir $\liminf_{x \to a, x \in A} f(x)/g(x) = -\infty$, et $\limsup_{x \to a, x \in A} f(x)/g(x) = +\infty$; on dit alors que f et g <u>ne sont pas comparables</u>.

On observera que les relations entre f et g correspondant aux cas $4^o, 5^o, 6^o$ généralisent les relations entre fonctions d'un corps de Hardy, que nous avons respectivement désignées de la même manière. On pourrait donc les noter également par les mêmes signes, dans le cas général, que dans le cas de fonctions d'un corps de Hardy ; et, en fait, lorsque A est <u>une partie de la droite numérique</u> $\mathbb{R}$, nous écrirons souvent

$$f \prec g \quad , \quad f \succ g \quad , \quad f \sim g$$

au lieu de

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad , \quad f(x) = g(x)/\varepsilon(x) \quad , \quad f(x) = (1+\varepsilon(x))g(x)$$

respectivement ; dans ce même cas, nous écrirons aussi

$$f \preccurlyeq g \quad , \quad f \succcurlyeq g$$

au lieu de

$$f(x) = B(x)g(x) \quad , \quad f(x) = g(x)/B(x)$$

respectivement.

Par contre, lorsqu'il s'agira de fonctions de plusieurs variables, nous nous abstiendrons strictement d'utiliser ces notations, ou d'autres notations aussi condensées ; elles ne permettent pas, en effet, d'exprimer de façon adéquate les divers cas qui peuvent se produire, et risquen par suite d'entraîner de graves erreurs. Considérons, par exemple, deux fonctions f,g , définies dans un voisinage du point $(0,0)$ de $\mathbb{R}^2$; il se peut que, pour toute valeur fixe de x , $f(x,y)/g(x,y)$ tende vers 0 avec y , et, de même, que ce rapport tende vers 0 avec x pour toute valeur fixe de y ; mais ce serait une conclusion erronée d'en déduire $f(x,y) = \varepsilon(x,y)g(x,y)$ au voisinage de $(0,0)$ (et c'est pourtant ce qu'on serait tenté de faire si on écrivait chacune des relations existant entre f et g sous une forme telle que $f \prec g$) ; les relations indiquées se traduiront par exemple, avec les notations adoptées, de la manière suivante :

25

$$f(x,y) = \varepsilon_1^{(x)}(y)g(x,y) = \varepsilon_2^{(y)}(x)g(x,y)$$

étant entendu que l'on ne préjuge en rien, de cette manière, sur la limite du rapport f/g lorsque le couple (x,y) tend vers $(0,0)$.

Les propriétés suivantes des fonctions de type B ou ε sont immédiates, et correspondent d'ailleurs en partie à celles des signes de comparaison des fonctions d'un corps de Hardy, données au ch. IV ; nous laissons au lecteur le soin de les vérifier :

(1) $B_1 \pm B_2 = B_3$, $B \pm \varepsilon = B_1$, $\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 = \varepsilon_3$

(2) $B_1 B_2 = B_3$, $B\varepsilon = \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_3$

(3) Si φ est une fonction numérique, définie dans $\mathbb{R}$, et bornée dans toute partie bornée de $\mathbb{R}$, on a $\varphi \circ B = B_1$.

(4) Si ψ est une fonction numérique définie dans un voisinage de 0 sur $\mathbb{R}$, et tendant vers 0 en ce point, on a $\psi \circ \varepsilon = \varepsilon_1$.

§ 2. Etude locale des fonctions de variable réelle. Développements asymptotiques.

Nous allons maintenant nous attacher plus particulièrement au cas où A est une partie de la droite numérique $\mathbb{R}$, a étant un point de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A ; c'est ce que nous désignons brièvement sous le nom d'<u>étude locale des fonctions de variable réelle</u>.

Lorsque a est <u>fini</u>, il y a lieu, en général, de distinguer, dans l'étude locale des fonctions définies sur A , au voisinage de a , l'étude <u>à droite</u> et l'étude <u>à gauche</u> de a (c'est-à-dire respectivement l'étude, au voisinage de a , de la restriction de la fonction envisagée à l'ensemble $A \cap]a,+\infty[$ ou à l'ensemble $A \cap]-\infty,a[$).

Or, l'étude d'une fonction $f(x)$, à droite (resp. à gauche) de a ; se ramène évidemment à celle de la fonction $f(1/(x-a))$ (resp. de $f(-1/(x-a))$) au voisinage de $+\infty$ (cette fonction étant définie sur l'image réciproque de A par l'application $x \to 1/(x-a)$, resp. $x \to -1/(x-a)$) ; de même l'étude d'une fonction $f(x)$ au voisinage de $-\infty$ se ramène à celle de $f(-x)$ au voisinage de $+\infty$.

Aussi supposons-nous désormais, dans les définitions et propositions ultérieures de ce chapitre, que l'étude des fonctions envisagées se fait <u>au voisinage de</u> $+\infty$ (ces fonctions étant donc définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ <u>non bornée supérieurement</u>) ; chaque foi que ce sera utile, nous indiquerons les résultats correspondants qu'on en déduit (au moyen des changements de variables précédents) pour l'étude locale au voisinage d'un autre point de $\overline{\mathbb{R}}$.

<u>Position du problème</u>. Comme <u>termes de comparaison</u> pour l'étude locale des fonctions au voisinage de $+\infty$, nous prendrons <u>les fonctions (H) positives</u> (et éventuellement des fonctions appartenant à des corps de Hardy obtenus en adjoignant au corps des fonctions (H) des primitives de certaines fonctions (H)). Ces fonctions (la constante 0 mise à part) restent bien strictement positives au voisinage de $+\infty$.

Quels renseignements peut-on alors se proposer d'obtenir sur le comportement d'une fonction f au voisinage de $+\infty$, en la comparant aux fonctions (H) ? C'est ce que nous allons d'abord indiquer, en faisant abstraction, pour le moment, de la <u>possibilité</u> d'obtenir ~~par~~ pour une fonction <u>quelconque</u>, des renseignements de cette nature, (problème sur lequel nous revenons plus loin), et en procédans par ordre de précision croissante.

1° Le minimum qu'on puisse demander est de trouver une fonction de comparaison g telle que $f(x) \leqslant Kg(x)$, ou $f(x) \geqslant Kg(x)$ (avec une constante K convenable) au voisinage de $+\infty$.

2° Un résultat déjà meilleur sera l'obtention d'une fonction de comparaison g telle que $f \preccurlyeq g$, autrement dit, ce qu'on appelle encore une <u>limitation supérieure</u> (ou <u>majoration</u>) de la <u>croissance</u> de f .

Le <u>meilleur</u> résultat dans ce sens sera obtenu si on détermine une fonction de comparaison g_0 telle que $f \preccurlyeq g_0$, mais que, pour toute fonction $g \prec g_0$, la relation $f \preccurlyeq g$ n'ait plus lieu.

3° On peut ensuite se proposer d'opérer de même sur la fonction $1/f$ c'est-à-dire de trouver une fonction de comparaison h telle que $f \succcurlyeq h$ (<u>limitation inférieure</u> ou <u>minoration</u> de la croissance de f).

Le meilleur résultat de cette sorte sera atteint si on détermine une fonction de comparaison h_0 telle que $f \succcurlyeq h_0$, mais qu'on n'ait $f \succcurlyeq h$ pour aucune fonction h telle que $h \succ h_0$.

Si on a en outre $h_0 \sim Kg_0$, on peut en déduire que f <u>croît aussi vite que</u> g_0 .

4° Ce résultat étant supposé atteint, on peut chercher ensuite s'il existe une constante K telle que $f \sim Kg_0$; dans ce cas, on dit que Kg_0 est <u>une partie principale</u> de f (on remarquera que cette notion est relative au système de fonctions de comparaison choisi).

5° Si on veut aller plus loin, on est amené à considérer la différence $f_1 = f - Kg_0$, qui est $\prec g_0$; les mêmes problèmes qui se sont posés pour f se posent de nouveau, dans le même ordre, pour f_1.

Procédant ainsi de proche en proche, on est finalement amené à la notion de développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$:

Définition 1. On dit qu'on a obtenu un développement asymptotique d'ordre n d'une fonction f au voisinage de $+\infty$ (relativement à un système donné de fonctions de comparaison), si on a déterminé n fonctions de comparaison $g_1, g_2, \ldots, g_n$ telles que $g_1 \succ g_2 \succ \ldots \succ g_n$ et que, si on pose $f = g_1 + g_2 + \ldots + g_n + R_n$, on ait $R_n \prec g_n$. Les g_i sont dits les termes du développement, R_n en est dit le reste.

Le premier terme g_1 n'est autre qu'une partie principale de f, et, de façon générale, g_i est une partie principale de $f-(g_1+\ldots+g_{i-1})$. Une fonction peut admettre plusieurs développements asymptotiques distincts (de même ordre) par rapport à un même système de fonctions de comparaison ; par exemple, $(x^2+x)+1$, et $x^2+(x+1)$ sont deux développements asymptotiques d'ordre 2, en fonctions (H), de la fonction x^2+x+1. Aussi est-on amené à restreindre l'ensemble des fonctions de comparaison par rapport auxquelles on cherche des développements asymptotiques. Nous dirons qu'un ensemble $\mathfrak{T}$ de fonctions de comparaison est un ensemble de fonctions-types, s'il satisfait à la condition suivante :

(T) Si f et g sont deux fonctions de $\mathfrak{T}$, la condition $f \sim g$ entraîne $f = g$.

> Un tel ensemble n'est autre qu'une partie d'un corps de Hardy totalement ordonnée par la relation "$f \prec g$ ou il existe $k \leqslant 1$ telle que $f \sim kg$".

D'après la définition des termes d'un développement asymptotique, il est immédiat qu'une fonction ne peut avoir qu'un seul développement asymptotique d'ordre donné, relativement à un ensemble de fonctions-types donné.

Citons, comme ensembles de fonctions-types les plus employés, l'ensemble des fonctions kx^{α} (α réel quelconque k constante), et l'ensemble des fon_tions $x^{\alpha}(\log x)^{\beta}e^{P(x)}$ (α, β nombres réels quelconques, $P(x)$ polynôme à coefficients réels quelconques) ; on vérifie aussitôt la propriété (T) pour ces deux ensembles.

Un développement relatif à l'ensemble des fonctions types kx est dit développement asymptotique ordinaire.

Possibilités de comparaison aux fonctions (H). Exemples. Nous avons laissé en suspens la question de savoir si le processus décrit ci-dessus peut ou non se poursuivre pour une fonction f arbitrairement donnée. Un instant de réflexion suffit à montrer que la réponse est négative, même si on impose à f des restrictions telles que la continuité ou la monotonie au voisinage de $+\infty$.

Tout d'abord, il est évident qu'on ne pourra obtenir de majoration de la croissance de f, si f devient infini dans tout voisinage de $+\infty$; de même, on ne pourra en avoir de minoration, si f s'annule dans tout voisinage de $+\infty$.

Une fonction est dite oscillante au voisinage d'un point si elle change de signe dans tout voisinage de ce point ; d'après le théorème de Weierstrass (Top. géné., ch.IV, § 5, th.   ), toute fonction continue oscillante au voisinage de $+\infty$ s'annule dans tout voisinage de ce point ; elle ne peut donc admettre de minoration de sa croissance par une fonction (H). Par exemple sin x admet une majoration, mais pas de minoration ; 1/sin x admet une minoration, mais pas de majoration ; enfin tg x n'admet ni majoration ni minoration au voisinage de $+\infty$.

Montrons maintenant comment on peut définir une fonction f, <u>monotone</u> et <u>continue</u> au voisinage de $+\infty$, et qui <u>croît plus vite que toute fonction</u> (H). Il suffit de prendre pour f une juxtaposition des fonctions <u>linéaires</u> f_n, la fonction f_n étant définie dans l'intervalle $[n,n+1]$ par la condition

$$f_n(n) = e_n(n) \quad , \quad f_n(n+1) = e_{n+1}(n+1)$$

D'après la prop.2 du § 2 du ch.IV, il ne saurait exister de fonction (H) croissant plus vite que f.

Le même raisonnement, légèrement modifié, conduit au résultat plus général connu sous le nom de <u>théorème de Du Bois Reymond</u> :

<u>Etant donnée une suite</u> (f_n) <u>de fonctions continues croissantes, définies dans un voisinage de</u> $+\infty$, <u>et telles que</u> $f_{n+1} \succ f_n$ <u>quelque soit n, il existe une fonction</u> φ <u>continue et croissante dans un voisinage de</u> $+\infty$ <u>et telle que</u> $\varphi \succ f_n$ <u>quel que soit n</u>.

