CHAPITRE II ETAT 4
DERIVEES. PRIMITIVES. INTEGRALES
CHAPITRE III ETAT 4
FONCTIONS ELEMENTAIRES

Rédaction n° 006

Nombre de pages : 140

Nombre de feuilles : 140

Livre IV Chap II. III
Etat 4
Dérivées. primitives. intégrales.
Fonctions élémentaires

6

(Ancien CHAPITRE II) (Etat 4)

DÉRIVÉES. PRIMITIVES. INTÉGRALES.

§ 1. Dérivée première.

Nous étudierons dans ce chapitre les propriétés des fonctions définies sur une partie du corps $\mathbf{R}$ des nombres réels et prenant leurs valeurs dans un espace vectoriel(*) de dimension finie E sur le corps ~~$\mathbf{R}$~~ , qu'on peut toujours identifier à un espace numérique $\mathbf{R}^n$ (Top.gén., chap.VI, §1,n°5) ; nous dirons pour abréger qu'une telle fonction est une fonction vectorielle d'une variable réelle. Lorsque $E=\mathbf{R}$, une fonction définie dans une partie de $\mathbf{R}$ et prenant ses valeurs dans $\mathbf{R}$ n'est autre qu'une fonction numérique finie (Top.gén.,chap.IV, § 5) définie sur une partie de $\mathbf{R}$; on dit encore dans ce cas que c'est une fonction scalaire d'une variable réelle. Lorsque $E=\mathbf{R}^n$, la considération d'une fonction vectorielle à valeurs dans E revient à la considération simultanée de n fonctions scalaires.

(*) Les éléments (ou vecteurs) d'un espace vectoriel E sur un corps commutatif K seront notés dans ce chapitre par des minuscules grasses, les scalaires par des minuscules latines ; le plus souvent, nous noterons à droite le produit d'un scalaire t et d'un vecteur $\mathbf{x}$, qui s'écrira donc $\mathbf{x}t$; éventuellement, nous nous permettrons toutefois d'utiliser la notation à gauche $t\mathbf{x}$ dans certains cas où elle sera plus commode ; nous écrirons parfois aussi le produit du scalaire $\frac{1}{t}$ $(t\neq 0)$ et du vecteur $\mathbf{x}$ sous la forme $\frac{\mathbf{x}}{t}$.

Lorsque E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{R}$ ou le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, la notation $\|\mathbf{x}\|$ désignera une norme sur E c'est-à-dire une fonction numérique, à valeurs finies et ≥ 0, définie dans E et telle que $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$, $\|\mathbf{x}t\| = |t| . \|\mathbf{x}\|$ (pour $t\in\mathbf{R}$, resp. $t\in\mathbf{C}$), et enfin que la relation $\|\mathbf{x}\| = 0$ soit équivalente à $\mathbf{x} = 0$ (cf. Top.gén., chap.IX, § 3,n° 3) .

Beaucoup des définitions et propriétés énoncées dans ce chapitre s'étendent aux fonctions définies dans une partie du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, et prenant leurs valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ (fonctions vectorielles d'une variable complexe). Certaines de ces définitions et propriétés s'étendent même aux fonctions définies sur une partie d'un corps topologique commutatif quelconque K (Top. gén., chap.III, § 5), et prenant leurs valeurs dans un espace vectoriel E sur K , de dimension quelconque (finie ou non), muni d'une topologie telle que les fonctions $x+y$ et xt soient continues dans $E \times E$ et $E \times K$ respectivement (cf. Livre V).

Nous signalerons ces généralisations au passage (v. en particulier Rem.1 du § 1, n° 4), en insistant surtout sur le cas des fonctions d'une variable complexe, de beaucoup le plus important avec celui des fonctions d'une variable réelle, et qui sera étudié de manière plus approfondie dans un Livre ultérieur.

1. Dérivée d'une fonction vectorielle.

DEFINITION 1.- Soit f une fonction vectorielle définie dans un voisinage V d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable au point x_0 si $\lim_{x \to x_0, x \in V, x \neq x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe (dans l'espace vectoriel où f prend ses valeurs) ; la valeur de cette limite s'appelle dérivée première (ou simplement dérivée) de f au point x_0 , et se note $f'(x_0)$ ou $Df(x_0)$.

Dans ce qui suit, lorsque nous dirons qu'une fonction est dérivable en un point x_0 , il sera sous-entendu qu'elle est définie dans un voisinage de x_0 .

DEFINITION 2.- Un dit que f est dérivable dans un ensemble ouvert $A \subset \mathbb{R}$ si elle est dérivable en tout point de A ; la fonction vectorielle $x \to f'(x)$, définie dans A , est appelée fonction dérivée (ou, par abus de langage, dérivée) de f , et se note f' ou Df .

Exemples.- 1) Une fonction constante a en tout point une dérivée nulle.

2) Une fonction linéaire $x \to ax+b$ a en tout point une dérivée égale à a , donc constante.

3) La fonction scalaire $\frac{1}{x}$ est dérivable en tout point $x_0 \neq 0$, car on a $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} = -\dfrac{1}{xx_0}$ et comme $\frac{1}{x}$ est continue au point x_0, la limite de l'expression précédente est $-\frac{1}{x_0^2}$.

4) Au point $x_0=0$, la fonction scalaire $|x|$ n'admet pas de dérivée, car on a $\frac{|x|}{x}=1$ pour $x>0$ et $\frac{|x|}{x}=-1$ pour $x<0$. Il existe des fonctions continues dans un intervalle et n'ayant de dérivée en aucun point de l'intervalle (exerc.2 et 3).

Remarques.- *1) En Cinématique, si le point $f(t)$ est la position d'un point mobile dans l'espace $\mathbb{R}^3$ à l'instant t , $\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ est ce qu'on appelle la vitesse moyenne du mobile entre les instants t_0 et t , et sa limite $f'(t_0)$ la vitesse instantanée (ou simplement vitesse) à l'instant t (lorsque cette limite existe).*

2) Une fonction dérivable en un point est nécessairement continue en ce point.

3) Une fonction peut être dérivable dans un intervalle ouvert sans que sa dérivée soit continue en tout point de cet intervalle ; c'est ce que montre l'exemple de la fonction égale à $x^2 \sin\frac{1}{x}$ pour $x\neq 0$, à 0 pour $x=0$: elle a partout une dérivée, mais cette dérivée est discontinue au point 0 .*

2. Linéarité de la dérivée.

PROPOSITION 1.- L'ensemble des fonctions vectorielles définies dans un même voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, prenant leurs valeurs dans un même espace vectoriel E, et dérivables au point x_0, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et $f \to Df(x_0)$ est une application linéaire (homogène) de cet espace dans E.

En d'autres termes, si f et g sont définies dans un voisinage V de x_0 et dérivables au point x_0, $f+g$ et fa (a scalaire quelconque sont dérivables au point x_0, et ont respectivement pour dérivées en ce point $f'(x_0)+g'(x_0)$ et $f'(x_0)a$. Cela résulte aussitôt de la continuité de $x+y$ et de xa dans $E\times E$ et dans E respectivement.

COROLLAIRE.- L'ensemble des fonctions vectorielles définies dans un ensemble ouvert $A \subset \mathbb{R}$, prenant leurs valeurs dans un même espace vectoriel E, et dérivable dans A, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et $f \to Df$ est une application linéaire (homogène) de cet espace dans l'espace vectoriel des applications de A dans E.

3. Dérivées de fonctions composées.

PROPOSITION 2.- Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{R}$, u une application linéaire de E dans F. Si f est une fonction vectorielle définie dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, prenant ses valeurs dans E et dérivable au point x_0, la fonction composée $u\circ f$ admet au point x_0 une dérivée égale à $u(f'(x_0))$.

