COTE : BKI 04-1.6 et 04-1.7

CHAPITRE III ETAT 2
ETUDE LOCALE DES FONCTIONS
APPENDICES I ET II

Rédaction n° 007

Nombre de pages : 90

Nombre de feuilles : 90

Université Henri Poincaré - Nancy I
INSTITUT ÉLIE CARTAN - UMR 7502
Bibliothèque de mathématiques
B.P. 239
54506 Vandoeuvre-Lès-Nancy

Livre IV Chapitre III
Etat 2
Etude locale des fonctions
7

Chapitre IV

A 7 2

Ancien CHAPITRE III (Etat 2)

ETUDE LOCALE DES FONCTIONS.

§ 1. Comparaison des fonctions sur un ensemble filtré.

Nous considérerons dans ce chapitre des fonctions définies dans un ensemble E , filtré par un filtre $\mathcal{F}$, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou dans $\mathbb{C}$. Dans la plupart des applications, E est une partie d'un espace numérique $\mathbb{R}^n$ ou de la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{F}$ la trace sur E du filtre des voisinages d'un point adhérent à E .

Il ne suffit pas en général de savoir qu'une fonction définie dans E (ou seulement dans un ensemble de $\mathcal{F}$) tend vers une limite donnée suivant $\mathcal{F}$ pour pouvoir traiter tous les problèmes de "passage à la limite suivant $\mathcal{F}$ " où interviennent des expressions formées avec la fonction f .

Par exemple, lorsque la variable réelle x tend vers $+\infty$, les trois fonctions x, x^2 et $\sqrt{x}$ tendent toutes trois vers $+\infty$, mais, des expressions $(x+1)^2-x^2$, $(x+1)-x$, $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$, la première tend vers $+\infty$, la seconde vers 1 et la troisième vers 0 .

Il importe donc de connaître, non seulement la valeur limite d'une fonction, mais encore la "manière" dont elle tend vers cette limite ; en d'autres termes, on est amené à comparer entre elles les fonctions définies dans E (ou dans un ensemble de $\mathcal{F}$), relativement au filtre $\mathcal{F}$.

1. Relations de comparaison. Comparer une fonction f à une fonction g relativement au filtre $\mathcal{F}$, c'est, par définition, chercher à déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence du rapport f/g suivant le filtre $\mathcal{F}$. Il faut naturellement que ce rapport soit défini dans E , ou tout au moins dans un ensemble du filtre $\mathcal{F}$; aussi, sauf mention expresse du contraire, on supposera toujours dans ce chapitre que la "fonction de comparaison" g est finie et strictement positive dans un ensemble du filtre $\mathcal{F}$.

On est amené à introduire des notations spéciales pour écrire de façon abrégée les principales relations qui peuvent avoir lieu lorsqu'on compare f à g :

1° Lorsque $\limsup_{\mathcal{F}} |f|/g < +\infty$ (c'est-à-dire qu'il existe un ensemble $M \in \mathcal{F}$ et un nombre fini $k > 0$ tel que $|f(x)| \leqslant kg(x)$ dans M), on écrit $f = O_{\mathcal{F}}(g)$, ou $f(x) = O_{\mathcal{F}}(g(x))$, ou simplement $f = O(g)$ (ou $f(x) = O(g(x))$), ou enfin, $f \preccurlyeq g$, si aucune confusion n'en résulte.

2° Lorsque $\liminf_{\mathcal{F}} |f|/g > 0$ (c'est-à-dire qu'il existe un ensemble $M \in \mathcal{F}$ et un nombre fini $k > 0$ tel que $|f(x)| \geqslant kg(x)$ dans M ce qui entraîne $|f(x)| > 0$ dans M), écrit $g = O_{\mathcal{F}}(|f|)$, ou $g(x) = O_{\mathcal{F}}(|f(x)|)$ (en supprimant éventuellement la mention du filtre $\mathcal{F}$), ou enfin $g \preccurlyeq |f|$ (ou $|f| \succcurlyeq g$).

3° Lorsqu'on a <u>à la fois</u> $f \preccurlyeq g$ et $|f| \succcurlyeq g$ (c'est-à-dire qu'il existe un ensemble $M \in \mathcal{F}$ et deux nombres a,b tels que $0 < a \leqslant b$ et $ag(x) \leqslant |f(x)| \leqslant bg(x)$ dans M), on écrit $f \asymp g$ (si aucune confusion ne peut en résulter).

4° Lorsque $\lim_{\mathcal{F}} f/g = 0$, on écrit $f = o_{\mathcal{F}}(g)$, ou $f(x) = o_{\mathcal{F}}(g(x))$ (avec suppression éventuelle de la mention du filtre $\mathcal{F}$), ou enfin $f \prec g$; on dit parfois que f est <u>négligeable devant</u> g (relativement au filtre $\mathcal{F}$), ou que g est <u>prépondérante sur</u> f . La relation $f = o(g)$ entraîne évidemment $f = O(g)$.

5° Lorsque $\lim_{\mathcal{F}} |f|/g = +\infty$ ce qui entraîne $|f(x)| > 0$ dans un ensemble du filtre $\mathcal{F}$, on écrit $g = o_{\mathcal{F}}(|f|)$ ou $g(x) = o_{\mathcal{F}}(|f(x)|)$, ou $g \prec |f|$ (ou $|f| \succ g$).

6° Lorsque $\lim_{\mathcal{F}} f/g = a \neq 0$, on écrit $f \sim ag$, et on dit que f est <u>équivalente à</u> ag (relativement au filtre $\mathcal{F}$). Cette dernière notation s'emploie plus généralement, sans aucune hypothèse sur g

(g pouvant en particulier s'annuler dans tout ensemble de $\mathfrak{F}$) s'il existe une fonction $\varepsilon(x)$ tendant vers 0, telle qu'on ait identiquement $f(x)=(a+\varepsilon(x))g(x)$ dans un ensemble de $\mathfrak{F}$.

Lorsque E est une partie d'un espace topologique, $\mathfrak{F}$ la trace sur E du filtre des voisinages d'un point $a \in \overline{E}$, et qu'il y a lieu de préciser le filtre $\mathfrak{F}$ dans la notation précédente, on écrira $x \to a . x \in E\ (g(x))$ au lieu de $0_{\mathfrak{F}}(g(x))$; si en outre E est un voisinage de a, on écrira seulement $x \to a\ (g(x))$; si E est le complémentaire de $\{a\}$ par rapport à un voisinage de a, on écrit $x \to a, x \neq a\ (g(x))$.

Notations analogues pour le symbole $o(g)$.

Nous dirons que f est <u>comparable</u> à g si l'une (au moins) des relations $f \ll g$, $|f| \gg g$ a lieu ; nous dirons que f est <u>strictement comparable</u> à g si une des relations $f \prec g$, $|f| \succ g$, $f \sim ag$ (a constante) $\neq 0$ a lieu.

<u>Exemples</u>. 1) La relation $f=O(1)$ équivaut à dire que f est <u>bornée</u> sur un ensemble de $\mathfrak{F}$; la relation $f=o(1)$ équivaut à $\lim_{\mathfrak{F}} f=0$.

2) Lorsque x réel tend vers $+\infty$, la relation $\alpha < \beta$ entraîne $x^{\alpha} \prec x^{\beta}$.

3) Dans les mêmes conditions, on a vu (chap. II, § , prop.) qu'on a $x^n \prec e^x$ pour tout entier $n > 0$.

4) Si $p(x)=a_0x^n+\ldots+a_n$ est un polynome de degré n de la variable réelle x, on a $p(x) \sim a_0 x^n$ lorsque x tend vers $+\infty$; la même relation a lieu lorsque les a_i et x sont complexes, et que $|x|$ tend vers $+\infty$.

5) Lorsque la variable complexe z tend vers 0, on a $e^z-1 \sim z$ (chap. II, § , n°).

6) Dans le plan R^2, au voisinage du point (0,0), on a $x^2+y^2=o(|x|+|y|)$.

7) Deux fonctions données f et g ne sont pas nécessairement comparables. Par exemple, la fonction x sin x n'est pas comparable à la constante 1 lorsque x tend vers $+\infty$. De même, deux fonctions peuvent être comparables sans l'être strictement. Par exemple, on a sin x=O(1) lorsque x tend vers $+\infty$, mais sin x n'est pas strictement comparable à la constante 1.

2. Transitivité. Proposition 1. Les relations $f \preccurlyeq g$, $g \preccurlyeq h$ entraînent $f \preccurlyeq h$; les relations $f \prec g$, $g \preccurlyeq h$ entraînent $f \prec h$; il en est de même des relations $f \preccurlyeq g$, $g \prec h$. Les relations $f \sim g$ et $g \sim h$ entraînent $f \sim h$.

Les démonstrations sont immédiates à partir des définitions.

De cette proposition on déduit d'abord que, si Γ est l'ensemble des fonctions définies dans un ensemble appartenant à $\mathcal{F}$ (dépendant de la fonction), à valeurs dans R_+^*, la relation $f \asymp g$ est une relation d'équivalence R_0 dans Γ ; par passage au quotient, la relation $f \preccurlyeq g$ donne une relation d'ordre dans l'ensemble Γ/R_0.

De même, la relation "il existe un nombre $a \neq 0$ tel que $f \sim ag$" est une relation d'équivalence R_1 dans Γ ; par passage au quotient, la relation "$f \prec g$, ou il existe $a \neq 0$ tel que $f \sim ag$" donne encore une relation d'ordre dans l'ensemble Γ/R_1.

Il est à noter que les ensembles ordonnés Γ/R_0 et Γ/R_1 ainsi définis ne sont pas totalement ordonnés en général.

Cela résulte de ce que, dans l'ensemble Γ, il existe des couples de fonctions f,g non comparables ; par exemple, lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction $x^2\sin^2 x + \frac{1}{x^2}\cos^2 x$ appartient à Γ et n'est pas comparable à la constante 1. On peut même donner des

des exemples de couples de fonctions strictement croissantes dans un voisinage de $+\infty$, et non comparables (exerc.1).

A fortiori, (et malgré les analogies que suggèrent les notations) la négation de $f \preccurlyeq g$ n'est pas $f \succ g$ dans l'ensemble Γ ; de même, la relation $f \preccurlyeq g$ n'est pas équivalente à la relation " $f \prec g$ ou $f \asymp g$ ", comme le montre l'exemple $f(x)=x^2\sin^2 x+1$, $g(x) = x^2$.

3. Relations de comparaison et opérations algébriques. Proposition 2. Les relations $f \sim g$ et $f-g \prec g$ sont équivalentes.

Une autre forme de cette proposition est la suivante : les relations $f \prec g$ et $f+g \sim g$ sont équivalentes. En particulier, si $f \prec g$, la fonction $f+ag$ (a constante $\neq 0$) a le signe de a dans un ensemble de $\mathcal{F}$.

Avec les notations introduites ci-dessus, la relation $f \sim g$ s'écrit donc encore $f=g+o(g)$.

Proposition 3. Les relations $f_1 \preccurlyeq g$, $f_2 \preccurlyeq g$ entraînent $f_1+f_2 \preccurlyeq g$; les relations $f_1 \prec g$, $f_2 \prec g$ entraînent $f_1+f_2 \prec g$.

En d'autres termes, la somme d'un nombre fini de fonctions négligeables devant g est encore négligeable devant g.

Corollaire. Si g_1 et g_2 sont >0 dans un ensemble de $\mathcal{F}$, les relation $f_1 \preccurlyeq g_1$, $f_2 \preccurlyeq g_2$ entraînent $f_1+f_2 \preccurlyeq g_1+g_2$; les relations $f_1 \prec g_1$, $f_2 \prec g_2$ entraînent $f_1+f_2 \prec g_1+g_2$; les relations $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$ entraînent $f_1+f_2 \sim g_1+g_2$.

En effet, on a $g_1 \preccurlyeq g_1+g_2=g$, et de même $g_2 \preccurlyeq g$; par suite, si $f_1 \preccurlyeq g_1$ et $f_2 \preccurlyeq g_2$, on a $f_1 \preccurlyeq g$ et $f_2 \preccurlyeq g$, d'où la première partie du corollaire ; la seconde partie se démontre de même, et la troisième est une conséquence de la seconde et des relations $f_1-g_1 \prec g_1$, $f_2-g_2 \prec g_2$.

On notera par contre que, dans les mêmes conditions, les relations $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ n'entraînent pas en général $f_1 - f_2 \sim g_1 - g_2$. Par exemple, pour x tendant vers $+\infty$, on a $x^2+x \sim x^2+1$, $x^2 \sim x^2$, mais $x^2+x-x^2 = x \succ 1 = x^2+1-x^2$.

Proposition 4. Les relations $f_1 \preccurlyeq g_1$, $f_2 \preccurlyeq g_2$ entraînent $f_1 f_2 \preccurlyeq g_1 g_2$; les relations $f_1 \prec g_1$, $f_2 \preccurlyeq g_2$ entraînent $f_1 f_2 \prec g_1 g_2$; les relations $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$ entraînent $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.

Corollaire. Les relations $f \preccurlyeq g$ et $f \preccurlyeq ag$ (resp. $f \prec g$ et $f \prec ag$) sont équivalentes pour toute constante $a \neq 0$.

4. Relations de comparaison et fonctions composées. Soit φ une application d'un ensemble F dans E, telle que $\varphi^{-1}(\mathcal{F})$ soit une base de filtre sur F. Si f et g sont deux fonctions définies dans E (ou seulement dans un ensemble A de $\mathcal{F}$), la relation $f \preccurlyeq g$ (resp. $f \prec g$, $f \sim g$) relative au filtre $\mathcal{F}$ entraîne de façon évidente la relation $f \circ \varphi \preccurlyeq g \circ \varphi$ (resp. $f \circ \varphi \prec g \circ \varphi$, $f \circ \varphi \sim g \circ \varphi$) relative au filtre de base $\varphi^{-1}(\mathcal{F})$.

Ces propriétés de la composition à droite sont en général inexactes pour la composition à gauche : de façon précise, si φ est une fonction numérique définie dans $\mathbb{R}_+$, à valeurs positives, la relation $f \preccurlyeq g$ (resp. $f \prec g$, $f \sim g$) entre fonctions à valeurs positives, n'entraîne pas en général la relation $\varphi \circ f \preccurlyeq \varphi \circ g$ (resp. $\varphi \circ f \prec \varphi \circ g$, $\varphi \circ f \sim \varphi \circ g$). Par exemple, lorsque x tend vers $+\infty$, on a $x \prec x^2$, mais $\log \log x \sim \log \log x^2$; de même, on a $x^2 \sim x^2+x$, mais $e^{x^2} \prec e^{x^2+x}$. Il n'y a de résultats de cette nature que pour des fonctions φ particulières :

Proposition 5. Pour tout a réel, la relation $f \sim g$ entraîne $|f|^a \sim |g|^a$; si $a > 0$, la relation $f \preccurlyeq g$ (resp. $f \prec g$) entraîne $|f|^a \preccurlyeq g^a$ (resp. $|f|^a \prec g^a$) ; si $a < 0$, la relation $f \preccurlyeq g$ (resp. $f \prec g$) entraîne $|f|^a \succcurlyeq g^a$ (resp. $|f|^a \succ g^a$).

<u>Proposition 6</u>. <u>Si</u> $\lim_{\mathfrak{F}} g = +\infty$, <u>la relation</u> $f \prec g$ <u>entraîne</u> $e^f \prec e^g$; <u>la relation</u> $f \sim g$ <u>entraîne</u> $\log f \sim \log g$.

En effet, $f-g = g(\frac{f}{g} - 1)$ tend vers $-\infty$ si $f \prec g$. De même, si $f \sim g$, on a $\log f = \log g + \log \frac{f}{g}$, donc $\log f - \log g$ tend vers 0 , et il en est de même de $\frac{\log f}{\log g} - 1 = \frac{\log f - \log g}{\log g}$

On notera par contre que la relation $f \preccurlyeq g$ n'entraîne pas nécessairement $e^f \preccurlyeq e^g$; par exemple, on a $x \preccurlyeq \frac{x}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$, mais $e^x \succ e^{x/2}$.

<u>Définition 2</u>. <u>Soit</u> g <u>une fonction strictement positive dans un ensemble de</u> $\mathfrak{F}$, <u>et telle que</u> $\lim_{\mathfrak{F}} g = 0$ <u>ou</u> $\lim_{\mathfrak{F}} g = +\infty$. <u>On dit qu'une fonction</u> f <u>est d'ordre</u> (fini ou infini) ρ <u>par rapport à</u> g <u>si</u> $\lim_{\mathfrak{F}} \frac{\log|f|}{\log g} = \rho$.

On peut exprimer autrement l'existence de l'ordre de f par rapport à g ; nous nous limiterons au cas où $\lim_{\mathfrak{F}} g = +\infty$, on passe de là au cas $\lim_{\mathfrak{F}} g = 0$ en remplaçant g par $1/g$ et ρ par $-\rho$.

Si $\rho = +\infty$ pour tout $\alpha > 0$, il existe un ensemble M de $\mathfrak{F}$ tel que $\log|f(x)| > \alpha \log g(x)$ pour tout $x \in M$, c'est-à-dire $|f(x)| > (g(x))^\alpha$; a fortiori, comme $\lim_{\mathfrak{F}} g = +\infty$, on a $|f| \succ g^\beta$ pour tout $\beta < \alpha$, et par suite pour tout nombre réel $\beta > 0$. Si $\rho = -\infty$, l'ordre de $1/f$ par rapport à g est $+\infty$, donc on a $f \prec g^{-\beta}$ pour tout nombre $\beta > 0$. Si $\rho = 0$ (c'est-à-dire $\log|f| \prec \log g$), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble M de $\mathfrak{F}$ tel que $-\varepsilon \log g(x) < \log|f(x)| < \varepsilon \log g(x)$ pour tout $x \in M$, ou encore $(g(x))^{-\varepsilon} < |f(x)| < (g(x))^\varepsilon$; comme $\lim_{\mathfrak{F}} g = +\infty$, on a donc $g^{-\varepsilon} \prec |f| \prec g^\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Les réciproques de ces propositions sont immédiates. Enfin, si ρ est un nombre fini et $\neq 0$, on peut écrire $|f| = g^\rho f_1$, où f_1 est d'ordre 0 par rapport à g .

Remarques. 1) On observera que, lorsque f est d'ordre fini $\rho \neq 0$ par rapport à g, le rapport f/g^{ρ} ne tend pas nécessairement vers une limite suivant $\mathcal{F}$; par exemple, si $\lim_{\mathcal{F}} g = +\infty$ toute fonction f telle que $\liminf_{\mathcal{F}} f > 0$ et $\limsup_{\mathcal{F}} f < +\infty$ est d'ordre 0 par rapport à g ; la fonction fg est donc d'ordre 1 par rapport à g, sans que $\lim_{\mathcal{F}} f$ existe nécessairement

2) Une fonction f définie sur un ensemble de $\mathcal{F}$ n'a pas nécessairement un ordre déterminé par rapport à g, car cette hypothèse implique en particulier que f est strictement comparable à toutes les puissances de g, sauf une au plus. Or, il n'en est pas nécessairement ainsi, comme le montre l'exemple où (x tendant vers $+\infty$), $g(x)=x$ et $f(x)=1+x^2\sin^2 x$. Dans cet exemple, f est strictement comparable à g^{α} pour $\alpha < 0$ et $\alpha > 2$; mais si on prenait $f(x)=e^x\sin^2 x+e^{-x}\cos^2 x$, f ne serait strictement comparable à aucune puissance (positive ou négative) de g.

Exercices. 1) Montrer que pour x tendant vers $+\infty$, la fonction $f(x)=(x\cos^2 x + \sin^2 x)e^{x^2}$ est monotone, mais n'est pas strictement comparable à e^{x^2}, ni comparable à $x^{\frac{1}{2}}e^{x^2}$.

2) Soit φ une fonction positive définie et croissante dans $\mathbf{R}_+^*$.

a) Si la fonction $\dfrac{\log \varphi(x)}{\log x}$ est croissante, la relation $f \prec g$ entre fonctions >0 entraîne $\varphi \circ f \prec \varphi \circ g$.

b) Si la fonction $\dfrac{\log \varphi(x)}{\log x}$ est décroissante, la relation $f \sim g$ entraîne $\varphi \circ f \sim \varphi \circ g$.

§ 2. Développements asymptotiques.

1. Echelles de comparaison. Soit E un ensemble filtré par un filtre $\mathcal{F}$, Γ l'ensemble des fonctions à valeurs >0, définies dans un ensemble appartenant à $\mathcal{F}$ (et dépendant de la fonction envisagée). Dans l'ensemble Γ, la relation "$f \prec g$, ou $f=g$" est une relation d'ordre Ω (qu'on aura soin de ne pas confondre avec $f \preceq g$).

Définition 1. On dit qu'une partie $\mathcal{E}$ de Γ est une échelle de comparaison lorsque $\mathcal{E}$ est totalement ordonnée par la relation d'ordre induite par $\mathcal{Q}$.

En d'autres termes, si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{E}$, on a toujours une (et une seule) des trois relations : $f \prec g$, $f \succ g$, $f = g$. On peut dire encore que dans $\mathcal{E}$ la relation $f \asymp g$ (et a fortiori $f \sim ag$, où a est une constante $\neq 0$) entraîne $f = g$.

Toute partie d'une échelle de comparaison est évidemment une échelle de comparaison.

Exemples. 1) Pour x tendant vers $+\infty$, l'ensemble des fonctions x^a où a est un nombre réel arbitraire, est une échelle de comparaison.

2) Si $\mathcal{F}$ est la trace sur le complémentaire du point (0,0) de $\mathbb{R}^2$ du filtre des voisinages de ce point, les fonctions $(x^2+y^2)^a$, où a est un nombre réel arbitraire, forment une échelle de comparaison ; il en est de même des fonctions $(|x|+|y|)^a$; par contre, la réunion de ces deux échelles de comparaison n'est plus une échelle de comparaison.

3) Pour x tendant vers $+\infty$, l'ensemble des fonctions de la forme $e^{p(x)}$, où p(x) parcourt l'ensemble des polynomes d'une variable réelle sans terme constant, est une échelle de comparaison ; il suffit de remarquer que le quotient de deux fonctions distinctes de cet ensemble appartient encore à l'ensemble, et qu'une fonction de la forme $e^{p(x)}$ tend nécessairement vers 0 ou $+\infty$ si $p \neq 0$; en effet, on a alors $p(x) \sim ax^n$, où $n > 0$, $a \neq 0$; si $a > 0$, on a $p(x) > \frac{1}{2} ax^n$ pour x assez grand ; si $a < 0$, $p(x) < \frac{1}{2} ax^n$ pour x assez grand ; dans le premier cas, $e^{p(x)}$ tend donc vers $+\infty$, et vers 0 dans le second.

4) Pour x tendant vers $+\infty$, l'ensemble des fonctions de la forme $x^\alpha(\log x)^\beta$ (définies pour $x>1$), où α et β sont des nombres réels arbitraires est une échelle de comparaison. En effet, ici encore, le quotient de deux fonctions de cet ensemble est une fonction de l'ensemble ; il suffit donc de montrer que, si les nombres α et β ne sont pas tous deux nuls, $x^\alpha(\log x)^\beta$ tend nécessairement vers 0 ou $+\infty$; c'est évident si $\alpha=0$, $\beta\neq 0$ ou si $\alpha\neq 0$, $\beta=0$; si α et β sont tous deux $\neq 0$, et si $\alpha>0$, on a $(\log x)^{-\beta} < x^\alpha$, et si $\alpha<0$, $(\log x)^\beta < x^{-\alpha}$ quel que soit β, d'où la proposition.

On observera que cette dernière échelle de comparaison est un ensemble totalement ordonné dont la structure d'ordre est isomorphe à la structure d'ordre lexicographique dans $\mathbb{R}^2$ (on rappelle que dans cette structure, la relation $(\alpha,\beta)<(\gamma,\delta)$ signifie : $\alpha<\beta$, ou $\alpha=\beta$ et $\gamma<\delta$).

De même, l'échelle formée des $e^{p(x)}$ a une structure d'ordre isomorphe à celle de l'ensemble des polynomes $p(x)$ sans terme constant, où la relation $p(x)<q(x)$ signifie que le terme de plus haut degré dans la différence $q(x)-p(x)$ a un coefficient >0 (cf. Algèbre, chap.VI, § , exerc.).

Soit φ une application d'un ensemble F dans E, telle que $\varphi^{-1}(\ )$ soit une base de filtre sur F. Si $\mathscr{E}$ est une échelle de comparaison sur E (pour le filtre $\mathscr{F}$), les fonctions $f\circ\varphi$, où f parcourt $\mathscr{E}$, forment une échelle de comparaison sur F (pour le filtre de base $\varphi^{-1}(\mathscr{F})$).

2. Parties principales et développements asymptotiques. Soit $\mathscr{E}$ une échelle de comparaison, f une fonction numérique finie, définie dans un ensemble de $\mathscr{F}$. S'il existe une fonction $g\in\mathscr{E}$, et une constante $a\neq 0$ telles que $f\sim ag$, on dit que ag est partie principale de f relativement à l'échelle $\mathscr{E}$. D'après la définition 1, f ne peut avoir qu'une seule

partie principale relative à $\mathcal{E}$, car si g_1, g_2 sont deux fonctions de $\mathcal{E}$ telles que $a_1 g_1 \sim a_2 g_2$, où a_1 et a_2 sont des constantes $\neq 0$, on a $g_2 \sim \frac{a_1}{a_2} g_1$, donc $g_2 = g_1$, et la relation $a_1 g_1 \sim a_2 g_2$ entraîne alors $a_2 = a_1$. Si f admet une partie principale relativement à l'échelle $\mathcal{E}$, il admet évidemment la même partie principale pour toute échelle $\mathcal{E}'$ contenant $\mathcal{E}$.