On commence par remplacer la suite (f_n) par une suite (g_n) ayant les mêmes propriétés, mais telle que, de plus, $g_{n+1} \geqslant g_n$ quel que soit n, et que $g_n = f_n$ à partir d'une certaine valeur x_n de x. Pour construire une pareille suite, on procède par récurrence ; g_n étant définie, on a $f_{n+1} \succ g_n$, donc $f_{n+1} \geqslant g_n$ pour $x \geqslant x_{n+1}$; on prendra alors $g_{n+1} = f_{n+1}$ pour $x \geqslant x_{n+1}$, et $g_{n+1} = \mathrm{Max}(f_{n+1}, g_n)$ pour $x < x_{n+1}$. Cela étant, on posera

$$\varphi(n) = g_n(n)$$

et, pour $n \leqslant x \leqslant n+1$, en posant $x=(n+1)t+(1-t)n$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$

$$\varphi(x) = (1-t)g_n(x) + tg_{n+1}(x)$$

On vérifie aussitôt que φ est croissante ; comme $\varphi \geqslant g_n$ pour $x > n$, on a $\varphi/g_n \geqslant g_{n+1}/g_n$ pour $x > n+1$, d'où $\varphi \succ g_n \sim f_n$.

Si on définissait f_n par les conditions $f_n(n)=(-1)^n e_n(n)$, $f_n(n+1)=(-1)^{n+1} e_{n+1}(n+1)$, f_n étant en outre linéaire dans $[n, n+1]$ la juxtaposition des f_n serait une fonction qui <u>ne serait comparable à aucune fonction</u> (H).

Toutefois l'existence des fonctions de la nature précédente présente un intérêt surtout théorique, car, pour l'immense majorité des fonctions (monotones et continues au voisinage de $+\infty$) qui se présentent dans les parties les plus diverses de l'Analyse, il s'est trouvé jusqu'ici qu'on pouvait toujours obtenir une limitation inférieure et une limitation supérieure de leur croissance à l'aide de fonctions (H).

On peut même dire que, lorsqu'on a affaire à une fonction f ne devenant pas infinie en valeur absolue dans tout voisinage de $+\infty$, la détermination d'une majoration de la croissance de f au moyen d'une fonction (H) n'est pas en général un problème difficile ; il en est tout autrement en ce qui concerne la détermination d'une <u>meilleure</u> majoration de cette espèce, ou même seulement la démonstration de l'<u>existence</u> d'une meilleure majoration.

Dans des cas simples, cette meilleure majoration g_0 est évidente ; par exemple, pour $f(x)=\sin x$, on a $g_0(x)=1$. Soit $G(x)$ le nombre des couples (p,q) d'entiers tels que $p^2+q^2 \leqslant x$; on démontre fort aisément que $G(x) \sim \pi x$;

mais, si on pose $R(x)=G(x)-\pi x$, on sait seulement que

$$R(x) \preccurlyeq x^{27/82}$$

et que, dans cette formule, l'exposant de x ne peut pas être remplacé par $1/4$ (il faut d'ailleurs des moyens techniques très puissants et très complexes pour arriver à ces résultats ; quant au problème de l'existence et de la détermination d'une meilleure majoration pour $R(x)$, il reste en suspens).

On peut enfin construire des fonctions qui n'admettent pas de meilleure majoration par des fonctions (H) ; si f croît plus vite que toute fonction (H), $1/f$ possède évidemment cette propriété. Mais on peut aussi obtenir une telle fonction croissant indéfiniment : par un procédé analogue à celui employé dans le théorème de Du Bois Reymond, on peut former une fonction f croissante, continue et tendant vers $+\infty$, telle que $f \prec 1_n(x)$, quel que soit n ; il résulte alors d'un théorème sur les fonctions (H) (1), que f ne peut admettre une meilleure majoration par une telle fonction.

Il peut être tout aussi difficile de déterminer si une fonction admet une minoration de sa croissance par une fonction (H) (et même déjà de savoir si une fonction est ou non oscillante au voisinage de $+\infty$).

Par exemple, on sait que la fonction $R(x)$ définie ci-dessus est oscillante, mais (comme elle n'est pas continue) on ignore si sa croissance peut être limitée inférieurement par une fonction (H).

Lorsqu'on a obtenu une meilleure majoration g_0 et une meilleure minoration h_0 pour la croissance d'une fonction f , il se peut, bien entendu, que l'on ait $h_0 \prec g_0$; s'il en est ainsi, l'étude locale de f ne peut se prolonger au-delà de ce stade.

Par exemple, si $f(x) = x+x^2\sin^2 x$, on a $g_0 = x^2$, $h_0 = x$. Dans cet exemple, f n'est pas monotone au voisinage de $+\infty$, mais on peut aisément former des exemples analogues à l'aide de fonctions élémentaires monotones : c'est ainsi que $f(x)=(x^2\cos^2 x+\sin^2 x)e^{x^2}$ est monotone, comme on le vérifie aisément, mais on a $g_0 = x^2 e^{x^2}$, et $h_0 = e^{x^2}$.

Si les remarques et exemples qui précèdent montrent clairement qu'il ne saurait être question de chercher une partie principale (ni a fortiori un développement asymptotique) d'une fonction <u>quelconque</u>, il n'en reste pas moins vrai que les fonctions pour lesquelles ces recherches ont un sens se présentent très fréquemment et jouent un rôle prépondérant en Analyse. En premier lieu, si $f(1/x)$ est <u>continue ainsi que ses n+1 premières dérivées</u> dans un voisinage de 0, le <u>développement de Taylor d'ordre n de</u> $f(1/x)$, dans lequel on remplace x par $1/x$, est un <u>développement asymptotique ordinaire d'ordre n</u> de $f(x)$, comme il résulte de la limitation du reste de la formule de Taylor (ch.I, §4). En dehors de ce cas, qu'on peut considérer comme trivial, il existe de nombreux cas où on peut obtenir un développement asymptotique d'une fonction de façon élémentaire, à savoir ceux où la fonction est déduite par des opérations algèbriques, ou des opérations de composition, ou des opérations du Calcul infinitésimal, de fonctions dont on connaît déjà des développements asymptotiques ; ces cas seront examinés dans les paragraphes qui suivent. Enfin, on trouvera d'autres exemples de recherche de parties principales et de développements asymptotiques, nécessitant une technique plus poussée, dans la partie de cet ouvrage consacrée aux <u>Intégrales à noyaux</u>.

Parmi les résultats les plus remarquables obtenus dans ce genre de questions, il faut citer particulièrement ceux de <u>Théorie analytique des nombres</u>, où on étudie au voisinage de $+\infty$ des fonctions définies arithmétiquement, et qui ont en général des valeurs <u>entières</u> (et par suite sont discontinues); les techniques utilisées dans ces recherches sont parmi les plus délicates et les plus complexes de toute l'Analyse.

Par exemple, si $\varpi(x)$ désigne le nombre des nombre premiers $\leqslant x$, et $p(n)$ le nombre des <u>partitions</u> d'un ensemble de n éléments, on démontre que pour x (resp. n) voisin de $+\infty$, on a

$$\varpi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}}\, e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$$

Les méthodes employées permettent en outre d'avoir un développement asymptotique d'ordre aussi grand qu'on veut de $p(n)$; au contraire, par suite de difficultés analytiques, jusqu'ici insurmontées, on ne connaît même pas la meilleure majoration de la fonction $f(x) = \varpi(x) - \int_2^x \frac{dt}{\log t}$ (à supposer qu'il en existe une ; on a seulement pu démontrer que $f(x) \leqslant x\, e^{-A\sqrt{\log x \log\log x}}$, (A constante numérique) et qu'on ne peut pas remplacer le second membre par $\frac{\sqrt{x}\,\log\log\log x}{\log x}$

§ 3. Calcul de développements asymptotiques :

A. Opérations algèbriques, fonctions de fonctions, fonctions réciproques.

<u>Somme et produit</u>. Dans tout ce paragraphe, nous supposerons que les développements asymptotiques donnés sont relatifs à un ensemble $\mathfrak{T}$ de <u>fonctions-types</u>, contenant le corps des constantes réelles, et tel que le <u>produit</u> et le <u>quotient</u> de deux fonctions de $\mathfrak{T}$ appartiennent encore à $\mathfrak{T}$; il en est ainsi par exemple, de l'ensemble des fonctions kx^{α} , correspondant aux développements asymptotiques <u>ordinaires</u>.

Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble, au voisinage de $+\infty$, et soient

$$f = f_1+f_2+\dots+f_m+\varepsilon_1 f_m$$

$$g = g_1+g_2+\dots+g_n+\varepsilon_2 g_n$$

(ε_1 et ε_2 fonctions de x tendant vers 0 avec $1/x$) des développements asymptotiques de f et g relatifs à $\mathfrak{T}$. Entre deux termes f_i , g_j existe par hypothèse une des relations $f_i \prec g_j$, $f_i \succ g_j$, $f_i = Kg_j$. En groupant, dans la somme $f+g$, les termes des deux développements qui ne diffèrent que par un facteur constant, et en faisant pour un moment abstraction des restes, on obtient une somme

$$u_1+ u_2+\dots+ u_p$$

de fonctions de $\mathfrak{T}$, telles que $u_1 \succ u_2 \succ u_3 \succ \dots \succ u_p$. Pour obtenir un développement asymptotique de $f+g$, il suffira de ne garder dans cette somme que les termes u_r tels que l'on ait à la fois $u_r \succ \varepsilon_1 f_m$ et $u_r \succ \varepsilon_2 g_n$; il se peut d'ailleurs qu'il n'y ait <u>aucun</u> terme u_r ayant cette propriété ; c'est le cas où, en supposant par exemple $m \leqslant n$, les m premiers termes du développement de g sont <u>opposés</u> aux termes de même indice du développement de f ; on peut seulement alors dire, en général, que $f+g \prec f_m$. Si on ne se trouve pas dans ce cas, soit ρ le plus grand indice r ayant la propriété précédente ; on peut alors écrire

$$f+g = u_1+u_2+\ldots+u_\rho+\varepsilon_3 u_\rho$$

et on a ainsi le développement asymptotique (relatif à $\mathfrak{T}$) d'ordre le plus élevé de f+g , que permettent d'obtenir les développements donnés de f et g .

Il se peut qu'on n'ait $g_j \succ \varepsilon_1 f_m$ pour aucune valeur de l'indice j ; le développement de f+g obtenu de la manière précédente est alors le <u>même</u> (au reste près) que celui de f. Par exemple, si $f = x/(x+1)$, $g = e^{-x}$, on a les développements

$$f = 1-1/x+1/x^2-\ldots. +(-1)^n/x^{n-1}+\varepsilon_1/x^{n-1}$$
$$g = e^{-x}$$

($\mathfrak{T}$ étant ici formé des fonctions $x^\alpha(\log x)^\beta e^{P(x)}$). Comme $e^{-x} \prec 1/x^n$ quel que soit n , f+g et f ont les mêmes développements.

Formons maintenant le produit fg ; en ne considérant d'abord que les produits $f_i g_j$, on peut (d'après l'hypothèse sur $\mathfrak{T}$), en groupant ceux de ces termes qui ne diffèrent que par un facteur constant, les ranger en une somme

$$v_1+v_2+\ldots\ldots+ v_q$$

de fonctions de $\mathfrak{T}$, telles que $v_1 \succ v_2 \succ \ldots\ldots \succ v_q$; on obtiendra un développement asymptotique de fg , relatif à $\mathfrak{T}$, en ne gardant que les termes v_s tels que $v_s \succ \varepsilon_1 g_1 f_m$ et $v_s \succ \varepsilon_2 f_1 g_n$. Ici il existe toujours de pareils termes, car on a $v_1 = f_1 g_1$; si σ est le plus grand indice s ayant cette propriété, on peut écrire

$$fg = v_1 + v_2 + \ldots + v_\sigma + \varepsilon_4 v_\sigma$$

et on a ainsi le développement d'ordre le plus élevé de fg , relativement à $\mathfrak{T}$, que l'on puisse obtenir à l'aide des développements donnés de f et g .