En effet, comme $u(f(x))-u(f(x_0))=u(f(x)-f(x_0))$, la proposition résulte du fait que toute application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ dans un espace de même nature est continue.

Exemples.- 1) Soit $f=(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, définie dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$; chacune des fonctions scalaires f_i n'est autre que la fonction composée $pr_i \circ f$, donc est dérivable au point x_0 si f l'est, et on a $f'(x_0)=(f_i'(x_0))_{1\leqslant i\leqslant n}$

2) En cinématique, si $f(t)$ est la position d'un mobile M à l'instant t, $g(t)$ la position au même instant de la projection M' de M sur un plan P (resp. une droite D) parallèlement à une droite (resp. un plan) non parallèle à P (resp. à D), g est composée de la projection u de R^3 sur P (resp. D) et de f ; comme u est une application linéaire, on voit que la projection de la vitesse d'un mobile sur un plan (resp. une droite) est égale à la vitesse de la projection du mobile sur le plan (resp. la droite).

Considérons maintenant p espaces vectoriels E_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ de dimension finie sur R, et une application multilinéaire(*) (que nous noterons $(x_1, x_2, .., x_p) \to [x_1 . x_2 .. x_p]$) de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ dans un espace vectoriel F de dimension finie sur R.

PROPOSITION 3 ("dérivée d'un produit").- Pour chaque indice i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ soit f_i une fonction définie dans un voisinage V de $x_0 \in R$, prenant ses valeurs dans E_i, et dérivable au point x_0. Alors la fonction

$$x \to [f_1(x) . f_2(x) \ldots f_p(x)]$$

définie dans V et à valeurs dans F, admet au point x_0 une dérivée égale à

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{p} [f_1(x_0) \ldots f_{i-1}(x_0) . f'_i(x_0) . f_{i+1}(x_0) \ldots f_p(x_0)]$$

(*) Rappelons (Alg, chap. III, § 1) qu'une application $(x_1, x_2, \ldots x_p) \to f(x_1, x_2, .. x_p)$ de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ dans F est dite multilinéaire si toute application partielle $x_i \to f(a_1, .., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, .., a_p)$ de E_i dans F $(1 \leqslant i \leqslant p)$ les a_j d'indice $\neq i$ quelconques dans les E_j) est une application g_i linéaire (homogène), c'est-à-dire telle que $g_i(x_i + y_i) = g_i(x_i) + g_i(y_i)$ et $g_i(x_i t) = g_i(x_i)t$ quels que soient x_i et y_i dans E_i, et t dans R.

Posons en effet $h(x)=[f_1(x).f_2(x)..f_p(x)]$; on peut écrire

$$h(x)-h(x_0)=\sum_{i=1}^{p}[f_1(x_0)..f_{i-1}(x_0).(f_i(x)-f_i(x_0)).f_{i+1}(x)..f_p(x)]$$

Multipliant les deux embres par $\frac{1}{x-x_0}$ et faisons tendre x vers x_0 , on obtient bien l'expression (1), en tenant compte de ce que toute application multilinéaire de $E_1\times E_2\times\ldots\times E_p$ dans F est continue (Top.gén., chap.VI, § 1, n°5) et ~~que~~ de la continuité de la somme de p éléments dans F .

Lorsque certaines des fonctions f_i sont des constantes, les termes de l'expression (1) contenant les dérivées $f_i'(x_0)$ de ces fonctions disparaissent.

Nous expliciterons le cas particulier p=2, le plus important pour les applications : si $(x,y)\rightarrow[x.y]$ est une application bilinéaire de $E\times F$ dans G (E,F,G espaces vectoriels de dimension finie sur R), f et g deux fonctions vectorielles dérivables au point x_0, prenant respectivement leurs valeurs dans E et F , la fonction vectorielle $x\longrightarrow[f(x).g(x)]$ (qu'on note encore $[f.g]$) admet au point x_0 une dérivée égale à

$$(2) \qquad [f'(x_0).g(x_0)]+[f(x_0).g'(x_0)] .$$

En particulier, si a est un vecteur constant, $[a.f]$ (resp. $[f.a]$) admet au point x_0 une dérivée égale à $[a.f'(x_0)]$ (resp. $[f'(x_0).a]$)

Exemples.- 1) Soit f une fonction scalaire, g une fonction vectorielle, toutes deux dérivables en un point $x_0\in R$; la fonction gf admet au point x_0 une dérivée égale à $g'(x_0)f(x_0)+g(x_0)f'(x_0)$. En particulier, si a est un vecteur constant, af admet une dérivée égale à $af'(x_0)$. Cette remarque prouve que si une fonction $f=(f_i)_{1\leq i\leq n}$ prend ses valeurs dans R^n , et si chacune des f_i est une fonction scalaire dérivable au point x_0 . f est dérivable en ce point, car si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on peut écrire $f = \sum_{i=1}^{n} e_i f_i$.

2) La fonction scalaire x^n provient de la fonction multilinéaire $(x_1,x_2,..,x_n) \to x_1x_2..x_n$ définie dans $\mathbb{R}^n$, par substitution de x à chacun des x_i ; la prop.3 montre donc que x^n est dérivable dans $\mathbb{R}$ et a pour dérivée nx^{n-1}. Il en résulte que la fonction polynome $a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ (a_i vecteurs fixes) a pour dérivée $na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+..+a_{n-1}$; lorsque les a_i sont des scalaires, cette fonction coïncide avec la dérivée d'une fonction polynome définie en Algèbre (<u>Alg</u>.,chap.IV, §).

3) Le <u>produit scalaire</u> euclidien $\langle x,y\rangle$ (<u>Top.gén</u>.,chap.VI, §2, n°2) est une application bilinéaire de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. si f et g sont deux fonctions vectorielles à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, dérivables au point $x_0\in\mathbb{R}$, la fonction scalaire $x\to\langle f(x),g(x)\rangle$ a un point x_0 une dérivée égale à $\langle f'(x_0),g(x_0)\rangle+\langle f(x_0),g'(x_0)\rangle$ on a un résultat analogue pour le produit scalaire hermitien dans $\mathbb{C}^n$ (<u>Alg</u>,chap.VIII) <u>ce dernier étant considéré comme espace vectoriel sur</u> $\mathbb{R}$.

4) Le <u>produit vectoriel</u> $x\top y$ de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (<u>Alg</u>., chap.IX) est une application bilinéaire de $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$; avec les mêmes hypothèses sur f et g , la fonction $x\to f(x)\top g(x)$ admet au point x_0 une dérivée égale à $f'(x_0)\top g(x_0)+f(x_0)\top g'(x_0)$.