Exemples. 1) Si $p(x) = a_0 x^n + \ldots + a_n$ est un polynome de degré n à coefficients réels, on a vu que, pour x tendant vers $+\infty$, p(x) a pour partie principale $a_0 x^n$ par rapport à l'échelle formée des x^α. Par suite, si $p(x)/q(x)$ est une fraction rationnelle, avec $q(x) = b_0 x^m + \ldots + b_m$, elle a pour partie principale $\frac{a_0}{b_0} x^{n-m}$ par rapport à la même échelle.

2) Soit f une fonction définie dans un intervalle $[0, a[$ de $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = 0$, et dérivable à droite au point $x = 0$. Lorsque x tend vers 0 en restant > 0, f(x) a pour partie principale $f'_d(0)x$, par rapport à l'échelle des x^α, si $f'_d(0) \neq 0$.

3) Une fonction peut être strictement comparable à toutes les fonctions d'une échelle de comparaison sans admettre de partie principale relative à cette échelle. Par exemple, pour x tendant vers $+\infty$, $\sqrt{x}$ n'a pas de partie principale relative à l'échelle des x^n, où n est entier rationnel ; log x n'a pas de partie principale relative à l'échelle des x^α (α réel quelconque) ; $e^{\sqrt{\log x}}$ et $x^x = e^{x \log x}$ n'ont pas de partie principale par rapport à l'échelle des $x^\alpha (\log x)^\beta$, ni par rapport à l'échelle des $e^{p(x)}$ (p(x) polynome sans terme constant.

* 4) Pour tout $x > 0$, soit $\overline{\omega}(x)$ le nombre des nombres premiers $\leq x$; on a pu démontrer que $\overline{\omega}(x)$ a une partie principale égale à $x/\log x$ par rapport à l'échelle des $x^\alpha (\log x)^\beta$. *

La notion de partie principale est susceptible d'une généralisation étendue. Supposons en effet qu'une fonction f ait une partie principale $a_1 g_1$ par rapport à une échelle $\mathcal{E}$; la relation $f \sim a_1 g_1$ équivaut à $f - a_1 g_1 \prec g_1$; pour étudier de façon plus précise la fonction f , on est donc amené à considérer la fonction $f - a_1 g_1$; si elle a une partie principale $a_2 g_2$ par rapport à $\mathcal{E}$, on aura nécessairement $g_2 \prec g_1$, et $f - a_1 g_1 - a_2 g_2 \prec g_2$. D'une façon générale, supposons que l'échelle $\mathcal{E}$ soit écrite paramètriquement sous la forme (g_α), où α parcourt un ensemble d'indices muni d'une structure d'ordre isomorphe à celle de $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire que $\alpha \prec \beta$ est équivalent à $g_\alpha \prec g_\beta$). Dans ces conditions

<u>Définition 2</u>. <u>On dit qu'une fonction f définie dans un ensemble de $\mathcal{F}$ admet un développement asymptotique de k termes relativement à l'échelle $\mathcal{E}$, s'il existe k indices α_i tels que $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_k$, et k nombres réels $a_i \neq 0$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ tels que $f - \sum_{i=1}^{k} a_i g_{\alpha_i} \prec g_{\alpha_k}$. On dit que les $a_i g_{\alpha_i}$ sont les termes du développement, les a_i ses coefficients, la fonction $r_k = f - \sum_{i=1}^{k} a_i g_{\alpha_i}$ son reste.</u>

Le premier terme $a_1 g_{\alpha_1}$ est donc partie principale de f ; plus généralement, $a_h g_{\alpha_h}$ est partie principale de $f - \sum_{i=1}^{h-1} a_i g_{\alpha_i}$ pour $h \leqslant k$; les termes d'un développement asymptotique de f sont donc déterminés de manière <u>unique</u> s'ils existent.

Les développements asymptotiques les plus importants en pratique sont les <u>développements tayloriens</u> ; on appelle ainsi les développements asymptotiques relatifs à l'échelle des $|x|^n$ (n entier positif ou négatif) lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, ou à l'échelle des $|x-a|^n$ lorsque x tend vers a (à droite ou à gauche). On a vu au chap.I (§ 3) que toute fonction numérique f , k fois dérivable au point $a \in \mathbf{R}$ admet en ce point un développement taylorien à exposants $\geqslant 0$, dont le nombre de termes est égal au nombre des termes $f^{(h)}(a)$ non nuls $(0 \leqslant h \leqslant k)$

Nous nous proposons de montrer dans ce qui suit comment on peut obtenir des développements asymptotiques pour des classes étendues de fonctions.

3. Opérations algébriques sur les développements asymptotiques. Soient f et g deux fonctions admettant des développements asymptotiques par rapport à une même échelle $\mathcal{E}$:

$$(1) \qquad f = a_1 g_{\alpha_1} + a_2 g_{\alpha_2} + \ldots + a_m g_{\alpha_m} + r_1 \qquad r_1 \prec g_{\alpha_m}$$

$$(2) \qquad g = b_1 g_{\beta_1} + b_2 g_{\beta_2} + \ldots + b_n g_{\beta_n} + r_2 \qquad r_2 \prec g_{\beta_n}$$

On peut en général en déduire un développement asymptotique de la somme $f+g$ en procédant de la manière suivante : soit (γ_i) la suite des éléments distincts de la réunion des ensembles $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$ et $\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$, rangée par ordre décroissant ; c'est une suite de p termes, où $\mathrm{Max}(m,n) \leqslant p \leqslant m+n$. Pour chaque γ_i, posons $c_i=a_j$ si $\gamma_i=\alpha_j$ mais s'il n'existe aucun indice $\neq \beta_k$ égal à γ_i ; $c_i=\beta_k$ si $\gamma_i=\beta_k$ mais s'il n'existe aucun indice j tel que $\alpha_j=\gamma_i$; enfin, $c_i=a_j+b_k$ si $\gamma_i=\alpha_j=\beta_k$; soit (i_h) la suite formée des indices i pour lesquels $c_i \neq 0$, et posons $d_h=c_{i_h}$, $\delta_h=\gamma_{i_h}$; on a $f+g = \sum_h d_h g_{\delta_h} + r_1 + r_2$; si q est le plus grand indice h tel que $g_{\delta_q} \succ r_1$ et $g_{\delta_q} \succ r_2$, la somme $\sum_{h=1}^{q} d_h g_{\delta_h}$ est un développement asymptotique de q termes de $f+g$.

Remarque.- Il se peut qu'il n'existe aucun indice h tel que r_1 et r_2 soient tous deux négligeables devant g_{δ_h} ; on n'obtient pas alors de développement asymptotique pour $f+g$, et on peut seulement écrire que $f+g \prec g_\lambda$, où λ est le plus grand des deux indices α_m et β_n.

Il se peut aussi que g_{β_1} soit négligeable devant r_1. Alors le développement asymptotique de $f+g$ obtenu par la méthode

précédente est formé des <u>mêmes</u> termes que le développement de f (les restes étant naturellement différents).

Supposons maintenant que l'échelle $\mathscr{E}$ satisfasse à la condition suivante :

(EC_I) <u>Le produit de deux fonctions de $\mathscr{E}$ appartient à $\mathscr{E}$</u>.

Pour tout couple d'indices (i,j), posons $g_{\gamma_{ij}} = g_{\alpha_i} g_{\beta_j}$, et soit (λ_k) la suite formée des termes γ_{ij} distincts, rangés par ordre décroissant ; pour chaque λ_k, soit $c_k = \sum a_i b_j$, la somme étant étendue aux couples d'indices tels que $\gamma_{ij} = \lambda_k$; soit (k_h) la suite des indices k pour lesquels $c_k \neq 0$, et posons $d_h = c_{k_h}$, $\delta_h = \lambda_{k_h}$; on a $fg = \sum d_h g_{\delta_h} + r_1 g + r_2 f - r_1 r_2$; si q est le plus grand indice h tel que $g_{\delta_q} \succ r_1 g_{\beta_1}$ et $g_{\delta_q} \succ r_2 g_{\alpha_1}$, la somme $\sum_{h=1}^{q} d_h g_{\delta_h}$ est un développement asymptotique de q termes du produit fg. On notera qu'ici on a toujours $q \geqslant 1$, car la partie principale de fg est $a_1 b_1 g_{\alpha_1} g_{\beta_1} = a_1 b_1 g_{\gamma_{11}}$.

Lorsque la condition (EC_I) est vérifiée, on peut donc en général obtenir un développement asymptotique relatif à l'échelle $\mathscr{E}$ pour tout <u>polynome</u> par rapport à un nombre quelconque de fonctions admettant des développements asymptotiques relatifs à $\mathscr{E}$.

4. <u>Composition des développements asymptotiques</u>. Supposons que f admette un développement asymptotique (1), et <u>ait pour limite</u> 0 suivant $\mathscr{F}$ (autrement dit, que $g_{\alpha_1} \prec 1$). Soit d'autre part φ une fonction numérique <u>n fois dérivable</u> au voisinage du point 0 ; on a donc, dans un voisinage de 0 $\varphi(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_n t^n + r(t)$, où $r(t) \prec t^n$; d'où, dans un ensemble convenable de $\mathscr{F}$

$$\varphi \circ f = c_0 + c_1 f + c_2 f^2 + \ldots + c_n f^n + r(f)$$

avec $r(f) \prec f^n$. Si $\mathscr{E}$ vérifie (EC_I), on peut former un développement asymptotique $\sum d_h g_{\delta_h}$ du polynome $\sum_{k=0}^{n} c_k f^k$; si q est le plus grand

indice tel que $g_{\delta_q} \succ r(f)$, la somme $\sum_{h=1}^{q} d_h g_{\delta_h}$ est un développement asymptotique de q termes de la fonction composée $\varphi \circ f$.

En second lieu, supposons que l'échelle $\mathcal{E}$ satisfasse à (EC_I) et à la condition :

(EC_{II}) <u>Pour tout nombre réel</u> λ , <u>et toute fonction</u> $g \in \mathcal{E}$, g^λ <u>appartient à</u> $\mathcal{E}$.

On en déduit d'abord que le quotient de deux fonctions de $\mathcal{E}$ appartient à $\mathcal{E}$ (en faisant $\lambda = -1$ dans (EC_{II})). Dans ces conditions, du développement asymptotique (1) de f , on peut déduire un développement asymptotique (1) de f , on peut déduire un développement de $|f|^\lambda$; on a en effet $|f|^\lambda = |a_1|^\lambda g_{a_1}^\lambda (1+h)^\lambda$, avec

$$(3) \qquad h = c_2 h_{a_2} + \ldots + c_m h_{a_m} + r_3$$

où on a posé $h_{a_i} = g_{\delta_i}/g_{a_1}$, $c_i = a_i/a_1$, $r_3 = r_1/a_1 g_{a_1}$; comme les h_{a_i} appartiennent à $\mathcal{E}$, (3) est un développement asymptotique de h , et on a $h \prec 1$. On peut donc déduire de (3) un développement asymptotique de $(1+h)^\lambda$, d'après ce qui précède, et on en tire aussitôt un développement de $|f|^\lambda$.

De même, supposons que l'échelle $\mathcal{E}$ satisfasse, en plus des axiomes (EC_I) et (EC_{II}), à l'axiome

(EC_{III}) <u>Pour toute fonction</u> $g \in \mathcal{E}$, log g <u>admet un développement asymptotique par rapport à</u> .

On peut alors tirer du développement (1) un développement asymptotique de $\log|f|$; on a en effet

$$(4) \qquad \log|f| = \log g_{a_1} + \log|a_1| + \log(1+h)$$

et comme h admet le développement (3) et est $\prec 1$, on obtient un développement asymptotique de $\log(1+h)$ comme il a été dit plus haut ; comme par hypothèse, $\log g_{a_1}$ admet un développement asymptotique relatif à $\mathcal{E}$, on est ramené à faire la somme de deux développements.

Exemple. On désigne par $l_n x$ pour $n > 1$ la fonction définie par récurrence par la relation $l_n x = \log(l_{n-1} x)$; on dit que $l_n x$ est le n-ème logarithme itéré de x (cf. Appendice 1) ; quels que soient les nombres strictement positifs α et β, on a $(l_n x)^\alpha \prec (l_{n-1} x)^\beta$. On en déduit aisément que si $\mathcal{E}$ est l'ensemble des produits $x^{a_0}(\log x)^{a_1}(l_2 x)^{a_2}\ldots(l_n x)^{a_n}$ où a est arbitraire, ainsi que les nombres réels a_i, $\mathcal{E}$ est une échelle de comparaison satisfaisant aux conditions (EC_I), (EC_{II}) et (EC_{III}), pour x tendant vers $+\infty$.

Cherchons par exemple un développement asymptotique relatif à $\mathcal{E}$, de la fonction $(1+x)^{1/x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. On a $(1+x)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\log(1+x)}$, et $\log(1+x) = \log x + \log(1+\frac{1}{x}) = \log x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + r_1$, où $r_1 \prec \frac{1}{x^2}$. Partons du développement

$$\frac{1}{x}\log(1+x) = \frac{\log x}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^3} + \frac{r_1}{x}$$

ainsi obtenu pour $\frac{1}{x}\log(1+x)$, et du développement taylorien

$$e^u = 1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+r_2, \qquad r_2 \prec u^3$$

On obtient, par les méthodes développées ci-dessus, le développement asymptotique

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{\log x}{x} + \frac{(\log x)^2}{2x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{(\log x)^3}{6x^3} + \frac{\log x}{x^3}\,\frac{1}{2x^3} + r_3$$

$$r_3 \prec \frac{1}{x^3}$$

Remarque. Pour un développement particulier (1), les méthodes précédentes peuvent encore donner un développement de $|f|^\lambda$ (resp. $\log|f|$) même si $\mathcal{E}$ ne satisfait pas aux axiomes (EC_{II}) et (EC_{III}) ; il suffit que les fonctions $f^\lambda_{a_1}$ et g_{a_i}/g_{a_1} (resp. $\log g_{a_1}$ et g_{a_i}/g_{a_1}) appartiennent à $\mathcal{E}$.

Cherchons maintenant à obtenir un développement de e^f, connaissant un développement (1) de f ; il ne se pose de nouveau problème que lorsque $|f| \succ 1$. Nous supposerons que $\mathcal{E}$ satisfait aux conditions (EC_I), (EC_{II}) et à la nouvelle condition :

(EC_{IV}) Pour toute fonction $g \succ 1$ appartenant à $\mathcal{E}$, $e^g \in \mathcal{E}$.

Nous montrerons, dans l'Appendice I, que, pour x tendant vers $+\infty$, on peut définir une échelle de comparaison satisfaisant à (EC_I), (EC_{II}), (EC_{III}) et (EC_{IV}).

Cela étant, nous pourrons déduire du développement (1) un développement de e^f, en admettant que $g_{a_m} \prec 1$. Soit alors $k > 1$ le plus petit indice pour lequel $g_{a_k} \prec 1$; si on pose $h_{a_i} = e^{g_{a_i}}$ pour $1 \leqslant i \leqslant k-1$ on peut écrire $e^f = h_{a_1}^{a_1} h_{a_2}^{a_2} \dots h_{a_{k-1}}^{a_{k-1}} e^{f_1}$, où $f_1 = a_k g_{a_k} + \dots + a_m g_{a_m} + r_1$; comme $f_1 \prec 1$, on obtient un développement de e^{f_1} à partir du développement de f_1 et d'un développement de e^u pour u tendant vers 0, ainsi qu'il a été dit ci-dessus ; par hypothèse, e^f est le produit de e^{f_1} et d'une fonction de $\mathcal{E}$, d'où un développement de e^f.

Si au contraire $g_{a_m} \succ 1$, on ne pourra pas en général déduire du développement (1) un développement asymptotique de e^f ni même une partie principale de cette fonction ; on peut seulement dire que e^f est d'ordre 1 par rapport à la fonction $h_{a_1}^{a_1} h_{a_2}^{a_2} \dots h_{a_m}^{a_m}$ de $\mathcal{E}$ (ce qui ne signifie nullement qu'elle soit équivalente à cette fonction).

Exemple. Cherchons un développement de $x^{x^{1/x}}$ pour x tendant vers $+\infty$. On a

$$x^{x^{1/x}} = e^{\log x \cdot e^{\frac{\log x}{x}}}$$

Comme $\log x \prec x$, on a un développement

$$\log x \cdot e^{\frac{\log x}{x}} = \log x + \frac{(\log x)^2}{x} + \frac{1}{2}\frac{(\log x)^3}{x^2} + r_1$$

$$r_1 \prec \frac{(\log x)^3}{x^2}$$

dans lequel tous les termes à partir du second tendent vers 0 ;

à partir de ce développement et du développement taylorien

$e^u = 1+u+\frac{u^2}{2}+r_2$, $r_2 \prec u^2$, on tire

$$x^{x^{\frac{1}{x}}} = x+(\log x)^2+\frac{1}{2}\frac{(\log x)^4}{x}+\frac{1}{2}\frac{(\log x)^3}{x}+r_3 \qquad r_3 \prec \frac{(\log x)^3}{x}$$

On notera qu'ici encore, on n'a pas utilisé l'axiome (EC_{IV}) mais simplement le fait que la fonction $h_{a_1} = e^{\log x} = x$ appartient à $\mathcal{E}$.

Remarque. Les méthodes précédentes donnent encore des développements asymptotiques de fg , $|f|^\lambda$ et e^f lorsqu'au lieu de supposer les axiomes (EC_I), (EC_{II}) et (EC_{IV}) vérifiés, on admet seulement que pour deux fonctions quelconques g,h de $\mathcal{E}$, le produit gh et les fonctions g^λ et e^g admettent des développements asymptotiques relatifs à l'échelle $\mathcal{E}$.

5. Développements asymptotiques généralisés. On peut généraliser la notion de partie principale et celle de développement asymptotique relatif à une échelle de comparaison $\mathcal{E}$, de la manière suivante. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de fonctions dont chacune est définie sur un ensemble de $\mathcal{F}$ (dépendant de la fonction considérée), et qui satisfont aux conditions suivantes :

(CO_I) Pour toute fonction $a(x) \in \mathcal{C}$, $a(x) \not\prec 1$.

(CO_{II}) La relation $a(x) \prec 1$ pour une fonction $a(x) \in \mathcal{F}$ entraîne que $a(x)$ est identiquement nulle.

(CO_{III}) $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel par rapport au corps R .

On notera qu'une fonction $a(x)$ peut changer de signe sur tout ensemble de $\mathcal{F}$.

Cela étant, étant donnée une fonction numérique finie f , définie sur un ensemble de $\mathcal{F}$, s'il existe une fonction $g \in \mathcal{E}$ et une fonction non nulle $a \in \mathcal{C}$ telles que $f-ag \prec g$, on dira que ag est une partie principale généralisée de f , relative à l'échelle de comparaison

et au domaine de coefficients $\mathcal{C}$. Si une telle partie principale existe, elle est nécessairement unique ; en effet, supposons qu'il existe deux telles parties principales a_1g_1 et a_2g_2 ; on ne peut avoir $g_1 \prec g_2$, car on en conclurait $a_1g_1 \prec g_2$ et $f-a_1g_1 \prec g_1 \prec g_2$, donc $f \prec g_2$; mais alors on aurait $a_2g_2 \prec g_2$ et par suite $a_2 \prec 1$, contrairement à l'hypothèse $a_2 \neq 0$ et à la condition (CO_{II}). On a donc nécessairement $g_1=g_2$; des relations $f-a_1g_1 \prec g_1$, $f-a_2g_1 \prec g_1$ on tire $(a_2-a_1)g_1 \prec g_1$, c'est-à-dire $a_2-a_1 \prec 1$, donc $a_2=a_1$ d'après (CO_{II}) et (CO_{III}).

Exemples. 1) Soit $\mathcal{F}$ la trace du filtre des voisinages de (0,0) dans R^2 sur le complémentaire de ce point, $\mathcal{E}$ l'échelle de comparaison formée des fonctions r^α où $r=\sqrt{x^2+y^2}$; l'ensemble $\mathcal{C}$ des polynomes par rapport à $\cos\theta = x/r$ et $\sin\theta = y/r$ satisfait aux conditions (CO_I), (CO_{II}) et (CO_{III}). Toute fonction f de la variable complexe z, dérivable au point z=0, a pour partie principale généralisée, relative à $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$, $f'(0)(\cos\theta + i\sin\theta)r = f'(0)z$, si $f'(0)\neq 0$.

2) Pour x réel tendant vers $+\infty$, les fonctions périodiques bornées sur R, ayant une même période τ, satisfont aux conditions (CO_I), (CO_{II}) et (CO_{III}) ; en effet, si $\lim_{x\to+\infty} a(x)=0$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe x_0 tel que $x \geqslant x_0$ entraîne $|a(x)| \leqslant \varepsilon$; si $n\tau > x_0$, on a donc aussi pour $0 \leqslant x \leqslant \tau$, $|a(x)| \leqslant \varepsilon$, puisque $a(x)=a(x+n\tau)$; comme ε est arbitraire, $a(x)=0$ dans $[0,\tau]$, donc partout.

Si maintenant il existe k indices a_i tels que $a_1 > a_2 > \dots > a_k$, et k fonctions non nulles $a_k \in \mathcal{C}$ telles que $f-\sum_{i=1}^{k} a_i g_{a_i} \prec g_{a_k}$, on dira que f admet un développement asymptotique généralisé de k termes relatif à l'échelle $\mathcal{E}$ et au domaine de coefficients $\mathcal{C}$.

Cette définition entraîne aussitôt que $a_h g_{a_h}$ est partie principale généralisée de $f - \sum_{i=1}^{h-1} a_i g_{a_i}$ pour tout $h \leq k$; les termes d'un développement asymptotique généralisé sont donc encore déterminés de façon unique s'ils existent.

Par exemple, toute fonction f de la variable complexe z, définie dans un voisinage de 0, et qui peut se mettre sous la forme $f(z) = \sum_{i=1}^{k} c_i z^{n_i} + r(z)$, où (n_i) est une suite croissante de k entiers rationnels, (c_i) une suite de k nombres complexes non nuls, et $r(z) \prec |z|^{n_k}$ pour z tendant vers 0, admet un développement asymptotique généralisé de k termes relatif à l'échelle de comparaison des $|z|^n$, et au domaine des coefficients formé des polynomes par rapport à $\cos\theta = x/|z|$ et $\sin\theta = y/|z|$ $(z=x+iy)$. On dit encore que les développements asymptotiques de cette nature sont les développements tayloriens au voisinage de z=0. On définit de même les développements tayloriens au voisinage d'un point quelconque de $R^2 = \mathbb{C}$, ou au voisinage du point à l'infini.

La méthode donnée au n° 4 pour former un développement asymptotique de la somme de deux fonctions dont on connait des développements asymptotiques relatifs à une même échelle $\mathcal{E}$, s'applique sans modification (en vertu de (GO_{III})) lorsqu'on y remplace les développements asymptotiques par des développements asymptotiques généralisés. Il en est de même pour la formation d'un développement asymptotique généralisé du produit fg, lorsqu'on suppose que l'échelle $\mathcal{E}$ satisfait à (GO_I) (ou plus généralement que le produit de deux fonctions de $\mathcal{E}$ admet un développement asymptotique par rapport à $\mathcal{E}$), et que, d'autre part, le produit de deux fonctions de $\mathcal{C}$ admet un développement asymptotique généralisé relatif à $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$.

Enfin, on aurait aussi, par les mêmes méthodes, des développements de $|f|^{\lambda}$ (resp. de $\log|f|$) en supposant, en plus des hypothèses précédentes, que (EC_{II}) (resp. (EC_{III})) est vérifié, et que $1/a_1$ et $|a_1|^{\alpha}$ (resp. $1/a_1$ et $\log|a_1|$) appartiennent à $\mathcal{C}$ (ou plus généralement, admettent un développement asymptotique par rapport à $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$).

§ 3. Développements asymptotiques des fonctions d'une variable réelle.

Dans ce paragraphe, nous allons nous restreindre au cas où l'ensemble E est un intervalle ouvert dans la droite achevée $\overline{R}$, et le filtre $\mathcal{F}$ la trace sur E du filtre des voisinages de l'origine ou de l'extrémité a de E. En utilisant au besoin l'un des changements de variables $x'=-x$, $x'=\frac{1}{x-a}$, $x'=-\frac{1}{x-a}$, on peut toujours se ramener au cas où E est de la forme $]a,+\infty[$, et $\mathcal{F}$ le filtre engendré par les intervalles $[t,+\infty[$, où $t>a$. Nous n'indiquerons comment se traduisent dans les autres cas les résultats obtenus pour ce cas particulier (au moyen des changements de variables précédents) que pour les propositions les plus importantes, et laisserons au lecteur le soin de traduire les autres de la même manière.

1. Intégration des relations de comparaison. Les fonctions numériques que nous considérons sont donc définies chacune dans un intervalle $[\alpha,+\infty[$ (dépendant de la fonction considérée). Nous supposerons en outre une fois pour toutes que, dans leur intervalle de définition, les fonctions considérées sont réglées (chap.I, § 2).

Proposition 1. Soient f et g deux fonctions définies dans $[a,+\infty[$ g étant >0 dans cet intervalle. La relation $f \preccurlyeq g$ pour x tendant vers $+\infty$ entraîne $\int_a^x f(t)dt \preccurlyeq \int_a^x g(t)dt$. En particulier, si l'intégrale impropre $\int_a^x g(t)dt$ est convergente, l'intégrale impropre $\int_a^x f(t)dt$ est absolument convergente.

En effet, il existe $b \geqslant a$ et un nombre $k > 0$ tel que $|f(x)| \leqslant kg(x)$ pour $x \geqslant b$, d'où $\left|\int_b^x f(t)dt\right| \leqslant k\int_b^x g(t)dt$; comme d'autre part, $\int_a^b g(t)dt > 0$, il existe un nombre $k' > 0$ tel que $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant k'\int_a^b g(t)dt$; si $k'' = \mathrm{Max}(k,k')$, on a donc pour tout $x \geqslant b$ $\left|\int_a^x f(t)dt\right| \leqslant k''\int_a^x g(t)dt$, d'où la proposition.

Corollaire. Si $f > 0$ est telle que $f \asymp g$, et si $\int_a^{+\infty} g(t) = +\infty$, on a $\int_a^{+\infty} f(t)dt = +\infty$.