On peut ainsi obtenir de proche en proche un développement asymptotique d'une somme ou d'un produit d'un nombre quelconque de fonctions dont on connaît les développements, et en particulier, celui d'une puissance entière > 0 quelconque de f.

Fonctions de fonctions. Commençons par examiner un cas particulier : soit f une fonction tendant vers 0 avec $1/x$, et dont on connaisse un développement

$$(1) \qquad f = f_1 + f_2 + \ldots + f_m + \varepsilon_1 f_m$$

relatif à $\mathfrak{T}$; soit d'autre part φ une fonction continue ainsi que ses n+1 premières dérivées dans un voisinage de 0 ; on peut alors écrire, d'après la formule de Taylor

$$(2) \qquad \varphi \circ f = a_0 + a_1 f + a_2 f^2 + \ldots + a_n f^n + \varepsilon_2 f^n$$

les a_i étant les coefficients du développement de Taylor de φ au point x=0. Remplaçons dans (2) le polynôme $a_0 + a_1 f + \ldots + a_n f^n$ par son développement asymptotique obtenu à partir de (1) par application des procédés décrits ci-dessus ; en ne gardant que les termes de ce développement qui sont $\succ \varepsilon_2 f_1^n$, on aura le développement d'ordre le plus élevé qu'on puisse déduire de ceux de f et φ .

Passons à d'autres cas. Supposons d'abord que toute <u>puissance</u> d'une fonction (positive) de $\mathfrak{T}$ appartienne aussi à $\mathfrak{T}$. Alors, du développement (1) d'une fonction positive f , relatif à $\mathfrak{T}$, on peut déduire un développement relatif à $\mathfrak{T}$ de toute puissance f^α ; il suffit d'écrire $f=f_1(1+g)$ avec $g=f_2/f_1+f_3/f_1 + \ldots\ldots +$ $+ f_m/f_1+ \varepsilon_1 f_m/f_1$, g tend donc vers 0 avec $1/x$; d'autre part, on a des développements de Taylor d'ordre quelconque de $\varphi(x)=(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0 ; comme $f^\alpha = f_1^\alpha.(1+g)^\alpha$, on appliquera le procédé précédent pour développer $(1+g)^\alpha$, et en multipliant chacun des termes de ce développement par f_1^α , on aura un développement de f^α relatif à $\mathfrak{T}$.

Montrons maintenant comment on peut obtenir de même un développement de log f $(f > 0)$ à partir d'un développement (1) de f ; on on aura, avec les mêmes notations

$$\log f = \log f_1 + \log (1+g)$$

et on connaît des développements de Taylor d'ordre quelconque de $\log (1+x)$ au voisinage de 0 ; on en déduira donc un développement de log f relatif à $\mathfrak{T}$ pourvu qu'on sache former un développement de $\log f_1$ relatif à ce même ensemble de fonctions-types.

<u>Exemple</u>. Soit à chercher, <u>au voisinage de $x = 0$</u>, un développement asymptorique de $\log(1-x^x)$. On a

$$x^x = e^{x\log x}$$

donc, comme $x\log x$ tend vers 0 avec x , on a, en appliquant la formule de Taylor d'ordre 3 , par exemple

$$x^x = 1+x.\log x + \frac{x^2(\log x)^2}{2} + \frac{x^3(\log x)^3}{6} + \varepsilon(x).\, x^3(\log x)^3$$

et par suite

$$\log(1-x^x)=\log(x.\log(1/x))+\log(1+\frac{x\log x}{2}+\frac{x^2(\log x)^2}{6}+ \\ +\varepsilon(x)\,x^2(\log x)^2).$$

Or, en appliquant les méthodes précédentes, on trouve

$$\log(1+\frac{x\log x}{2}+\frac{x^2(\log x)^2}{6}+\varepsilon(x)x^2(\log x)^2) = \\ = \frac{x\log x}{2}+\frac{x^2(\log x)^2}{24}+\varepsilon_1(x)x^2(\log x)^2$$

d'où

$$\log(1-x^x) = \log x + \log\log(1/x) + \frac{x\log x}{2}+\frac{x^2(\log x)^2}{24}+ \\ +\varepsilon_1(x)\,x^2(\log x)^2$$

C'est un développement relatif à l'ensemble des fonctions de la forme $x^\alpha(\log(1/x))^\beta(\log\log(1/x))^\gamma$ qui est bien un ensemble de fonctions-types. On remarquera qu'on ne détermine cet ensemble de fonctions-types qu'à posteriori ; c'est toujours de cette manière qu'on procède en pratique, car on ne peut savoir quel ensemble $\mathfrak{T}$ conviendra avant d'entreprendre le calcul ; pour conduire ce dernier, on se laisse guider par le principe suivant : décomposer le plus possible les fonctions (H) qui interviennent en <u>sommes</u> de fonctions plus simples, <u>ordonnées</u> pour la relation " $\succ$ ".

Cherchons maintenant à obtenir un développement de e^f , connaissant le développement (1) de f . Il faut ici distinguer plusieurs cas :

1° Supposons d'abord que $f_m \preccurlyeq 1$ (f_m bornée), et soit k le plus petit indice $\leqslant m$ tel que $f_k \preccurlyeq 1$; on peut alors écrire

$$e^f = e^{f_1}e^{f_2}\dots e^{f_k}e^g$$

avec $g = f_{k+1}+\dots+f_m+\varepsilon_1 f_m$; comme g tend vers 0 avec $1/x$, et que l'on connaît des développements de Taylor d'ordre quelconque de e^x , on pourra développer e^g suivant la méthode générale donnée ci-dessus.

D'autre part nous supposerons qu'en adjoignant à $\mathfrak{T}$ tous les produits de la forme $he^{h_1}e^{h_2}\ldots e^{h_n}$, où $h, h_1, \ldots, h_n$ sont des fonctions de $\mathfrak{T}$ telles que $h_1 \succ h_2 \succ \ldots \succ h_n \succ 1$, on obtienne encore un ensemble $\mathfrak{T}'$ de <u>fonctions-types</u> ; le produit de deux fonctions de $\mathfrak{T}'$ appartiendra encore évidemment à $\mathfrak{T}'$ dans ce cas rentre par exemple celui où $\mathfrak{T}$ est l'ensemble des puissances x^{α}) ; alors, en multipliant le développement de e^g par $e^{f_1+\ldots+f_k}$, on obtient un développement de e^f relatif à $\mathfrak{T}'$.

2° Supposons en second lieu $f_m \succ 1$; alors le développement (1) ne donnera même pas, en général, la partie principale de e^f relativement à $\mathfrak{T}'$; on peut seulement dire que $e^f/e^{f_1+\ldots+f_m}$ est d'ordre 0 par rapport à e^{f_m} (en étendant ici une notion qui a été définie pour les fonctions d'un corps de Hardy).

<u>Exemples</u>. 1) Cherchons un développement de x^{x^x} au voisinage de $x=0$; on a

$$x^{x^x} = e^{\log x . e^{x.\log x}}$$

et $\log x.e^{x.\log x} = \log x + x(\log x)^2 + \dfrac{x^2(\log x)^3}{2} + \varepsilon(x)x^2(\log x)^3$

en prenant, par exemple, un développement à 3 termes ; le premier seul de ces termes est non borné, les autres tendent vers 0 ; d'où

$$x^{x^x} = x.e^{x(\log x)^2 + \frac{x^2(\log x)^3}{2} + \varepsilon(x)x^2(\log x)^3}$$

$$= x + x^2(\log x)^2 + \frac{1}{2}x^3(\log x)^4 + \frac{1}{2}x^3(\log x)^3 + \\ + \varepsilon_1(x)x^3(\log x)^3$$

d'après la méthode générale.

2) Considérons la fonction $e^{e^x \sin(1/x)}$ au voisinage de $+\infty$. Comme on peut avoir un développement asymptotique ordinaire d'ordre quelconque de $\sin(1/x)$ par

la formule de Taylor, on en déduit un développement d'ordre quelconque de $e^x \sin(1/x)$ relatif à l'ensemble des fonctions $x^\alpha e^{P(x)}$ (P(x) polynôme). Mais tous les termes de ce développement sont de la forme $k\, e^x/x^n$, donc tendant vers $\pm\infty$; on ne peut donc pas avoir de partie principale de la fonction donnée, qui soit de la forme

$$e^{e^{P(x)}} Q(1/x)$$

P et Q étant des polynômes.

<u>Remarque</u>. Ce dernier exemple montre qu'on peut avoir un développement asymptotique d'ordre quelconque du logarithme d'une fonction sans en pouvoir déduire de développement de cette fonction elle-même ; un développement de log f est donc un renseignement beaucoup moins précis sur f qu'un développement de f, et il en est de même, à fortiori, d'un développement de $1_n(f)$, pour $n > 1$.

Toutefois, de tels développements peuvent rendre de grands services dans beaucoup de questions d'Analyse ; et il importe lorsqu'on calcule sur des fonctions dont on connaît des développements de certains logarithmes, de se rendre compte de la nature de l'approximation des expressions que l'on calcule à l'aide de ces fonctions ; pour celà, il n'y a qu'à essayer de former successivement des développements des logarithmes itérés de l'expression considérée, jusqu'à ce qu'on puisse y parvenir, à l'aide des développements donnés.

Par exemple, si on sait que $f \sim x^\alpha$, et $\log g \sim x^\beta$ (α et $\beta > 0$), que peut-on dire de fg ? On aura $\log fg = \log f + \log g = x^\beta + \varepsilon(x)\, x^\beta$ puisque $\log x \prec x^\beta$;

on a donc $\log fg \sim \log g$, autrement dit, le fait que f soit connu avec plus de précision que g ne présente aucun intérêt pour la connaissance du produit fg ; il en serait de même pour la somme $f+g$, comme on le voit sans peine.

De ce qui précède, et de la définition des fonctions (H), on déduit la possibilité, dans certains cas, d'avoir un développement asymptotique de la fonction composée $\varphi \circ f$, lorsqu'on connaît un développement de f , et que φ est <u>une fonction</u> (H). Il en sera toujours ainsi, en particulier, quand aucune exponentielle n'entrera dans la formation de φ .

<u>Fonctions réciproques</u>. Lorsque f est monotone au voisinage de $+\infty$, la relation $x = f(y)$ est biunivoque pour y voisin de $+\infty$, et définit donc y en fonction monotone de x au voisinage du point $a = \lim\limits_{y \to +\infty} f(y)$; c'est cette fonction que, par abus de langage, nous désignerons sous le nom de <u>fonction réciproque</u> de f dans ce qui suit.

Par un changement de variable sur x , on peut toujours supposer que $a = +\infty$; le problème que nous allons examiner est de <u>trouver un développement asymptotique de la fonction réciproque de f au voisinage de $+\infty$, connaissant un développement asymptotique de f au voisinage de ce point</u>.

Nous n'aborderons ce problème que lorsque f est <u>une fonction</u> (H) ; il serait facile de généraliser les résultats qui vont suivre moyennenant des hypothèses moins restrictives sur f .

Nous examinerons d'abord le cas où $f(y) = y-g(y)$, g étant une fonction (H) <u>telle que</u> $g(y) \prec y$. Formons la suite de fonctions

$$y_0 = x$$
$$y_1 = x + g(y_0) = x + g(x)$$
$$y_2 = x + g(y_1) = x + g(x+g(x))$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = x + g(y_{n-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Nous allons montrer que la différence $y-y_n$ <u>tend vers 0 avec</u> $1/x$, et trouver une fonction (H) <u>équivalente à</u> cette différence ; il en résultera qu'un développement asymptotique de y_n, limité à un nombre convenable de termes, donnera immédiatement un développement de y, ce qui, vu la forme de y_n, ramène le problème à un développement de fonctions composées.

Pour établir ce résultat, nous aurons besoin du lemme suivant, relatif aux fonctions (H) :

<u>Lemme</u>. <u>Soient</u> p <u>et</u> q <u>deux fonctions</u> (H) <u>non identiquement nulles et telles que</u> $q(x) > 0$ <u>au voisinage de</u> $+\infty$.

1° <u>Si</u> $q \prec p/p'$, <u>on a</u> $p(x+q(x)) \sim p(x)$.

2° <u>Si on a à la fois</u> $q \prec p/p'$ <u>et</u> $q \prec x$, <u>on a</u> $p(x-q(x)) \sim p(x)$.