5) Si E est une <u>algèbre</u> de rang fini sur le corps $\mathbb{R}$, le produit xy de deux éléments de E est fonction bilinéaire de (x,y) ; si f et g sont deux fonctions dérivables au point x_0 , à valeurs dans E , la fonction $x\to f(x)g(x)$ admet au point x_0 une dérivée égale à $f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$. En particulier, si

si $\underline{U}(x)=(\alpha_{ij}(x))$, $\underline{V}(x)=(\beta_{ij}(x))$ sont deux <u>matrices carrées</u> d'ordre n, dérivables au point x_0, leur produit $\underline{UV}$ admet en ce point une dérivée égale à la matrice $\underline{U}'(x_0)\underline{V}(x_0)+\underline{U}(x_0)\underline{V}'(x_0)$ (avec $\underline{U}'(x)=(\alpha'_{ij}(x))$, $\underline{V}'(x)=(\beta'_{ij}(x))$).

b) Le <u>déterminant</u> $[\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2..\mathfrak{x}_n]$ de n vecteurs $\mathfrak{x}_i=(x_{ij})_{1\leq j\leq n}$ de l'espace $\mathbb{R}^n$ (<u>Alg.</u>, chap. III, § 6), étant fonction multilinéaire des $\mathfrak{x}_i$, on voit que si les n^2 fonctions scalaires f_{ij} sont dérivables au point x_0, leur déterminant $g(x)=\det(f_{ij}(x))$ admet en ce point une dérivée égale à

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\mathfrak{f}_1(x_0)..\mathfrak{f}_{i-1}(x_0)\ \mathfrak{f}'_i(x_0)\mathfrak{f}_{i+1}(x_0)..\mathfrak{f}_n(x_0)\right]$$, où

$\mathfrak{f}_i(x)=(f_{ij}(x))_{1\leq j\leq n}$; en d'autres termes on obtient la dérivée d'un déterminant d'ordre n en faisant la somme des n déterminants obtenus en remplaçant, pour chaque i , les termes de la colonne d'indice i par leurs dérivées.

<u>PROPOSITION 4</u>.- <u>Soit</u> E <u>une algèbre de rang fini sur</u> $\mathbb{R}$, <u>ayant un élément unité</u>, $\mathfrak{f}$ <u>une fonction dérivable en un point</u> $x_0\in\mathbb{R}$, <u>prenant ses valeurs dans</u> E . <u>Si</u> $y_0=\mathfrak{f}(x_0)$ <u>est inversible dans</u> E , <u>la fonction</u> $x\rightarrow(\mathfrak{f}(x))^{-1}$ <u>est définie au voisinage de</u> x_0 , <u>et admet au point</u> x_0 <u>une dérivée égale à</u> $-(\mathfrak{f}(x_0))^{-1}\ \mathfrak{f}'(x_0)(\mathfrak{f}(x_0))^{-1}$.

En effet, comme E est complet, l'ensemble des éléments inversibles de E est un ensemble ouvert où la fonction $y\rightarrow y^{-1}$ est continue (<u>Top. gén.</u>, chap. IX, § 3, prop.). On peut écrire

$$(\mathfrak{f}(x))^{-1}-(\mathfrak{f}(x_0))^{-1}=(\mathfrak{f}(x))^{-1}(\mathfrak{f}(x_0)-\mathfrak{f}(x))(\mathfrak{f}(x_0))^{-1}$$

et la proposition résulte de la continuité de y^{-1} au voisinage de y_0 et de la continuité de xy dans $E\times E$.

Exemples.- 1) Le cas particulier le plus important est celui où E est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; si f est une fonction à valeurs réelles ou complexes, dérivable au point $x_0 \in \mathbb{R}$ et telle que $f(x_0) \neq 0$, $1/f$ admet au point x_0 une dérivée égale à $-f'(x_0)/(f(x_0))^2$.

2) Si $\underline{U}=(u_{ij}(x))$ est une matrice carrée d'ordre n , dérivable au point x_0 et inversible en ce point, $\underline{U}^{-1}$ admet au point x_0 une dérivée égale à $-\underline{U}^{-1}\underline{U}'\underline{U}^{-1}$.

PROPOSITION 5 ("dérivée d'une fonction composée").- <u>Soit f une fonction scalaire vectorielle définie dans un voisinage du point</u> $f(x_0)$ <u>à valeurs dans</u> E . <u>Si</u> f <u>est dérivable au point</u> x_0 , <u>et</u> g <u>dérivable au point</u> $f(x_0)$, <u>la fonction composée</u> $g \circ f$ <u>admet au point</u> x_0 <u>une dérivée égale à</u> $g'(f(x_0))f'(x_0)$.

En effet, posons $h = g \circ f$; on peut écrire $h(x)-h(x_0)= u(x) \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ où on pose $u(x) = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}$ si $f(x) \neq f(x_0)$, et $u(x)= g'(f(x_0))$ dans le cas contraire. Lorsque x tend vers x_0 , $f(x)$ a pour limite $f(x_0)$, donc $u(x)$ a pour limite $g'(f(x_0))$, d'où la proposition en vertu de la continuité de la fonction yx dans $E \times \mathbb{R}$.

Remarque.- Dans le Livre consacré aux différentielles, nous verrons que les propositions 2 à 5 peuvent être considérées comme des cas particuliers d'un même théorème donnant la dérivée de $g \circ f$, lorsque f est une fonction vectorielle définie dans une partie de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace vectoriel E , et g une application d'une partie de E dans un espace vectoriel F .

4. Dérivée d'une fonction réciproque.

PROPOSITION 6.- *Soit* f *un homéomorphisme d'un voisinage* V *de* $x_0 \in \mathbb{R}$ *sur un voisinage* W *de* $y_0 = f(x_0) \in \mathbb{R}$, *et soit* g *l'homéomorphisme réciproque. Si* f *est dérivable au point* x_0 *et si* $f'(x_0) \neq 0$, g *admet au point* y_0 *une dérivée égale à* $1/f'(x_0)$.

En effet, pour tout $y \in W$, on a $g(y) \in V$ et $y = f(g(y))$; on peut donc écrire, pour $y \neq y_0$, $\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \frac{g(y)-x_0}{f(g(y))-f(x_0)}$. Lorsque y tend vers y_0 en restant $\neq y_0$, $g(y)$ tend vers x_0 en restant $\neq x_0$, et le second membre de la formule précédente a donc une limite égale à $1/f'(x_0)$ puisque par hypothèse $f'(x_0) \neq 0$.

COROLLAIRE.- *Soit* f *un homéomorphisme d'une partie ouverte* A *de* $\mathbb{R}$ *sur une partie ouverte* B *de* $\mathbb{R}$, *et soit* g *l'homéomorphisme réciproque. Si* f *est dérivable dans* A *et si* $f'(x) \neq 0$ *en tout point de* A , g *est dérivable dans* B *et sa dérivée en tout point* $y \in B$ *est* $1/f'(g(y))$.

Par exemple, pour tout entier $n > 0$, la fonction $x^{\frac{1}{n}}$, homéomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même, réciproque de x^n , a pour dérivée en tout point $x > 0$, $\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

On en déduit aisément, d'après la prop.5 que pour tout nombre rationnel $r = \frac{p}{q} > 0$, la fonction $x^r = (x^{1/q})^p$ a pour dérivée rx^{r-1} en tout point $x > 0$.

Remarques.- 1) Les définitions, propositions et exemples qui précèdent (à l'exception de l'exemple 4 du n°1 et des considérations sur la Cinématique) restent valables lorsque l'on remplace le corps $\mathbb{R}$ par un *corps topologique commutatif quelconque* K , les espaces vectoriels (resp. algèbres) de dimension finie sur $\mathbb{R}$ qui interviennent par des *espaces vectoriels topologiques quelconques* (resp. *algèbres topologiques*) sur K , et que, dans les prop.2 et 3 , on suppose que les applications linéaires et et multilinéaires considérées sont continues ainsi que l'application $y \to y^{-1}$ dans la prop.4. La prop.5 s'étend en outre au cas suivant : soit K' un sous-corps du corps topologique K , E un espace vectoriel topologique <u>sur</u> K ; si f est une fonction définie dans un voisinage $V \subset K'$ de $x_0 \in K'$, à valeurs dans K (considéré comme espace vectoriel topologique sur K'), dérivable au point x_0 , et si g est une fonction définie dans un voisinage de $f(x_0) \in K$, à valeurs dans E , et dérivable au point $f(x_0)$, l'application $g \circ f$ est dérivable au point x_0 et a une dérivée en ce point égale à $g'(f(x_0))f'(x_0)$ (E étant alors considéré comme espace vectoriel topologique <u>sur</u> K').