Application. Critères logarithmiques de convergences des intégrales impropres. Par un choix convenable de la fonction g, on peut déduire de la prop.1 et de son corollaire des critères permettant d'affirmer que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ de la fonction $f > 0$ est convergente ou infinie : il suffit de choisir pour g une fonction dont on connaît la primitive. Par exemple, comme x^μ a pour primitive $\frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}$ si $\mu \neq -1$, $\log x$ dans le cas contraire, on a le critère suivant (critère logarithmique d'ordre 0) :

Si $f \leqslant x^\mu$ et $\mu < -1$, l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente ; si $f \geqslant x^\mu$ et $\mu \geqslant -1$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est infinie.

Ce critère ne permet pas de conclure lorsque $\frac{1}{x^{1+a}} < f < \frac{1}{x}$ pour tout exposant $a > 0$, par exemple si $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^\mu}$ $(\mu > 0)$. Mais, comme $\frac{1}{x(\log x)^\mu}$ a pour primitive $\frac{1}{1-\mu}(\log x)^{1-\mu}$ si $\mu \neq 1$, $\log\log x = l_2 x$ dans le cas contraire, on obtient le critère plus précis (critère logarithmique d'ordre 1) :

Si $f \leqslant \frac{1}{x(\log x)^\mu}$ et $\mu > 1$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente

si $f \geqslant \frac{1}{x(\log x)^\mu}$ et $\mu \leqslant 1$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est infinie.

De façon générale, $\frac{1}{1-\mu}(l_n x)^{1-\mu}$ est une primitive de $\frac{1}{x.\log x.l_2 x \ldots l_{n-1}x (l_n x)^{\mu}}$ si $\mu \neq 1$, et $l_{n+1}x$ est une primitive de $\frac{1}{x.\log x.l_2 x \ldots l_n x}$; donc (critère logarithmique d'ordre n) : Si $f \lesssim \frac{1}{x.\log x.l_2 x \ldots l_{n-1}x.(l_n x)^{\mu}}$ et $\mu > 1$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est infinie.

Chaque critère logarithmique est donc applicable à des fonctions pour lesquelles les critères d'ordre inférieur ne peuvent donner de conclusion.

En raison de leur utilité, nous traduirons les critères logarithmiques pour les intégrales impropres $\int_\alpha^a f(t)dt$, où f est règlée et >0 dans l'intervalle $]\alpha, a[$:

Si, au voisinage de a, on a $f \lesssim \frac{1}{(x-a)^{\mu}}$ avec $\mu < 1$, l'intégrale $\int_\alpha^a f(t)dt$ est convergente ; si $f \gtrsim \frac{1}{(x-a)^{\mu}}$ avec $\mu \geqslant 1$, l'intégrale $\int_\alpha^a f(t)dt$ est infinie (critère logarithmique d'ordre 0).

Si $f \lesssim \frac{1}{(x-a)\log\frac{1}{x-a} \ldots l_{n-1}(\frac{1}{x-a})(l_n(\frac{1}{x-a}))^{\mu}}$ avec $\mu > 1$, l'intégrale $\int_\alpha^a f(t)dt$ est convergente ; si $f \gtrsim \frac{1}{(x-a)\log\frac{1}{x-a} \ldots l_{n-1}(\frac{1}{x-a})(l_n(\frac{1}{x-a}))^{\mu}}$ avec $\mu \leqslant 1$, l'intégrale $\int_\alpha^a f(t)dt$ est infinie. (Critère logarithmique d'ordre $n \geqslant 1$).

L'application des critères logarithmiques est immédiate si on sait obtenir une partie principale de f par rapport à une échelle de comparaison contenant les fonctions de comparaison qui interviennent dans ces critères ; si f_1 est cette partie principale, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente ou infinie en même temps que $\int_a^{+\infty} f_1(t)dt$, et pour cette dernière, l'application des critères logarithmiques est immédiate.

Exemples. 1) L'intégrale $\int_0^1 t^p(1-t)^q dt$ est une intégrale impropre lorsque $p < 0$ ou $q < 0$; d'après les critères d'ordre 0 appliqués au voisinage des points 0 et 1, pour que cette intégrale converge, il faut et il suffit que $p > -1$ et $q > -1$. Lorsqu'il en est ainsi, l'intégrale est dite intégrale eulérienne de première espèce, et notée $B(p+1,q+1)$.

2) Considérons l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. Comme $e^{-t} \sim 1$ au voisinage de 0, pour que cette intégrale converge, il faut que $x > 0$; cette condition est aussi suffisante, car au voisinage de $+\infty$, on a $e^{-t} < t^{-\mu}$ quel que soit $\mu > 0$. Lorsque $x > 0$, l'intégrale est dite intégrale eulérienne de seconde espèce et notée $\Gamma(x)$ (voir Appendice 2).

La proposition 1 se précise de la façon suivante :

Proposition 2. Soient f et g deux fonctions règlées > 0 dans un intervalle $[a,+\infty[$; si l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ est convergente, on a

$$(1) \qquad \limsup_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{+\infty} f(t)dt}{\int_x^{+\infty} g(t)dt} \leqslant \limsup_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ est infinie, on a

$$(2) \qquad \limsup_{x\to+\infty} \frac{\int_b^{+\infty} f(t)dt}{\int_c^{+\infty} g(t)dt} \leqslant \limsup_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

quels que soient b et c dans l'intervalle $[a,+\infty[$.

La première partie est une conséquence immédiate du théorème de la moyenne, car si on a $f(x) \leqslant kg(x)$ pour $x \geqslant x_0$, on en tire $\int_x^{+\infty} f(t)dt \leqslant k\int_x^{+\infty} g(t)dt$ pour $x \geqslant x_0$.

En second lieu, supposons $\int_a^{+\infty} g(t)dt = +\infty$. Si $f(x) \leqslant kg(x)$ pour $x \geqslant x_0 \geqslant \max(b,c)$, on a

$$\int_b^x f(t)dt = \int_b^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^x f(t)dt \leqslant \int_b^{x_0} f(t)dt + k\int_{x_0}^x g(t)dt =$$
$$= k\int_c^x g(t)dt + \left(\int_b^{x_0} f(t)dt - k\int_c^{x_0} g(t)dt\right)$$

Or, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver x_1 tel que pour $x \geqslant x_1$

$$\left| \int_b^{x_0} f(t)dt - k \int_c^{x_0} g(t)dt \right| \leqslant \varepsilon \int_c^x g(t)dt$$

d'où, pour $x \geqslant x_1$

$$\int_b^x f(t)dt \leqslant (k+\varepsilon) \int_c^x g(t)dt$$

ce qui démontre (2), puisque ε est arbitraire.

Proposition 3. Soient f et g deux fonctions réglées dans $[a,+\infty[$, g étant > 0 dans cet intervalle.

1° Si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ est convergente, la relation $f \prec g$ (resp. $f \sim g$) entraîne $\int_x^{+\infty} f(t)dt \prec \int_x^{+\infty} g(t)dt$ (resp. $\int_x^{+\infty} f(t)dt \sim \int_x^{+\infty} g(t)dt$).

2° Si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ est infinie, la relation $f \prec g$ (resp. $f \sim g$) entraîne $\int_b^x f(t)dt \prec \int_c^x g(t)dt$ (resp. $\int_b^x f(t)dt \sim \int_c^x g(t)dt$) quels que soient b et c dans $[a,+\infty[$.

En ce qui concerne la relation $f \prec g$, la proposition est un conséquence immédiate de la prop.2 ; on passe de là à la partie de la proposition qui concerne la relation $f \sim g$ en remarquant que cette dernière équivaut à $f-g \prec g$.

En d'autres termes, on peut intégrer les deux membres de l'une des relations $f \prec g$, $f \sim g$ sans que la relation cesse d'avoir lieu entre les primitives obtenues, pourvu qu'on intègre de x à $+\infty$ si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge, de b à x (b quelconque dans $[a,+\infty[$) dans le cas contraire.

Exemples. 1) En appliquant la prop.3 à la relation $\frac{1}{x} \prec x^{a-1}$ où $a > 0$, on retrouve la relation $\log x \prec x^a$ pour tout $a > 0$, démontrée antérieurement.

2) On a $\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \sim \frac{e^x}{x}$; comme $\frac{e^x}{x}$ tend vers $+\infty$ avec x, on déduit de la prop.3 que $\int_1^x \frac{e^t}{t} dt \sim \frac{e^x}{x}$.

2. Dérivation des relations de comparaison. Il est essentiel de remarquer que les propositions 1 et 3 n'admettent pas de réciproque : l'existence d'une relation de comparaison $f \preccurlyeq g$, $f \prec g$ ou $f \sim g$ entre deux fonctions >0 et dérivables au voisinage de $+\infty$, n'entraîne pas nécessairement l'existence de la même relation de comparaison entre leurs dérivées, même si f et g sont supposées monotones.

Par exemple, la fonction $x^2+x \sin x + \cos x$ est monotone et équivalente à x^2, mais sa dérivée $x(2+\cos x)$ n'est pas équivalente à $2x$.

Par contre, on peut dériver des relations de comparaison lorsqu'on suppose a priori que les dérivées des fonctions considérées sont strictement comparables. De façon générale, nous dirons que deux fonctions f,g définies et >0 au voisinage de $+\infty$, sont strictement comparables d'ordre k si elles sont k fois dérivables et si les dérivées $f^{(k)}$ et $g^{(k)}$ gardent un signe constant au voisinage de $+\infty$ et ont des valeurs absolues strictement comparables.

Proposition 4. Si deux fonctions f,g sont strictement comparables d'ordre 1, elles sont strictement comparables ; en outre, la relation $f \prec g$ (resp. $f \sim ag$, a constante $\neq 0$) entraîne $|f'| \prec |g'|$ (resp. $f' \sim ag'$), sauf si g est équivalente à une constante $\neq 0$.

En effet, comme f' et g' gardent un signe constant dans un voisinage $[x_0, +\infty[$ de $+\infty$, f et g sont monotones dans cet intervalle donc tendent vers une limite finie ou infinie lorsque x tend vers $+\infty$. Il est évident qu'elles sont strictement comparables si l'une de ces limites est finie et $\neq 0$, ou si l'une est nulle et l'autre infinie. Si f et g tendent toutes deux vers 0, on peut écrire $f(x) = -\int_x^{+\infty} f'(t)dt$, $g(x) = -\int_x^{+\infty} g'(t)dt$, et l'hypothèse que $|f'| = -f'$ et $|g'| = -g'$ sont strictement comparables entraîne qu'il en est de même de f et g, d'après la prop.3 ; en outre, la relation de comparaison entre f et g

est nécessairement la même que celle qui existe entre $|f'|$ et $|g'|$. De même, si f et g tendent toutes deux vers $+\infty$, on a $f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x} f'(t)dt$, $g(x)=g(x_0)+\int_{x_0}^{x} g'(t)dt$, et la prop.3 montre encore que f et g sont strictement comparables, et que la relation de comparaison entre f et g est la même que celle entre $|f'|$ et $|g'|$. Pour achever de démontrer la proposition, il reste à considérer le cas où g tend vers $+\infty$ et f vers une constante $a\neq 0$; alors on ne peut avoir $|f'| \not\prec g'$, car on déduirait de la prop.1 que l'intégrale $\int_a^{+\infty} g'(t)dt$ serait convergente ; comme $|f'|$ et $|g'|$ sont supposées strictement comparables, on a nécessairement $|f'| \prec g'$.

Corollaire. Si deux fonctions f,g sont strictement comparables d'ordre k, elles sont strictement comparables d'ordre p pour $0 \leqslant p \leqslant k$; en outre, la relation f $\prec$ g (resp. f $\sim$ ag) entraîne $|f^{(k)}| \prec |g^{(k)}|$ (resp. $f^{(k)} \sim a g^{(k)}$) sauf lorsque l'une des dérivées $g^{(p)}$ $(0 \leqslant p \leqslant k-1)$ est équivalente à une constante $\neq 0$.

En effet, si $f^{(k)}$ et $g^{(k)}$ gardent un signe constant dans un voisinage de $+\infty$, $f^{(k-1)}$ et $g^{(k-1)}$ sont monotones dans ce voisinage, donc gardent un signe constant dans un voisinage de $+\infty$; la prop.4 prouve alors que $|f^{(k-1)}|$ et $|g^{(k-1)}|$ sont strictement comparables, donc on peut raisonner par récurrence, et on voit que $f^{(p)}$ et $g^{(p)}$ gardent un signe constant au voisinage de $+\infty$ et ont des valeurs absolues strictement comparables pour $0 \leqslant p \leqslant k$; la seconde partie du corollaire est une conséquence immédiate de la prop.4, appliquée par récurrence.

Remarques. 1) La restriction de l'énoncé de la prop.4 concernant g est essentielle. Par exemple, on a $\frac{1}{x} \prec 1 + \frac{1}{x}$ bien que les dérivées des deux membres soient équivalentes ; de même $1 + \frac{1}{x} \sim 1 + \frac{1}{x^2}$, mais $\frac{1}{x^2} \prec \frac{2}{x^3}$.

2) Si et g sont strictement comparables d'ordre k , une fonction f_1 équivalente à f n'est pas nécessairement strictement comparable d'ordre k à g . Il faut noter aussi que hf et hg ne sont pas nécessairement strictement comparables d'ordre k pour une fonction h monotone, même pour une fonction aussi simple que h(x)=x (exerc.3) ; de même, f et g peuvent être strictement comparables d'ordre k sans qu'il en soit de même de 1/f et 1/g (exerc.1).

3. Partie principale d'une primitive. Si f est une fonction réglée gardant un signe constant dans un voisinage $[a,+\infty[$ de $+\infty$, la proposition suivante permet dans certains cas d'obtenir une partie principale de la primitive $\int_x^{+\infty} f(t)dt$ si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente, de la primitive $\int_a^x f(t)dt$ si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est infinie :

Proposition 5. On pose $F(x)=\int_x^{+\infty} f(t)dt$ si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente, $F(x)=\int_a^{+\infty} f(t)dt$ si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est infinie. On suppose que $\log|f|$ est strictement comparable d'ordre 1 à $\log x$.

1° Si f est d'ordre fini μ par rapport à x , et $\mu \neq -1$, on a

$$F(x) \sim \frac{1}{|\mu+1|}\, xf(x) \tag{3}$$

2° Si f est d'ordre infini par rapport à x et si f/f' et x sont strictement comparables d'ordre 1 , on a

$$F(x) \sim (f(x))^2/|f'(x)| \tag{4}$$

On notera que l'hypothèse entraîne que f(x) a un ordre déterminé par rapport à x (§ 1, déf.2).

1° Si f est d'ordre $\mu \neq 0$ par rapport à x , on a $\log|f| \sim \mu \log x$, donc comme log f et log x sont strictement comparables d'ordre 1 , on a, d'après la prop.4, $f'/f \sim \mu/x$, ou $xf' \sim \mu f$. Si $\mu > -1$, on a $f \gtrsim x^{\mu-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est infinie. On peut écrire $F(x) = \int_a^x f(t)dt = xf(x)-af(a)-\int_a^x tf'(t)dt$, ou encore $\int_a^x (f(t)+tf'(t))dt = xf(x)-af(a)$; mais comme $\mu \neq -1$,

$f+xf' \sim (\mu+1)f$, donc (prop.3) , $\int_a^x (f(t)+tf'(t))dt \sim (\mu+1)F(x)$, ce qui démontre dans ce cas la relation (3). Si $\mu=0$, on a de même $xf' \prec f$ donc encore $f + xf' \sim f$. Raisonnement analogue lorsque $\mu < -1$, cas où $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

2° Si f est d'ordre $+\infty$ par rapport à x , on a $\log|f| \succ \log x$, donc (prop.4) $f'/f \succ 1/x$, ou encore $g=f/f' \prec x$; en outre, comme $|f| \succ x^a$ pour tout $a>0$, $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est infinie. On peut écrire $F(x)=\int_a^x f(t)dt = \int_a^x g(t)f'(t)dt = g(x)f(x)-g(a)f(a)-\int_a^x f(t)g'(t)dt$; or de la relation $g \prec x$ on déduit d'après la prop.4, $|g'| \prec 1$, donc $|fg'| \prec f$, et par suite (prop.3) $\left|\int_a^x f(t)g'(t)dt\right| \prec F(x)$, ce qui démontre la relation (4). Démonstration analogue lorsque f est d'ordre $-\infty$ par rapport à x , cas où $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

On pourra donc obtenir la partie principale de F(x) relativement à une échelle de comparaison $\mathcal{E}$, contenant la fonction x et satisfaisant aux axiomes (EC_I) et (EC_{II}), si f satisfait aux hypothèses de la prop.5 et si on connaît la partie principale de f et (éventuellement) celle de f'. Plus généralement, si f_1 est la partie principale f relativement à $\mathcal{E}$, et si f_1 satisfait aux hypothèses de la prop.5 , on aura la partie principale de $\int_a^x f_1(t)dt$ (ou de $\int_x^{+\infty} f_1(t)dt$ suivant le cas) par cette proposition, si on connaît (éventuellement) la partie principale de f_1' relativement à $\mathcal{E}$; d'après la prop.3, cette partie principale sera aussi celle de F(x) .

Exemples. 1) La fonction $1/\log x$ est d'ordre 0 par rapport à x , et satisfait aux conditions de la prop.5 ; donc

$$\int_a^x \frac{dt}{\log t} \sim \frac{x}{\log x}$$

2) La fonction e^{x^2} est d'ordre $+\infty$ par rapport à x et satisfait aux conditions de la prop.5, donc

$$\int_a^x e^{t^2}\,dt \sim \frac{1}{2x}\,e^{x^2}$$

Dans l'Appendice I, nous définirons un ensemble de fonctions auxquelles les prop.4 et 5 sont toujours applicables.

Remarque. Les formules de la prop.5 ne sont plus applicables lorsque f est d'ordre -1 par rapport à x ; on peut alors écrire $f=f_1/x$, où f_1 est d'ordre 0 par rapport à x . Supposons par exemple que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ soit infinie ; on a alors

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^x \frac{1}{t} f_1(t)dt = \int_{\log a}^{\log x} f_1(e^u)du$$

Si la fonction $f_1(e^y)$ satisfait aux conditions de la prop.5 et a un ordre $\neq -1$ par rapport à y (c'est-à-dire si $f_1(x)$ a un ordre $\neq -1$ par rapport à log x), les formules (3) et (4) permettront encore d'obtenir la partie principale de F(x) . Par exemple, soit $f(x) = \frac{e^{\sqrt{\log x}}}{x \log x}$; comme $\frac{e^{\sqrt{\log x}}}{\log x}$ est d'ordre 0 par rapport à x , f est d'ordre -1 ; on a ici $f_1(e^y) = \frac{e^{\sqrt{y}}}{y}$, et cette fonction est d'ordre infini par rapport à y ; la prop.5 lui est applicable, et donne $\int_a^y \frac{e^{\sqrt{u}}}{u} du \sim 2\sqrt{y}\, e^{\sqrt{y}}$; en revenant à la variable x , on a donc $\int_a^x \frac{e^{\sqrt{\log t}}}{t \log t} dt \sim \frac{2\, e^{\sqrt{\log x}}}{\sqrt{\log x}}$.

4. Développement asymptotique d'une primitive. Soit $\mathscr{E}$ une échelle de comparaison au voisinage de $+\infty$, et soit $f=a_1 g_{\alpha_1} + \ldots + a_n g_{\alpha_n} + r$ un développement asymptotique d'une fonction réglée f définie au voisinage de $+\infty$, relativement à l'échelle $\mathscr{E}$. Proposons-nous de chercher un développement asymptotique de $F(x)= \int_a^x f(t)dt$ relativement à $\mathscr{E}$.

Distinguons deux cas :

1° $\int_a^{+\infty} g_{\alpha_n}(t)dt$ est infinie ; alors (prop.3), on a

$$\int_a g_{\alpha_n} \prec \int_a r$$

On peut écrire $F = a_1 \int_a g_{\alpha_1} + \ldots + a_n \int_a g_{\alpha_n} + \int_a r$

et si on connaît un développement asymptotique de chacune des primitives $\int_a g_{\alpha_k}$, on en déduira (§ 2) un développement de F , en ne conservant

dans le développement de la somme $\sum_{k=1}^{n} a_k \int_a g_{a_k}$ que les termes qui ne sont pas négligeables devant $\int_a g_{a_n}$.

2° $\int_a^{+\infty} g_{a_n}(t)dt$ est convergente ; soit alors k le plus petit indice tel que $\int_a^{+\infty} g_{a_k}(t)dt$ soit convergente ; le nombre

$$C = \int_a^{+\infty} (f(t) - a_1 g_{a_1}(t) - \ldots - a_{k-1} g_{a_{k-1}}(t))dt$$

est donc <u>fini</u>, et on peut écrire

$$F(x) = a_1 \int_a^x g_{a_1}(t)dt + \ldots + a_{k-1} \int_a^x g_{a_{k-1}}(t)dt + C - a_k \int_x^{+\infty} g_{a_k}(t)dt - \ldots - a_n \int_x^{+\infty} g_{a_n}(t)dt - \int_x^{+\infty} r(t)dt$$

On a en outre $\int_x^{+\infty} r(t)dt < \int_x^{+\infty} g_{a_n}(t)dt$. On saura donc de nouveau avoir un développement de F si on connaît un développement de chacune des intégrales $\int_a^x g_{a_i}(t)dt$ pour $i < k$, $\int_x^{+\infty} g_{a_i}(t)dt$ pour $i \geqslant k$, en ne conservant dans le développement obtenu par la méthode du 2 que les termes non négligeables devant $\int_x^{+\infty} g_{a_n}(t)dt$.

On est donc ramené à trouver un développement asymptotique relatif à $\mathcal{E}$ d'une primitive d'une fonction $f \in \mathcal{E}$. La prop.5 permet dans certains cas d'avoir la partie principale d'une telle primitive, en ramenant la question à la détermination de la partie principale du second membre de (3) ou (4). En outre, la démonstration de la prop.5 donne l'expression de la différence des deux membres de (3) (resp.(4)) sous forme d'une primitive de la fonction $\frac{1}{\mu + 1}(\mu f - xf')$ (resp. fg' avec $g = f/f'$) ; si on sait obtenir la partie principale de cette nouvelle primitive, ainsi qu'un développement asymptotique du second membre de (3) (resp. (4)) relativement à $\mathcal{E}$, la méthode du § 2, n°3 donnera en général le second terme du développement asymptotique de la primitive de f ; de proche en proche, on pourra ainsi dans certains cas obtenir le développement cherché (voir Appendice I).

Exemples. 1) Soit $f(x) = \frac{1}{\log x}$ $(x > 1)$; on a vu que $\int_a^x f(t)dt \sim \frac{x}{\log x}$, et la différence $\int_a^x \frac{dt}{\log t} - \frac{x}{\log x}$ est une primitive de $\frac{1}{(\log x)^2}$; donc, comme cette fonction est encore d'ordre 0 par rapport à x, et qu'on peut lui appliquer la prop. 5, on a $\int_a^x \frac{dx}{(\log x)^2} \sim \frac{x}{(\log x)^2}$.

Par récurrence, on obtient ainsi le développement

$$\int_a^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} + \frac{2!\,x}{(\log x)^2} + \overbrace{\frac{2x}{(\log x)^3}}^{2!} + \ldots + \frac{(n-1)!}{(\log x)^n} + r_n$$

Quel que soit n, tous les termes de ce développement tendent vers $+\infty$ avec x.

2) Soit $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$; on peut écrire $f(x) = \frac{e^x}{x^2} - \frac{e^x}{x^4} + \frac{e^x}{x^6} + r(x)$ avec $r(x) < \frac{e^x}{x^6}$. La prop.5 donne les développements

$$\int_a^x \frac{e^t}{t^2}\,dt = \frac{e^x}{x^2} + \frac{2\,e^x}{x^3} + \frac{6\,e^x}{x^4} + \frac{24\,e^x}{x^5} + \frac{120\,e^x}{x^6} + o\left(\frac{e^x}{x^6}\right)$$

$$\int_a^x \frac{e^t}{t^4}\,dt = \frac{e^x}{x^4} + \frac{4\,e^x}{x^5} + \frac{20\,e^x}{x^6} + o\left(\frac{e^x}{x^6}\right)$$

$$\int_a^x \frac{e^t}{t^6}\,dt = \frac{e^x}{x^6} + o\left(\frac{e^x}{x^6}\right)$$

d'où par addition

$$\int_a^x \frac{e^t}{t^2+1}\,dt = \frac{e^x}{x^2} + \frac{2\,e^x}{x^3} + \frac{5\,e^x}{x^4} + \frac{20\,e^x}{x^5} + \frac{101\,e^x}{x^6} + o\left(\frac{e^x}{x^6}\right)$$

Exercices. 1) Définir une fonction croissante g(x), admettant une dérivée continue dans un voisinage de $+\infty$, telle que g et $1/x$ soient strictement comparables d'ordre 1, mais que x et $1/g$ ne soient pas strictement comparables d'ordre 1 (prendre $g'(x)=1$ sauf dans des intervalles suffisamment petits, ayant pour milieux les points entiers, et dans lesquels $g'(x)$ prend des valeurs très grandes).

2) Si f et g sont deux fonctions >0, tendant vers $+\infty$ avec x, et strictement comparables d'ordre 1, hf et hg sont strictement comparables d'ordre 1 pour toute fonction h positive et croissante pour x tendant vers $+\infty$.

3) Donner un exemple de deux fonctions f,g, positives, décroissantes et tendant vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, strictement comparables d'ordre 1, et telles que xf et xg ne soient pas strictement comparables d'ordre 1 (prendre f et g équivalentes et telles que $\frac{f'}{f}+\frac{1}{x}$ et $\frac{g'}{g}+\frac{1}{x}$ ne soient pas strictement comparables).

§ 4. Application aux séries à termes positifs.

1. Critères de convergence des séries à termes positifs. Dans tout ce paragraphe, nous entendons (par abus de langage) par série à termes positifs une série (u_n) telle que $u_n \geqslant 0$ à partir d'une certaine valeur de n. Tout ce qui sera dit sur ces séries s'étend aussitôt aux séries dont les termes sont $\leqslant 0$ à partir d'une certaine valeur de n, en changeant simplement les signes.