1° Les deux propositions sont évidentes si $p \sim K$ (constante $\neq 0$) ; on peut donc supposer $p \prec 1$ (sans quoi on raisonnerait sur $1/p$) ; on en tire $p' \prec 1$. On a

$$p(x+q(x)) = p(x)+q(x)p'(x+\theta q(x)) \qquad \text{avec} \quad 0 < \theta < 1$$

Comme $|p'|$ tend vers 0, elle décroît pour x assez grand, donc on aura $|p'(x+\theta q(x))| < |p'(x)|$; comme $qp' \prec p$, on en déduit aussitôt la proposition.

2^{o} La condition $q \prec x$ assure que $x-q(x)$ tend vers $+\infty$ avec x .

On a encore

$$p(x-q(x)) = p(x)-q(x)p'(x-\theta q(x)) \qquad \text{avec } 0<\theta<1$$

On a ici $\left|p'(x-\theta q(x))\right| < \left|p'(x-q(x))\right|$; la proposition sera démontrée si on établit que l'expression $q(x)p'(x-q(x))/p(x-q(x))$ tend vers 0 avec $1/x$. Or, cela est immédiat si $p'/p \succ 1$, car alors $|p'/p|$ est croissante pour x assez grand, et

$$\left|q(x)p'(x-q(x))/p(x-q(x))\right| < q(x)\left|p'(x)/p(x)\right|$$

La proposition est tout aussi évidente si $p'/p \sim K$ (constante $\neq 0$), car alors $p'(x-q(x))/p(x-q(x)) \sim p'(x)/p(x)$. Reste uniquement à examiner le cas où $p'/p \prec 1$.

Supposons d'abord $p'/p \preccurlyeq 1/x$. Alors

$$p'(x-q(x))/p(x-q(x)) = B(x)/(x-q(x)), \text{ donc}$$

$$q(x)p'(x-q(x))/p(x-q(x)) = B(x)\ (q(x)/x)/(1-q(x)/x)$$

et comme $q \prec x$ par hypothèse, on en déduit bien la proposition. On remarquera qu'on a démontré ainsi, d'après la prop. 6 du § 1 du ch. IV, que, pour toute fonction $p \prec 1$ d'ordre <u>fini</u> par rapport à x , et non équivalente à une constante, et toute fonction $q \prec x$, on a $p(x-q(x)) \sim p(x)$.

Supposons maintenant que $1/x \prec p'/p \prec 1$; la fonction $t=p'/p$ est alors d'ordre fini par rapport à x , et on a $q \prec x$; en lui appliquant la proposition précédente, on a

$$p'(x-q(x))/p(x-q(x)) \sim p'(x)/p(x)$$

ce qui permet de conclure encore dans ce dernier cas.

C.Q.F.D.

45

<u>Remarque</u>. Les conditions imposées à q ne peuvent être améliorées, comme le montrent les exemples suivants :

a) $p(x)=e^x$, $q(x)=1=p(x)/p'(x)$, $p(x+q(x)) = e.p(x)$;

b) $p(x)=\log x$, $q(x)=x-\log(x) \prec p(x)/p'(x)= x\log x$,

$$p(x-q(x)) = \log\log x \prec p(x).$$

Le lemme étant démontré, revenons à l'étude de la suite (y_n). De la définition de y , on tire $x/y = 1-g(y)/y$; quand x tend vers $+\infty$, il en est de même de y , donc $g(y)/y$ tend vers 0 , ce qui montre que $y \sim x = y_o$. On a en outre

$$y-y_o= y-x = g(y) = g(x)+g(y)g'(z) \quad \text{où } z \text{ est compris}$$

entre x et y ; quand x tend vers $+\infty$, il en est donc de même de z donc, comme $g' \prec 1$, $g'(z)$ tend vers 0 , autrement dit

$$y-x-g(x) = \varepsilon(x)g(y) = \varepsilon(x)(y-x)$$

ce qui donne

(3) $$y-x \sim g(x) \prec x$$

Montrons maintenant que, lorsque x tend vers $+\infty$, y_n tend vers $+\infty$, et que l'on a

(4) $$y-y_n \prec y-y_{n-1}$$

En effet, on a $y-y_1 = g(y)-g(y_o) = g'(z_o)(y-y_o)$ où z_o est compris entre y et y_o , donc tend vers $+\infty$ avec x ; donc $g'(z_o)$ tend vers 0 avec $1/x$, ce qui montre que $y-y_1 \prec y-y_o \sim y$, et entraîne par suite $y_1 \sim y$; le raisonnement se poursuit de la même manière, par récurrence.

De (4), on déduit, de proche en proche, $y-y_n \prec y-y_o \sim g(x)$, d'où $(y-x)-(y_n-x) \prec y-x$, ce qui entraîne $y_n-x \sim y-x \sim g(x)$.

Limitons-nous maintenant au cas où $g(x)$ n'est pas équivalent à une constante $K \neq 0$; on peut toujours le faire, car si on avait $g \sim K$, on pourrait écrire l'équation $x = y-g(y)$ sous la forme

$$x = y-K-g_1(y)$$

avec $g_1(y) \prec 1$, et le changement de variable $u = y-K$ ramènerait au cas que nous considérons. Nous allons alors, à l'aide du lemme, trouver une fonction (H) <u>équivalente à</u> $y-y_n$.

Pour cela, montrons que, si une fonction z est telle que $z-x \sim g(x)$, on a $g'(z) \sim g'(x)$. En effet, pour x assez grand, comme g' est monotone, $g'(z)$ est comprise entre $g'(x+(1+\varepsilon)g(x))$ et $g'(x+(1-\varepsilon)g(x))$. Pour appliquer le lemme, il nous suffit de voir que $g \prec g'/g''$; or, si g est d'ordre infini par rapport à x , on a (ch.IV, §1, prop.6) $g''/g' \sim g'/g$, et comme $g' \prec 1$, $g \prec g/g'$; si au contraire, g est d'ordre fini par rapport à x , comme g n'est pas équivalent à une constante, on a $g''/g' \sim K/x$, et on a d'autre part $g \prec x$.

On a alors $y-y_n = g'(z_{n-1})(y-y_{n-1})$, où z_{n-1} est compris entre y et y_{n-1} , et par suite tel que $z_{n-1}-x \sim g(x)$; donc $g'(z_{n-1}) \sim g'(x)$ et $y-y_n \sim g'(x)(y-y_{n-1})$; de proche en proche, on en tire

$$(5) \qquad y-y_n \sim g(x)(g'(x))^n$$

On aura donc un développement asymptotique de y , en prenant un développement asymptotique de y_n , et en lui ajoutant le développement (à 1 terme), de $y-y_n$, donné par (5), suivant la règle donnant la somme de deux développements.

Le cas que nous venons d'examiner paraît bien particulier ; mais il permet d'aborder des cas beaucoup plus généraux dans l'étude des fonctions réciproques des fonctions (H). Supposons en effet que, si f est la fonction (H) considérée, on puisse écrire, pour un indice r convenable, en prenant le logarithme d'ordre r de la relation $x = f(y)$, $1_r x = 1_s y - g(y)$ avec $g(y) \prec 1_s y$

ou $1_r x = e_t y - g(y)$ avec $g(y) \prec e_t y$

(s et t entiers positifs, $e_o y = 1_o y = y$) ; en posant $x_1 = 1_r x$, $y_1 = 1_s y$ ou $y_1 = e_t y$ suivant les cas, on est ramené à une relation entre x_1 et y_1 du type étudié. On reviendra ensuite à l'expression de y en prenant des logarithmes ou exponentielles successifs du développement trouvé, ce qui ramène à des problèmes déjà traités.

<u>Exemples</u>. 1) Soit à trouver un développement de la fonction réciproque de $f(y) = y/\log y$; on tire de $x = y/\log y$,

$$\log x = \log y - \log\log y$$

ou, en posant $x_1 = \log x$, $y_1 = \log y$

$$x_1 = y_1 - \log y_1$$

Prenons l'approximation d'ordre 3, soit

$$z = x_1 + \log(x_1 + \log(x_1 + \log(x_1)))$$

d'après (5), on a

$$y_1 - z \sim \log x_1 / x_1^3$$

d'où, en développant z , on obtient

$$y_1 = x_1 + \log x_1 + \frac{\log x_1}{x_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{\log x_1}{x_1}\right)^2 + \frac{\log x_1}{x_1^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{\log x_1}{x_1}\right)^3 - \frac{3}{2}\frac{(\log x_1)^2}{x_1^3} + \frac{\log x_1}{x_1^3} + \varepsilon(x_1)\frac{\log x_1}{x_1^3}$$

puis, en revenant à y ,

48

$$y = e^{y_1} = e^{x_1}\left[x_1 + \log x_1 + \frac{\log x_1}{x_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{\log x_1}{x_1}\right)^2 + \frac{\log x_1}{x_1^2} + \varepsilon_1(x_1)\,\frac{\log x_1}{x_1^2}\right]$$

Il suffit ensuite de remplacer x_1 par log x dans ce développement pour avoir un développement de y , relatif à l'ensemble des fonctions-types $x^{\alpha}(\log x)^{\beta}(\log\log x)^{\gamma}$.

2) Cherchons un développement de la fonction réciproque de $f(y) = ye^{e^y}$; la relation $x = ye^{e^y}$ s'écrit

$$\log\log x = y + \log(1 + e^{-y}\log y)$$

Posons $x_1 = \log\log x$; en prenant l'approximation z d'ordre 1, on trouve $\quad y - z \sim gg' \sim -e^{-2x_1}(\log x_1)^2$

et on a d'autre part

$$z = x_1 - \log(1 + e^{-x_1}\log x_1) = x_1 - e^{-x_1}\log x_1 + \frac{1}{2}e^{-2x_1}(\log x_1)^2 + \varepsilon(x)e^{-2x_1}(\log x_1)^2$$

d'où, en revenant à la variable x ,

$$y = \log\log x - \frac{\log\log\log x}{\log x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\log\log\log x}{\log x}\right)^2(1 + \varepsilon(x))$$

<u>Remarque</u>. On généralisera aisément les résultats précédents lorsque g(y) n'est pas une fonction (H), mais satisfait aux diverses conditions relatives à ses dérivées que nous avons utilisées. Toutefois, il faut se garder de simplifier inconsidérément des problèmes de cet ordre ; c'est ainsi qu'on aboutirait à des résultats erronés si, en recherchant un développement de la fonction réciproque d'une fonction f(y), on remplaçait f par une fonction <u>équivalente</u> ; c'est ce que montre l'exemple des fonctions équivalentes $f_1(y) = \log y$ et $f_2(y) = \log y - 1$, dont les fonctions réciproques sont

respectivement e^x et e^{x+1}, et ne sont donc pas équivalentes.

§ 4. Calcul de développements asymptotiques : B. Développement d'une primitive.

Le problème que nous nous posons dans ce paragraphe est le suivant : soit f une fonction continue par morceaux et positive dans un intervalle $]a,+\infty[$, et admettant une primitive dans cet intervalle (ce qui sera le cas si f est continue et bornée par morceaux dans $]a,+\infty[$) ; que peut-on dire de l'allure d'une primitive $\int_b f$ $(b > a)$ au voisinage de $+\infty$, selon les renseignements qu'on possède sur l'allure de la fonction f elle-même ?

Bien entendu, tous les résultats qui vont suivre s'appliquent aussi à une fonction négative dans un voisinage de $+\infty$ en changeant simplement les signes ; par contre, nous n'aborderons pas ici l'étude des primitives des fonctions oscillantes ; cette question est en effet d'une tout autre nature que celle dont nous allons nous occuper, tant au point de vue des résultats que des moyens employés ; elle se rattache à des problèmes plus généraux, que nous étudierons dans la partie de cet ouvrage consacrée aux Intégrales à noyaux.

Il est immédiat, tout d'abord, que $\int_b f$ est croissante au voisinage de $+\infty$, et par suite que $\int_b^{+\infty} f(t)dt$ existe, et est finie ou égale à $+\infty$. Une première question consiste à déterminer dans lequel de ces deux cas on se trouve : à cet effet, le théorème de la moyenne fournit immédiatement le critère de comparaison suivant, qui est fondamental :

<u>Si f et g sont deux fonctions positives dans un voisinage de</u> $+\infty$ <u>et telles que</u> $f \leqslant g$, <u>on a</u> $\int_b^{+\infty} f(t)dt \leqslant \int_b^{+\infty} g(t)dt$; <u>par suite</u> :

1° <u>Si</u> $\int_b^{+\infty} g(t)dt$ <u>est finie</u>, $\int_b^{+\infty} f(t)$ <u>est finie</u>.