Enfin, avec les mêmes notations, il est clair que si f est une fonction définie dans un voisinage V de $a \in K$, à valeurs dans E , et dérivable au point a , si a appartient à K' et n'est pas point isolé dans K' , la <u>restriction</u> de f à $V \cap K'$ est dérivable au point a et a pour dérivée $f'(a)$ en ce point.

Ces remarques s'appliqueront surtout, en pratique, au cas où $K = \mathbb{C}$ et $K' = \mathbb{R}$.

2) La prop.6 et son corollaire ont été énoncés de façon à se généraliser aussitôt au cas où on remplace $\mathbb{R}$ par un corps topologique quelconque. Mais lorsque, dans la prop.6, on suppose que V est un <u>intervalle</u> contenant x_0 , on peut remplacer l'hypothèse que f est un homéomorphisme de V sur un voisinage de $f(x_0)$, par l'hypothèse équivalente que f est <u>strictement monotone</u> dans V (<u>Top.gén.</u>, chap.IV, § 2,th.5).

<u>5. Dérivées à droite et dérivées à gauche.</u>

Rappelons (cf.<u>Rectifications au fasc.III</u>) que si u est une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert $A =]x_0, b[$, et prenant ses valeurs dans un espace topologique quelconque, la limite à droite $u(x_0+)$ de u au point x_0 (lorsqu'elle existe) est la limite de u(x) lorsque x tend vers x_0 en restant dans A et $\neq x_0$; u est dite continue à droite au point x_0 si elle est définie au point x_0 et a en ce point une limite à droite égale à $u(x_0)$. La limite à gauche et la continuité à gauche se définissent de façon analogue.

DEFINITION 3.- Soit f une fonction vectorielle continue à droite (resp. à gauche) en un point x_0 . On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) au point x_0 si la limite à droite (resp. à gauche) de $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe en ce point ; la valeur de cette limite s'appelle dérivée à droite (resp. à gauche) de f au point x_0 , et se note $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_s(x_0)$).

Si une fonction admet une dérivée à droite (resp. à gauche) en tout point d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$, on dit qu'elle est dérivable à droite (resp. à gauche) dans A , et la fonction $x \to f'_d(x)$ (resp. $x \to f'_s(x)$) définie dans A , est appelée fonction dérivée à droite (resp. à gauche) ou simplement (par abus de langage) dérivée à droite (resp. à gauche) de f , et se note f'_d (resp. f'_s).

Exemples.- 1) au point $x=0$, la fonction scalaire $|x|$ admet une dérivée à droite égale à $+1$ et une dérivée à gauche égale à -1 .

2) Au point $x=0$, la fonction scalaire égale à 0 pour $x=0$, à $x \sin \frac{1}{x}$ pour $x\neq 0$ n'admet pas de dérivée à droite ni de dérivée à gauche.

Il résulte aussitôt des définitions que, pour qu'une fonction f continue en un point x_0 admette en ce point une dérivée, il faut et il suffit que f possède au point x_0 une dérivée à droite et une dérivée à gauche, et que ces dérivées soient égales ; on a alors

$f'(x_0)=f'_d(x_0)=f'_s(x_0)$.

Les propositions 1 à 4 se généralisent immédiatement en y remplaçant partout le mot "dérivée" par "dérivée à droite" (resp. "dérivée à gauche"), le mot "dérivable" par "dérivable à droite" (resp. "dérivable à gauche"). Il en est de même de la prop.5 lorsqu'on suppose f dérivable à droite (resp. à gauche) et g dérivable ; $g\circ f$ a une dérivée à droite (resp. à gauche) égale à $g'(f(x_0))f'_d(x_0)$ (resp. $g'(f(x_0))f'_s(x_0)$).

Notons aussi que si f admet au point x_0 une dérivée à droite (resp. à gauche), la fonction $x \to f(x)$ admet au point $-x_0$ une dérivée à gauche (resp. à droite) égale à $-f'_d(x_0)$ (resp. $-f'_s(x_0)$).

Enfin, la prop.6 s'étend comme suit :

PROPOSITION 7.- Soit f une fonction scalaire strictement croissante (resp. strictement décroissante) et continue dans un intervalle $[x_0,b]$, et soit g l'application réciproque de f . Si f admet au point x_0 une dérivée à droite $f'_d(x_0)\neq 0$, g admet au point $y_0=f(x_0)$ une dérivée à droite (resp. une dérivée à gauche) égale à $1/f'_d(x_0)$.

La démonstration est la même que celle de la prop.6 .

6. Dérivées des fonctions numériques.

Les définitions et propositions qui précèdent se complètent sur quelques points lorsqu'il s'agit de fonctions numériques (finies) d'une variable réelle.

Tout d'abord, si f est une fonction numérique définie dans un voisinage d'un point $x_0 \in R$, et continue en ce point, il peut se faire que, lorsque x tend vers x_0 en restant $\neq x_0$, la fonction $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ait une limite égale à $+\infty$ ou à $-\infty$; on dit alors encore que f est dérivable au point x_0 et a pour dérivée en ce point $+\infty$ (resp. $-\infty$) ; si, en tout point x d'une partie ouverte A de R , la fonction f a une dérivée (finie ou infinie) $f'(x)$, la fonction f' (à valeurs dans $\overline{R}$) est encore appelée la fonction dérivée (ou simplement la dérivée) de f . On généralise de même les définitions de la dérivée à droite et de la dérivée à gauche.

Exemple.- Au point $x=0$, la fonction $x^{\frac{4}{3}}$ a une dérivée égale à $+\infty$, la fonction $|x|^{\frac{1}{3}}$ une dérivée à droite égale à $+\infty$ et une dérivée à gauche égale à $-\infty$.

Soit C le graphe ou courbe représentative $y=f(x)$ d'une fonction numérique finie f , dans le plan R^2. Si, en un point x_0 , f a une dérivée à droite finie, la demi-droite ayant pour origine le point $M_{x_0}=(x_0,f(x_0))$ et pour paramètres directeurs $(1,f'_d(x_0))$ est appelée demi-tangente à droite à la courbe C au point M_{x_0} ; lorsque $f'_d(x_0)=+\infty$ (resp. $f'_d(x_0)=-\infty$), on appelle encore ainsi la demi-droite d'origine M_{x_0} et de paramètres $(0,1)$ (resp. $(0,-1)$). On définit de même la demi-tangente à gauche au point M_{x_0} , lorsque'elle existe. Avec ces définitions, on vérifie aussitôt que l'angle que fait la demi-tangente à droite (resp. à gauche) avec l'axe des abscisses, est la limite de l'angle que fait avec cet axe la demi-droite d'origine M_{x_0} passant par le point $M_x=(x,f(x))$ de C , lorsque x tend vers x_0 en restant $> x_0$ (resp. $< x_0$) .

On peut dire aussi que la demi-tangente à droite (resp. à gauche est la limite de la demi-droite d'origine M_{x_0} passant par ~~#~~ M_x , en considérant sur l'ensemble des demi-droites de même origine, la topologie de l'espace quotient C^*/R^*_+ (Top.gén., chap.VIII, §2).