A toute série (u_n) à termes réels, nous ferons correspondre une fonction en escalier u définie dans $[0,+\infty[$ par les conditions suivantes : $u(x)=0$ pour $0 \leqslant x < 1$, $u(x)=u_n$ pour $n \leqslant x < n+1$ $(n \geqslant 1)$; nous dirons que u est la fonction associée à la série (u_n). Cela étant, il est immédiat que l'on a $s_n = \sum_{p=1}^{n} u_p = \int_1^{n+1} u(t)dt$; et nous avons vu (chap.I, § 2, n°6) que :

Proposition 1. Pour qu'une série (u_n) soit convergente, il faut et il suffit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} u(t)dt$ de la fonction associée à la série soit convergente.

Si (u_n) et (v_n) sont deux séries à termes positifs, u et v les fonctions associées, il est clair que la relation $u_n \leqslant v_n$ pour $n \geqslant n_0$ équivaut à $u(x) \leqslant v(x)$ pour $x \geqslant n_0$. Par suite, chacune des relations

$u_n \preccurlyeq v_n$, $u_n \prec v_n$, $u_n \sim v_n$ est respectivement équivalente à $u(x) \preccurlyeq v(x)$, $u(x) \prec v(x)$, $u(x) \sim v(x)$; de cette remarque et des prop.1 et 3 du § 3, on déduit que :

Proposition 2. Soient (u_n) et (v_n) deux séries à termes positifs. Si $u_n \preccurlyeq v_n$ et si la série (v_n) est convergente, la série (u_n) est convergente, la série (u_n) est convergente ; si $u_n \succcurlyeq v_n$ et si la somme $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = +\infty$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty$.

Proposition 3. Soient (u_n) et (v_n) deux séries à termes positifs.

1° Si la série (v_n) est convergente, la relation $u_n \prec v_n$ (resp. $u_n \sim v_n$) entraîne $\sum_{p=n}^{\infty} u_p \prec \sum_{p=n}^{\infty} v_p$ (resp. $\sum_{p=n}^{\infty} u_p \sim \sum_{p=n}^{\infty} v_p$).

2° si la somme $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = +\infty$, la relation $u_n \prec v_n$ (resp. $u_n \sim v_n$) entraîne $\sum_{p=1}^{n} u_p \prec \sum_{p=1}^{n} v_p$ (resp. $\sum_{p=1}^{n} u_p \sim \sum_{p=1}^{n} v_p$) .

Application. Critères logarithmiques de convergence des séries à termes positifs. On a des critères commodes de convergence en prenant pour série de comparaison (v_n) dans la prop.2 une série dont les termes sont de la forme $v_n = f(n)$, où f est une fonction $\geqslant 0$, définie pour tout nombre réel $x \geqslant x_0$, et monotone dans l'intervalle $[x_0, +\infty[$. Il n'y a lieu de considérer, pour obtenir une série (v_n) convergente que le cas où v_n tend vers 0 , donc où f est décroissante et tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Dans ces conditions :

Proposition 4 (critère de Cauchy-Maclaurin). Pour que la série (v_n) , où $v_n = f(n)$, soit convergente, il faut et il suffit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ soit convergente.

En effet, si v est la fonction en escalier associée à la série (v_n) , on a $u(x+1) \leqslant f(x) \leqslant u(x)$ pour tout $x \geqslant x_0$, puisque f est décroissante ; d'où la proposition, en vertu de la prop.1 .

Comme les fonctions qui figurent dans les critères logarithmiques de convergence des intégrales (§3, n°1) sont décroissantes et tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, l'application des prop.2 et 4 donne les critères suivants :

Si $u_n \asymp n^{\mu}$ et $\mu < -1$, la série (u_n) est convergente ; si $u_n \gtrsim n^{\mu}$ et $\mu \geqslant -1$, la série (u_n) a une somme infinie (critère logarithmique d'ordre 0).

Si $u_n \asymp \dfrac{1}{n \log n . l_2 n \ldots l_{p-1} n . (l_p n)^{\mu}}$ et $\mu > 1$, la série (u_n) est convergente ; si $u_n \lesssim \dfrac{1}{n . \log n . l_2 n \ldots l_{p-1} n (l_p n)^{\mu}}$ et $\mu \leqslant 1$, la série (u_n) a une somme infinie (critère logarithmique d'ordre p).

Si $0 \leqslant q < 1$, on a $q^n \asymp n^{-\mu}$ quel que soit $\mu > 0$; l'application du critère logarithmique d'ordre 0 prouve donc à nouveau la convergence de la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ pour $|q| < 1$ (Top.gén., chap.IV, § 7). Si on prend $v_n = q^n$ dans la prop.2, on obtient un critère qui peut se mettre sous la forme suivante (critère de Cauchy) : La série (u_n) est convergente si $\limsup_{n \to \infty} (u_n)^{1/n} < 1$; sa somme est infinie si $\limsup_{n \to \infty} (u_n)^{1/n} > 1$. En effet, si $\limsup_{n \to \infty} (u_n)^{1/n} = a < 1$ pour tout nombre q tel que $a < q < 1$, on a $u_n \lesssim q^n$. Si au contraire $\limsup_{n \to \infty} (u_n)^{1/n} = a > 1$, pour tout q tel que $1 < q < a$, on a $u_n \geqslant q^n > 1$ pour une infinité de valeurs de n ; u_n ne tendant pas vers 0, la série (u_n) a une somme infinie.

Ce critère est fort utile dans la théorie des séries entières, que nous étudierons plus tard ; mais il ne prmet déjà pas de décider de la convergence des séries de terme général $1/n^{\alpha}$, autrement dit son champ d'application est beaucoup plus restreint que celui des critères logarithmiques.

2. Développement asymptotique des sommes partielles d'une série. Soit $\mathcal{E}$ une échelle de comparaison, les fonctions de $\mathcal{E}$ étant chacune définie dans tout un intervalle $[x_0, +\infty[$ (dépendant de la fonction considérée). Soit (u_n) une série à termes positifs, où nous supposons que u_n possède un développement asymptotique relatif à

$$u_n = a_1 g_{a_1}(n) + a_2 g_{a_2}(n) + \ldots + a_p g_{a_p}(n) + h(n)$$

avec $h(n) \prec g_{a_p}(n)$. Proposons-nous de chercher un développement asymptotique de $s_n = \sum_{m=1}^{n} u_m$ relativement à $\mathcal{E}$. Nous distinguerons encore deux cas :

1° $\sum_{n=1}^{\infty} g_{a_p}(n) = +\infty$. On a alors $\sum_{m=1}^{n} h(m) \prec \sum_{m=1}^{n} g_{a_p}(m)$ d'après la prop.3. Comme on peut écrire

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} u_m = a_1 \sum_{m=1}^{n} g_{a_1}(m) + \ldots + a_p \sum_{m=1}^{n} g_{a_p}(m) + \sum_{m=1}^{n} h(m)$$

on aura, par les procédés du § 2, un développement asymptotique de s_n si on connaît un développement de chacune des sommes $\sum_{m=1}^{n} g_{a_k}(m)$, en ne gardant, dans ces développements, que les termes non négligeables devant $\sum_{m=1}^{n} g_{a_p}(m)$.

2° $\sum_{n=1}^{\infty} g_{a_p}(n) < +\infty$. Soit alors k le plus petit indice tel que la série de terme général $g_{a_k}(n)$ soit convergente ; le nombre

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} .(u_n - a_1 g_{a_1}(n) - \ldots - a_{k-1} g_{a_{k-1}}(n))$$

est donc fini, et on peut écrire

$$s_n = a_1 \sum_{m=1}^{n} g_{a_1}(m) + \ldots + a_{k-1} \sum_{m=1}^{n} g_{a_{k-1}}(m) + C - a_k \sum_{m=n+1}^{\infty} g_{a_k}(m) - \ldots$$
$$- a_p \sum_{m=n+1}^{\infty} g_{a_p}(m) - \sum_{m=n+1}^{\infty} h(m)$$

On a en outre $\sum_{m=n+1}^{\infty} h(m) \prec \sum_{m=n+1}^{\infty} g_{a_p}(m)$ (prop.3). On saura donc de nouveau avoir un développement de s_n si on connaît un développement

de chacune des sommes $\sum_{m=1}^{n} g_{a_i}(m)$ pour $i<k$, des sommes $\sum_{m=n+1}^{\infty} g_{a_i}(m)$ pour $i \geqslant k$, en ne conservant dans ces développements que les termes non négligeables devant $\sum_{m=n+1}^{\infty} g_{a_p}(m)$.

On est ainsi ramené au cas particulier où $u_n=f(n)$, où f appartient à $\mathcal{L}$. Nous allons voir comment dans certains cas on peut tout d'abord obtenir une <u>partie principale</u> de $s_n = \sum_{m=1}^{n} f(m)$ lorsque $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=+\infty$, de $r_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} f(m)$ dans le cas contraire.

<u>Proposition 5</u>. <u>Soit f une fonction</u> $\geqslant 0$ <u>telle que</u> log f <u>et</u> x <u>soient strictement comparables d'ordre 1</u>.

1° <u>Si f est d'ordre infini par rapport à</u> e^x, <u>on a</u>

(1) $\quad s_n = \sum_{m=1}^{n} f(m) \sim f(n)$ <u>si</u> $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = +\infty$;

(2) $\quad r_n = \sum_{m=n}^{\infty} f(m) \sim f(n)$ <u>si</u> $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty$.

2° <u>Si f est d'ordre fini</u> μ <u>par rapport à</u> e^x, <u>on a</u>

(3) $\quad s_n = \sum_{m=1}^{n} f(m) \sim \frac{\mu}{1-e^{-\mu}} \int_1^n f(t)dt$ <u>si</u> $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = +\infty$;

(4) $\quad r_n = \sum_{m=n}^{\infty} f(m) \sim \frac{\mu}{1-e^{-\mu}} \int_n^{\infty} f(t)dt$ <u>si</u> $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty$

(le nombre $\frac{\mu}{1-e^{-\mu}}$ devant être remplacé par 1 dans ces formules lorsque $\mu = 0$).

1° Si f est d'ordre $+\infty$ par rapport à x, on a log f $\succ$ x, donc f est croissante au voisinage de $+\infty$ et tend vers $+\infty$, et $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=+\infty$. D'après l'hypothèse, on a $f' \succ f$; comme f est croissante, on a pour la fonction en escalier u associée à la série, $u(x) \leqslant f(x)$ à partir d'une certaine valeur de x, donc $u \preccurlyeq f$, et $s_{n-1} = \int_1^n u(t)dt \preccurlyeq \int_1^n f(t)dt \preccurlyeq \int_1^n f'(t)dt \sim f(n)$; comme $s_n=s_{n-1}+f(n)$, on a bien $s_n \sim f(n)$. Démonstration analogue lorsque f est d'ordre $-\infty$ par rapport à e^x ; on a alors la formule (2).

2^0 Si f est d'ordre μ par rapport à e^x, on peut écrire $f(x)=e^{\mu x}g(x)$, où g est d'ordre 0 par rapport à e^x ; en outre par hypothèse $\log f \sim \mu x$ ($\log f \prec x$ si $\mu=0$) entraîne $|g'| \prec g$. Supposons d'abord que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=+\infty$ (ce qui implique $\mu \geqslant 0$, et réciproquement est toujours vérifié si $\mu > 0$, car alors f tend vers $+\infty$) ; évaluons une partie principale de $\int_{n-1}^{n} f(t)dt$; on peut écrire

$$\int_{n-1}^{n} f(t)dt = \int_{n-1}^{n} e^{\mu t}g(t)dt = g(n)\int_{n-1}^{n} e^{\mu t}dt + \int_{n-1}^{n} e^{\mu t}(g(t)-g(n))dt$$

$$= \frac{1-e^{-\mu}}{\mu} f(n) + \int_{n-1}^{n} e^{\mu t}(g(t)-g(n))dt$$

Or, la relation $g' \prec g$ signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que la relation $x \geqslant n_0$ entraîne $\left|\frac{g'(x)}{g(x)}\right| \leqslant \varepsilon$; on en déduit, pour $n-1 \leqslant t \leqslant n$, que $-\varepsilon \leqslant \log\left|\frac{g(t)}{g(n)}\right| \leqslant \varepsilon$, d'où

$$\left|g(t)-g(n)\right| \leqslant (e^{\varepsilon}-1)g(n)$$

et par suite $\int_{n-1}^{n} e^{\mu t}(g(t)-g(n))dt \leqslant (e^{\varepsilon}-1)e^{\mu n}g(n) = (e^{\varepsilon}-1)f(n)$ puisque $e^{\mu t}$ est croissante. Comme $e^{\varepsilon}-1$ est arbitrairement petit avec ε, on voit qu'on peut écrire

$$\int_{n-1}^{n} f(t)dt = \frac{1-e^{-\mu}}{\mu} f(n)+o(f(n))$$

($\frac{1-e^{-\mu}}{\mu}$ étant remplacé par 1 lorsque $\mu=0$). La proposition est alors une conséquence de la prop.3 . On raisonne de même lorsque $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ est finie.

Pour toute série (u_n) telle que $u_n \sim f(n)$, où f est une fonction telle que la prop.5 lui soit applicable, les formules (1) à (4) donnent donc une partie principale de $\sum_{m=1}^{n} u_m$ (resp. $\sum_{m=n}^{\infty} u_m$) en vertu de la prop.3 .

Par application répétée de la prop.5, on peut en outre avoir parfois un <u>développement asymptotique</u> de s_n. Supposons d'abord que f soit d'ordre $+\infty$ par rapport à e^x ; pour toute valeur <u>fixe</u> de p, on peut écrire, d'après la prop. 5

$$s_n = f(n)+f(n-1)+\dots+f(n-p)+o(f(n-p))$$

et il suffira de développer (relativement à $\mathcal{E}$) chacune des fonctions $f(n-k)$ $(0 \leqslant k \leqslant p)$ en ne gardant que les termes non négligeables devant $f(n-p)$, pour avoir un développement de s_n.

Exemple. Soit $f(x)=x^x=e^{x \log x}$, d'ordre $+\infty$ par rapport à e^x. En prenant par exemple $p=2$, on a, par les procédés du § 2,

$$(n-1)\log(n-1)=(n-1)\log n - 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \text{ d'où}$$

$$(n-1)^{n-1} = \frac{1}{e} n^{n-1} + \frac{1}{2e} n^{n-2} + o(n^{n-2})$$

$$(n-2)^{n-2} = \frac{1}{e^2} n^{n-2} + o(n^{n-2})$$

d'où

$$s_n = n^n + \frac{1}{e} n^{n-1} + \left(\frac{1}{2e} + \frac{1}{e^2}\right) n^{n-2} + o(n^{n-2}).$$

On procède de même (pour r_n) lorsque f est d'ordre - par rapport à e^x.

Si maintenant f est d'ordre fini μ par rapport à e^x, et si par exemple $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = +\infty$, on peut écrire

$$s_n = \frac{\mu}{1-e^{-\mu}} \int_1^n f(t)dt + \sum_{p=1}^{n} g(p)$$

où $g(n)=f(n)-\frac{\mu}{1-e^{-\mu}} \int_{n-1}^{n} f(t)dt \prec f(n)$ d'après la prop.5. Si on peut appliquer de nouveau la prop.5 à la fonction g (ou à une fonction équivalente à g), on obtiendra une primitive équivalente à $\sum_{p=1}^{n} g(p)$ si $\sum_{n=1}^{\infty} g(n) = +\infty$, à $\sum_{p=n}^{\infty} g(p)$ dans le cas contraire.

De proche en proche, on obtient ainsi éventuellement une expression de s_n sous forme d'une somme d'un certain nombre de primitives dont chacune est négligeable devant la précédente, d'un terme négligeable devant la dernière primitive écrite, et éventuellement d'une constante (cas où le terme restant tend vers 0). Il reste ensuite à développer chacune des primitives écrites relativement à $\mathcal{E}$, en ne conservant que les termes non négligeables devant la dernière primitive.

Exemples. 1) Soit $f(n)=n^{\mu}$, avec $\mu>1$; f étant d'ordre0 par rapport à e^{x} , on a

$$s_n = \sum_{p=1}^{n} p^{\mu} \sim \int_1^n t^{\mu}\, dt \sim \frac{1}{\mu+1}\, n^{\mu+1}$$

En second lieu, on a

$$n - \int_{n-1}^{n} t^{\mu}\, dt = n^{\mu} - \frac{1}{\mu+1}(n^{\mu+1} - (n-1)^{\mu+1}) \sim \frac{\mu}{2}\, n^{\mu-1}$$

d'où

$$s_n = \frac{1}{\mu+1}\, n^{\mu+1} + \frac{1}{2}\, n^{\mu} + o(n^{\mu})$$

Pour avoir un troisième terme, on forme

$$n^{\mu} - \frac{1}{\mu+1}(n^{\mu+1} - (n-1)^{\mu+1}) - \frac{1}{2}(n^{\mu} - (n-1)^{\mu}) \sim \frac{\mu(\mu-1)}{12}\, n^{\mu-2}$$

d'où

$$s_n = \frac{1}{\mu+1}\, n^{\mu+1} + \frac{1}{2}\, n^{\mu} + \frac{\mu}{12}\, n^{\mu-1} + o(n^{\mu-1})$$

Pour aller plus loin, il faudrait distinguer deux cas, suivant que $\mu > 3$, ou $1 < \mu \leqslant 3$; on a en effet

$$n^{\mu} - \frac{1}{\mu+1}(n^{\mu+1} - (n-1)^{\mu+1}) - \frac{1}{2}(n^{\mu} - (n-1)^{\mu}) - \frac{\mu}{12}(n^{\mu-1} - (n-1)^{\mu-1}) \sim$$

$$\sim -\frac{1}{720}\, \mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)n^{\mu-4}$$

Supposons par exemple que $1 < \mu \leqslant 3$; alors, on aura

$$s_n = \frac{1}{\mu+1}\, n^{\mu+1} + \frac{1}{2}\, n^{\mu} + \frac{\mu}{12}\, n^{\mu-1} + a - \frac{1}{720}\, \mu(\mu-1)(\mu-2)n^{\mu-3} + o(n^{\mu-3})$$

où a est une constante.

2) Soit $f(n) = \frac{1}{n}$; on a

$$s_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \sim \int_1^n \frac{1}{t}\, dt = \log n$$

puis

$$\frac{1}{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{n} + \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2}\, \frac{1}{n^2}$$

d'où

$$s_n = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

la constante γ qui s'introduit dans cette formule joue un rôle important en Analyse et est connue sous le nom de constante d'Euler on a

$$\gamma = 0{,}577215664\ldots$$

à $1/10^9$ près par défaut.

3. Développement asymptotique de produits partiels d'un produit infini.

On sait (Top.gén., chap.) que, pour que le produit infini de facteur général $1+u_n$ ($u_n > -1$) soit convergent (resp. commutativement convergent), il faut et il suffit que la série de terme général $\log(1+u_n)$ soit convergente (resp. commutativement convergente) ; dans ces conditions, on a la relation

$$\log \prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1+u_n)$$

Lorsque le produit est convergent, on sait que u_n tend vers 0 ; on a donc $\log(1+u_n) \sim u_n$; comme on sait que, pour qu'une série soit commutativement convergente, il faut et il suffit qu'elle soit absolument convergente, on retrouve ainsi la condition pour que le produit de facteur général $1+u_n$ soit commutativement convergent, savoir que la série de terme général u_n doit être absolument convergente (Top.gén., chap.IV, § 7).

La relation entre produits infinis et séries permet d'obtenir parfois un développement asymptotique du produit partiel $p_n = \prod_{k=1}^{n} (1+u_k)$; il suffit d'avoir un développement de la somme partielle $s_n = \sum_{k=1}^{n} \log(1+u_k)$, puis de développer $p_n = e^{s_n}$; on est donc ramené à deux problèmes examinés antérieurement.

Exemple : formule de Stirling. Cherchons le développement asymptotique de $n!$; on est ramené à développer $s_n = \sum_{p=1}^{n} \log p$, puis e^{s_n} . La méthode du n°2 donne successivement

$$s_n = \sum_{p=1}^{n} \log p \sim \int_1^n \log t \, dt = n \log n - n + 1$$

puis

$$\log n - \int_{n-1}^{n} \log t \, dt = \log n - (n \log n - (n-1)\log(n-1) - 1) \sim \frac{1}{2n}$$

d'où

$$s_n - n \log n + n \sim \frac{1}{2} \log n$$

On a ensuite

$$\log n - \int_{n-1}^{n} \log t \, dt - \frac{1}{2}(\log n - \log(n-1)) \sim - \frac{1}{12 n^2}$$

d'où

$$s_n = n.\log n - n + \frac{1}{2} \log n + k + \frac{1}{12 n} + o(\frac{1}{n})$$

et on en tire finalement

$$(5) \qquad n! = e^k n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \left(1 + \frac{1}{12 n} + o(\frac{1}{n})\right)$$

Nous verrons plus tard (Appendice 2) que $e^k = \sqrt{2\pi}$. La formule (5) (avec cette valeur de k) est dite <u>formule de Stirling</u>.

De la même manière, pour tout nombre réel a distinct d'un entier < 0, on démontre que

$$(6) \qquad \prod_{p=1}^{n} (a+p) \sim e^{K(a)} n^{n+a+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

Nous déterminerons également K(a) dans l'Appendice 2.

Des formules (5) et (6) on tire en particulier

$$(7) \qquad \binom{a}{n} \sim \varphi(a)(-1)^n n^{a-1}$$

pour tout a distinct d'un entier > 0.

<u>4. Application : critères de seconde espèce pour la convergence des séries à termes positifs</u>. On rencontre souvent des séries à termes positifs (u_n) pour lesquelles $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une expression simple en fonction de n, ou un développement asymptotique facile à calculer. Il est commode, pour de telles séries, d'avoir des critères (dits <u>de seconde espèce</u>) permettant de déterminer si la série est convergente d'après le seul aspect de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Un tel critère est le suivant (<u>critère de Raabe</u>) :

<u>Si</u> $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 - \frac{a}{n}$, <u>avec</u> $a > 1$, <u>à partir d'un certain rang, la série</u> (u_n) <u>est convergente ; si</u> $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 - \frac{1}{n}$ <u>à partir d'un certain rang, la série</u> (u_n) <u>a une somme infinie</u>.

En effet, si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 - \frac{a}{n}$ à partir d'un certain rang n_0, on en tire $u_n \leqslant p_n = \prod_{n_0}^{n} (1 - \frac{a}{k})$. Or on a $\log(1 - \frac{a}{n}) = -\frac{a}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$, d'où $\log p_n = -a \log n + k + o(\frac{1}{n})$ (k constante) et $p_n \sim e^k \frac{1}{n^a}$; comme $a > 1$, le critère logarithmique d'ordre 1 permet de conclure.

De même, si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 - \frac{1}{n}$ à partir d'un certain rang, le même calcul prouve que $u_n \geqslant \frac{a}{n}$ (a constante), d'où la proposition.

On démontrerait de la même manière, en utilisant les critères logarithmiques d'ordre > 0, les critères de seconde espèce suivants :

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \log n} - \dots - \frac{1}{n \log n . l_2 n \dots l_{p-1} n} - \frac{a}{n \log n . l_2 n \dots l_p n}$ avec $a > 1$

à partir d'un certain rang, la série (u_n) est convergente ; si

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \log n} - \dots - \frac{1}{n \log n . l_2 n \dots l_p n}$$

à partir d'un certain rang, la série (u_n) a une somme infinie.

Comme cas particulier du critère de Raabe, on voit que si on a $\limsup_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, la série (u_n) est convergente ; elle a au contraire une somme infinie si $\liminf_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ (critère de d'Alembert)

Exemple. Considérons la série hypergéométrique, de terme général

$$u_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{1.2\dots n.\ \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}$$

où α, β, γ sont des nombres réels quelconques, différents des entiers $\leqslant 0$; il est clair que u_n garde un signe constant à partir d'une certaine valeur de n. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)} = (1 + \frac{\alpha+\beta}{n} + \frac{\alpha\beta}{n^2})(1 + \frac{\gamma+1}{n} + \frac{\gamma}{n^2})^{-1} =$$

$$= 1 + \frac{\alpha + \beta - \gamma - 1}{n} + \frac{\alpha\beta - (\alpha+\beta)(\gamma+1) + \gamma^2 + \gamma + 1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

Le critère de Raabe montre donc que la série est convergente si $\alpha+\beta<\gamma$, a une somme infinie si $\alpha+\beta>\gamma$; lorsque $\alpha+\beta=\gamma$ la série a encore une somme infinie, comme le montre le critère de seconde espèce correspondant au critère logarithmique d'ordre 1 .

Remarque. Les critères de seconde espèce ne peuvent s'appliquer qu'à des séries dont le terme général se comporte de façon très régulière lorsque n tend vers $+\infty$; autrement dit, leur champ d'application est bien plus restreint que celui des critères de première espèce, et ce serait une maladresse que de vouloir les utiliser en dehors des cas spéciaux auxquels ils sont particulièrement adaptés. Par exemple, pour la série (u_n) telle que $u_{2p}=\frac{1}{2^p}$, $u_{2p+1}=\frac{1}{3^p}$ on a $\frac{u_{2p+1}}{u_{2p}}=(\frac{2}{3})^p$, $\frac{u_{2p+2}}{u_{2p+1}}=(\frac{3}{2})^p$; le premier de ces rapports tend vers 0, le second vers $+\infty$, donc $\limsup_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty$ $\liminf_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0$; aucun critère de seconde espèce n'est applicable, et cependant, comme $u_n\leqslant 2^{-\frac{n}{2}}$, la série est évidemment convergente.

Même dans les cas où $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est simple, une évaluation directe de u_n conduit souvent aussi vite au résultat que les critères de seconde espèce. Par exemple, pour la série hypergéométrique, la formule (6) montre aussitôt que $u_n\sim an^{\alpha+\beta-\gamma-1}$, où a est une constante $\neq 0$, et le critère logarithmique de première espèce d'ordre 0 est directement applicable .