2° <u>Si</u> $\int_b^{+\infty} f(t)dt$ <u>est infinie</u>, $\int_b^{+\infty} g(t)dt$ <u>est infinie</u>.

On en déduit que, si f et g sont deux fonctions positives au voisinage de $+\infty$, telles que $\limsup_{x \to +\infty} f(x)/g(x) < +\infty$, (ce que nous notons encore $f(x) = B(x)g(x)$ ou $f \preccurlyeq g$) , et si $\int_b^{+\infty} g(t)dt$ est finie, il en est de même de $\int_b^{+\infty} f(t)dt$; de même, si $\liminf_{x \to +\infty} f(x)/g(x) > 0$ ($f(x)=g(x)/B(x)$, ou $f \succcurlyeq g$) , et si $\int_b^{+\infty} g(t)dt = +\infty$, on a $\int_b^{+\infty} f(t)dt = +\infty$.

Comme nous allons le voir, les fonctions de comparaison qu'on utilise surtout sont les fonctions (H) ; toutefois, il ne faut pas perdre de vue qu'une fonction peut fort bien <u>ne pas admettre de majoration par une fonction (H) de primitive finie</u>, et même <u>prendre la valeur</u> $+\infty$ <u>dans tout voisinage de</u> $+\infty$, et admettre cependant une primitive <u>finie</u> dans un voisinage de $+\infty$.

Considérons par exemple la fonction f , définie dans $[0,+\infty[$ par les conditions : $f(n) = +\infty$ pour tout entier $n \geqslant 0$, et

$$f(x) = \frac{1}{2^n} \frac{\left| x-(n+\frac{1}{2}) \right|}{\sqrt{1-\left[x-(n+\frac{1}{2})\right]^2}} \quad \text{pour } n<x<n+1 \ (n=0,1,2,..)$$

On a $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \int_0^n f(x)dx = 2(2-\sqrt{3})$

comme on le vérifie aisément.

Pour utiliser les fonctions (H) dans l'application du critère de comparaison, il faut d'abord savoir quelles fonctions (H) ont une intégrale finie ; c'est ce qu'on détermine aisément, grâce à la connaissance des primitives des fonctions (H) les plus simples. En premier lieu, $x^{\mu+1}/(\mu+1)$ est une primitive de x^{μ} pour $\mu \neq -1$, et $\log x$ une primitive de $1/x$; donc : $\int_a^{+\infty} x^{\mu}dx$ $(a > 0)$ est <u>finie pour</u> $\mu < -1$, <u>infinie pour</u> $\mu \geqslant -1$. Le critère de comparaison permet donc de conclure chaque fois qu'on a $f \preccurlyeq x^{\mu}$ avec $\mu < -1$ ou $f \succcurlyeq x^{\mu}$ avec $\mu \geqslant -1$: dans le premier cas, $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est <u>finie</u>, dans le second elle est <u>infinie</u>.

Il y a doute lorsqu'on connaît seulement une majoration de f d'ordre $\geqslant -1$ par rapport à x, et une minoration d'ordre < -1. Lorsqu'on ne connaît pas de partie principale de f, il n'existe pas de procédé général pour déterminer la nature de l'intégrale de f. Si au contraire f est équivalente à une fonction (H), soit g, il ne peut y avoir doute que lorsque $g \prec 1/x$ et $g \succ x^{\mu}$ pour <u>tout</u> exposant $\mu < -1$; c'est le cas par exemple si $g(x) = 1/x(\log x)^{\mu}$. $(\mu > 0)$.

Mais $(\log x)^{-\mu+1}/(-\mu+1)$ est une primitive de $1/(x(\log x)^{\mu})$ si $\mu \neq +1$, et $l_2 x$ est une primitive de $1/(x \log x)$; donc $\int_a^{+\infty} dx/(x.(\log x)^{\mu})$ est <u>finie pour</u> $\mu > +1$, <u>infinie pour</u> $\mu \leqslant +1$.

On pourra donc de nouveau conclure lorsqu'on aura $f \preccurlyeq 1/(x.(\log x)^{\mu})$ avec $\mu > +1$ ou $f \succcurlyeq 1/(x(\log x)^{\mu})$ avec $\mu \leqslant +1$: dans le premier cas $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est <u>finie</u>, dans le second elle est <u>infinie</u>.

Plus généralement, $(l_n x)^{-\mu+1}/(-\mu+1)$ est une primitive de $1/(x.\log x.l_2 x \ldots l_{n-1}x.(l_n x)^{\mu})$ si $\mu \neq +1$, et $l_{n+1}x$ est une primitive de $1/(x.\log x.l_2 x \ldots l_n x)$; on en déduit que, si on a $f \preccurlyeq 1/(x.\log x.l_2 x \ldots l_{n-1}x.(l_n x)^{\mu})$ avec $\mu > 1$, $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est <u>finie</u> ; cette intégrale est au contraire <u>infinie</u> lorsqu'on a $f \succcurlyeq 1/(x.\log x \ldots l_{n-1}x.(l_n x)^{\mu})$ avec $\mu \leqslant 1$. Ce critère est dit

<u>critère logarithmique d'ordre n</u> (le critère de comparaison à x^{μ} est dit, par extension, <u>critère logarithmique d'ordre 0</u>).

Il est rare, en pratique, qu'on ait à utiliser un critère logarithmique d'ordre > 3 ; mais on peut aisément définir des fonctions continues par morceaux, pour lesquelles <u>aucun</u> critère logarithmique (d'ordre si élevé soit-il) ne permet de dire si leur intégrale est finie ou non au voisinage de $+\infty$. Il suffit de former une fonction f telle qu'on ait à la fois $f \prec 1/(x.\log x\ldots l_n x)$ et $f \succ 1/(x.\log x\ldots(l_n x)^{\mu})$ pour tout entier n et tout exposant $\mu > 1$; nous allons montrer qu'on peut le faire de sorte que l'intégrale de f soit finie ou infinie.

Déterminons d'abord par récurrence une suite (a_n) telle que $a_0=1$, et $l_{n+1}a_{n+1} = l_{n+1}a_n + 1$ pour $n \geqslant 0$; cette suite tend évidemment vers $+\infty$; si on pose

$f_n(x)=1/(x.\log x.l_2x\ldots l_n x)$ pour $a_n \leqslant x \leqslant a_{n+1}$

on aura $\int_{a_n}^{a_{n+1}} f_n(t)dt = 1$, donc, si f est une juxtaposition des f_n, $\int_1^{+\infty} f(t)dt = +\infty$, et f satisfait bien aux conditions précédentes. La fonction ainsi formée n'est pas continue, mais il serait aisé de la modifier légèrement au voisinage des points a_n de manière qu'elle soit continue et décroissante dans $]1,+\infty[$, et jouisse des mêmes propriétés que ci-dessus.

Déterminons maintenant une suite (b_n) telle que $1/l_n b_n = 1/2^n$ c'est-à-dire $b_n = e_n(2^n)$; cette suite tend encore vers $+\infty$.

Si on pose

$g_n(x)=1/(x.\log x.1_2x\ldots 1_{n-1}x.(1_nx)^2)$ pour $b_n \leqslant x \leqslant b_{n+1}$

on aura

$$\int_{b_n}^{b_{n+1}} g_n(x)dx \leqslant 1/2^n$$

et par suite, si g est une juxtaposition des g_n , $\int_2^{+\infty} g(t)dt$ est <u>finie</u>, et aucun critère logarithmique n'est applicable à g . On modifierait aisément g de manière à la rendre continue, tout en conservant ses autres propriétés.

On peut toutefois montrer que, pour <u>une fonction</u> (H), il existe toujours un entier $n \geqslant 0$ tel que le critère logarithmique d'ordre n lui soit applicable[1].

Il est utile de formuler les critères correspondant aux critères logarithmiques précédents, et relatifs aux primitives d'une fonction, continue et bornée par morceaux et positive dans un intervalle ouvert <u>borné</u> I , mais non bornée au voisinage de l'origine ou de l'extrémité de I . On peut se limiter au cas d'une fonction positive f, définie dans un intervalle $]0,a[$, mais non bornée au voisinage de 0 ; le changement de variable $u = 1/t$, ramène alors l'étude de la primitive de f(t) au voisinage de 0 à celle de la primitive de $f(1/u)/u^2$ au voisinage de $+\infty$, d'où les critères suivants :

1° Si, au voisinage de 0 , $f \leqslant x^{\mu}$, avec $\mu > -1$, $\int_0^a f(t)dt$ est <u>finie</u> ; cette intégrale est au contraire <u>infinie</u> si $f \geqslant x^{\mu}$ avec $\mu \leqslant -1$.

2° Si, au voisinage de 0 , on a $f \leqslant 1/(x.\log(1/x).1_2(1/x)\ldots\ldots$
$\ldots 1_{n-1}(1/x).(1_n(1/x))^{\mu})$, avec $\mu > 1$, $\int_0^a f(t)dt$ est <u>finie</u> ; cette intégrale est au contraire <u>infinie</u> lorsque

$$f \geqslant 1/(x.\log(1/x).1_2(1/x)\ldots 1_{n-1}(1/x).(1_n(1/x))^{\mu}) \text{ avec } \mu \leqslant 1$$

On notera que, pour les critères logarithmiques d'ordre $\geqslant 1$ les conditions pour l'exposant μ sont les mêmes au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de 0 ; elles sont <u>inversées</u> au contraire pour le critère d'ordre 0 .

<u>Exemples</u>. 1) Si on considère l'intégrale

$$\int_0^1 t^p(1-t)^q dt$$

l'application du critère d'ordre 0 aux voisinages des points 0 et 1 montre que la condition nécessaire et suffisante pour que cette intégrale soit finie est qu'on ait $p > -1$ et $q > -1$. Cette intégrale est dite <u>intégrale eulérienne de première espèce</u>, et se note $B(p+1, q+1)$.

2) On appelle de même intégrale <u>eulérienne de seconde espèce</u> et on note $\Gamma(x)$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Comme e^{-t} est finie au point $t=0$, et que $e^{-t} < t^{\mu}$ quel que soit $\mu > 0$, au voisinage de $+\infty$, l'application des critères d'ordre 0 montre que la condition nécessaire et suffisante pour que cette intégrale soit finie est $x > 0$.

Lorsqu'une fonction f possède un <u>développement asymptotique</u> au voisinage de $+\infty$, relatif à un ensemble de fonctions-types $\mathfrak{T}$, la seule connaissance de sa <u>partie principale</u> permet, par application des critères logarithmiques, de voir si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est finie ou infinie. L'application du lemme 3 et de la prop.4 du §1 du ch.IV permet d'aller plus loin, et d'obtenir un <u>développement asymptotique</u> de la primitive $F(x)= \int_a^x f(t)dt$ au voisinage de $+\infty$.

Soit en effet

(1) $$f = f_1+f_2+\dots+f_n+R_n$$

le développement asymptotique de f ; distinguons deux cas :

1° $\int_a^{+\infty} f_n(t)dt = \pm\infty$; alors, on a (lemme 3 du §1 du ch.IV)

$$\int_a^x f_1(t)dt \succ \int_a^x f_2(t)dt \succ \dots \succ \int_a^x f_n(t)dt \succ \int_a^x R_n(t)dt$$

donc

$$F = \int_a f_1 + \int_a f_2 + \dots + \int_a f_n + \int_a R_n$$

est un développement asymptotique de F relatif au corps de Hardy formé en adjoignant au corps des fonctions (H) celles des primitives de $f_1, f_2, \dots, f_n$ qui ne sont pas des fonctions (H).

2° $\int_a^{+\infty} f_n(t)dt$ <u>finie</u> ; soit alors k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ le premier indice tel que $\int_a^{+\infty} f_k(t)dt$ soit <u>finie</u> ; si on pose

$$K = \int_a^{+\infty}(f(t)-f_1(t)-\dots-f_{k-1}(t))dt$$

K est finie, puisque la fonction intégrée est équivalente à f_k ; et on peut écrire

$$(2) \qquad F = \int_a^x f_1(t)dt + \dots + \int_a^x f_{k-1}(t)dt + K - \int_x^{+\infty} f_k(t)dt - \dots - \int_x^{+\infty} f_n(t)dt - \int_x^{+\infty} R_n(t)dt$$

Si $K \neq 0$, (2) est un développement asymptotique de F relatif au corps de Hardy obtenu en adjoignant au corps des fonctions (H) celles des primitives de $f_1, f_2, \dots, f_n$ qui ne sont pas des fonctions (H) , car on a (lemme 3 du §1 du ch.IV)

$$\int_a^x f_1(t)dt \succ \int_a^x f_2(t)dt \succ \dots \succ \int_a^x f_{k-1}(t)dt \succ K \succ \int_x^{+\infty} f_k(t)dt \succ \dots \succ \int_x^{+\infty} f_n(t)dt \succ \int_x^{+\infty} R_n(t)dt$$

Si K=0, on aura encore un développement asymptotique de F en supprimant le terme K du second membre de (2).