Si les deux demi-tangentes en un point M_{x_0} de C existent, elles ne sont opposées que lorsque f a une dérivée (finie ou non) au point x_0 ;

elles ne sont identiques que lorsque $f'_d(x_0)$ et $f'_s(x_0)$ sont infinies et de signes contraires. Dans les deux cas, on dit que la droite qui contient les deux demi-tangentes est la <u>tangente</u> à C au point M_{x_0} .

Lorsque la tangente en M_{x_0} existe, elle est la <u>limite</u> de la droite passant par M_{x_0} et M_x , lorsque x tend vers x_0 en restant $\neq x_0$, la topologie sur l'ensemble des droites passant par un même point étant celle de l'espace quotient C^*/R^* (<u>Top.gén.</u>, chap.VIII, § 2)

Les notions de tangente et de demi-tangente à une courbe représentative sont des cas particuliers de notions générales qui seront définies dans la partie de ce Traité consacré aux Variétés différentielles.

Les formules donnant la dérivée (resp. dérivée à droite ou à gauche) d'une somme, d'un produit de fonctions numériques dérivables, ou de l'inverse d'une fonction dérivable (prop.1,3 et 4) ainsi que la dérivée d'une fonction (numérique) composée (prop.5) sont encore valables lorsque les dérivées (resp. dérivées à droite ou à gauche) qui y figurent sont infinies, pourvu que toutes les expressions intervenant dans ces formules aient un sens (cf. <u>Top.gén.</u>, chap.IV, § 4, n°3). Enfin, dans la prop.7, si on suppose que f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) et continue dans $[x_0, b]$, et que $f'_d(x_0)=0$ la fonction réciproque g admet au point $y_0=f(x_0)$ une dérivée à droite (resp. une dérivée à gauche) égale à $+\infty$ (resp. à $-\infty$) ; si $f'_d(x_0)=+\infty$ (resp. $-\infty$), g admet une dérivée à droite (resp. une dérivée à gauche) égale à 0 .

<u>Exercices</u>.- 1) Soit f une fonction vectorielle d'une variable réelle, dérivable en un point x_0 . Montrer que le rapport $\frac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k}$ tend vers $f'(x_0)$ lorsque h et k tendent vers 0 <u>par valeurs</u> >0 .

Montrer que la fonction f , égale à $x^2 \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, à 0 pour x=0, est dérivable en tout point, mais que $\frac{f(y)-f(z)}{y-z}$ ne tend pas vers f'(0) lorsque y et z tendent vers 0 en restant distincts et > 0 .

2) Dans l'intervalle $[0,1]$, on définit par récurrence une suite de fonctions continues numériques (f_n), de la manière suivante : on prend $f_1(x)=x$; pour toute valeur de n , f_n est linéaire dans chacun des 3^n intervalles $\left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$ $(0 \leqslant k \leqslant 3^n-1)$; en outre, on prend

$$f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)$$

$$f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}}\right)$$

$$f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

Montrer que la suite (f_n) converge uniformément dans $0,1$ vers une fonction continue f , et que f n'a de dérivée finie en aucun point de $]0,1[$ (utiliser l'exerc.1).

3) Soit $\mathcal{C}(I)$ l'espace complet des fonctions numériques finies et continues, définies dans l'intervalle compact $I=[a,b]$ de R ($\mathcal{C}(I)$ étant muni de la topologie de la convergence uniforme). Soit A la partie de $\mathcal{C}(I)$ formée des fonctions x telles que pour un point au moins $t \in [a,b[$ (dépendant de x), x ait au point t une dérivée à droite finie. Montrer que dans $\mathcal{C}(I)$, A est un ensemble <u>maigre</u> (<u>Top.gén</u>. chap.IX, § 5,n°2), et par suite que son complémentaire, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions continues dans I , n'ayant de dérivée à droite finie en <u>aucun point</u> de I , est un sous-espace de Baire de $\mathcal{C}(I)$ (<u>Top.gén</u>.,chap.IX, § 5, n°3, prop.5).(Soit A_n l'ensemble des fonctions $x \in \mathcal{C}(I)$ telles que, pour une valeur de t au moins satisfaisant à $a \leqslant t \leqslant b-\frac{1}{n}$

(et dépendant de x), on ait $|x(t')-x(t)| \leqslant n|t'-t|$ pour tout t' tel que $t \leqslant t' \leqslant b$; montrer que chacun des A_n est un ensemble fermé <u>rare</u> dans $\mathscr{C}(I)$: on remarquera pour cela que, dans $\mathscr{C}(I)$, toute boule contient une fonction ayant une dérivée à droite bornée dans I , et d'autre part que, quels que soient $\varepsilon > 0$ et l'entier $m > 0$, il existe une fonction continue y ayant en tout point de $[a,b[$ une dérivée à droite, et telle que pour tout $t \in I$, $|y(t)| \leqslant \varepsilon$ et $|y'_d(t)| \geqslant m$) .

4) Soient E un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$, f une fonction vectorielle continue, définie dans un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans E et admettant en tout point de I une dérivée à droite et une dérivée à gauche .

a) Soit U un ensemble ouvert non vide dans E , A la partie de I formée des points x tels que $f'_d(x) \in U$. Etant donné un nombre $a > 0$, soit B la partie de I formée des points x tels qu'il existe au moins un y tel que $x-a \leqslant y < x$ et $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \in U$; montrer que l'ensemble B est ouvert et que $A \cap \complement B$ est dénombrable (remarquer que ce dernier ensemble est formé d'origines d'intervalles contigus à $\complement B$) . En déduire que l'ensemble des points $x \in A$ tels que $f'_s(x) \notin \bar{U}$ est dénombrable.

b) On suppose que E est un espace <u>normé</u> ; l'image de $f(I)$ dans E est alors un espace métrique ayant une base dénombrable, et il en est de même du sous-espace vectoriel fermé F engendré par $f(I)$, et qui contient $f'_d(I)$ et $f'_s(I)$. Déduire alors de a) que l'ensemble des points $x \in I$ tels que $f'_d(x) \neq f'_s(x)$ est dénombrable (si (U_m) est une base dénombrable de la topologie de F , remarquer que pour deux points distincts a,b de F , il existe deux ensembles U_p, U_q sans points communs et tels que $a \in U_p$ et $b \in U_q$) .

c) On prend pour E l'espace produit $\mathbb{R}^I$ (espace des applications de I dans $\mathbb{R}$, muni de la topologie de la convergence simple), et pour tout $x \in I$, on désigne par $g(x)$ l'application $t \to |x-t|$ de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in I$, on a $g'_d(x) \neq g'_g(x)$.

5) Soit f une fonction vectorielle continue définie dans un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans un espace normé E sur $\mathbb{R}$, et admettant en tout point de I une dérivée à droite.

a) Montrer que l'ensemble des points $x \in I$ tels que f'_d soit bornée dans un voisinage de x est un ensemble ouvert partout dense dans I (utiliser le th.2 de Top.gén., chap.IX, § 5).

b) Montrer que l'ensemble des points de I où f'_d est continue est le complémentaire d'un ensemble maigre dans I (cf.Top.gén., chap.IX, § 5, exerc.14).

6) Soit (r_n) la suite des nombres rationnels appartenant à $[0,1]$, rangées dans un certain ordre. Montrer que la fonction
$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x-r_n)^{1/3}$ est continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R}$, et admet une dérivée infinie en tout point r_n (pour montrer que f est dérivable en un point x distinct des r_n, distinguer deux cas suivant que la série de terme général
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(x-r_n)^{-2/3}$ a pour somme $+\infty$ ou est convergente ; dans le second cas, remarquer que pour tout $x \neq 0$ et tout $y \neq x$, on a $0 \leqslant (y^{1/3}-x^{1/3})(y-x) \leqslant 4/3x^{2/3}$).