Exercices. 1) Si la série de terme général $u_n\geqslant 0$ est convergente, il en est de même de la série de terme général $\sqrt{u_nu_{n+1}}$. La réciproque est inexacte en général ; elle est vraie si la suite (u_n) est décroissante.

2) Si la série de terme général $u_n \geqslant 0$ est convergente, il en est de même de la série de terme général $\frac{\sqrt{u_n}}{n^a}$ pour $a > \frac{1}{2}$ (utiliser l'inégalité de Hölder).

3) Soit (p_n) une suite croissante de nombres > 0, tendant vers $+\infty$.

a) Si le rapport $\frac{p_n}{p_{n-1}}$ tend vers 1, montrer qu'on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k - p_{k-1}}{p_k} \sim \log p_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k^{\rho}(p_k - p_{k-1}) \sim \frac{1}{\rho+1} p_n^{\rho+1} \quad \text{pour} \quad \rho > -1$$

b) En déduire que (sans hypothèse sur le rapport $\frac{p_n}{p_{n-1}}$) la série de terme général $\frac{p_n - p_{n-1}}{p_n}$ a une somme infinie (distinguer deux cas suivant que $\frac{p_n}{p_{n-1}}$ tend ou non vers 1).

c) Montrer que, pour $\rho > 0$, la série de terme général $\frac{p_n - p_{n-1}}{p_n p_{n-1}^{\rho}}$ est convergente (comparer à la série de terme général $\frac{1}{p_{n-1}^{\rho}} - \frac{1}{p_n^{\rho}}$).

4) Montrer que, pour toute série convergente (u_n) à termes > 0, il existe une série (v_n) de somme infinie, à termes > 0 telle que $\liminf_{n \to \infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$.

5) Soit (u_n) une suite décroissante de nombres > 0 ; s'il existe un entier k tel que $ku_{kn} \geqslant u_n$ quel que soit n à partir d'un certain rang, la série de terme général u_n a une somme infinie.

APPENDICE I .

CORPS DE HARDY. FONCTIONS (H) .

1. Corps de Hardy. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions numériques finies définies chacune dans un intervalle $[a,+\infty[$ (où a dépend de la fonction considérée). Du point de vue de l'étude locale des fonctions de $\mathcal{F}$ au voisinage de $+\infty$, deux fonctions ne se distinguent pas si elles sont égales dans tout un intervalle $[b,+\infty[$; en d'autres termes, dans cette étude, on ne considère pas en réalité l'ensemble $\mathcal{F}$, mais l'ensemble quotient $\mathcal{F}/P$ de $\mathcal{F}$ par la relation d'équivalence P : "il existe un intervalle $[a,+\infty[$ dans lequel $f(x)=g(x)$" (il est immédiat que c'est bien une relation d'équivalence). On voit aussitôt que la relation P est compatible avec chacune des applications $f \to -f$, $(f,g) \to f+g$, $(f,g) \to fg$; pour montrer par exemple qu'elle est compatible avec $(f,g) \to f+g$, il suffit de remarquer que, si $f(x)=f_1(x)$ dans un intervalle $[a,+\infty[$, et $g(x)=g_1(x)$ dans un intervalle $[b,+\infty[$, on a $f(x)+g(x) = f_1(x)+g_1(x)$ dans l'intervalle $[c,+\infty[$, où $c = \mathrm{Max}(a,b)$. On peut donc définir dans $\mathcal{F}/P$ l'addition et la multiplication ; l'addition est une loi de groupe abélien, dont l'élément neutre est la classe de la fonction 0 ; la multiplication est associative, commutative, et admet un élément neutre, la classe de la fonction 1 . Par contre un élément de $\mathcal{F}/P$ n'est inversible que si c'est une classe contenant une fonction qui ne s'annule pas dans un intervalle $[a,+\infty[$ (dépendant de la fonction).

Définition 1. Etant donné un sous-ensemble $\mathcal{K}$ de $\mathcal{F}$, on dit que l'ensemble $\mathcal{K}/P$ (image canonique de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}/P$) est un corps de Hardy, si :

1° $\mathcal{K}/P$ est un corps pour l'addition et la multiplication définies dans $\mathcal{F}/P$.

2° Toute fonction de $\mathfrak{K}$ est continue et dérivable dans un intervalle $]a,+\infty[$ (dépendant de la fonction), et la classe (mod. P) de sa dérivée appartient à $\mathfrak{K}/P$.

Par abus de langage, si $\mathfrak{K}$ est tel que $\mathfrak{K}/P$ soit un corps de Hardy, on dira dans ce qui suit que $\mathfrak{K}$ lui-même est un corps de Hardy (bien que la somme et le produit de deux éléments de $\mathfrak{K}$ ne soient pas toujours définis), et on identifiera deux fonctions de $\mathfrak{K}$ qui sont congrues mod. P.

Exemples. 1) Tout corps de Hardy contient le corps des constantes rationnelles (plus petit corps de caractéristique 0) qu'on peut identifier à Q ; d'ailleurs deux constantes n'étant congrues mod. P que si elles sont identiques, Q/P est identique à Q. Les constantes réelles forment aussi un corps de Hardy, qu'on peut identifier à R.

2) Un exemple plus important est le corps des fonctions rationnelles $R(x)$ à coefficients réels ; si $f(x)=p(x)/q(x)$ est une fonction rationnelle à coefficients réels, non identiquement nulle, elle est continue dérivable et $\neq 0$ dans l'intervalle $]a,+\infty[$, où a est strictement supérieur à la plus grande des racines réelles des polynomes $p(x)$ et $q(x)$; donc tout élément de $R(x)/P$ autre que 0 est inversible. On notera encore que deux fonctions rationnelles ne peuvent être congrues mod. P que si elles sont identiques, donc $R(x)/P$ peut être identifié à $R(x)$.

2. Extension d'un corps de Hardy. Nous allons maintenant voir comment, par adjonction (Alg., chap. VI) de nouvelles fonctions convenables à un corps de Hardy, on peut encore obtenir un corps de Hardy.

Lemme 1. Soient $a(x)$, $b(x)$ des fonctions continues et ne changeant pas de signe dans un intervalle $]x_0,+\infty[$. Si, dans cet intervalle, la fonction $y(x)$ est continue et dérivable, et vérifie l'identité

(1) $$y' = ay+b$$

il existe un intervalle $[x_1, +\infty[$ dans lequel y ne change pas de signe.

Posons en effet $z(x)=y(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$; on a d'après (1) l'identité

$$z'(x) = b(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$$

Si $b(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant x_0$, z est croissante dans cet intervalle, donc ou bien est < 0 dans tout l'intervalle, ou bien est nulle dans un intervalle $[x_1, +\infty[$, ou bien est > 0 pour un point au moins x_1 de $[x_0, +\infty[$, et alors nécessairement > 0 dans $[x_1, +\infty[$; comme y a le même signe que z , la proposition est démontrée dans ce cas . Raisonnement analogue si $b(x) \leqslant 0$ pour $x \geqslant x_0$.

Remarque. Cette propriété si élémentaire ne s'étend pas aux équations différentielles linéaires d'ordre > 1 ; par exemple, la fonction sin x satisfait à $y''+y=0$, mais change de signe dans tout voisinage de $+\infty$.

Lemme 2. Soient a(x) et b(x) deux fonctions appartenant à un même corps de Hardy $\mathcal{K}$, y(x) une fonction satisfaisant à l'identité (1) dans un voisinage de $+\infty$, p(u) un polynome d'une variable u , dont les coefficients sont des fonctions de x appartenant à $\mathcal{K}$. Dans ces conditions, il existe un intervalle $[x_1, +\infty[$, dans lequel la fonction p(y) ne change pas de signe.

La proposition est vraie si p(u) est de degré 0 car une fonction non identiquement nulle appartenant au corps $\mathcal{K}$ est inversible dans $\mathcal{K}$. Comme on peut écrire $p(u)=c(u^n+c_1u^{n-1}+c_2u^{n-2}+\ldots+c_n)$, où $c, c_1, \ldots, c_n$ sont des fonctions appartenant à $\mathcal{K}$ et $c \neq 0$, il suffit de démontrer le lemme pour le cas où $c=1$. Raisonnons alors par récurrence sur n ; on a

$$\frac{d}{dx}(p(y)) = (ay+b)(ny^{n-1}+(n-1)c_1y^{n-2}+\ldots+c_{n-1})+c_1'y^{n-1}+\ldots+c_n' =$$
$$= na.p(y)+q(y)$$

où q(u) est un polynome de degré $\leqslant n-1$, à coefficients dans $\mathcal{K}$.

Par hypothèse, les fonctions $na(x)$ et $q(y(x))$ ne changent pas de signe dans un intervalle $[x_0, +\infty[$; la proposition est donc une conséquence du lemme 1 .

Théorème 1. Soient $a(x)$ et $b(x)$ deux fonctions appartenant à un corps de Hardy $\mathcal{K}$, $y(x)$ une fonction satisfaisant à (1) dans un voisinage de $+\infty$. L'ensemble des fonctions $r(y)$, où $r(u)$ désigne une fraction rationnelle en u , à coefficients dans $\mathcal{K}$, forme un corps de Hardy, qu'on désigne par $\mathcal{K}(y)$, et qu'on dit obtenu par adjonction de y à $\mathcal{K}$.

En effet, d'après le lemme 2 , il existe un voisinage de $+\infty$ dans lequel la fonction $r(y)$ est continue et ne change pas de signe, donc $\mathcal{K}(y)/P$ est bien un corps ; d'autre part, comme $\frac{d}{dx}(r(y)) = r'(y)y' = r'(y)(ay+b)$, la dérivée de toute fonction de $\mathcal{K}(y)$ appartient à $\mathcal{K}(y)$, ce qui prouve que $\mathcal{K}(y)$ satisfait bien aux conditions de la déf. 1 .

Corollaire 1. Si y est une fonction de $\mathcal{K}$ non identiquement nulle $\mathcal{K}(\log|y|)$ est un corps de Hardy.

En effet, $(\log y)' = \frac{y'}{y}$ appartient à $\mathcal{K}$.

Corollaire 2. Si y est une fonction quelconque de $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}(e^y)$ est un corps de Hardy.

En effet, $(e^y)' = e^y y'$, et y' appartient à $\mathcal{K}$.

Corollaire 3. Si $\mathcal{K}$ contient les constantes réelles, et si y est une fonction de $\mathcal{K}$ non identiquement nulle, α un nombre réel quelconque, $\mathcal{K}(|y|^\alpha)$ est un corps de Hardy.

En effet, $\frac{d}{dx}(|y|^\alpha) = |y|^\alpha (\alpha \frac{y'}{y})$, et $\alpha \frac{y'}{y}$ appartient par hypothèse à $\mathcal{K}$.

Enfin, si y est une primitive d'une fonction quelconque de $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}(y)$ est encore un corps de Hardy.

3. Comparaison des fonctions d'un corps de Hardy. Proposition 1. Deux fonction non identiquement nulles appartenant à un même corps de Hardy sont strictement comparables d'ordre quelconque.

En effet, si f appartient à un corps de Hardy $\mathcal{K}$, pour tout entier $n>0$, il existe un voisinage de $+\infty$ dans lequel f est n fois dérivable, sa dérivée $n^{ème}$ appartenant à $\mathcal{K}$. Il suffit donc de montrer que deux fonctions non identiquement nulles f,g de $\mathcal{K}$ sont strictement comparables, ou encore que $h = \frac{f}{g}$ tend vers une limite (finie ou infinie) lorsque x tend vers $+\infty$. Or, h appartient à $\mathcal{K}$ donc il existe un voisinage de $+\infty$ dans lequel h est dérivable, et sa dérivée h', qui appartient à $\mathcal{K}$, ne change pas de signe ; h est donc monotone dans ce voisinage, donc tend vers une limite lorsque x tend vers $+\infty$.

On en déduit d'abord que, si $\mathcal{K}$ contient les constantes réelles (ce que nous supposerons toujours par la suite), et si f et g sont deux fonctions quelconques de $\mathcal{K}$, deux quelconques des fonctions e^f, e^g, $\log|f|$, $\log|g|$, $|f|^\alpha$, $|g|^\alpha$ (α réel quelconque), $\int_a f$, $\int_a g$ (a réel quelconque dans un voisinage de $+\infty$ où f et g sont continues) sont strictement comparables ; en effet, deux quelconques de ces fonctions appartiennent à un même corps de Hardy obtenu en les adjoignant successivement au corps $\mathcal{K}$.

De même, toute fonction f d'un corps de Hardy $\mathcal{K}$ est strictement comparable à x, car x et f appartiennent au corps de Hardy $\mathcal{K}(x)$ obtenu en adjoignant x à $\mathcal{K}$ (si $\mathcal{K}$ ne contient pas déjà x). On en conclut que f est (en particulier) strictement comparable à toute puissance x^α, ainsi qu'à $\log x$ et à e^x.

On voit aussi que, si f et g appartiennent à un même corps de Hardy, et si $g>0$ dans un voisinage de $+\infty$, l'ordre de f par rapport à g (chap.III, § 1) est toujours défini.

La prop. 5 du chap.III, §3 est donc applicable à toute fonction f d'un corps de Hardy $\mathcal{H}$, et prouve que :

1° si f est d'ordre $+\infty$ par rapport à x, $\int_a^x f(t)dt \sim \frac{(f(x))^2}{f'(x)}$

2° si f est d'ordre $\mu > -1$ par rapport à x, $\int_a^x f(t)dt \sim \frac{1}{\mu+1} x f(x)$

3° si f est d'ordre $\mu < -1$ par rapport à x, $\int_x^{+\infty} f(t)dt \sim \frac{1}{|\mu+1|} x f(x)$

4° si f est d'ordre $-\infty$ par rapport à x, $\int_x^{+\infty} f(t)dt \sim \frac{(f(x))^2}{|f'(x)|}$

De même :

Proposition 2. 1° Si f est d'ordre infini par rapport à x, on a pour tout entier $n > 0$

$$(2) \qquad f^{(n)}(x) \sim \frac{(f(x))^n}{(f'(x))^{n-1}}$$

2° Si f est d'ordre fini μ par rapport à x, on a pour tout $n > 0$

$$(3) \qquad f^{(n)}(x) \sim \mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)\frac{f(x)}{x^n} \sim \mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)\frac{(f'(x))^n}{(f(x))^{n-1}}$$

sauf si μ est entier $\geqslant 0$ et $n > \mu$.

1° Si f est d'ordre infini par rapport à x, on a $\log|f| \succ \log x$ donc, puisque $\log|f|$ et $\log x$ sont strictement comparables de tout ordre, $\frac{f'}{f} \succ \frac{1}{x}$. Posons $g = \frac{f'}{f}$; comme $g \in \mathcal{H}$, on déduit de $\frac{1}{g} \prec x$ que $\frac{g'}{g^2} \prec 1$, et par suite $\frac{g'}{g} \prec g = \frac{f'}{f}$, ou encore $fg' \prec gf'$.

De la relation $f' = fg$ on déduit en dérivant

$$f'' = fg' + gf' \sim gf'$$

ou encore $\frac{f''}{f'} \sim \frac{f'}{f}$. Le même raisonnement, appliqué à $f^{(n)}$ au lieu de f montre, par récurrence sur n, que $\frac{f^{(n)}}{f^{(n-1)}} \sim \frac{f'}{f}$; d'où la relation (2).

2° Si f est d'ordre fini μ par rapport à x et si $\mu \neq 0$, on a $\log|f| \sim \mu \log x$, d'où en dérivant $f'(x) \sim \mu \frac{f(x)}{x}$; on en déduit que f' est d'ordre $\mu-1$ par rapport à x, ce qui permet d'appliquer

le même raisonnement par récurrence sur n tant que $\mu \neq n$, d'où la formule (3) lorsque μ n'est pas entier $\geqslant 0$ ou est entier $\leqslant n$.

Lorsque f est d'ordre entier $p \geqslant 0$ par rapport à x, on peut écrire $f(x)=x^p f_1(x)$, où f_1 est d'ordre 0 par rapport à x. D'après la prop.2, on a

$$f^{(p)} \sim p! f_1$$

Pour évaluer les dérivées d'ordre $n > p$, on peut donc se borner au cas où $p=0$. Alors, si f n'est pas équivalent à une constante $k \neq 0$, on a $\log|f| \prec \log x$, d'où $\frac{f'}{f} \prec \frac{1}{x}$, $xf' \prec f$, et en dérivant, $xf''+f' \prec f'$, ce qui signifie que $xf'' \sim -f'$. Tenant compte de cette formule, on voit par récurrence sur n que $f^{(n)}$ est d'ordre $\leqslant -n$ par rapport à x et que

$$f^{(n)} \sim (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{f'(x)}{x^{n-1}}$$

Si f était équivalente à une constante k, on aurait $f(x)=k+f_2(x)$ avec $f_2 \prec 1$, et on serait ramené à étudier les dérivées de f_2.

4. Fonctions (H). Proposition 3. Si $\mathcal{K}_0$ est un corps de Hardy, il existe un corps de Hardy $\mathcal{K}$ contenant $\mathcal{K}_0$ et tel que, pour toute fonction z appartenant à $\mathcal{K}$ et non identiquement nulle au voisinage de $+\infty$, e^z et $\log|z|$ appartiennent à $\mathcal{K}$.

Désignons par $\mathcal{K}$ l'ensemble des fonctions f appartenant à $\mathcal{F}$ et jouissant des propriétés suivantes : pour chaque fonction $f \in \mathcal{K}$ il existe un nombre fini de corps de Hardy $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_n$ (le nombre n et les corps $\mathcal{K}_i$ dépendant de f) tels que $f \leqslant \mathcal{K}_n$ et que, pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, on ait $\mathcal{K}_{i+1} = \mathcal{K}_i(u_{i+1})$, où u_{i+1} est égale, soit à e^{z_i} soit à $\log z_i$, et z_i appartient à $\mathcal{K}_i$ et n'est pas identiquement nulle au voisinage de $+\infty$. On dit que $u_1, u_2, \ldots, u_n$ forment une suite de définition du corps $\mathcal{K}_n$ et de la fonction f ;

une même fonction $f \in \mathcal{K}$ peut naturellement posséder plusieurs suites de définition.

Il est clair que toute fonction $f \in \mathcal{K}$, non identiquement nulle au voisinage de $+\infty$, ne change pas de signe dans un voisinage de $+\infty$, est dérivable dans ce voisinage, et que sa dérivée f' appartient au corps de Hardy $\mathcal{K}_n$, donc à $\mathcal{K}$. Pour voir que $\mathcal{K}$ est un corps de Hardy, il suffit donc de prouver que si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{K}$, $f-g$ et fg appartiennent à $\mathcal{K}$. Or, soit $u_1, u_2, \ldots, u_m$ une suite de définition de f, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ une suite de définition de g. La suite $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ obtenue par juxtaposition des suites (u_i) et (v_j) est encore une suite de définition d'un corps de Hardy $\mathcal{K}_{m+n}$, et ce corps contient f et g, donc il contient aussi $f-g$ et fg, qui appartiennent ainsi à $\mathcal{K}$.

Il est clair, d'après cette définition, que non seulement $\mathcal{K}$ est un corps de Hardy possédant les propriétés énoncées dans la prop.3, mais encore que c'est le plus petit corps de Hardy ayant ces propriétés. Nous dirons que c'est l'extension(H) du corps de Hardy $\mathcal{K}_0$.

Définition 2. On appelle corps des fonctions (H) l'extension (H) du corps de Hardy $\mathbb{R}(x)$ des fonctions rationnelles à coefficients réels. Toute fonction appartenant à cette extension est dite fonction (H).

D'après cette définition, si f est une fonction (H) non identiquement nulle dans un voisinage de $+\infty$, e^f et $\log|f|$ sont aussi des fonctions (H). Plus généralement, si g est une seconde fonction (H), $u_1, \ldots, u_n$ une suite de définition de g, et si les fonctions composées $u_1 \circ f$, $u_2 \circ f$, $\ldots$, $u_n \circ f$ et $g \circ f$ sont définies au voisinage de $+\infty$, ce sont des fonctions (H), comme on le voit aussitôt par récurrence sur n.

5. Exponentielles et logarithmes itérés. Nous avons déjà (chap.III, § 2) défini les logarithmes itérés $l_n x$ par les conditions $l_2 x = \log\log x$, $l_n x = \log(l_{n-1} x)$ pour $n > 2$. On définit de même les exponentielles itérées $e_2(x) = e^{e^x}$, $e_n(x) = e^{e_{n-1}(x)}$ pour $n > 2$. Il est immédiat que $l_n x$ est la fonction réciproque de $e_n(x)$, définie pour $x > e_{n-1}(0)$, et que $e_m(e_n(x)) = e_{m+n}(x)$, $l_m(l_n x) = l_{m+n} x$. En vertu des relations $\log x \prec x^\mu \prec e^x$ pour tout $\mu > 0$, on a pour $n > 1$

$$(4) \qquad l_n x \prec (l_{n-1} x)^\mu \qquad \text{pour tout } \mu > 0$$

$$(5) \quad e_{n-1}(x^{1+\beta}) \prec e_n(x^{1-\delta}) \prec e_n((1-\gamma)x) \prec (e_n(x))^\mu \prec e_n((1+\alpha)x) \prec e_n(x^{1+\beta})$$

pour $\mu > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < \gamma < 1$, $0 < \delta < 1$, ces nombres étant par ailleurs quelconques (pour démontrer les relations (5) par récurrence, il suffit d'appliquer la prop.6 du chap.III, § 1).

Nous avons déjà vu que $\frac{d}{dx}(l_n x) = \frac{1}{x \log x \log_2 x \cdots l_{n-1} x}$. On a de même

$$(6) \qquad \frac{d}{dx}(e_n(x)) = e^x e_2(x) e_3(x) \cdots e_n(x)$$

d'où, d'après la prop.5 du chap.III, § 3, pour tout $\mu > 0$

$$(7) \qquad \int_a^x e_n(t^\mu)\,dt \sim \frac{e_n(x^\mu)}{\mu x^{\mu-1} e^{x^\mu} e_2(x^\mu) \cdots e_{n-1}(x^\mu)}$$

$$(8) \qquad \int_x^{+\infty} \frac{dt}{e_n(t^\mu)} \sim \frac{1}{\mu x^{\mu-1} e^{x^\mu} e_2(x^\mu) \cdots e_{n-1}(x^\mu) e_n(x^\mu)}$$

6. Limitation supérieure des fonctions (H). Les fonctions $e_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ et $\frac{1}{e_n(x)}$ forment une échelle de comparaison telle que toute fonction (H) soit comprise (pour la relation d'ordre correspondant à la relation "$f \prec g$ ou il existe une constante $k \neq 0$ telle que $f \sim kh$") entre deux fonctions de cette échelle ; autrement dit, il n'existe pas de fonction (H) telle que $f \succ e_n(x)$ ou $f \prec \frac{1}{e_n(x)}$ pour tout n. C'est ce qui va résulter de la proposition plus précise suivante :

Proposition 4. Si f est une fonction (H) possédant une suite de définitio formée de n fonctions et non identiquement nulle dans un voisinage de $+\infty$, il existe un nombre $\mu > 0$ tel que

$$\frac{1}{e_n(x^\mu)} \prec f \prec e_n(x^\mu)$$

Lorsque n=0 il faut remplacer $e_0(x)$ par x , et lorsque n=1 , $e_1(x)$ par e^x dans cette formule.

Remarquons d'abord que, si g et h sont deux fonctions (H) telles que $\frac{1}{e_n(x^\mu)} \prec g \prec e_n(x^\mu)$ et $\frac{1}{e_n(x^\mu)} \prec h \prec e_n(x^\mu)$, on a

$$\frac{1}{(e_n(x^\mu))^2} \prec gh \prec (e_n(x^\mu))^2$$

et par suite, pour $\lambda > 2\mu$

$$\frac{1}{e_n(x^\lambda)} \prec gh \prec e_n(x^\lambda)$$

Démontrons la proposition par récurrence sur n ; elle est vraie pour n=0 , puisque toute fonction rationnelle est équivalente à un monome ax^p, où p est un entier rationnel. Supposons la proposition démontrée pour $n < m$ et démontrons-là pour n=m . Une fonction ayant une suite de définition de m termes est de la forme R(u), où R est une fraction rationnelle dont les coefficients appartiennent à un corps de Hardy $\mathcal{K}$ ayant une suite de définition de m-1 termes au plus, et où $u = \log|z|$ ou $u=e^z$, avec $z \in \mathcal{K}$. D'après la remarque du début, on peut se borner à montrer que pour tout polynome $P(u)=c_0+c_1u+\ldots+c_pu^p$ à coefficients dans $\mathcal{K}$, il existe $\mu > 0$ tel que

$$\frac{1}{e_m(x^\mu)} \prec P(u) \prec e_m(x^\mu)$$

en supposant bien entendu que P(u) ne soit pas identiquement nul dans un voisinage de $+\infty$.

Raisonnons par récurrence sur p , la proposition étant évidente pour p=0 ; supposons-là démontrée pour les polynomes de degré $\leqslant p-1$.

Nous distinguerons deux cas suivant la forme de u .