Lorsque k=1, on a $K = \int_a^{+\infty} f(t)dt$, et le développement de F s'écrit simplement

$$F = K - \int_x^{+\infty} f_1(t)dt - \dots - \int_x^{+\infty} f_n(t)dt - \int_x^{+\infty} R_n(t)dt$$

En général, les primitives qui figurent dans le développement de F n'appartiennent pas à l'ensemble $\mathfrak{T}$; pour avoir un développement de F relatif à $\mathfrak{T}$, il suffira d'avoir un développement, relatif à $\mathfrak{T}$, de chacune des primitives qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{T}$, et de faire ensuite la somme de ces développements suivant la règle donnée au § 3. On est donc ramené à un problème qui est résolu en principe par la prop. 7 du § 1 du ch.IV : <u>trouver un développement asymptotique d'une primitive d'une fonction</u> (H). Supposons par exemple que g soit une fonction (H) telle que $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ soit infinie ; la proposition rappelée donne une partie principale de $\int_a^x g(t)dt$, soit g_1 ; on a donc $g \prec g_1'$, d'où $g-g_1' \prec g_1'$; ~~comme $g-g_1'$ g_1'~~ ; comme $g-g_1'$ est une fonction (H), on pourra obtenir une partie principale de $\int_a^x (g-g_1')dt$, soit g_2, en supposant que cette primitive croisse indéfiniment avec x, et on aura $g_2 \prec g_1$; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne éventuellement à une fonction g_n telle que $h = g-(g_1'+g_2'+\dots+g_n')$ ait une intégrale bornée au voisinage de $+\infty$; on cherchera alors une partie principale g_{n+1} de $\int_x^{+\infty} h(t)dt$, puis une partie principale g_{n+2} de $\int_x^{+\infty}(h-g_{n+1}')dt$, et ainsi de suite : on aboutira finalement à un développement de la forme

$$\int_a^x g(t)dt = g_1+g_2+\dots+g_n+K-g_{n+1}-g_{n+2}-\dots-g_m+R_m$$

avec $K = \int_a^{+\infty} h(t)dt$ (K est à supprimer qu'il est nul, et il peut se faire naturellement que, si loin qu'on pousse le développement, on ne rencontre jamais de termes tendant vers 0).

On aurait de même un développement de $\int_x^{+\infty} g(t)dt$, si cette intégrale est finie ; mais ici, tous les termes du développement tendent vers 0 .

Bien entendu, en procédant comme nous venons de l'indiquer, on n'obtiendra pas nécessairement un développement relatif à un ensemble $\mathfrak{T}$ de fonctions-types donné à l'avance, en général ; l'ensemble des fonctions-types auquel est relatif le développement se détermine en réalité a posteriori, comme nous l'avons déjà signalé.

Exemples. 1) Soit $f(x)=1/\log x$ $(x > 1)$; comme $\log x \prec x^{\mu}$ pour tout exposant $\mu > 0$, $\int_a^{+\infty} dt/\log t = +\infty$. f étant d'ordre 0 par rapport à x , on a , d'après la prop. 7 du § 1 du ch.IV ,

$$\int_a^x dx/\log x \sim x/\log x$$

puis $1/\log x -(x/\log x)' = 1/(\log x)^2$

fonction qui est de nouveau d'ordre 0 par rapport à x ,donc

$$\int_a^x dx/(\log x)^2 \sim x/(\log x)^2$$

De proche en proche, on obtient ainsi le développement

$$\int_a^x dt/\log t = x/\log x + x/(\log x)^2 + \ldots + (n-1)!\ x/(\log x)^n + R_n$$

On voit que, si loin qu'on pousse le développement, tous les termes tendent vers $+\infty$.

2) Soit $f(x)=e^{-x^2}$; on a $f(x) \prec x^{\mu}$ quel que soit μ , donc $\int_a^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est finie. f est d'ordre $-\infty$ par rapport à x , donc on a

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\ dt \sim e^{-x^2}/2x$$

puis

$$e^{-x^2} + (e^{-x^2}/2x)' = -e^{-x^2}/2x^2$$

fonction qui est de nouveau d'ordre $-\infty$ par rapport à x , d'où

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}/2t^2 \, dt \sim e^{-x^2}/4x^3$$

et ainsi de suite, ce qui donne le développement

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = (e^{-x^2}/2x).(1-1/2x^2 + \frac{1.3}{2.2}\frac{1}{x^4} + \ldots + (-1)^n \frac{1.3..(2n-1)}{2^n x^{2n}} + R_n)$$

<u>Remarque fondamentale</u>. Si on peut, comme nous venons de le voir, déduire, de renseignements sur l'allure d'une fonction $f \geqslant 0$ au voisinage de $+\infty$, des renseignements sur l'allure de ses primitives, cela est dû au fait que, d'après le lemme 3 du §1 du ch.IV, on peut <u>intégrer des relations de comparaison</u> telles que $f \preccurlyeq g$, $f \prec g$, $f \sim g$, pourvu que g soit strictement positive et qu'on choisisse convenablement les primitives des deux membres. <u>Pour les fonctions</u> (H), (ou plus généralement des fonctions appartenant à un corps de Hardy), nous avons vu au ch.IV qu'on pouvait aussi en général <u>dériver</u> ces relations de comparaison. Il en est tout autrement lorsqu'il s'agit de fonctions <u>quelconques</u> (dérivables au voisinage de $+\infty$) : <u>de la seule existence d'une relation de comparaison entre deux de ces fonctions, il est impossible de déduire l'existence d'une relation de comparaison entre leurs dérivées</u> ; plus brièvement, <u>on ne peut pas dériver des relations de comparaison</u>, lorsque les fonctions qui y figurent n'appartiennent pas à un même corps de Hardy.

Des exemples fort simples suffisent à le montrer :

1° On a $\sin x^2 \prec x$, mais non $2x \cos x^2 \prec 1$;

2° On a $x^2/2 + x.\sin x + \cos x \sim x^2/2$, mais non $x(1+\cos x) \sim x$.

<u>Exercices</u>. 1) Soit $\varphi(x)$ une fonction définie dans un voisinage de $+\infty$ croissante, admettant une dérivée continue et bornée par morceaux, et telle que $\varphi(x) > x$. Soit f une fonction positive, continue et bornée par morceaux dans un voisinage de $+\infty$; montrer que :

a) S'il existe un nombre strictement positif $\theta < 1$ tel que

$$\varphi'(x)f(\varphi(x)) \leqslant \theta\, f(x)$$

dans un voisinage de $+\infty$, $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est finie ;

b) si

$$\varphi'(x)\, f(\varphi(x)) \geqslant f(x)$$

dans un voisinage de $+\infty$, $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est infinie (critère d'Ermakoff). (Dans le cas a), on montrera qu'on a, pour $x \geqslant x_0$ avec x_0 assez grand

$$(1-\theta)\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(t)dt \leqslant \theta \int_{x_0}^{\varphi(x_0)} f(t)dt$$

Démonstration analogue dans le cas b)).

2) Soient f,g deux fonctions strictement positives, continues et bornées par morceaux dans un voisinage de $+\infty$. Montrer que les intégrales, dans un intervalle $]a,+\infty[$, des fonctions $f/(1+fg)$ et $\mathrm{Min}(f,1/g)$ sont simultanément finies ou infinies.

§ 5. Séries à termes positifs.

<u>Sommabilité des séries à termes positifs</u>. Dans tout ce paragraphe, nous entendons par <u>série à termes positifs</u> une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ telle que $u_n \geqslant 0$ <u>à partir d'une certaine valeur de n</u>. Bien entendu, tout ce qui sera dit relativement à ces séries s'étend immédiatement aux séries dont les termes sont $\leqslant 0$ à partir d'une certaine valeur de n , en changeant simplement les signes.

On sait qu'une série à termes positifs est toujours *sommable au sens large* ; dans les questions où interviennent de telles séries, le premier problème qui se pose à leur sujet est de savoir si elles sont ou non *sommables* (c'est-à-dire si leur somme est finie ou infinie).

La méthode la plus simple et la plus féconde pour aborder ce problème consiste à *associer* à la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ une fonction f , *positive* au voisinage de $+\infty$, *continue et bornée par morceaux*, définie dans $]0,+\infty[$, et telle que, pour tout entier $n > 0$,

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = \int_0^{a_n} f(t)dt$$

où (a_n) est une suite tendant vers $+\infty$; la somme de la série sera finie ou infinie en même temps que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$, ce qui ramène le problème à celui traité au § 4 .

Cette association peut se faire de bien des manières ; nous en utiliserons deux. On appellera pour abréger *fonction gauche* associée à la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, et on désignera par $u_g(x)$, la fonction définie par

$$u_g(x) = u_n \qquad \text{pour} \quad n-1 < x \leqslant n \qquad (n=1,2,\ldots)$$

On appellera de même *fonction droite* associée à la série, la fonction $u_d(x)$ telle que

$$u_d(x)=0 \quad \text{pour} \quad 0<x<1 \;, \quad u_d(x)=u_n \quad \text{pour } n \leqslant x < n+1 \quad (n=1,2,..)$$

Il est immédiat que l'on a

$$s_n = \int_0^n u_g(t)dt = \int_0^{n+1} u_d(t)dt = \int_1^{n+1} u_d(t)dt$$

et par suite, on est ramené à la considération des intégrales

$$\int_0^{+\infty} u_g(t)dt \quad \text{ou} \quad \int_0^{+\infty} u_d(t)dt \;.$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sont deux séries à termes positifs, il est immédiat que la relation $u_n \leqslant v_n$ pour $n > n_0$ est *équivalente* à $u_g(x) \leqslant v_g(x)$ (et aussi à $u_d(x) \leqslant v_d(x)$) pour $x > n_0 - 1$ (resp. $x > n_0$) ; il en résulte que les relations $u_n \preccurlyeq v_n$, $u_n \prec v_n$, $u_n \sim v_n$ (n tendant vers $+\infty$ dans $\mathbb{N}$) sont respectivement équivalentes à $u_g \preccurlyeq v_g$, $u_g \prec v_g$, $u_g \sim v_g$ (ou aux analogues pour les fonctions droites), x tendant vers $+\infty$ dans $\mathbb{R}$.

On en déduit le *critère de comparaison fondamental* :

Soient $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *deux séries à termes positifs, telles* $u_n \preccurlyeq v_n$; *si* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *est finie, il en est de même de* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$; *si* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *est infinie, il en est de même de* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Pour appliquer ce critère, il nous faut donc des *séries de comparaison* ; les plus simples sont celles où $u_n = f(n)$, f étant *une fonction* (H). Il n'y a lieu, naturellement, de considérer que des fonctions f *tendant vers 0* avec $1/n$, car pour tout autre cas, la somme de la série est infinie. Si maintenant f est une fonction (H) positive tendant vers 0 , elle est décroissante ; on en conclut les inégalités

$$u_g(x) \leqslant f(x) \leqslant u_d(x) \qquad \text{(la seconde pour } x \geqslant 1\text{)}$$

d'où, en vertu du critère de comparaison pour les intégrales, on déduit que *la somme* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *et l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *sont finies ou infinies simultanément*.

D'où les *critères logarithmiques* pour les séries à termes positifs

1° *Si une série à termes positifs* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *est telle que* $u_n \preccurlyeq n^{\mu}$, *avec* $\mu < -1$, *sa somme est finie* ; *sa somme est au contraire infinie si* $u_n \succcurlyeq n^{\mu}$ *avec* $\mu \geqslant -1$ (critère d'ordre 0).