7) Soit f une fonction scalaire définie dans un voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, et dérivable à droite en ce point. Soit g une fonction vectorielle définie dans un voisinage du point $y_0=f(x_0)$.

a) Si $f'_d(x_0) > 0$ (resp. $f'_d(x_0) < 0$) et si g admet une dérivée à droite (resp. une dérivée à gauche) au point y_0, la fonction composée $g \circ f$ admet au point x_0 une dérivée à droite égale à

$g'_d(f(x_0))f'_d(x_0)$ (resp. $g'_s(f(x_0))f'_d(x_0)$).

b) Si $f'_d(x_0)=0$ et si, au point y_0, g admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche, $g \circ f$ admet au point x_0 une dérivée à droite égale à 0 .

§ 2. Le théorème des accroissements finis.

Dans les propositions démontrées au § 1, hypothèses et conclusions ont un caractère <u>local</u> : elles ne font intervenir que des propriétés des fonctions considérées dans un voisinage <u>arbitrairement petit</u> d'un point fixe. Le théorème des accroissements finis est d'un caractère tout différent : d'une majoration de la <u>dérivée</u> d'une fonction valable <u>en tous les points d'un intervalle</u> il permet de déduire une majoration pour la différence des valeurs de la <u>fonction</u> aux extrémités de l'intervalle.

<u>1. Le théorème des accroissements finis pour les fonctions numériques.</u>

THEOREME 1 (théorème des accroissements finis).- <u>Soit f une fonction numérique finie et continue dans un intervalle fermé</u> $I=[a,b]$ <u>et admettant une dérivée à droite</u> (finie ou non) <u>en tous les points du complémentaire</u> (par rapport à I) <u>d'une partie dénombrable</u> A <u>de</u> I . <u>Si</u> m <u>et</u> M <u>sont les bornes inférieure et supérieure de</u> f'_d <u>dans</u> $I \cap \complement A$, <u>on a</u>

$$(1) \qquad m(b-a) < f(b)-f(a) < M(b-a)$$

<u>sauf lorsque f est une fonction linéaire, auquel cas on a</u> $m=M=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Démontrons d'abord les inégalités (1) en y remplaçant les signes $<$ par $\leq$. Il suffit de prouver que $f(b)-f(a) \leq M(b-a)$, l'autre inégalité s'en déduisant par le changement de f en -f . Or, cette inégalité est évidente si $M=+\infty$; bornons-nous donc au cas où $M<+\infty$. Soit k un nombre fini quelconque $>M$, $\varepsilon>0$ un nombre arbitraire ; nous désignerons par (a_n) une suite obtenue en rangeant dans un ordre quelconque les points de l'ensemble dénombrable $A \cup \{a\}$. Cela posé, désignons par J l'ensemble des points y I tels que, pour tout x tel que $a \leqslant x \leqslant y$ on ait

$$(2) \qquad f(x)-f(a) \leqslant k(x-a)+\varepsilon \sum_{a_n<x} \frac{1}{2^n}$$

la somme du second membre étant étendue à l'ensemble des indices n tels que $a_n \leqslant x$. Nous allons démontrer que l'on a $J=I$.

Il est clair que J n'est pas vide, puisque $a \in J$; d'autre part, la définition de cet ensemble montre que si $y \in J$, on a $x \in J$ pour $a \leqslant x \leqslant y$, donc J est un <u>intervalle</u> d'origine a (<u>Top.gén</u>. chap.IV, § 2, prop.1) ; soit c son extrémité. On a $c \in J$, car pour tout $x < c$, on a l'inégalité (2) et a fortiori

$$f(x)-f(a) \leqslant k(x-a)+\varepsilon \sum_{a_n<c} \frac{1}{2^n}$$

d'où, en faisant tendre x vers c dans cette inégalité, résulte (en raison de la continuité de f) que c satisfait à (2).

Cela étant, nous allons voir qu'on a nécessairement $c=b$. En effet, si on avait $c<b$, ou bien $f'_d(c)$ existerait, et comme $k > M \geqslant f'_d(c)$ par hypothèse, il existerait un y tel que $c<y \leqslant b$ et que l'on ait, pour $c \leqslant x \leqslant y$,

$$f(x)-f(c) \leqslant k(x-c)$$

d'où en tenant compte de (2) où x est remplacé par c

$$f(x)-f(a) \leqslant k(x-a) + \varepsilon \sum_{a_n<c} \frac{1}{2^n} \leqslant k(x-a)+ \varepsilon \sum_{a_n<x} \frac{1}{2^n}$$

ce qui entraînerait $y \in J$, contrairement à la définition de c. Ou bien on aurait $c=a_k$ pour un indice k ; comme f est continue au point a_k, il existerait alors un y tel que $c< y \leqslant b$ et que l'on ait, pour $c \leqslant x \leqslant y$

$$f(x)-f(c) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^k}$$

d'où, en tenant compte de (2) où x est remplacé par c

$$f(x)-f(a)\leqslant k(c-a)+\varepsilon\sum_{a_n<x}\frac{1}{2^n}\leqslant k(x-a)+\varepsilon\sum_{a_n<x}\frac{1}{2^n}$$

ce qui entraîne de nouveau contradiction ; on a donc bien $c=b$, et par suite

$$(3)\qquad f(b)-f(a)\leqslant k(b-a)+\varepsilon\sum_{a_n<b}\frac{1}{2^n}\leqslant k(b-a)+\varepsilon$$

Comme $\varepsilon>0$ et $k>M$ sont arbitraires, on déduit de (3) que l'on a $f(b)-f(a)\leqslant M(b-a)$.

Supposons maintenant que f ne soit pas linéaire ; en remplaçant au besoin $f(x)$ par $f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, on peut toujours supposer que $f(a)=f(b)$. Il existe par hypothèse un point $c\in\,]a,b[$ tel que $f(c)\neq f(a)$. Supposons par exemple que $f(c)>f(a)$. En appliquant l'inégalité qui vient d'être démontrée aux intervalles $[a,c]$ et $[c,b]$, il vient $M\geqslant\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0$ et $m\leqslant\frac{f(b)-f(c)}{b-c}<0$.

C.Q.F.D.

<u>Remarques</u>.- 1) Le th.1 reste valable quand on remplace dans son énoncé les mots "dérivée à droite" par "dérivée à gauche".

2) L'hypothèse de la <u>continuité</u> de f dans l'intervalle fermé I (et non seulement sa <u>continuité à droite</u> en tout point de $[a,b[$) est essentielle pour la validité du th.1 (cf.exerc. 2).

3) Les inégalités (1) prouvent qu'une fonction continue ne peut avoir une dérivée à droite égale à $+\infty$ en tout point d'un intervalle (ou égale à $-\infty$ en tout point d'un intervalle).

Le th.1 entraîne la proposition suivante, en apparence plus générale :

PROPOSITION 1.- <u>Soient</u> f <u>et</u> g <u>deux fonctions numériques finies et continues dans un intervalle fermé</u> $I=[a,b]$, <u>et admettant une dérivée à droite</u> (finie ou non) <u>en tous les points du complémentaire</u> (par rapport à I) <u>d'une partie dénombrable</u> A <u>de</u> I . <u>On suppose en outre que</u> $f'_d(x)$ <u>et</u> $g'_d(x)$ <u>ne peuvent devenir infinis simultanément qu'aux points</u>

d'une partie dénombrable de I et qu'il existe deux nombres finis M,m , tels que

$$(4) \qquad m.g'_d(x) \leqslant f'_d(x) \leqslant M.g'_d(x)$$

en tout point de $I \cap \complement A$ (en remplaçant $M.g'_d(x)$ (resp. $m.g'_d(x)$) par 0 si $M=0$ (resp. $m=0$) et $g'_d(x)=\pm\infty$). Dans ces conditions, on a

$$(5) \qquad m(g(b)-g(a)) < f(b)-f(a) < M(g(b)-g(a))$$

sauf lorsqu'on a $f(x)=M.g(x)+k$ ou $f(x)=m.g(x)+k$ (k constante) pour tout $x \in I$.