1^0 $u=\log|z|$. D'après la remarque du début, on peut, en divisant par une fonction de $\mathcal{K}$, supposer que $c_p=1$. Alors, comme $u' = \frac{z'}{z}$ appartient à $\mathcal{K}$, $(P(u))'$ est un polynome en u à coefficients dans $\mathcal{K}$, de degré $\leqslant p-1$; donc il existe $\mu > 0$ tel que

$$\frac{1}{e_m(x^\mu)} \prec (P(u))' \prec e_m(x^\mu)$$

et d'après les formules (7) et (8), on voit qu'il existe $\lambda > \mu$ tel que $\frac{1}{e_m(x^\lambda)} \prec P(u) \prec e_m(x^\lambda)$

2^0 $u=e^z$. Comme $\frac{1}{e_{m-1}(x^\mu)} \prec z \prec e_{m-1}(x^\mu)$ par hypothèse, on a

$$\frac{1}{e_m(x^\mu)} \prec u \prec e_m(x^\mu)$$

En divisant au besoin par une fonction de $\mathcal{K}$, on peut, d'après la remarque du début, supposer que $c_o=0$ ou $c_o=1$; alors

$$(P(u))' = c_1'u+\ldots+c_p'u^p+(c_1+2c_2u+\ldots+pc_pu^{p-1})u'$$

et comme $u'=uz'$, $(P(u))'$ est de la forme $uQ(u)$, où Q est un polynome de degré $\leqslant p-1$ en u , à coefficients dans $\mathcal{K}$; on a donc encore

$$\frac{1}{e_m(x^\lambda)} \prec (P(u))' \prec e_m(x^\lambda)$$

d'après la remarque initiale, et on conclut comme dans le premier cas.

7. Limitation inférieure des fonctions (H). De même que les exponentielles itérées limitent supérieurement les fonctions (H) tendent vers $+\infty$, les logarithmes itérés les limitent inférieurement, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de fonction (H) telle que $1 \prec f \prec l_n x$ pour tout n .

Cela résulte de la proposition plus précise suivante :

Proposition 5. Si f est une fonction (H) possédant une suite de définition de n fonctions, non équivalente à une constante, et d'ordre 0 parr rapport à $l_{n-1}x$, il existe une constante réelle non nulle k et un entier rationnel non nul α , tels que $f(x) \sim k(l_n x)^\alpha$.

On convient toujours que $l_1 x = \log x$, $l_0 x = x$, $l_{-1} x = e^x$.

Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 1. Soient f et g deux fonctions (H) telles que $\frac{f}{g}$ soit d'ordre 0 par rapport à $l_m x$; si g n'est pas d'ordre 0 par rapport à $l_m x$, on a $\frac{f'}{g'} \sim \frac{f}{g}$.

En effet on a par hypothèse $\log \left|\frac{f}{g}\right| \prec l_{m+1} x$; comme g n'est pas d'ordre 0 par rapport à $l_m x$, $\log|g|$ tend nécessairement vers $+\infty$ ou $-\infty$, et on a soit $\log|g| \sim k.l_{m+1} x$, soit $\log|g| \succ l_{m+1} x$; dans tous les cas, $\log \left|\frac{f}{g}\right| \prec \log|g|$, d'où en dérivant $\left|\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right| \prec \left|\frac{g'}{g}\right|$, ce qui implique $\frac{f'}{f} \sim \frac{g'}{g}$, donc $\frac{f'}{g'} \sim \frac{f}{g}$.

Ce lemme établi, nous allons démontrer une démonstration un peu plus générale que la prop.5 : soit $\mathcal{K}$ un corps de Hardy ayant une suite de définition de n fonctions, et soit $\mathcal{K}^*$ le corps de Hardy obtenu en adjoignant à $\mathcal{K}$ les fonctions $\log x$, $l_2 x$,..., $l_n x$ si elles n'appartiennent pas déjà à $\mathcal{K}$ (les éléments de $\mathcal{K}^*$ sont donc les fonctions rationnelles par rapport à $\log x$, $l_2 x$,..., $l_n x$, à coefficients dans $\mathcal{K}$). Nous allons montrer que si f est une fonction de $\mathcal{K}^*$ non équivalente à une constante, et d'ordre 0 par rapport à $l_{n-1} x$, on a encore $f \sim k.(l_n x)^\alpha$ avec k et α non nuls et α entier.

Nous raisonnerons par récurrence sur n ; la proposition est évidente pour n=0 car toute fonction rationnelle est d'ordre 0 par rapport à e^x , et équivalente à un monôme $k.x^\alpha$. Supposons donc la proposition démontrée pour $n < m$, et démontrons-la pour $n=m$; la fonction f peut être considérée comme appartenant au corps $\mathcal{K}^*_1(u, l_m x)$, où $\mathcal{K}_1$ est un corps de Hardy ayant une suite de définition de m-1 fonctions, $\mathcal{K}^*_1$ le corps obtenu par adjonction à $\mathcal{K}_1$ de $\log x, l_2 x, \ldots, l_{m-1} x$, et $\mathcal{K}^*_1(u, l_m x)$ le corps obtenu par adjonction à $\mathcal{K}^*_1$ de $l_m x$ et de u ,

où on a, soit $u = \log|z|$, soit $u=e^z$, et z (non nulle) appartient à $\mathcal{K}^*_1$. Nous distinguerons plusieurs cas :

1° Supposons d'abord que $u=l_m x$, donc que f appartienne au corps $\mathcal{K}' = \mathcal{K}^*_1(l_m x)$; autrement dit, on a $f(x)=R(l_m x)$, où R(t) est une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathcal{K}^*_1$. Or, remarquons que, dans un polynome $c_0(l_m x)^p+c_1(l_m x)^{p-1}+\ldots+c_{p-1}l_m x+c_p$, où les c_i appartiennent à $\mathcal{K}^*_1$, on ne peut avoir $c_h(l_m x)^{p-h}$ $c_k(l_m x)^{p-k}$ pour $h\neq k$ et c_h et c_k non nuls, car on en déduirait $\frac{c_h}{c_k}$ $(l_m x)^{h-k}$, et par suite $\frac{c_h}{c_k}$ serait d'ordre 0 par rapport à $l_{m-1}x$; comme $\frac{c_h}{c_k}$ appartient à $\mathcal{K}^*_1$, l'hypothèse de récurrence entraîne que $\frac{c_h}{c_k}$ serait équivalent à une constante contrairement à la relation précédemment obtenue.
On conclut de cette remarque que tout polynome en $l_m x$, à coefficients dans $\mathcal{K}^*_1$ est équivalent à un de ses termes ; d'où résulte aussitôt qu'on a $f(x)\sim c(x)(l_m x)^\alpha$, où $c(x)\in \mathcal{K}^*_1$ et α est <u>entier</u> (positif ou négatif). Cela étant, si f est d'ordre 0 par rapport à $l_{m-1}x$, il en est de même de c, donc l'hypothèse de récurrence entraîne que c est équivalent à une constante.

2° En second lieu, supposons que f appartienne à $\mathcal{K}'(\log|z|)$ avec $z \in \mathcal{K}^*_1$. Nous commencerons par considérer le cas où f est un polynome $f = c_0u^p+c_1u^{p-1}+\ldots+c_{p-1}u+c_p$, les c_i étant eux-mêmes des polynomes en $l_m x$, à coefficients dans $\mathcal{K}^*_1$; soit $c_0=a_0(l_m x)^p+ a_1(l_m x)^{q-1}+\ldots+a_q$.
Nous allons montrer que, dans ce cas, si f est d'ordre 0 par rapport à $l_{m-1}x$, il est équivalent à un monôme $k(l_m x)^\alpha$, avec α <u>entier</u> $\geqslant 0$.
La proposition est vraie pour p=0 d'après la première partie ; démontrons-la par récurrence sur p. Supposons d'abord que q=0, c'est-à-dire que $c_0 \in \mathcal{K}^*_1$. Si c_0 n'est pas d'ordre 0 par rapport à $l_{m-1}x$, on peut en posant $b_0 = \frac{1}{c_0}$, écrire $f = \frac{g}{b_0}$, où $g = u^p+b_1u^{p-1}+\ldots+b_p$,

les b_i ($i \geqslant 1$) étant encore des polynomes en $l_m x$, à coefficients dans $\mathcal{K}^*_1$. D'après le lemme 1, on a $\frac{g}{b_o} \sim \frac{g'}{b'_o}$. Or, $\frac{g'}{b'_o}$ est un polynome en u de degré p-1 à coefficients polynomes en $l_m x$ (puisque $u' = \frac{z'}{z} \in \mathcal{K}^*_1$) l'hypothèse de récurrence entraîne donc dans ce cas la proposition. Si au contraire c_o est d'ordre 0 par rapport à $l_{m-1} x$, comme c_o appartient à $\mathcal{K}^*_1$, c_o est nécessairement équivalent à une constante, et on peut donc supposer que $c_o = 1$. Alors, pour tout $\delta > 0$, on a $(l_{m-1}x)^{-\delta} \prec |f| \prec (l_{m-1}x)^{\delta}$, d'où en dérivant

$$\frac{1}{x.\log x \ldots (l_{m-1}x)^{1+\delta}} \prec |f'| \prec \frac{1}{x.\log x \ldots (l_{m-1}x)^{1-\delta}}$$

autrement dit, $f_1 = x.\log x.l_2 x \ldots l_{m-1}x.f'$ est d'ordre 0 par rapport à $l_{m-1}x$; comme c'est un polynome de degré p-1 en u, à coefficients polynomes en $l_m x$ (à coefficients dans $\mathcal{K}^*_1$), l'hypothèse de récurrence entraîne que $f_1 \sim k(l_m x)^{\alpha}$, avec α entier $\geqslant 0$; on en tire en intégrant que $f \sim k'(l_m x)^{\alpha+1}$.

Supposons maintenant $q > 0$, et raisonnons par récurrence sur q. Si a_o n'est pas d'ordre 0 par rapport à $l_{m-1}x$, on peut, en posant $b_o = \frac{1}{a_o}$, écrire $f = \frac{g}{b_o}$, où g a la même forme que f, mais avec $a_o = 1$. D'après le lemme 1, on a $f \sim \frac{g'}{b'_o}$, et $\frac{g'}{b'_o}$ est de la même forme que f mais le degré du polynome en $l_m x$, coefficient de u^p, est égal à q-1 ; l'hypothèse de récurrence entraîne alors la proposition. Si au contraire a_o est d'ordre 0 par rapport à $l_{m-1}x$, a_o est équivalent à une constante, et on peut supposer que $a_o = 1$. Dans ce cas, $f_1 = x.\log x \ldots l_{m-1}x.f'$ est d'ordre 0 par rapport à $l_{m-1}x$, et c'est un polynome de degré p en u, dont le coefficient de u^p est un polynome de degré q-1 en $l_m x$, à coefficients dans $\mathcal{K}^*_1$; l'hypothèse de récurrence permet de conclure comme ci-dessus.

Supposons maintenant que f soit une fonction rationnelle $\frac{g}{h}$, où g et h sont des polynomes en u et $l_m x$, à coefficients dans $\mathfrak{K}^*_1$. On peut toujours supposer que $h = ((l_m x)^q + b_1 (l_m x)^{q-1} + \ldots + b_q) u^p + \ldots$ les termes non écrits étant de degré $< p$ en u . La propositon est vraie si h est d'ordre 0 par rapport à $l_{m-1} x$, car alors il en est de même de g , donc g et h sont équivalentes à des monomes $k(l_m x)^\alpha$, et il en est de même de f . Si au contraire h n'est pas d'ordre 0 par rapport à $l_{m-1} x$, on a, d'après le lemme 1 , $f \sim \frac{g'}{h'}$, et h' à la même forme que h, mais q y est remplacé par q-1 si $q > 0$, et p par p-1 si $q=0$, $p > 0$. Par récurrence sur q et sur p , on se ramène donc au cas où $p=q=0$, qui a déjà été traité.

3° Supposons enfin que f appartienne à $\mathfrak{K}'(e^z)$ avec $z \in \mathfrak{K}^*_1$. Supposons d'abord que $f \in \mathfrak{K}^*_1(e^z)$; nous allons voir alors que si f est d'ordre 0 par rapport à $l_{m-1} x$, f est nécessairement <u>équivalente à une constante</u>. Considérons en premier lieu le cas où $f = u^q(a_0 + a_1 u + \ldots + a_p u^p)$ les a_i appartenant à $\mathfrak{K}^*_1$, q étant un entier positif ou négatif. Raisonnons par récurrence sur p , et considérons d'abord le cas où $p=0$, $q \neq 0$ (le cas $q=0$ est immédiat) ; si $a_0 e^{qz}$ est par exemple > 1 et d'ordre 0 par rapport à $l_{m-1} x$, on a $1 < qz + \log a_0 < l_m x$; mais $qz + \log a_0$ appartient à $\mathfrak{K}'(\log a_0)$, et nous venons de voir qu'aucune fonction de ce corps de Hardy ne peut satisfaire à $1 < f < l_m x$. Si maintenant $p > 0$, on peut écrire $f = \frac{1 + b_1 u + b_2 u^2 + \ldots + b_p u^p}{b_0 u^{-q}}$, les b_i appartenant à $\mathfrak{K}^*_1$; si $b_0 u^{-q}$ n'est pas équivalent à une constante, il ne peut être d'ordre 0 par rapport à $l_{m-1} x$, donc d'après le lemme 1 , on a

$$f \sim \frac{z'(b_1 + 2b_2 u + \ldots + p b_p u^{p-1}) + b'_1 + b'_2 u + \ldots + b'_p u^{p-1}}{(b'_0 - qz' b_0) u^{1-q}}$$

et la proposition en résulte par récurrence. Si au contraire $b_0 u^{-q}$

est équivalent à une constante, on peut le remplacer par cette constante, et on voit comme dans la seconde partie que $x.\log x...l_{m-1}x.f'$ est d'ordre 0 par rapport à $l_{m-1}x$, donc l'hypothèse de récurrence entraîne que cette fonction serait équivalente à une constante $\neq 0$, et en intégrant, on en déduirait que $f \sim k.l_m x$; mais alors on aurait aussi $u(b_1+b_2u+...+b_pu^{p-1}) \sim k.l_m x$ contrairement à l'hypothèse de récurrence.

On passe de là au cas général en remarquant que toute fonction f de $\mathcal{H}_1^*(e^z)$ peut s'écrire $f = \dfrac{1 + b_1u+b_2u^2+...+b_pu^p}{u^q(c_0+c_1u+...+c_ru^r)}$, q étant positif ou négatif. Si le dénominateur est d'ordre 0 par rapport à $l_{m-1}x$, il en est de même du numérateur, donc tous deux sont équivalents à des constantes d'après ce qui précède, et il en est de même de f . Dans le cas contraire, le lemme 1 prouve que

$$f \sim \frac{z'(b_1+2b_2u+...+pb_pu^{p-1})+ b_1'+b_2'u+...+b_p'u^{p-1}}{(c_1z'u+..+rc_rz'u^{r-1}+c_0'+c_1'u+..+c_r'u^r+qz'(c_0+c_1u+..+c_ru^r))u^{1+q}}$$

et en raisonnant par récurrence sur p , on se ramène au cas où p=0, donc au cas déjà traité.

Il est donc prouvé que les fonctions de $\mathcal{H}_1^*(e^z)$, comme celles de $\mathcal{H}_1^*$, ne peuvent être d'ordre 0 par rapport à $l_{m-1}x$ que si elles sont équivalentes à une constante. Or, $\mathcal{H}'(e^z)$ s'obtient par adjonction à $\mathcal{H}_1^*(e^z)$ de $l_m x$, donc le raisonnement de la première partie est applicable sans modification, et achève la démonstration de la prop.5 .

Corollaire. Si f est une fonction (H) possédant une suite de définition de n fonctions, la fonction $x.\log x..._n x.f(x)$ ne peut être d'ordre 0 par rapport à $l_n x$ que si elle est équivalente à une constante.

En effet, cette fonction est alors d'ordre 0 par rapport à $l_{n-1}x$ donc si elle n'est pas équivalente à une constante, elle est d'ordre entier $\neq 0$ par rapport à $l_n x$.

Ce corollaire prouve donc que, pour toute fonction (H), les critères

les critères logarithmiques permettent de déterminer si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente ou non.

8. Les théorèmes de du Bois-Reymond. Les prop.4 et 5 sont en quelque sorte des analogues de l'"axiome d'Archimède" dans l'ensemble totalement ordonné $\mathcal{K} / R_1$ (chap.III, § 1), où $\mathcal{K}$ est le corps des fonctions (H). Mais il n'existe pas de propriété de cette nature dans l'ensemble ordonné (non totalement) $\mathcal{F} / R_1$. On a en effet les deux propositions suivantes :

Proposition 6 (du Bois-Reymond). Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes et continues appartenant à $\mathcal{F}$, et telle que $f_n \prec f_{n+1}$ pour tout n. Il existe une fonction continue f telle que $f_n \prec f$ pour tout n.

Proposition 7 (du Bois-Reymond). Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes et continues appartenant à $\mathcal{F}$, et telle que $1 \prec f_{n+1} \prec f_n$ pour tout n. Il existe une fonction continue f telle que $1 \prec f \prec f_n$ pour tout n.

Nous démontrerons simultanément ces deux propositions. On peut supposer que les f_n sont définies dans tout l'intervalle $[0, +\infty[$ en les prolongeant arbitrairement dans la partie de cet intervalle où elles ne sont pas définies.

Pour tout n, il existe un voisinage de $+\infty$ dans lequel on a $f_n(x) \geqslant f_p(x)$ (resp. $f_n(x) \leqslant f_p(x)$) pour $1 \leqslant p < n$. Si on pose $g_n = \sup(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ (resp. $g_n = \inf(f_1, f_2, \ldots, f_n)$), g_n est croissante, équivalente à f_n mod. P, et on a $g_n \leqslant g_{n+1}$ (resp. $g_{n+1} \leqslant g_n$) pour tout n. Pour démontrer la prop.6, définissons f par les conditions $f(n) = g_n(n)$, $f(x) = (n+1-x)g_n(x) + (x-n)g_{n+1}(x)$ pour $n \leqslant x \leqslant n+1$; il est immédiat que f est continue, croissante et satisfait à $g_n(x) \leqslant f(x) \leqslant g_{n+1}(x)$. De même, pour démontrer la prop.7, définissons une suite croissante (x_n) de points par la condition

$g_{n+1}(x_{n+1}) = g_n(x_n)+1$, ce qui est possible puisque $1 \prec g_n$ pour tout n ; puis posons $f(x) = \sup(g_n(x_n), g_{n+1}(x))$ pour $x_n \leqslant x \leqslant x_{n+1}$; f est continue, croissante et satisfait à $g_{n+1}(x) \leqslant f(x) \leqslant g_n(x)$ pour $x_n \leqslant x \leqslant x_{n+1}$. La fonction f ainsi construite satisfait visibelement aux conditions de la prop.6 (resp. prop. 7) .

En particulier, on voit qu'il existe des fonctions f telles que $f \succ e_n(x)$ pour tout n , et des fonctions g telles que $1 \prec g \prec l_n x$ pour tout n ; de telles fonctions ne peuvent naturellement être des fonctions (H) .

9. Fonctions (H) et échelles de comparaison. Nous allons voir qu'on peut définir une échelle de comparaison $\mathscr{E}$ formée de fonctions (H) et satisfaisant aux conditions (EC_I), (EC_{II}), (EC_{III}) et (EC_{IV}) du chap.III . Désignons tout d'abord par $\mathscr{E}_0$ l'ensemble des fonctions de la forme $\prod_{m=0}^{\infty} (l_m x)^{\alpha_m}$, où les α_m sont réels et nuls sauf pour un nombre fini d'indices m ; on voit aussitôt que ces fonctions forment une échelle de comparaison satisfaisant à (EC_I), (EC_{II}) et (EC_{III}). Définissons ensuite par récurrence l'ensemble $\mathscr{E}_n$ comme formé de la constante 1 et des fonctions de la forme $e^{a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_k f_k}$, où k est un entier arbitraire, $f_1, f_2, \ldots, f_k$ des fonctions de $\mathscr{E}_{n-1}$ telles que $f_1 \succ f_2 \succ \ldots \succ f_k \succ 1$ et les a_k des nombres réels $\neq 0$; montrons par récurrence que $\mathscr{E}_n$ est une échelle de comparaison satisfaisant à (EC_I), (EC_{II}) et (EC_{III}) et contenant $\mathscr{E}_{n-1}$. La relation $\mathscr{E}_{n-1} \subset \mathscr{E}_n$ est vraie pour $n=1$, car le logarithme d'une fonction (non constante) de $\mathscr{E}_0$ est de la forme $a_1 f_1 + \ldots + a_k f_k$, où les f_i sont des logarithmes itérés, donc $\succ 1$; si $\mathscr{E}_{n-2} \subset \mathscr{E}_{n-1}$, on déduit de la définition de $\mathscr{E}_n$ que $\mathscr{E}_{n-1} \subset \mathscr{E}_n$, en prenant les f_i dans $\mathscr{E}_{n-2}$; on voit en outre que $\mathscr{E}_n$ vérifie (EC_{III}). Il est clair par ailleurs que (EC_I) et (EC_{II}) résultent de la définition des fonctions de $\mathscr{E}_n$. Reste à voir que $\mathscr{E}_n$ est une échelle de comparaison ; comme le quotient de deux

comme le quotient de deux fonctions de $\mathscr{E}_n$ appartient encore à $\mathscr{E}_n$, il suffit de prouver qu'aucune fonction de $\mathscr{E}_n$ autre que la constante 1, ne peut être équivalente à une constante $\neq 0$. Or, comme $\log f = a_1 f_1 + \ldots + a_k f_k \sim a_1 f_1$ et que $f_1 \succ 1$ par hypothèse, $\log f$ tend vers $\pm \infty$, donc f tend vers 0 ou vers $+\infty$.

Cela étant, si $\mathscr{E}$ est la réunion des $\mathscr{E}_n$ pour $n \geqslant 0$, $\mathscr{E}$ est une échelle de comparaison, car deux fonctions de $\mathscr{E}$ appartiennent à un même $\mathscr{E}_n$; il est immédiat que $\mathscr{E}$ satisfait à (EC_I), (EC_{II}), (EC_{III}), et aussi, par construction, à (EC_{IV}).

Remarque. Malgré l'utilité pratique de l'échelle $\mathscr{E}$ que nous venons de définir, il est facile de donner des exemples de fonctions (H) qui ne sont équivalentes à aucune fonction de la forme kg où k est une constante $\neq 0$ et $g \in \mathscr{E}$. En effet, si $f \sim kg$, $\log f - \log g - \log k$ tend vers 0, donc $\log f$ admet, relativement à l'échelle $\mathscr{E}$, un développement asymptotique ayant un nombre fini de termes qui croissent indéfiniment (en vertu de la propriété $_1(EC_{III})$). Or, si on considère par exemple la fonction (H) $f(x) = e^{e^{x+\frac{1}{x}}}$, $\log f = e^{x+\frac{1}{x}}$ a un développement asymptotique relatif à $\mathscr{E}$ d'ordre n aussi grand qu'on veut

$$\log f = e^x + \frac{e^x}{x} + \frac{1}{2!}\frac{e^x}{x^2} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{e^x}{x^n} + 0\left(\frac{e^x}{x^n}\right)$$

dont tous les termes croissent indéfiniment. Il en résulte que f n'a pas de partie principale relativement à l'échelle $\mathscr{E}$.

10. Fonction réciproque d'une fonction (H). Si f est une fonction (H), f est monotone dans un voisinage de $+\infty$, donc la fonction réciproque de sa restriction à ce voisinage est définie et monotone au voisinage du point $a = \lim_{x \to +\infty} f(x)$; en général, on peut montrer que ce n'est pas une fonction (H). Mais, dans certains cas importants, on peut trouver une fonction (H) équivalente à cette fonction réciproque, et même un développement asymptotique relatif à l'échelle $\mathscr{E}$. Nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 2. Soient p et q deux fonctions (H) non identiquement nulles et telles que $q(x) > 0$ au voisinage de $+\infty$.

1° Si $q \prec \frac{p}{p'}$, on a $p(x+q(x)) \sim p(x)$.

2° Si on a à la fois $q \prec \frac{p}{p'}$ et $q(x) \prec x$, on a $p(x-q(x)) \sim p(x)$.

Les deux parties du lemme sont évidentes si $p(x) \sim k$ (constante $\neq 0$); on peut donc supposer $p(x) \prec 1$ (sinon on raisonnerait sur $\frac{1}{p}$).

On en déduit $p'(x) \prec 1$.

1° On a $p(x+q(x)) = p(x) + q(x)p'(x+\theta q(x))$ avec $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Comme la fonction $|p'|$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, elle est décroissante dans un voisinage de $+\infty$, donc on aura pour x assez grand $|p'(x+\theta q(x))| \leqslant |p'(x)|$; comme $qp' \prec p$, on en déduit que $p(x+q(x)) \sim p(x)$.

2° La condition $q(x) \prec x$ assure que $x-q(x)$ tend vers $+\infty$ avec x . On a encore $p(x-q(x)) = p(x) - q(x)p'(x-\theta q(x))$ avec $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Ici, pour x assez grand, on a $|p'(x-\theta q(x))| \leqslant |p'(x-q(x))|$. Tout revient à démontrer que $q(x) \frac{p'(x-q(x))}{p\,(x-q(x))}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

La proposition est vraie si $\frac{p'}{p} \succ 1$, car alors $|\frac{p'}{p}|$ est croissante pour x assez grand, donc $q(x) \left| \frac{p'(x-q(x))}{p\,(x-q(x))} \right| \leqslant q(x) \left| \frac{p'(x)}{p(x)} \right|$ et $qp' \prec p$ par hypothèse. Elle est vraie aussi si $\frac{p'}{p} \sim k$ (k constante $\neq 0$) , car alors $\frac{p'(x-q(x))}{p(x-q(x))} \sim \frac{p'(x)}{p\,(x)}$ puisque $x-q(x)$ tend vers $+\infty$. Reste uniquement à examiner le cas où $\frac{p'}{p} \prec 1$. Supposons d'abord que p soit d'ordre fini par rapport à x , donc que $\frac{p'}{p} \leqslant \frac{1}{x}$. Alors

$$\frac{p'(x-q(x))}{p\,(x-q(x))} = \frac{1}{x-q(x)}\, O(1) \quad , \quad \text{donc}$$

$$\frac{q(x)p'(x-q(x))}{p(x-q(x))} = \frac{q(x)}{x}\left(1-\frac{q(x)}{x}\right)^{-1} O(1) = \frac{q(x)}{x}\, O(1)$$

et on voit que dans ce cas, le lemme est vrai sous la seule hypothèse $q(x) \prec x$.