2° Si une série à termes positifs $\overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} u_n$ est telle que $u_n \leqslant 1/(n.\log n.1_2n\ldots1_{p-1}n.(1_pn)^{\mu})$ avec $\mu > 1$, sa somme est finie ; sa somme est au contraire infinie si on a $u_n \geqslant 1/(n.\log n.1_2n\ldots.1_{p-1}n.(1_pn)^{\mu})$ avec $\mu \leqslant 1$ (critère d'ordre p).

Bien entendu, on peut former des séries à termes positifs et décroissants pour lesquelles aucun critère logarithmique ne permet de déterminer si leur somme est finie ou non ; il suffit de considérer la série $\overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} f(n)$, f étant une fonction telle que les critères logarithmiques pour les intégrales ne lui soient pas applicables (voir § 4). Mais en pratique, on a rarement à appliquer des critères logarithmiques d'ordre élevé.

Comme $q^n < 1/n^{\mu}$ quel que soit $\mu > 0$ si $0 < q < 1$, l'application du critère d'ordre 0 nous reconne le fait connu que la somme de la série géomètrique $\overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} q^n$ est finie pour $0 < q < 1$. En prenant cette série comme terme de comparaison, on obtient un critère qui peut se mettre sous la forme suivante (critère de Cauchy) : La somme d'une série à termes positifs $\overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} u_n$ est finie si $\limsup_{n\to\infty} (u_n)^{1/n} < 1$; elle est infinie si $\limsup_{n\to\infty} (u_n)^{1/n} > 1$.

En effet, si $\limsup_{n\to\infty} (u_n)^{1/n} = q < 1$, on a $u_n \leqslant q'^n$, quel que soit le nombre q' tel que $q < q' < 1$; si au contraire, $\limsup_{n\to\infty} (u_n)^{1/n} = q > 1$, on a, pour tout q' tel que $1 < q' < q$, $u_n \geqslant q'^n > 1$ pour une infinité de valeurs de n, et par suite la somme de la série $\overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} u_n$ ne peut être finie.

Ce critère est surtout utile dans la théorie des séries entières, dont nous parlerons plus tard ; mais il ne donne aucun renseignement pour les séries $\overset{\infty}{\underset{n=1}{S}} u_n$ telles que

$\log u_n \prec n$, qu'on rencontre tout aussi fréquemment.

Application à l'étude de certaines intégrales. Dans ce qui précède, nous avons ramené l'étude des séries à termes positifs à celle des intégrales de fonctions positives ; mais dans certains cas, il peut au contraire être utile de ramener l'étude d'une intégrale à celle d'une série. Par exemple soit $\varphi(x)$ une fonction positive et périodique de période a (continue et bornée par morceaux dans tout intervalle de longueur a , et d'intégrale finie dans un tel intervalle). Soit d'autre part $f(x)$ une fonction positive, continue et bornée par morceaux dans un voisinage de $+\infty$. Proposons-nous de chercher si l'intégrale $\int_b^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt$ est finie ou infinie. On a

$$\int_b^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_b^{b+na} f(t)\varphi(t)dt =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{b+(n-1)a}^{b+na} f(t)\varphi(t)dt$$

donc on est ramené à l'étude de la série de terme général

$$u_n = \int_{b+(n-1)a}^{b+na} f(t)\varphi(t)dt$$

Or, si m_n et M_n sont la borne inférieure et la borne supérieure de f dans l'intervalle $b+(n-1)a, b+na$, on aura, en posant $K = \int_b^{b+a}\varphi(t)dt$

$$K.m_n \leqslant u_n \leqslant K.M_n$$

relations qui permettrons dans la plupart des cas, de voir si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est finie ou non. Par exemple, si f est décroissante, on a $m_n = M_{n+1}$, donc la série $\mathop{S}_{n=1}^{\infty} u_n$ a une somme finie ou infinie en même temps que la série $\mathop{S}_{n=1}^{\infty} M_n$; d'autre part, on a

$$a.M_{n+1} = a.m_n \leqslant \int_{b+(n-1)a}^{b+na} f(t)dt \leqslant a.M_n$$

ce qui montre encore que les intégrales $\int_b^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt$ et $\int_b^{+\infty} f(t)dt$ sont finies ou infinies en même temps.

<u>Evaluation des sommes partielles d'une série à termes positifs</u>. La connaissance d'une <u>partie principale</u> du terme général u_n d'une série à termes positifs permet aussitôt, par application des critères logarithmiques, de voir si cette série est sommable ou non ; mais on peut en outre, comme nous allons le voir, en déduire une <u>partie principale</u> de la <u>somme partielle</u> $s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$, lorsque la somme de la série est infinie, et du reste $r_n = \sum_{p=n}^{\infty} u_p$, lorsque la série est sommable.

Tout d'abord, si $u_n \sim f(n)$, où f est une fonction (H) , on a $s_n \sim \sum_{i=1}^{n} f(i)$ (resp. $r_n \sim \sum_{p=n}^{\infty} f(p)$) d'après le lemme 3 du § 1 du ch. IV appliqué aux fonctions gauches (ou droites) associées aux séries $\mathop{S}_{n=1}^{\infty} u_n$ et $\mathop{S}_{n=1}^{\infty} f(n)$. On est donc ramené à examiner le cas où $u_n = f(n)$, f étant une fonction (H).

<u>Proposition 1</u>. <u>Soit f une fonction</u> (H) <u>telle que la somme</u> $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ <u>soit infinie</u> (resp. <u>finie</u>) :

1° <u>Si f est d'ordre infini par rapport à e^x , on a</u>

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(i) \sim f(n) \qquad (\text{resp. } r_n = \sum_{p=n}^{\infty} f(p) \sim f(n)).$$

2° <u>Si f est d'ordre fini</u> α <u>par rapport à e^x</u> , <u>on a</u>

$$s_n \sim \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} \int_1^n f(t)dt \qquad (\text{resp. } r_n \sim \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} \int_n^{+\infty} f(t)dt)$$

1° Si $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = +\infty$ et si f est d'ordre infini par rappor à e^x , f est croissante au voisinage de $+\infty$, donc

65

$$s_{n-1} = \int_1^n f_d(t)dt \leqslant \int_1^n f(t)dt \sim (f(n))^2/f'(n)$$

d'après la prop.7 du § 1 du ch.IV. Mais comme $f \prec f'$, on a $s_{n-1} \prec f(n)$, d'où $s_n = f(n)+s_{n-1} \sim f(n)$.

Démonstration analogue si $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ est finie, en utilisant la fonction gauche associée à la série.

2° Soit $f(x) = e^{ax}g(x)$, où g est d'ordre 0 par rapport à e^x , et supposons d'abord que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = +\infty$. Comparons $f(n)$ à $\int_{n-1}^n f(t)dt$; on a

$$f(n)-\int_{n-1}^n f(t)dt = \int_{n-1}^n (e^{an}g(n)-e^{at}g(t))dt$$

$$= g(n)\int_{n-1}^n (e^{an}-e^{at})dt + \int_{n-1}^n e^{at}(g(n)-g(t))dt$$

Or $g(n)-g(t)=(n-t)g'(z)$, avec $t < z < n$, donc $n-z \leqslant 1$. D'après l'hypothèse sur g , on a $g' \prec g$, donc, si g n'est pas équivalente à une constante $\neq 0$, on a aussi $g'' \prec g'$, ce qui, d'après le lemme du § 3 , montre que $(n-t)g'(z) \preccurlyeq g'(n) \prec g(n)$, d'où

$$\int_{n-1}^n e^{at}(g(n)-g(t))dt \prec e^{an}g(n) = f(n)$$

et on aurait la même relation si g était équivalente à une constante, comme on le voit directement. On peut donc écrire

$$f(n)-\int_{n-1}^n f(t)dt = f(n)(1-\frac{1-e^{-a}}{a}+\varepsilon(n)) \qquad (\frac{1-e^{-a}}{a}=1 \text{ si } a=0)$$

d'où

$$f(n) \sim \frac{a}{1-e^{-a}}\int_{n-1}^n f(t)dt$$

et, d'après le lemme 3 du § 1 du ch.IV ,

$$s_n \sim \frac{a}{1-e^{-a}}\int_1^n f(t)dt$$

Raisonnement tout à fait analogue si $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ est finie.

Par application répétée des raisonnements précédents on peut non seulement avoir une partie principale, mais un <u>développement asymptotique</u> de s_n (resp. r_n). Si f est d'ordre infini par rapport à e^x, on pourra en effet écrire, dans le cas où $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = +\infty$, et pour toute valeur <u>fixe</u> de p

$$s_n = f(n) + f(n-1) + f(n-2) + \dots + f(n-p) + R_p$$

avec $f(n) \succ f(n-1) \succ f(n-2) \succ \dots \succ f(n-p) \succ R_p$

On pourra en outre développer $f(n-1)$, $f(n-2)$, etc..., relativement à un ensemble de fonctions types $\mathcal{T}$, si elles ne font pas partie de cet ensemble.

<u>Exemple</u>. Soit $u_n = n^n = e^{n\log n}$, d'ordre infini par rapport à e^n. On a, d'après ce qui précède

$$s_n = n^n + (n-1)^{n-1} + \dots + (n-p)^{n-p} + R_p$$

Or, on a, d'après les procédés du § 3

$$(n-k)\log(n-k) = n.\log n - k.\log n - k + \frac{k^2}{2n} + \dots + \frac{k^r}{r(r-1)}\frac{1}{n^r}(1+\varepsilon(n))$$

ce qui permet d'avoir par exemple, comme développement à 4 termes de s_n

$$s_n = n^n\left[1 + \frac{1}{e^n} + \left(\frac{1}{2e} + \frac{1}{e^2}\right)\frac{1}{n^2} + \left(\frac{7}{24e} + \frac{2}{e^2} + \frac{1}{e^3}\right)\frac{1}{n^3}(1+\varepsilon_1(n))\right]$$

Si maintenant f est d'ordre α par rapport à e^x, on a vu que

$$f(n) \sim \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} \int_{n-1}^{n} f(t)dt$$

Comme on peut développer une primitive de f, on saura aussi développer $\int_{n-1}^{n} f(t)dt$, et par suite avoir une partie principale g(n) de la différence $f(n) - \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} \int_{n-1}^{n} f(t)dt$; une partie principale de $\sum_{i=1}^{n} g(i)$ (en supposant $\sum_{n=1}^{\infty} g(n)$ infinie), obtenue par application de la prop. 1, donnera donc un second terme d'un développement asymptotique de s_n. On détermine ainsi de proche en proche les termes $h_1, h_2, \ldots, h_p$ du développement asymptotique de s_n, qui tendent vers $+\infty$, la différence $s_n-(h_1+h_2+\ldots+h_k)$ apparaissant toujours comme la somme partielle d'une série de somme infinie. Il se peut qu'on aboutisse ainsi à un terme h_p tel que $s_n-(h_1+h_2+\ldots+h_p)$ soit la somme partielle d'une série sommable. Si K est la somme de cette série, on en développera le reste suivant les mêmes principes, et on aura finalement un développement de la forme

$$s_n = h_1 + h_2 + \ldots + h_p + K - h_{p+2} - \ldots - h_q + R_q$$

les termes $h_{p+2}, \ldots, h_q$ tendant vers 0 (bien entendu, ces termes peuvent ne jamais se présenter, et il se peut aussi que $K = 0$). Procédés tout à fait analogues lorsqu'il s'agit de développer le reste d'une série sommable.

Exemple. Soit $u_n = n^\mu$, avec $\mu \geqslant -1$. Supposons d'abord $\mu > -1$; comme u_n est d'ordre 0 par rapport à e^n, on a

$$s_n = \sum_{p=1}^{n} p^\mu \sim \int_1^n t^\mu \, dt \sim n^{\mu+1}/(\mu+1)$$

puis

$$n^\mu - \int_{n-1}^{n} t^\mu \, dt = n^\mu - (n^{\mu+1} - (n-1)^{\mu+1})/(\mu+1) \sim \mu n^{\mu-1}/2$$

Si on suppose $\mu > 0$, on aura donc

$$s_n = n^{\mu+1}/(\mu+1) + \frac{1}{2} n^\mu + R_2$$

si au contraire $-1 < \mu < 0$, on a

$$s_n = n^{\mu+1}/(\mu+1) + K - \frac{1}{2} n^\mu + R_2 \text{ , où K est une constante.}$$

On a en outre

$$n^\mu - (n^{\mu+1} - (n-1)^{\mu+1})/(\mu+1) - \frac{1}{2}(n^\mu - (n-1)^\mu) \sim \frac{\mu(\mu-1)}{12} n^{\mu-2}$$

Donc, si $\mu > 1$, on aura

$$s_n = n^{\mu+1}/(\mu+1) + \frac{1}{2} n^\mu + \frac{\mu}{12} n^{\mu-1}(1+\varepsilon(n))$$

et on examinerait de même les cas où $-1 < \mu < 1$, et μ non entier .