Il suffit d'appliquer le th.1 aux fonctions $M.g-f$ et $m.g-f$, qui en vertu des hypothèses faites, ont une dérivée à droite sauf aux points d'une partie dénombrable de I .

Remarque.- La prop.1 est inexacte si on suppose que f'_d et g'_d peuvent devenir simultanément infinis aux points d'une partie non dénombrable de I (cf.exerc. 3).

Pour les fonctions numériques dérivables en tout point de l'intérieur de I , on a le complément suivant du th.1 :

PROPOSITION 2 ("théorème de Rolle").- Soit f une fonction numérique finie et continue dans un intervalle fermé $I=[a,b]$, admettant en tout point de $]a,b[$ une dérivée (finie ou non) et telle que $f(a)=f(b)$. Il existe alors un point c (au moins) de $]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

La proposition est évidente si f est constante ; sinon, elle prend par exemple des valeurs $>f(a)$, et atteint donc sa borne supérieure (Top.gén.,chap.IV, § 6,th.1) en un point c intérieur à I ; en ce point, on a $f(c+h)-f(c) \leqslant 0$ et $f(c-h)-f(c) \leqslant 0$ pour $h>0$, d'où $f'_d(c) \leqslant 0$ et $f'_s(c) \geqslant 0$; comme f est supposée dérivable au point c , on a $f'(c)=0$.

COROLLAIRE.- Soit f une fonction numérique finie et continue dans $[a,b]$, et admettant en tout point de $]a,b[$ une dérivée (finie ou non). Il existe alors un point c (au moins) de $]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Il suffit d'appliquer la prop.2 à $f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

2. Le théorème des accroissements finis pour les fonctions vectorielles.

THEOREME 2.- Soit $\mathbf{f}$ une fonction vectorielle définie et continue dans $I=[a,b]$ prenant ses valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'aux points du complémentaire par rapport à I d'une partie dénombrable A de I, $\mathbf{f}'_d(x)$ existe et appartient à une partie convexe fermée D de E. Dans ces conditions, $\frac{\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)}{b-a}$ appartient à D. En outre, $\frac{\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)}{b-a}$ ne peut appartenir à la coque de D que si $\mathbf{f}'_d(x)$ appartient à l'intersection de D et de tous les hyperplans d'appui de D au point $\frac{\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)}{b-a}$, pour tout x appartenant à $I\cap\complement A$.

En effet, soit $g(\mathbf{x})=m$ l'équation d'un hyperplan d'appui quelconque H de D (g forme linéaire), et supposons que pour tout $\mathbf{x}\in D$ on ait $g(\mathbf{x})\geqslant m$; la fonction numérique $g\circ\mathbf{f}$ a en tout point y de $I\cap\complement A$ une dérivée à droite égale à $g(\mathbf{f}'_d(y))$, qui est $\geqslant m$ par hypothèse ; donc (th.1), on a $g(\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a))\geqslant m(b-a)$, l'égalité n'étant possible que si $\mathbf{f}'_d(y)$ appartient à l'hyperplan H pour tout $y\in I\cap\complement A$, auquel cas $\frac{\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)}{b-a}$ appartient aussi à H ; d'où le théorème (en supposant que D admet des points intérieurs ce qu'on peut toujours faire, en remplaçant au besoin E par une variété linéaire contenue dans E).

COROLLAIRE 1.- Soit $\mathbf{f}$ une fonction vectorielle définie et continue dans $I=[a,b]$, prenant ses valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Soit p une fonction positive, positivement homogène et convexe dans E ; soit φ une fonction numérique continue, croissante et non constante dans I , admettant une dérivée à droite (finie ou non) aux points du complémentaire par rapport à I d'un ensemble dénombrable A . Si, pour tout $y \in I \cap \complement A$ $f'_d(y)$ existe et que

$$(6) \qquad p(f'_d(y)) \leqslant \varphi'_d(y)$$

on a

$$(7) \qquad p(f(b)-f(a)) \leqslant \varphi(b)-\varphi(a)$$

En outre, les deux membres de (7) ne peuvent être égaux que si pour tout $y \in I \cap \complement A$ tel que $\varphi'_d(y) \neq 0$, $f'_d(y)/\varphi'_d(y)$ appartient à l'intersection de l'ensemble convexe D défini par $p(x) \leqslant 1$ et de tous les hyperplans d'appui H de D au point $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$, et si, pour tout $y \in I \cap \complement A$ tel que $\varphi'_d(y)=0$, $f'_d(y)$ appartient à l'intersection des hyperplans parallèles aux hyperplans H et passant par l'origine.

En effet, soit $g(x)=m$ (g forme linéaire) l'équation d'un hyperplan d'appui de D , telle que $g(x) \geqslant m$ pour tout $x \in D$; si $x \in D$ est tel que $p(x)=0$, on a $\lambda x \in D$ pour tout $\lambda \geqslant 0$, donc $\lambda g(x) \geqslant m$ pour tout $\lambda \geqslant 0$, ce qui implique $g(x) \geqslant 0$. Cela étant, l'inégalité (6) montre que, pour $\varphi'_d(y) \neq 0$, $f'_d(y)/\varphi'_d(y)$ appartient à D , et si $\varphi'_d(y)=0$, $p(f'_d(y))=0$ donc, dans tous les cas, on a $g(f'_d(y)) \geqslant m\varphi'_d(y)$; par application de la prop.1, on a donc $g(f(b)-f(a)) \geqslant m(\varphi(b)-\varphi(a))$. En outre les deux membres de cette dernière inégalité ne peuvent être égaux que si $g(f'_d(y))=m\varphi'_d(y)$ pour tout $y \in I \cap \complement A$; d'où le corollaire.

On appliquera surtout le cor.1 lorsque p est une norme sur l'espace vectoriel E :

COROLLAIRE 2.- Soient $\|x\|$ une norme sur E , φ une fonction continue croissante et non constante dans I , admettant une dérivée à droite aux points de $I \cap \complement A$. Si, pour tout $y \in I \cap \complement A$,

(8) $$\| f_d'(y) \| \leq \varphi_d'(y)$$

on a

$$\| f(b) - f(a) \| \leq \varphi(b) - \varphi(a)$$

En outre, si $\|x\|$ est la norme euclidienne dans R^n, les deux membres de (9) ne peuvent être égaux que s'il existe un vecteur fixe a tel que $\|a\| = 1$ et $f_d'(y) = a . \varphi_d'(y)$ pour tout $y \in I \cap \complement A$.

En effet, l'intersection de la boule B_n et d'un quelconque de ses hyperplans d'appui se réduit à un point.

COROLLAIRE 3.- Pour qu'une fonction vectorielle continue dans un intervalle ouvert I soit constante, il suffit qu'elle ait une dérivée à droite nulle en tous les points du complémentaire (par rapport à I) d'une partie dénombrable de I .