Considérons enfin le cas où $\frac{1}{x} \prec \frac{p'}{p} \prec 1$; la fonction $t = \frac{p'}{p}$ est alors d'ordre fini par rapport à x ; en lui appliquant le lemme (valable pour une telle fonction d'après ce qui précède), on a

$$\frac{p'(x-q(x))}{p\ (x-q(x))} \sim \frac{p'(x)}{p\ (x)}$$

et comme $qp' \prec p$, le lemme est encore vrai dans ce dernier cas.

Remarque. Les conditions imposées à $q(x)$ ne peuvent être améliorées, comme le montrent les exemples suivants :

a) $p(x)=e^x$, $q(x)=1=\frac{p(x)}{p'(x)}$, $p(x+q(x))=e.p(x)$

b) $p(x)=\log x$, $q(x)=x-\log x \prec \frac{p(x)}{p'(x)} = x \log x$

$$p(x+q(x)) = \log \log x \prec p(x) .$$

Nous nous proposons d'abord de trouver un développement asymptotique de la fonction réciproque u de la fonction $x \to x-g(x)$, où g est une fonction (H) telle que $g(x) \prec x$; u est donc définie dans un voisinage de $+\infty$. Formons la suite de fonctions

$$u_0(x) = x$$
$$u_1(x)=x+g(u_0(x))=x+g(x)$$
$$u_2(x)=x+g(u_1(x))=x+g(x+g(x))$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_n(x) = x+g(u_{n-1}(x))$$

Nous allons trouver une fonction (H) équivalente à $u(x)-u_n(x)$ pour tout n ; si cette fonction admet une partie principale par rapport à l'échelle $\mathcal{E}$, et si d'autre part, on peut former un développement asymptotique par rapport à $\mathcal{E}$ de la fonction $u_n(x)$ (problème qui se ramène à ceux traités au chap.III, d'après la définition des fonctions (H)), on obtiendra, en faisant la somme de ce développement et de la partie principale de $u(x)-u_n(x)$ (suivant les règles exposées au chap.III) un développement asymptotique de $u(x)$.

Nous poserons pour simplifier $y=u(x)$, $y_n=u_n(x)$; on a donc les relations $x=y-g(y)$, $y_0=x$, $y_n=x+g(y_{n-1})$. On peut se borner au cas où g n'est pas équivalente à une constante $\neq 0$; dans le cas contraire, on aurait $g(x)=k+g_1(x)$, avec $g_1 \prec 1$; la fonction $u_1(x)=u(x)-k$ serait fonction réciproque de la fonction $x-g_1(x+k)$, et on serait ramené au cas où g n'est pas équivalent à une constante $\neq 0$.

De la relation $x=y-g(y)$, on tire d'abord $\frac{x}{y} = 1 - \frac{g(y)}{y}$; quand x tend vers $+\infty$, il en est de même de $y=u(x)$, donc $\frac{g(y)}{y}$ tend vers 0 , ce qui montre d'abord que $u(x) \sim x = u_0(x)$. D'autre part, on a

$$y-y_0=y-x=g(y) = g(x)+(y-x)g'(z)$$

où z appartient à l'intervalle d'extrémités x et y ; quand x tend vers $+\infty$, il en est donc de même de z , et comme $g \prec x$, $g' \prec 1$, donc $g'(z)$ tend vers 0 ; autrement dit

$$y-x = g(x)+o(y-x)$$

donc

$$u(x)-x \sim g(x) \tag{9}$$

Montrons maintenant, par récurrence sur n , que lorsque x tend vers $+\infty$, $u_n(x)$ tend vers $+\infty$ et que l'on a

$$u(x)-u_n(x) \prec u(x)-u_{n-1}(x) \tag{10}$$

On a en effet $y-y_n=g(y)-g(y_{n-1})=(y-y_{n-1})g'(z_{n-1})$, où z_{n-1} appartient à l'intervalle d'extrémités y et y_{n-1} ; par hypothèse, z_{n-1} tend donc vers $+\infty$ et $g'(z_{n-1})$ vers 0 , ce qui démontre (10). De (10) on tire alors $u(x)-u_n(x) \prec u(x)-x \sim g(x) \prec x \sim u(x)$, donc $u_n(x) \sim u(x)$, et par suite $u_n \succ 1$. En outre, la relation $u(x)-u_n(x) \prec u(x)-x$ s'écrit $(u(x)-x)-(u_n(x)-x) \prec u(x)-x$, d'où

$$u_n(x)-x \sim u(x)-x \sim g(x) \tag{11}$$

De ces relations, nous allons déduire que

$$u(x)-u_n(x) \sim g(x)(g'(x))^n \tag{12}$$

Pour cela, nous remarquerons d'abord que, si $t(x)$ est une fonction telle que $t(x)-x \sim g(x)$, on a $g'(t(x)) \sim g'(x)$. En effet, pour x assez grand, g' est monotone, donc $g'(t(x))$ est comprise entre $g'(x+(1+\varepsilon)g(x))$ et $g'(x+(1-\varepsilon)g(x))$. Le lemme 2 donnera donc bien $g'(t(x)) \sim g'(x)$, pourvu que l'on démontre la relation $g \prec \frac{g'}{g''}$. Or, si g est d'ordre infini par rapport à x, on a (prop. 2) $\frac{g''}{g'} \sim \frac{g'}{g}$, et comme $g' \prec 1$, $g \prec \frac{g}{g'} \sim \frac{g'}{g''}$; si g est d'ordre fini μ par rapport à x, on a nécessairement $\mu \leqslant 1$; si $\mu < 1$, la prop.2 prouve que $\frac{g''}{g'} \sim \frac{k}{x}$ (k constante $\neq 0$), d'où encore $g \prec \frac{g'}{g''}$; enfin si $\mu = 1$, on a $\frac{g''}{g'} \prec \frac{1}{x}$ car g' n'est pas équivalent à une constante $\neq 0$, donc encore $g \prec \frac{g'}{g''}$.

Cela étant, comme $y-y_n = g'(z_{n-1})(y-y_{n-1})$, et que z_{n-1} appartient à l'intervalle d'extrémités y et y_{n-1}, on a, d'après (11), $z_{n-1}-x \sim g(x)$, donc $g'(z_{n-1}) \sim g'(x)$; par récurrence, on obtient la formule (12).

Remarquons que si en outre g est <u>d'ordre < 1 par rapport à x</u>, $u(x)-u_n(x)$ <u>tend vers</u> 0 lorsque x tend vers $+\infty$, pour n assez grand. En effet, dans le cas contraire, on aurait $gg'^n \succ 1$ pour tout n, donc g serait d'ordre infini par rapport à $\frac{1}{g'}$; or, cela entraîne $|\log g| \succ |\log g'|$, d'où en dérivant $\frac{g'}{g} \succ \frac{g''}{g'}$. Mais, si g est d'ordre $\mu < 1$ par rapport à x, on a $\frac{g'}{g} \sim \frac{g''}{g'}$ si $\mu = -\infty$, $\frac{g''}{g'} \sim \frac{\mu-1}{\mu} \frac{g'}{g}$ si $\mu \neq 0$, et enfin $\frac{g'}{g} \prec \frac{g''}{g'}$ si $\mu = 0$.

Par contre, si g est d'ordre 1 par rapport à x, on peut avoir $gg'^n \succ 1$ pour tout n, comme le montre l'exemple $g(x) = \frac{x}{\log x}$.

Au cas que nous venons de traiter se rattachent, plus généralement les cas où la fonction $u(x)=y$ satisfait à l'identité $\varphi(x) = \psi(y)-g(y)$, où φ et ψ sont des fonctions (H) avec $\psi \succ 1$, et $g \prec \psi$; si la fonction réciproque θ de ψ est une fonction (H), et si v est la

est la fonction réciproque de la fonction $x \to x-g(\theta(x))$, on a $u = \theta \circ v \circ \varphi$; si on connaît un développement de v , on en déduira un développement de u par application des procédés du chap.III .

Exemples. 1) Cherchons le développement de la fonction réciproque de x^5+x ; en posant $x^5=t$, on est ramené à chercher la fonction réciproque de $t+t^{\frac{1}{5}}$, c'est-à-dire au cas où $g(t)=-t^{\frac{1}{5}}$.

Bornons-nous à calculer $u_2(t)$; on a

$$u_2(t)=t-(t-t^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{5}} = t-t^{\frac{1}{5}}+\frac{1}{5}t^{-\frac{3}{5}}+\frac{2}{25}t^{-\frac{7}{5}}+0(t^{-\frac{7}{5}})$$

D'autre part, d'après (12)

$$u(t)-u_2(t) \sim -\frac{1}{25}t^{-\frac{7}{5}}$$

d'où

$$u(t)=t-t^{\frac{1}{5}}+\frac{1}{5}t^{-\frac{3}{5}}+\frac{1}{25}t^{-\frac{7}{5}}+0(t^{-\frac{7}{5}})$$

et par suite le développement à 4 termes de la fonction réciproque de x^5+x est

$$(u(x))^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{1}{5}}-\frac{1}{5}x^{-\frac{3}{5}}-\frac{1}{25}x^{-\frac{7}{5}}-\frac{1}{125}x^{-\frac{11}{5}}+0(x^{-\frac{11}{5}})$$

2) Cherchons le développement de la fonction réciproque v de $\frac{x}{\log x}$; de l'identité $x = \frac{y}{\log y}$ où $y = v(x)$, on tire $\log x = \log y - \log\log y$; posant $z = \log y$, $t = \log x$, on a $t=z-\log z$, on est donc ramené à développer la fonction réciproque u de $t-\log t$; calculons par exemple $u_2(t)$; on a

$$u_2(t)=t+\log(t+\log t) = t+\log t+\frac{\log t}{t}-\frac{(\log t)^2}{2t^2}+0(\frac{\log t}{t^2})$$

et d'autre part, d'après (12)

$$u(t)-u_2(t) \sim \frac{\log t}{t^2}$$

donc on a le développement à 5 termes

$$u(t) = t + \log t + \frac{\log t}{t} - \frac{(\log t)^2}{2t^2} + \frac{\log t}{t^2} + 0\left(\frac{\log t}{t^2}\right)$$

et en revenant au problème initial, on voit que le développement correspondant de la fonction réciproque $v(x)$ de $\frac{x}{\log x}$ est

$$v(x) = x \log x + x \log\log x + x \frac{\log\log x}{\log x} + 0\left(x \frac{\log\log x}{\log x}\right)$$

Remarque. On notera que deux fonctions (H) équivalentes peuvent avoir des fonctions réciproques non équivalentes comme le montre l'exemple des deux fonctions $\log x$ et $\log x - 1$.

Exercices. 1) Montrer que toute fonction (H) possédant une suite de définition d'une seule fonction est équivalente à une fonction de la forme

(1) $$x^p (\log x)^q e^{P(x)}$$

où p et q sont des entiers rationnels. $P(x)$ un polynome en x (méthode de la prop.4).

En déduire que toute fonction de la forme $R(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ où R est une fonction rationnelle de k variables à coefficients réels, et $u_1, u_2, \ldots, u_k$ des fonctions (H) ayant chacune une suite de définition d'une seule fonction, est encore équivalente à une fonction de la forme (1) (se ramener à un polynome en $u_1, \ldots, u_k$, raisonner par récurrence sur k, puis sur le degré en u_k du polynome).

2) Comparer entre elles les fonctions $e_p((l_q x)^\mu)$ suivant les valeurs des entiers p et q et du nombre réel $\mu > 0$ $(\mu \neq 1)$.

3) Montrer que, si f est une fonction (H) ayant une suite de définition de n termes au plus, elle ne peut satisfaire aux relations $e_p((l_{q+1}x)^\beta) \prec f \prec e_p((l_q x)^\alpha)$, ou aux relations $e_p((l_q x)^\beta) \quad f \quad e_{p+1}((l_q x)^\alpha)$ quels que soient $\beta > 0$ et α tel que $0 < \alpha < 1$, que si on a $p+q+1 < n$ (raisonner par récurrence sur n, comme dans la prop.5).

4) On définit par récurrence un corps de Hardy $\mathfrak{K}_n$ de la manière suivante : $\mathfrak{K}_0$ est le corps $R(x)$ des fonctions rationnelles en x à coefficients réels ; $\mathfrak{K}_n$ est le corps formé des fonctions de la forme $R(u_1, u_2, \ldots, u_k)$, où R est une fonction rationnelle à k variable à coefficients dans $\mathfrak{K}_{n-1}$, k un nombre quelconque, et les u_i de la forme e^{z_i} ou $\log|z_i|$, où z_i est une fonction non identiquement nulle au voisinage de $+\infty$, appartenant à $\mathfrak{K}_{n-1}$. Généraliser les prop.4 et 5 et l'exerc.3 aux fonctions de $\mathfrak{K}_n$ (raisonner par récurrence sur n ; pour chaque fonction de $\mathfrak{K}_n$, raisonner par récurrence sur k).

5) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n(x)}{e_n(n)}$ converge uniformément dans toute partie compacte de R, et que sa somme $f(x)$ est telle que $f(x) \succ e_n(x)$ pour tout entier n.

6) Montrer qu'il existe une fonction croissante f définie continue et > 0 pour $x \geqslant 0$, telle que $f(2x)=2^{f(x)}$ pour tout $x \geqslant 0$; en déduire que, pour tout n, on a $f(x) \succ e_n(x)$.

7) Si f est une fonction croissante continue et $\geqslant 0$ définie pour $x \geqslant 0$ et telle que $f(x) \succ e_n(x)$ pour tout n, et si g est la fonction réciproque de f, montrer que $1 \prec g(x) \prec l_n(x)$ pour tout n.

8) Soient (f_n), (g_n) deux suites de fonctions continues croissantes appartenant à $\mathfrak{F}$, telles que $f_n \prec f_{n+1}$, $g_m \succ g_{m+1}$ et $f_n \prec g_m$ quels que soient m et n, montrer qu'il existe une fonction continue croissante h telle que $f_n \prec h \prec g_m$ quels que soient m et n.

9) Soit f une fonction (H) telle que $1 \prec f \prec x$. Montrer que dans la formule de Taylor

$$f(x+f(x))=f(x)+f(x)f'(x)+\frac{1}{2!}(f(x))^2 f''(x)+\ldots.+$$
$$+\frac{1}{n!}(f(x))^n f^{(n)}(x)+\frac{1}{(n+1)!}(f(x))^{n+1} f^{(n+1)}(x+\theta f(x))$$

avec $0<\theta<1$ (θ dépendant de x), chaque terme est négligeable devant le précédent. Si f est d'ordre <1 par rapport à x, le dernier terme de cette somme est $\prec 1$ pour n assez grand.

10) Déduire de l'exerc.9 que si f est une fonction (H) telle que $\log f(e^x)$ soit d'ordre <1 par rapport à x, la fonction $f(xf(x))$ est équivalente à une fonction de la forme e^g, où g est une fonction rationnelle par rapport à x, $\log f(x)$ et un certain nombre des dérivées de cette dernière fonction.

APPENDICE II

LA FONCTION GAMMA (Etat 1).

1. L'équation fonctionnelle fondamentale. On a défini par récurrence (Ens., chap.III) la fonction n! pour tout entier $n \geqslant 0$ par les conditions $0!=1$, $(n+1)!=n.(n-1)!$ pour $n>0$. Nous poserons, pour tout entier $n \geqslant 1$ $\Gamma(n)=(n-1)!$; nous nous proposons de définir dans l'ensemble des nombres réels $x>0$ une fonction continue $\Gamma(x)$, prolongeant la fonction Γ définie sur l'ensemble des entiers $\geqslant 1$, et d'étudier les principales propriétés de cette fonction.

Il est clair qu'il existe une infinité de fonctions continues dans $]0,+\infty[$, prolongeant $\Gamma(n)$; comme on a la relation $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$, nous nous bornerons à considérer celles de ces fonctions qui, pour tout $x>0$, satisfont à l'équation fonctionnelle

(1) $$f(x+1) = xf(x)$$

Il suffit alors qu'une telle fonction satisfasse en outre à $f(1)=1$ pour qu'elle prolonge $\Gamma(n)$.

Il existe de telles fonctions, car si, dans l'intervalle $]0,1]$, $f(x)$ est prise égale à une fonction continue telle que $f(1)=1$, mais par ailleurs arbitraire, il suffira de poser $f(x+n)=x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)f(x)$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in]0,1]$ pour avoir défini dans $]0,+\infty[$ une fonction continue f satisfaisant à l'équation (1) .

Si f satisfait à (1) et prend des valeurs >0 dans $]0,1]$, elle prend des valeurs >0 dans $]0,+\infty[$; la fonction $g(x)=\log f(x)$ est donc définie et continue dans $]0,+\infty[$, et satisfait dans cet intervalle à l'équation

(2) $$g(x+1)-g(x)=\log x$$

D'ailleurs, si g_1 est une seconde fonction continue dans $]0,+\infty[$ et satisfaisant à la même équation (2), on a, en posant $h=g_1-g$, $h(x+1)=h(x)$ pour tout $x>0$; autrement dit, h est une fonction continue périodique admettant la période 1, dans l'intervalle $]0,+\infty[$. Nous allons dans l'ensemble de ces fonctions, en caractériser une par une période particulièrement simple : la convexité dans l'intervalle $]0,+\infty[$.

2. Solutions convexes d'équations aux différences finies. La relation (2) rentre dans le type général des équations aux différences finies, où on cherche une fonction $u(x)$ définie dans un intervalle $]a,+\infty[$ et satisfaisant dans cet intervalle à la relation

(3) $$u(x+1)-u(x) = f(x)$$

où $f(x)$ est une fonction donnée. Ici encore, si $u_0(x)$ est une solution toute autre solution est de la forme $u_0(x)+h(x)$, où $h(x)$ admet la période 1 dans l'intervalle $]a,+\infty[$.

Théorème 1. Si, dans l'intervalle $]0,+\infty[$, la fonction f est croissante, concave et telle que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, il existe une fonction u et une seule définie dans $]0,+\infty[$, convexe dans $]0,+\infty[$, satisfaisant à l'équation (3), et prenant une valeur donnée a pour $x=1$.

Remarquons en premier lieu que la dérivée à droite f'_d existe pour tout $x>0$, est $\geqslant 0$ et décroissante ; montrons qu'elle tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. En effet, soit $x_0>0$ quelconque on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$; mais, pour tout $x>x_0$, on a $f'_d(x) \leqslant \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ puisque f est concave, donc $\lim_{x\to+\infty} f'_d(x) = 0$.

Nous allons prouver tout d'abord que, s'il existe une fonction u satisfaisant aux conditions de l'énoncé, elle est bien déterminée dans l'intervalle $]0,1]$, et par suite dans tout l'intervalle $]0,+\infty[$.

Pour tout entier $n > 1$, la pente de la droite joignant le point $(n,u(n))$ au point $(x,u(x))$ est fonction croissante de x puisque u est convexe ; on doit donc avoir, pour $0 < x \leqslant 1$

$$\frac{u(n-1)-u(n)}{n-1-n} \leqslant \frac{u(n+x)-u(n)}{n+x-n} \leqslant \frac{u(n+1)-u(n)}{n+1-n}$$

c'est-à-dire, d'après (3)

(4) $$xf(n-1) \leqslant u(x+n)-u(n) \leqslant xf(n)$$

Or, on a d'après (3) $u(x+n)-u(n)=u(x)-a+(f(x)+f(x+1)+..+f(x+n-1)) -$ $-(f(1)+f(2)+..+f(n-1))$; par ailleurs, on peut écrire $f(n)=f(1)+(f(2)-f(1))+(f(3)-f(2))+..+(f(n)-f(n-1))$. On tire donc de l'inégalité (4) que, si on pose pour $n \geqslant 2$

(5) $$v_n(x)=xf(n)+(1-x)f(n-1)-f(x+n-1)$$

et $$u_n(x)=a-f(x)+xf(1)+v_2(x)+v_3(x)+...+v_n(x)$$

on a nécessairement, pour $0 < x \leqslant 1$

(6) $$u_n(x)-x(f(n)-f(n-1)) \leqslant u(x) \leqslant u_n(x)$$

Or, on a $f(n)-f(n-1) \leqslant f'_d(n-1)$ d'après le théorème des accroissements finis, et par suite $\lim_{n \to \infty} (f(n)-f(n-1))=0$. De la relation (6) on déduit donc que, si la solution u existe, elle est nécessairement égale, dans $]0,1]$, à la limite de $u_n(x)$.

Inversement, nous allons montrer que la série de terme général $v_n(x)$ converge uniformément dans tout intervalle compact contenu dans $[0,+\infty[$, et que la limite u(x) de $u_n(x)$ satisfait bien aux conditions de l'énoncé.

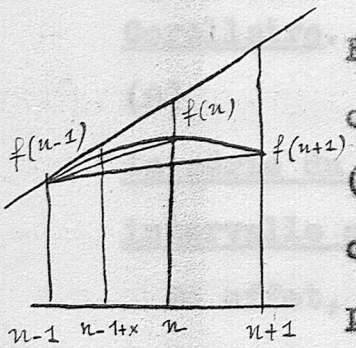

Fig. 1

En premier lieu, remarquons que $v_n(x)$ est la différence des ordonnées de la droite joignant les points $(n-1,f(n-1))$ et $(n,f(n))$ et de la courbe $y=f(x)$ au point d'abscisse $x+n-1$; comme f est concave, on a $v_n(x) \leqslant 0$; en outre (fig.1), on a pour $0 < x \leqslant 1$

$$xf(n)+(1-x)f(n-1) \leqslant f(x+n-1) \leqslant f(n-1)+xf'_d(n-1)$$

d'où $-v_n(x) \leqslant x(f'_d(n-1)-(f(n)-f(n-1))) \leqslant f'_d(n-1)-f'_d(n)$

Comme la série de terme général $f'_d(n-1)-f'_d(n) \geqslant 0$, est convergente, on voit que la série de terme général $v_n(x)$ est uniformément convergente dans $]0,1]$. D'autre part, on a

$$v_n(x+1)=v_n(x)+f(n)-f(x+n)-(f(n-1)-f(x+n-1))$$

et, d'après le théorème des accroissements finis

(7) $$v_n(x+1)=v_{n+1}(x)+x(2f(n)-f(n-1)-f(n+1))$$

Mais comme f est concave, on a (fig.1)

$$2f(n)-f(n-1)-f(n+1) \leqslant 2(f'_d(n-1)-f'_d(n+1))$$

et comme la série de terme général $f'_d(n-1)-f'_d(n+1)$ est convergente, la série de terme général $v_n(x)$ est uniformément convergente dans $]1,2]$; de proche en proche, on voit qu'elle est uniformément convergente dans tout intervalle $]p,p+1]$, et par suite, dans tout intervalle $]0,a]$. En outre, on a, d'après (7)

$$u_n(x+1)=u_n(x)+f(x)+x(f(n)-f(n-1))+v_{n+1}(x)$$

pour tout $x>0$; en faisant croître n indéfiniment, comme $f(n)-f(n-1)$ tend vers 0 ainsi que $v_{n+1}(x)$, on voit que la limite $u(x)$ de $u_n(x)$ satisfait à (3) .

Enfin, chacune des fonctions $a-f(x)$, $xf(1)$ et $v_p(x)$ $(2 \leqslant p \leqslant n)$ est <u>convexe</u> dans $]0,+\infty[$; il en est donc de même de leur somme $u_n(x)$, et de la limite $u(x)$ de $u_n(x)$ (cf.chap.II). Le théorème 1 est ainsi complètement démontré.

<u>Corollaire</u>. <u>Pour tout</u> $x>0$, <u>on a</u>

(8) $$u'_d(x) = f(1)-f'_d(x)+\sum_{n=2}^{\infty} v'_{nd}(x)$$

<u>la série du second membre étant uniformément convergente dans tout intervalle compact</u>.

En effet, on a $v'_{nd}(x)=f(n)-f(n-1)-f'_d(x+n-1)$; comme on a

$f'_d(n) \leqslant f(n)-f(n-1) \leqslant f'_d(n-1)$, et, si $0 < x \leqslant p$,

$f'_d(p+n-1) \leqslant f'_d(x+n-1) \leqslant f'_d(n-1)$, on voit que

$$f'_d(n)-f'_d(n-1) \leqslant v'_{nd}(x) \leqslant f'_d(n-1)-f'_d(n+p-1)$$

ce qui démontre la convergence uniforme de la série de terme général $v'_{nd}(x)$ dans l'intervalle $]0,p]$ (p quelconque). Le corollaire résulte alors de la prop.1 du chap.I, § 4 .

On a une formule analogue à (8) pour la dérivée à gauche de la fonction u .

3. Définition de la fonction Γ . En vertu du th.1, nous pouvons maintenant poser la définition suivante :

Définition 1. On désigne par $\Gamma(x)$ la fonction définie dans l'intervalle $]0,+\infty[$, satisfaisant à l'équation fonctionnelle (1), telle que $\Gamma(1)=1$ et que $\log \Gamma(x)$ soit convexe dans $]0,+\infty[$.

Dans l'application du th.1, il faut prendre $f(x)=\log x$; on a donc $v_n(x) = \log \left(\frac{n}{n-1}\right)^x \frac{n-1}{x+n-1}$, d'où la formule

$$(9) \qquad \Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^x . n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

(en multipliant $e^{u_n(x)}$ par $\frac{n}{x+n}$, qui tend vers 1 lorsque n croît indéfiniment). On peut aussi écrire $\log \frac{n}{n-1} = \frac{1}{n-1} + (\log \frac{n}{n-1} - \frac{1}{n-1})$

donc $e^{v_n(x)} = e^{x(\log \frac{n}{n-1} - \frac{1}{n-1})} . e^{\frac{x}{n-1}} \frac{1}{1+\frac{x}{n-1}}$

Or, la série de terme général $\log \frac{n}{n-1} - \frac{1}{n-1}$ est absolument convergente et a pour somme la constante d'Euler γ (chap.III, §).

On peut donc écrire aussi

$$(10) \qquad \Gamma(x) = e^{-\gamma x} \frac{1}{x} . \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}$$

le produit infini étant absolument et uniformément convergent dans tout intervalle de la forme $]0,p]$ (formule de Weierstrass).