Le cas où μ est entier se ramène à celui où $\mu = -1$. On a alors

$$s_n = \sum_{p=1}^{n} 1/p \sim \int_1^n dt/t = \log n$$

puis

$$1/n - \int_{n-1}^{n} dt/t = 1/n + \log(1-1/n) \sim -1/2\, n^2$$

Il en résulte que l'expression $s_n - \log n$ est équivalente à une constante γ ; cette constante joue un rôle important en Analyse , et se nomme <u>constante d'Euler</u>. Sa valeur approchée à $1/10^9$ près par défaut est

0,577215664

<u>Remarque</u>. Dans le cas général où f est d'ordre fini par rapport à e^x , on pourrait, en suivant la voie indiquée ci-dessus, arriver à un développement asymptotique de s_n , où les termes successifs s'exprimeraient en fonction des dérivées de f . Dans le cas où f est <u>d'ordre 0</u> par rapport à e^x , la formule à laquelle on parviendrait ainsi sera donnée dans une partie ultérieure de cet ouvrage, comme application des formules dites <u>sommatoires</u>.

<u>Produits infinis</u>. Nous considérerons surtout les produits infinis dont les termes (à partir d'un certain rang) sont <u>supérieurs à 1</u> , c'est-à-dire de la forme $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$ avec $u_n \geq 0$; on y ramène les produits dont tous les facteurs (à partir d'un certain rang) sont <u>inférieurs à 1</u> en considérant les <u>inverses</u> de ces produits ; nous signalerons comment se transforment pour ces produits les propositions les plus importantes relatives aux produits à termes supérieurs à 1 .

On sait qu'on a, par définition

$$\log \prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1+u_n)$$

d'où résulte aussitôt que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ ne peut être <u>fini</u> que si <u>u_n tend vers 0</u> avec $1/n$; comme en outre, lorsqu'on est dans ce cas, on a $\log(1+u_n) \sim u_n$, on a la proposition suivante :

<u>Proposition 2</u>. <u>Pour que le produit</u> $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$, <u>où</u> $u_n \geqslant 0$ <u>à partir d'un certain rang, soit fini, il faut et il suffit que la somme</u> $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ <u>soit finie</u>.

La proposition correspondante pour les produits

$\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n)$, où $0 \leqslant u_n < 1$ à partir d'un certain rang, est la suivante : <u>pour que</u> $\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n)$ <u>ne soit pas nul, il faut et il suffit que</u> $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ <u>soit finie</u>.

L'évaluation asymptotique des <u>produits partiels</u> $p_n = \prod_{i=1}^{n}(1+u_i)$ d'un produit infini $\mathop{\mathrm{P}}_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ $(u_n \geqslant 0)$ se ramène à celle des <u>sommes partielles</u> de la série $\mathop{\mathrm{S}}_{n=1}^{\infty} \log(1+u_n)$, suivie d'une exponentiation (voir § 3).

<u>Exemple : formule de Stirling</u>. Cherchons une évaluation asymptotique de $n!$, produit partiel du produit infini de terme général n ; on est ramené à l'évaluation de $s_n = \sum_{p=1}^{n} \log p$.

D'après la prop. 1, comme $\log x$ est d'ordre 0 par rapport à e^x, on a

$$s_n = \sum_{p=1}^{n} \log p \sim \int_1^n \log t \, dt \sim n\log n - n$$

puis

$$\log n - \int_{n-1}^{n} \log t \, dt = \log n - (n.\log n - (n-1)\log(n-1) - 1)$$
$$= 1/2n + (1+\varepsilon(n))/6\, n^2$$

comme on le vérifie aisément, d'où

$$s_n - n.\log n + n \sim \frac{1}{2}\log n$$

puis

$$\log n - \int_{n-1}^{n} \log t\, dt - \frac{1}{2}(\log n - \log(n-1)) \leqslant 1/n^2$$

d'où résulte que l'expression

$$\sum_{p=1}^{n} \log p - n.\log n + n - \frac{1}{2}\log n$$

est <u>équivalente à une constante K</u> . Nous démontrerons plus tard que cette constante est égale à $\frac{1}{2}\log(2\pi)$; il en résulte la <u>formule de Stirling</u>, d'une grande utilité en Analyse

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

Comme $\log(n+a) = \log n + a/n - a^2/2n^2(1+\varepsilon(n))$

on voit aussi, compte tenu de l'évaluation asymptotique de $\sum_{p=1}^{n} 1/p$, que

lire ε_a

$$\sum_{p=1}^{n} \log(p+a) = n.\log n - n + (a+\frac{1}{2})\log n + K(a)(1+\varepsilon_a(n))$$

où $K(a)$ est une constante dépendant de a , $\varepsilon_a(n)$ une fonction de n et a qui, pour chaque valeur fixe de a , tend vers 0 avec $1/n$; on a donc

$$\prod_{p=1}^{n}(a+p) \sim e^{K(a)} n^{n+a+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

pour toute valeur <u>fixe</u> de a ; nous déterminerons plus tard l'expression de $K(a)$.

<u>Application : critère de seconde espèce pour les séries à termes positifs</u>.

On rencontre souvent, en pratique, des séries à termes positifs $\mathop{S}\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ pour lesquelles le rapport u_{n+1}/u_n a une expression simple en fonction de n , ou un développement asymptotique facile à former. Si on pose $u_{n+1}/u_n = v_{n+1}$, et $v_1 = u_1$, on a $u_n = \prod_{p=1}^{n} v_p$, et pour avoir un développement de u_n , on est ramené à développer un produit partiel du produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} v_n$.

Toutefois, lorsqu'il s'agit seulement de savoir si la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ a une somme finie ou infinie, il est commode d'avoir des critères permettant de répondre à cette question d'après le seul aspect du rapport u_{n+1}/u_n . Un tel critère est le suivant (critère de Raabe) :

<u>La somme d'une série à termes positifs $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est finie si ses termes vérifient la relation $u_{n+1}/u_n \leqslant 1-\alpha/n$ avec $\alpha > 1$ à partir d'un certain rang ; elle est infinie si ses termes vérifient la relation $u_{n+1}/u_n \geqslant 1-1/n$ à partir d'un certain rang.</u>

En effet, si on a $u_{n+1}/u_n \leqslant 1-\alpha/n$ à partir d'un certain rang, on en tire $u_n \leqslant p_n = \prod_{k=2}^{n}(1-\alpha/k)$. Or $\log(1-\alpha/n) = -\alpha/n-\alpha^2/2n^2 (1+\varepsilon(n))$, d'où $\log p_n = -\alpha \log n + K(1+\varepsilon_1(n))$, et $p_n \sim e^K/n^\alpha$; comme $\alpha > 1$, le critère logarithmique d'ordre 0 permet de conclure.

De même, si $u_{n+1}/u_n \geqslant 1-1/n$ à partir d'un certain rang, on en déduit $u_n \geqslant \prod_{k=2}^{n}(1-1/k) \sim e^{K'}/n$, d'après le même calcul, d'où la proposition.

On démontrerait de la même manière, en utilisant les critères logarithmiques d'ordre >0, que la somme $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est <u>finie</u> si on a

$$u_{n+1}/u_n \leqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n \log n}-\cdots-\frac{1}{n \log n.\ell_2 n\ldots\ell_{p-1} n}-\frac{\alpha}{n.\log n.\ell_2 n\ldots\ell_p n}$$

à partir d'un certain rang, <u>infinie</u> si on a (avec $\alpha > 1$

$$u_{n+1}/u_n \geqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n \log n}-\cdots-\frac{1}{n \log n.\ell_2 n\ldots\ell_p n}$$

à partir d'un certain rang.

72

Comme cas particulier du critère de Raabe, on voit que si on a $\lim\limits_{n\to\infty}.\sup.(u_{n+1}/u_n) < 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ est finie ; elle est au contraire infinie si $\lim\limits_{n\to\infty}.\inf.(u_{n+1}/u_n) > 1$ (critère de D'Alembert). Ces divers critères sont dits <u>critères de seconde espèce</u> (les critères logarithmiques, et plus généralement le critère de comparaison, étant dits <u>de première espèce</u>).

<u>Exemples</u>. Considérons la <u>série hypergéométrique</u>, de terme général

$$u_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1).\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2\ldots n.\ \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}$$

où α, β, γ sont des nombres réels quelconques, différents des entiers négatifs ; il est clair que u_n garde un signe constant à partir d'une certaine valeur de n. On a

$$u_{n+1}/u_n = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)} = \left(1+\frac{\alpha+\beta}{n}+\frac{\alpha\beta}{n^2}\right)\left(1+\frac{\gamma+1}{n}+\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-1} =$$

$$= 1 + \frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{n} + \frac{\alpha\beta-(\alpha+\beta)(\gamma+1)+(\gamma^2+\gamma+1)}{n^2}(1+\varepsilon(n))$$

Le critère de Raabe montre donc que la série a une somme <u>finie</u> si $\alpha+\beta < \gamma$, <u>infinie</u> si $\alpha+\beta > \gamma$; dans le cas où $\alpha+\beta = \gamma$ la série a encore une somme <u>infinie</u>, comme le montre le critère logarithmique d'ordre 1.

Il est important d'observer que les critères de seconde espèce ne peuvent s'appliquer qu'à des séries dont le terme général se comporte de façon très régulière au voisinage de $+\infty$; autrement dit, leur champ d'application est bien plus restreint que celui des critères de première espèce, et ce serait une maladresse de vouloir

73

les utiliser en dehors des cas spéciaux auxquels ils sont particulièrement adaptés. Par exemple, pour la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ telle que $u_{2p} = 1/2^p$, et $u_{2p+1} = 1/3^p$ $(p=0,1,\ldots)$, on a

$$u_{2p+1}/u_{2p} = (2/3)^p \quad , \quad u_{2p+2}/u_{2p+1} = 3(3/2)^p$$

le premier de ces rapport tend donc vers 0, le second vers $+\infty$, autrement dit $\varliminf_{n\to\infty}(u_{n+1}/u_n)=0$, $\varlimsup_{n\to\infty}(u_{n+1}/u_n)=+\infty$; aucun critère de seconde espèce n'est applicable, et cependant, comme $u_n \leqslant 2^{-n/2}$, la série a évidemment une somme finie.

__Exercices__. 1) Si une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ à termes positifs a une somme finie, il en est de même de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n u_{n+1}}$. Montrer que la réciproque est inexacte en général ; elle est vraie si la suite (u_n) est décroissante.

2) Si la série à termes positifs $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ a une somme finie il en est de même de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n}/n^{\alpha}$ pour $\alpha > \frac{1}{2}$.

3) Si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty$ $(u_n \geqslant 0)$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n/(1+u_n) = +\infty$.

4) Soit (p_n) une suite croissante de nombres positifs, tendant vers $+\infty$:

a) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} (p_n - p_{n-1})/p_n$ a une somme infinie (théorème d'Abel-Dini).

b) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} (p_n - p_{n-1})/p_n p_{n-1}^{\rho}$ a une somme finie, quel que soit $\rho > 0$ (théorème de Pringsheim) (comparer à la série de terme général $(1/p_{n-1}^{\rho} - 1/p_n^{\rho})$).

c) Si p_n/p_{n-1} tend vers 1, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} (p_k - p_{k-1})/p_k \sim \log p_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k(p_k-p_{k-1}) \sim \frac{1}{2}\, p_n^2 .$$

5) A toute série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ de somme <u>finie</u> on peut faire correspondre une série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ de somme <u>infinie</u>, dont le terme général tend vers 0 , de sorte que

$$\lim_{n\to\infty}\inf\,(v_n/u_n) = 0$$

6) Soit (a_n) une suite quelconque de nombres > 0. Si une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est telle qu'on ait, à partir d'un certain rang

$$a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} \geqslant \rho\ u_n$$

où ρ est un nombre fixe > 0 , sa somme est finie (critère de Kummer).

7) Soit (u_n) une suite décroissante de nombres positifs ; s'il existe un entier k tel que $k.u_{kn} \geqslant u_n$ quel que soit n à partir d'un certain rang, la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ a une somme infinie.