D'après la formule (8), la fonction $\Gamma(x)$ est dérivable dans $]0,+\infty[$, et on a

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\log \frac{n}{n-1} - \frac{1}{x+n-1}\right)$$

ou, en écrivant encore $\log \frac{n}{n-1} = \frac{1}{n-1} + \left(\log \frac{n}{n-1} - \frac{1}{n-1}\right)$

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right) \tag{11}$$

la série du second membre étant absolument et uniformément convergente dans tout intervalle $]0,p]$.

Remarquons maintenant que $\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right) = \frac{(-1)^{k+1}\, k!}{(x+n)^{k+1}}$ est le terme général d'une série absolument et uniformément convergente pour tout $x \geqslant 0$; la prop.1 du chap.I, § 4 prouve donc que $\Gamma(x)$ est indéfiniment dérivable dans $]0,+\infty[$ et qu'on a pour $k \geqslant 2$

$$\frac{d^k}{dx^k}(\log \Gamma(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(k-1)!}{(x+n)^k} \tag{12}$$

Lorsque x tend vers 0 par valeurs >0, il résulte de la convergence uniforme de série $\sum_{n=2}^{\infty} v_n(x)$ dans $[0,1]$ que $\log \Gamma(x) \sim -\log x$, donc la fonction $\frac{1}{\Gamma(x)}$ tend vers 0. En la prolongeant par continuité au point 0, elle est donc définie et continue pour $x \geqslant 0$.

On peut alors la prolonger d'une seule manière en une fonction continue pour tout $x \in \mathbb{R}$, et satisfaisant à la relation $\frac{x}{\Gamma(x+1)} = \frac{1}{\Gamma(x)}$; il suffit, pour $-(n+1) \leqslant x \leqslant -n$ de poser $\frac{1}{\Gamma(x)} = x(x+1)..(x+n)\frac{1}{\Gamma(x+n+1)}$

La fonction $\frac{1}{\Gamma(x)}$ ainsi prolongée est encore donnée par la formule correspondant à (9)

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{n^x \cdot n!} \tag{12 bis}$$

ou par

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = e^{\gamma x} x \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \tag{13}$$

Le produit infini du second membre étant absolument et uniformément convergent dans tout intervalle compact de $\mathbb{R}$. La fonction ainsi définie s'annule aux points $x=-n$ $(n \in \mathcal{N})$; la fonction $\Gamma(x)$ peut donc être définie sauf aux points -n et est continue et satisfait à l'équation (1) en tout point $x \neq -n$. Les formules (11) et (12) sont encore valables pour la fonction ainsi prolongée en tout point $x \neq -n$, les séries du second membre étant absolument et uniformément convergentes dans tout ensemble compact ne contenant aucun des points -n.

Comme $\Gamma(x) > 0$ pour $x > 0$, l'équation (1) montre que l'on a $\Gamma(x) < 0$ pour $-(2n-1) < x < -(2n-2)$ et $\Gamma(x) > 0$ pour $-2n < x < -(2n-1)$ $(n \geqslant 1)$; $\Gamma(x)$ a pour limite à droite $+\infty$ aux points $-2n$, $-\infty$ aux points $-(2n+1)$, pour limite à gauche $-\infty$ aux points $-2n$, $+\infty$ aux points $-(2n+1)$ $(n \in \mathcal{N})$. La formule (22) montre que, pour $k=2$, le second membre est toujours $\geqslant 0$ lorsqu'il est défini, donc $\Gamma''(x)\,\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2 \geqslant 0$, et par suite $\Gamma''(x)$ a le signe de $\Gamma(x)$; Γ est donc <u>convexe</u> pour $x > 0$ et $-2n < x < -(2n-1)$, <u>concave</u> pour $-(2n-1) < x < -(2n-2)$ $(n \geqslant 1)$; on en déduit que dans les intervalles où Γ est convexe, $\Gamma'(x)$ croît de $-\infty$ à $+\infty$, et dans les intervalles où Γ est concave, $\Gamma'(x)$ décroît de $+\infty$ à $-\infty$ (pour voir que $\Gamma'(x)$ tend vers $+\infty$ avec x, il suffit de remarquer que, d'après (11), $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ est <u>borné</u> lorsque x tend vers $+\infty$). D'où la courbe représentative de Γ (fig. 2).

<u>4. Les intégrales eulériennes</u>. Nous dirons pour abréger qu'une fonction f définie dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ et >0 dans cet intervalle, est <u>logarithmique convexe</u> dans I si log f est convexe dans I.

Lemme 1. Soient f et g deux fonctions >0 et deux fois dérivables dans un intervalle ouvert I . Si f et g sont logarithmiquement convexes dans I , f+g est logarithmiquement convexe dans I .

En effet, la relation $\frac{d^2}{dx^2}(\log f(x)) \geqslant 0$ s'écrit $f(x)f''(x)-(f'(x))^2 \geqslant 0$. Nous sommes ramenés à montrer que les relations $a>0$, $a'>0$, $ac-b^2 \geqslant 0$, $a'c'-b'^2 \geqslant 0$ entraînent $(a+a')(c+c')-(b+b')^2 \geqslant 0$; or, les relations $a>0$, $ac-b^2 \geqslant 0$ équivalent au fait que la forme quadratique $a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2$ est $\geqslant 0$ dans $\mathbb{R}$, et il est clair que si $a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2 \geqslant 0$ et $a'\xi^2+2b'\xi\eta+c'\eta^2 \geqslant 0$ dans $\mathbb{R}$, on a aussi $(a+a')\xi^2+2(b+b')\xi\eta+(c+c')\eta^2 \geqslant 0$ identiquement.

Lemme 2. Soit f une fonction numérique finie et >0 , définie et continue dans le produit $I \times J$ de deux intervalles ouverts, et telle que, pour tout $t \in J$, la fonction $x \longrightarrow f(x,t)$ soit logarithmiquement convexe et deux fois dérivable dans I . Dans ces conditions, si pour tout $x \in I$, l'intégrale $\int_J f(x,t)dt = g(x)$ existe, g est logarithmiquement convexe dans I .

Montrons d'abord que pour tout intervalle compact $K \subset J$, la fonction $g_K(x) = \int_K f(x,t)dt$ est logarithmiquement convexe. En effet, si $K = [a,b]$, la suite des fonctions

$g_n(x) = \frac{h}{2}(f(x,a)+f(x,a+h)+f(x,a+2h)+\ldots+f(x,a+(n-1)h))$ où $h = \frac{b-a}{n}$ converge simplement vers $g_K(x)$ dans I , donc $\log g_n$ converge simplement vers $\log g_K$; d'après le lemme 1 , $\log g_n$ est convexe dans I , donc il en est de même de $\log g_K$.

D'autre part, g est limite simple des g_K suivant l'ordonné filtrant des intervalles compacts contenus dans I , donc $\log g$ est limite simple des $\log g_K$; ces dernières fonctions étant convexes dans I , il en est de même de $\log g$.

Corollaire. Soit φ une fonction continue et >0 dans un intervalle ouvert J contenu dans $]0,+\infty[$. Si I est un intervalle ouvert tel que l'intégrale $g(x) = \int_J t^{x-1}\varphi(t)dt$ existe pour tout $x \in I$, g est logarithmiquement convexe dans I.

En effet, $\log t^{x-1} = (x-1)\log t$ est convexe et deux fois dérivable dans $\mathbb{R}$ pour tout $t > 0$.

Appliquons d'abord ce corollaire à la seconde intégrale eulérienne

$$g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

On sait que cette intégrale existe pour tout $x > 0$; g est donc logarithmiquement convexe dans $]0,+\infty[$. D'autre part, on a, en intégrant par parties

$$g(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt = -e^{-t} t^x \Big|_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = xg(x)$$

Autrement dit, g satisfait à l'équation (1). Enfin, on a $g(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$. D'après la déf.1, on a donc l'identité

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \tag{14}$$

Par le changement de variable $e^{-t} = u$, on en déduit la formule

$$\Gamma(x) = \int_0^1 (\log \tfrac{1}{t})^{x-1} dt \tag{15}$$

De même, par le changement de variable $u = t^x$, il vient

$$x\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{x}} dt$$

ou encore, en tenant compte de (1)

$$\Gamma(1 + \tfrac{1}{x}) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt \tag{16}$$

et en particulier pour $x=2$

$$\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt \tag{17}$$

Considérons maintenant la première intégrale eulérienne

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

On sait que cette intégrale existe pour $x > 0$ et $y > 0$. Fixons y et considérons la fonction partielle $x \to B(x,y)$; elle est logarithmiquement convexe pour $x > 0$. D'autre part, on peut écrire

$$B(x+1,y) = \int_0^1 (1-t)^{x+y-1} \left(\frac{t}{1-t}\right)^x dt$$

d'où en intégrant par parties

$$B(x+1,y) = \frac{-(1-t)^{x+y}}{x+y} \left(\frac{t}{1-t}\right)^x \Bigg|_0^1 + \frac{x}{x+y} \int_0^1 (1-t)^{x+y} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} \frac{1}{(1-t)^2} dt = \frac{x}{x+y} B(x,y)$$

Il en résulte que la fonction de x , $f(x)=B(x,y)\,\Gamma(x+y)$ satisfait à l'identité (1). Cette fonction est d'autre part logarithmiquement convexe, comme produit de deux fonctions logarithmiquement convexes. Enfin, on a $f(1) = \Gamma(y+1)B(1,y)$, et $B(1,y) = \int_0^1 (1-t)^{y-1} dt = \frac{1}{y}$, d'où $f(1) = \frac{1}{y}\,\Gamma(y+1) = \Gamma(y)$. La fonction $\frac{f(x)}{\Gamma(y)}$ satisfait donc aux conditions de la définition 1, et par suite, on a l'identité

$$(18) \qquad B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Par le changement de variable $t = \frac{u}{u+1}$, cette formule donne

$$(19) \qquad \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

et par le changement de variable $t = \sin^2\varphi$

$$(20) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\varphi \cos^{2y-1}\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Si, dans cette dernière formule, on fait $x = y = \frac{1}{2}$, il vient

$$(21) \qquad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

d'où, en vertu de (17)

$$(22) \qquad \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

D'après l'identité (1), on a pour $\Gamma(x)$, au voisinage de 0 , le développement asymptotique

$$(22\text{ bis}) \qquad \Gamma(x) = \frac{1}{x}\,\Gamma(x+1) = \frac{1}{x} + \Gamma'(1) + \frac{1}{2!}\Gamma''(1)x + \ldots + \frac{1}{n!}\Gamma^{(n)}(1)x^{n-1} + O(x^n)$$

De même, d'après la formule de Taylor, pour tout $y > 0$, on a

$$\frac{1}{\Gamma(x+y)} = \frac{1}{\Gamma(y)} + \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\Gamma(y)}\right)x + \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dy^2}\left(\frac{1}{\Gamma(y)}\right)x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dy^n}\left(\frac{1}{\Gamma(y)}\right)x^n + \\ + O(x^{n+1})$$

d'où le développement de $B(x,y)$ au voisinage de $x=0$

$$(23)\quad B(x,y) = \frac{1}{x} + \Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} + \left(\frac{\Gamma''(1)}{2} - \Gamma'(1)\frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} + \right. \\ \left. \frac{2\Gamma'^2(y) - \Gamma(y)\Gamma''(y)}{2\Gamma^2(y)}\right)x + \ldots$$

Mais on peut écrire pour $x > 0$

$$B(x,y) = \int_0^1 \left(t^{x-1} + t^x \frac{(1-t)^{y-1} - 1}{t}\right)dt = \frac{1}{x} + \int_0^1 t^x \frac{(1-t)^{y-1}-1}{t}\,dt$$

La fonction $\varphi(t) = \frac{(1-t)^{y-1}-1}{t}$ est continue dans l'intervalle compact $[0,1]$; on a d'autre part

$$t^x = e^{x \log t} = 1 + x\log t + \frac{x^2}{2!}(\log t)^2 + \ldots + \frac{x^n}{n!}(\log t)^n + r_n(x,t)$$

avec $\left|r_n(x,t)\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left|\log t\right|^{n+1}$ puisque $\log t \leqslant 0$ et $x > 0$.

En intégrant, on a donc pour $x > 0$, le développement asymptotique

$$B(x,y) = \frac{1}{x} + \int_0^1 \varphi(t)dt + x\int_0^1 \log t.\varphi(t)dt + \ldots + \frac{x^n}{n!}\int_0^1 \varphi(t)(\log t)^n dt + O(x^{n+1})$$

Identifiant ce développement à (23), on a en particulier

$$\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} = \int_0^1 \frac{(1-t)^{y-1}-1}{t}\,dt$$

D'ailleurs la formule (11) montre que $\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma$, donc (intégrale de Gauss)

$$(24)\qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \gamma = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^{x-1}}{t}\,dt$$

5. La formule de multiplication de Legendre-Gauss et la relation des compléments

Considérons la fonction $g(x) = \Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right)$ (p entier > 0) ; comme c'est un produit de fonctions logarithmiquement convexes, elle est logarithmiquement convexe pour $x > 0$; en outre, on a

$g(x+1) = \Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+2}{p}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(\frac{x}{p}+1\right) = \frac{x}{p}\,g(x)$ d'après (1) .

Il en résulte que la fonction $f(x)=p^x g(x)$ vérifie l'équation (1) ; elle est d'autre part logarithmiquement convexe pour $x>0$, comme produit de deux fonctions logarithmiquement convexes ; d'après la déf.1 , on a donc identiquement

$$(25) \qquad p^x \Gamma(\tfrac{x}{p})\,\Gamma(\tfrac{x+1}{p})\ldots\Gamma(\tfrac{x+p-1}{p}) = a_p\,\Gamma(x)$$

où a_p est une constante qu'on obtient en faisant $x=1$ dans (25) :

$$(26) \qquad a_p = p\,\Gamma(\tfrac{1}{p})\Gamma(\tfrac{2}{p})\ldots\Gamma(\tfrac{p}{p})$$

Avant de calculer la valeur de a_p , nous allons établir une autre identité fondamentale vérifiée par la fonction Γ , la <u>relation des compléments</u>.

Considérons la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)}$; elle est définie, continue et indéfiniment dérivable pour tout $x\in\mathcal{R}$; comme $\dfrac{1}{\Gamma(x)}$ s'annule pour $x=-n$ $(n\in\mathcal{N})$, f s'annule pour tout entier rationnel ; d'autre part, d'après la relation (1), on a $f(x+1)=-f(x)$, et par suite $f(x+2)=f(x)$. Ces propriétés sont partagées par les fonctions $k.\sin \pi x$ (k constante) ; nous allons poser $\varphi(x) = \dfrac{\sin \pi x}{f(x)} = \Gamma(x)\,\Gamma(1-x)\sin \pi x$ et étudier cette fonction .

En premier lieu, $\varphi(x)$ qui n'est pas définie pour $x=0$, se prolonge par continuité en ce point car on a $\Gamma(x)\sim\frac{1}{x}$ et $\sin \pi x \sim \pi x$ au voisinage de $x=0$, donc $\varphi(x)$ tend vers π en ce point ; φ peut donc être considérée comme le produit des trois fonctions $\Gamma(1+x)$, $\Gamma(1-x)$ et $\dfrac{\sin \pi x}{x}$ qui sont indéfiniment dérivables dans $\mathcal{R}$; par suite il en est de même de φ ; cette fonction admet d'autre part la période 1 .

Remarquons maintenant que, pour $p=2$, (25) s'écrit

$$\Gamma(\tfrac{x}{2})\,\Gamma(\tfrac{x+1}{2}) = a_2.2^{-x}\,\Gamma(x)$$

On en déduit

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)\sin\frac{\pi x}{2}\,\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)\cos\frac{\pi x}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\,a_2^2 . 2^{-x}\Gamma(x) . 2^{x-1}\Gamma(1-x)\sin\pi x = \frac{1}{4}\,a_2^2\,\Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin\pi x$$

autrement dit

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = b\,\varphi(x) \tag{27}$$

où b est une constante. Or $\varphi(x)$ ne pourrait s'annuler qu'aux points entiers rationnels, où elle prend la valeur π ; donc $\log\varphi(x)$ est une fonction périodique indéfiniment dérivable dans $\mathcal{R}$. Si on pose $h(x) = \frac{d^2}{dx^2}(\log\varphi(x))$, h est une fonction périodique indéfiniment dérivable dans $\mathcal{R}$, et satisfait d'après (27) à l'identité

$$h(x) = \frac{1}{4}\left(h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) \tag{28}$$

Nous allons voir qu'on a nécessairement $h(x)=0$ dans $\mathcal{R}$; en effet, soit $m = \sup_{x\in\mathcal{R}} |h(x)|$, et soit x_0 un point tel que $|h(x_0)| = m$. De (28) on déduit que $|h(x)| \leqslant \frac{1}{4}(m+m) = \frac{m}{2}$, donc en particulier pour $x=x_0$, $m \leqslant \frac{m}{2}$, ce qui entraîne $m=0$.

Il en résulte que $\log\varphi(x)$ est un polynome du premier degré en x ; étant périodique, cette fonction est nécessairement <u>constante</u>, donc $\varphi(x)$ est identique à la constante π , et on a l'identité

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \frac{1}{\pi}\sin\pi x \tag{29}$$

dite <u>relation des compléments</u> (Euler).

On peut encore écrire cette relation sous la forme

$$\sin\pi x = -\frac{\pi}{x}\cdot\frac{1}{\Gamma(x)}\cdot\frac{1}{\Gamma(-x)}$$

en remplaçant $\frac{1}{\Gamma(x)}$ et $\frac{1}{\Gamma(-x)}$ par leur valeur tirée de (13), on obtient l'expression de $\sin\pi x$ sous forme d'un <u>produit infini</u> (Euler)

$$\sin\pi x = \pi x \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \tag{30}$$

ce produit étant absolument et uniformément convergent dans tout intervalle compact de $\mathcal{R}$.

La relation des compléments nous permet maintenant de calculer la constante a_p ; en effet, remplaçant successivement x par $\frac{k}{p}$ $(1 \leqslant k \leqslant p-1)$ dans (29) et multipliant membre à membre les p-1 relations obtenues, il vient

$$a_p^2 = \frac{p^2 \pi^{p-1}}{\sin \frac{\pi}{p} \sin \frac{2\pi}{p} \ldots \sin \frac{(p-1)\pi}{p}}$$

Or, on a

$$\prod_{k=1}^{p-1} \sin \frac{k\pi}{p} = \frac{1}{(2i)^{p-1}} \prod_{k=1}^{p-1} (e^{\frac{k\pi i}{p}} - e^{\frac{-k\pi i}{p}}) = \frac{\prod_{k=1}^{p-1} e^{\frac{k\pi i}{p}}}{(2i)^{p-1}} \cdot \prod_{k=1}^{p-1} (1 - e^{\frac{-2k\pi i}{p}})$$

$$= \frac{e^{\frac{(p-1)\pi i}{2}}}{(2i)^{p-1}} \prod_{k=1}^{p-1} (1 - e^{\frac{-2k\pi i}{p}})$$

Mais le polynome $\prod_{k=1}^{p-1} (x - e^{\frac{-2k\pi i}{p}})$ n'est autre que $\frac{x^p - 1}{x-1} = \sum_{k=0}^{p-1} x^k$

On a donc

$$\sin \frac{\pi}{p} \sin \frac{2\pi}{p} \ldots \sin \frac{(p-1)\pi}{p} = \frac{p}{2^{p-1}}$$

et comme $a_p > 0$, on a

$$(31) \qquad a_p = p\, \Gamma(\tfrac{1}{p}) \Gamma(\tfrac{2}{p}) \ldots \Gamma(\tfrac{p}{p}) = \sqrt{p}\, (2\pi)^{\frac{p-1}{2}}$$

Portant dans la formule (25), on obtient la formule dite <u>formule de multiplication de Legendre-Gauss</u>

$$(32) \qquad \Gamma(\tfrac{x}{p})\, \Gamma(\tfrac{x+1}{p}) \ldots \Gamma(\tfrac{x+p-1}{p}) = \frac{(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}}{p^{x-\frac{1}{2}}}\, \Gamma(x)$$

<u>6. L'intégrale de Raabe et la formule de Stirling</u>. Comme $\log \Gamma(x) \sim \log \frac{1}{x}$ lorsque x tend vers 0 , l'intégrale impropre $\int_0^1 \log \Gamma(x)dx$ est convergente. En outre, dans $]0,1[$, $\log \Gamma(x)$ est décroissante ; pour tout $\alpha > 0$, on a donc $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{q} \log \Gamma(\frac{k}{n}) \leqslant \int_0^{\alpha} \log \Gamma(x)\, dx$, q étant le plus grand entier tel que $\frac{q}{n} \leqslant \alpha$. Comme $\int_0^{\alpha} \log \Gamma(x)dx$ tend vers 0 avec α , et que $\frac{1}{n} \sum_{k=q+1}^{n} \log \Gamma(\frac{k}{n})$ tend vers $\int_0^1 \log \Gamma(x)dx$ lorsque n tend vers $+\infty$ (chap.I, § 2, prop.5), on a

$$\int_0^1 \log \Gamma(x)dx = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log \Gamma(\tfrac{k}{n})$$

Mais, d'après (31), le second membre de cette formule est la limite de $\frac{n-1}{2n}\log 2\pi - \frac{1}{2}\frac{\log n}{n}$, d'où

$$\int_0^1 \log \Gamma(x)dx = \frac{1}{2}\log 2\pi \tag{33}$$

Remarquons maintenant que de l'identité

$$\log \Gamma(x+1) = \log \Gamma(x) + \log x$$

on déduit, en intégrant

$$\int_0^x \log \Gamma(t+1)dt = \int_0^x \log \Gamma(t)dt + \int_0^x \log t\, dt$$

Mais l'intégrale du premier membre est aussi égale à $\int_1^{x+1} \log \Gamma(t)dt$; on a donc, d'après (33)

$$\int_x^{x+1} \log \Gamma(t)dt = \int_0^x \log t\, dt + \frac{1}{2}\log 2\pi = x(\log x - 1) + \frac{1}{2}\log 2\pi \tag{34}$$

(intégrale de Raabe).

Remplaçons x par $x - \frac{1}{2}$ dans cette formule ; il vient pour $x > \frac{1}{2}$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \log \Gamma(x+t)dt = (x - \tfrac{1}{2})(\log(x - \tfrac{1}{2}) - 1) + \frac{1}{2}\log 2\pi \tag{35}$$

Or, dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$, on a

$$\left| \log \Gamma(x+t) - \log \Gamma(x) - t\,\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right| \leqslant m_x \cdot \frac{t^2}{2}$$

où m_x est la borne supérieure de la fonction $\left|\frac{d}{dt^2}(\log \Gamma(x+t))\right|$ dans cet intervalle. D'après la formule (12) appliquée pour $k=2$, on a

$$m_x \leqslant \frac{1}{(x - \frac{1}{2})^2} + \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2} + \ldots + \frac{1}{(x+n+\frac{1}{2})^2} + \ldots \int_{x-\frac{3}{2}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x - \frac{3}{2}}$$

dès que $x > \frac{3}{2}$; on en déduit que

$$\left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \log \Gamma(x+t)dt - \log \Gamma(x) \right| \leqslant m_x \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{t^2}{2}\, dt = \frac{m_x}{24} \leqslant \frac{1}{24(x - \frac{3}{2})}$$

D'autre part, (35) donne, en développant le second membre au voisinage de $+\infty$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \log \Gamma(x+t)dt = x\log x - x - \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log 2\pi + 0\left(\frac{1}{x}\right)$$

d'où finalement le développement asymptotique

(36) $\log\Gamma(x) = x\log x - x - \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log 2\pi + 0\left(\frac{1}{x}\right)$

d'où on tire la partie principale de $\Gamma(x)$

(37) $\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}$

(formule de Stirling).

De la formule de Stirling et de la relation

$$\Gamma(n+a) = (n+a-1)\ldots a\,\Gamma(a)$$

on tire la partie principale

(38) $a(a+1)(a+2)\ldots(a+n) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(a)}\, n^{n+a+\frac{1}{2}} e^{-n}$ pour a non entier $\leqslant 0$

d'où

(39) $\binom{a}{n} \sim \frac{(-1)^n}{\Gamma(-a)}\, n^{a-1}$ pour a non entier $\geqslant 0$

Exercices. 1) Soit f une fonction convexe et continue dans $[0,+\infty[$. Montrer que l'équation aux différentes finies $u(x+1)-u(x)=f(x)$ admet une infinité de solutions convexes dans $[0,+\infty[$, et prenan une même valeur a au point x=1. (Considérer l'équation satisfaite par la dérivée à droite de u).

2) Généraliser les lemmes 1 et 2 aux fonctions logarithmiquement convexes quelconques.

3) a) Soit g une fonction continue pour $x \geqslant 0$. Montrer que si g vérifie les deux identités

$$\sum_{k=0}^{p-1} g\left(\frac{x+k}{p}\right) = g(x)$$

$$\sum_{h=0}^{q-1} g\left(\frac{x+h}{q}\right) = g(x)$$

elle vérifie aussi l'identité $\sum_{j=0}^{pq-1} g\left(\frac{x+j}{pq}\right) = g(x)$.

b) En déduire que si une fonction g est continue et dérivable pour $x \geqslant 0$ et vérifie l'identité

$$\sum_{k=1}^{p-1} g\left(\frac{x+k}{p}\right) = g(x)$$

elle est de la forme $a(x-\frac{1}{2})$ (remarquer, en utilisant a), que g vérifie une identité analogue où p est remplacé par p^n ; faisant tendre n vers $+\infty$, en déduire qu'on a $g'(x) = \int_0^1 g'(t)dt$.)

c) Conclure de b) que la fonction Γ est la seule fonction dérivable pour $x > 0$, vérifiant l'équation (1) et la formule de multiplication (32) pour une valeur de p .

4) Soit x_n la racine de l'équation $\Gamma'(x)=0$ appartenant à l'intervalle $]-n,-n+1[$. Montrer que l'on a

$$x_n = -n + \frac{1}{\log n} + 0\left(\frac{1}{\log n}\right)$$

(utiliser la relation des compléments et la formule (11)) .