Le th.2 s'étend de la manière suivante aux fonctions vectorielles d'une variable complexe :

PROPOSITION 3.- Soit f une fonction vectorielle d'une variable complexe, définie, continue et dérivable dans une partie ouverte convexe A du corps C, à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie sur C. On suppose que $f'(z)$ appartient à une partie convexe fermée D de E pour tout $z \in A$. Dans ces conditions, pour tout couple de points a,b de A , $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ appartient à D .

Posons en effet $g(t) = \frac{1}{b-a} f(a+t(b-a))$ pour $0 \leq t \leq 1$; comme $g'(t) = f'(a+t(b-a))$, l'application du th.2 à la fonction g donne aussitôt la proposition.

En appliquant de même le cor.2 du th.2, on voit que :

COROLLAIRE 1.- Si A est un ensemble ouvert convexe tel que $\|f'(z)\| \leq m$ pour tout $z \in A$, on a $\| f(b) - f(a) \| \leq m.|b-a|$ pour tout couple de points a,b de A .

COROLLAIRE 2.- Pour qu'une fonction vectorielle f d'une variable complexe, définie dans un domaine A , soit constante, il suffit qu'elle ait une dérivée nulle en tout point de A .

En effet, soit a un point quelconque de A ; l'ensemble B des points de A où $f(z)=f(a)$ est fermé puisque f est continue ; il est aussi ouvert par application du cor.1 (avec $m=0$) à un voisinage ouvert convexe contenu dans A , d'un point quelconque de B ; donc il est identique à A .

Remarque.- La démonstration du th.1 fait intervenir de façon essentielle les propriétés topologiques particulières au corps $\mathbb{R}$; on peut en effet donner des exemples de corps valués K pour lesquels le cor.3 du th.2 (énoncé pour la dérivée (au lieu de la dérivée à droite), et pour une fonction scalaire) est inexact (cf. exerc. 1).

3. Continuité des dérivées.

PROPOSITION 4.- Soit f une fonction à valeurs dans un espace vectorel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$, définie et continue dans un intervalle ouvert borné $I=]a,b[$, et admettant une dérivée à droite en tous les points du complémentaire (par rapport à I) d'une partie dénombrable A de I . si la fonction f'_d admet une limite c au point a (resp. b) lorsque x tend vers a (resp. b) en restant dans $I \cap \complement A$, f peut être prolongée par continuité au point a (resp. b), et la fonction ainsi prolongée admet au point a (resp. b) une dérivée à droite (resp. à gauche) égale à c .

Bornons-nous à faire la démonstration dans le cas où f'_d admet une limite c lorsque x tend vers a en restant dans $I \cap \complement A$. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h > 0$ tel que pour $a < x \leq a+h$ et $x \notin A$, on ait $\| f'_d(x) - c \| \leq \varepsilon$; en appliquant le cor.2 du th.2

à la fonction $g(x)=f(x)-\mathbb{C}x$ dans un intervalle $[y,z]$ tel que $a<y<z\leqslant a+h$, il vient

(9 bis) $$\|f(z)-f(y)-\mathbb{C}(z-y)\|\leqslant\varepsilon(z-y)$$

d'où en premier lieu $\|f(z)-f(y)\|\leqslant(\|\mathbb{C}\|+\varepsilon)(z-y)$, ce qui montre (critère de Cauchy) que f a une limite à droite d au point a ; faisant tendre y vers a dans (9 bis), on a ensuite

$$\left\|\frac{f(z)-d}{z-a}-\mathbb{C}\right\|\leqslant\varepsilon$$

pour tout z tel que $a<z\leqslant a+h$, ce qui prouve que $\mathbb{C}$ est la dérivée à droite au point de la fonction f prolongée par continuité en ce point.

Remarque.- Pour une fonction scalaire f, supposée continue à droite au point a, la prop.4 est encore vraie si la limite à droite de f'_d au point a est infinie, comme on le voit par un raisonnement tout à fait analogue basé sur le th.1 .

COROLLAIRE.- Si f est dérivable à droite en tout point d'un voisinage de x_0, et si f'_d est continue au point x_0, f est dérivable au point x_0.

PROPOSITION 5.- Soit f une fonction vectorielle définie, continue et dérivable à droite dans un intervalle ouvert I ; quels que soient les points x_0, x, y de I, on a (en supposant par exemple que $x<y$)

(10) $$\|f(y)-f(x)-f'_d(x_0)(y-x)\|\leqslant(y-x).\sup_{x<z<y}\|f'_d(z)-f'_d(x_0)\|$$

Il suffit d'appliquer le cor.2 du th.2 à la fonction $f(x)-f'_d(x_0)x$.

COROLLAIRE.- Soit f une fonction vectorielle d'une variable complexe, définie et dérivable dans un ensemble ouvert convexe $D\subset\mathbb{C}$; quels que soient les points x_0, x et y dans D, on a

(11) $$\|f(y)-f(x)-f'(x_0)(y-x)\|\leqslant|y-x|.\sup_{z\in D}\|f'(z)-f'(x_0)\|.$$

Il suffit ici d'appliquer le cor.2 du th.2 à la fonction $g(t)=f(x+t(y-x))-f'(x_0)(y-x)t$ dans l'intervalle $[0,1]$.

PROPOSITION 6.- <u>Soit f une fonction vectorielle définie, continue et dérivable à droite dans un voisinage de x_0 ; pour que f'_d soit continue au point x_0, il faut et il suffit que</u>

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0),\,x\neq y} \frac{f(y)-f(x)-f'_d(x_0)(y-x)}{y-x} = 0 .$$

La prop.5 montre que cette condition est <u>nécessaire</u>, car si f'_d est continue au point x_0, $\sup\limits_{x<z<y} \| f'_d(z)-f'_d(x_0)\|$ tend vers 0 quand x et y tendent vers x_0. La condition est aussi <u>suffisante</u> : supposons en effet que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $h>0$ tel que les relations $|x-x_0|\leq h$, $|y-x_0|\leq h$ entraînent

$$\| f(y)-f(x)-f'_d(x_0)(y-x)\| \leq \varepsilon\, |y-x| \tag{12}$$

Pour tout x tel que $|x-x_0|\leq h$, il existe $k>0$ (dépendant de ε et de x) tel que la relation $x<y<x+k$ entraîne

$$\| f(y)-f(x)-f'_d(x)(y-x)\| \leq \varepsilon\, |y-x|$$

Tenant compte de la relation (12), on voit que l'on a

$$\| f'_d(x)-f'_d(x_0)\| \leq 2\varepsilon$$

pour $|x-x_0|<h$, ce qui prouve la continuité de f'_d au point x_0.

<u>Exercices</u>.- 1) On sait que, dans le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques (cf. <u>Alg.</u>, chap.VI, et <u>Top.gén.</u>, chap.III, § 5), tout entier p-adique $x\in\mathbb{Z}_p$ admet un développement et un seul de la forme $x=a_0+a_1p+a_2p^2+\ldots+a_np^n+\ldots$, où les a_i sont des entiers rationnels tels que $0\leq a_i\leq p-1$ pour tout i. Pour tout $x\in\mathbb{Z}_p$, on pose $f(x)=a_0+a_1p^2+a_2p^4+\ldots+a_np^{2n}+\ldots$; montrer que, dans $\mathbb{Z}_p$, f est une fonction continue, qui n'est constante dans le voisinage d'aucun point, et qui admet en tout point une dérivée <u>nulle</u>.

2) Pour tout nombre x de l'intervalle $[0,1[$, soit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n}$ le développement dyadique propre (<u>Top.gén.</u>, chap.IV, § 8, n°5) de x ;

on pose $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n . 2^{-2n}$. Montrer que f est continue à droite en tout point de $[0,1[$, n'est constante dans aucun intervalle, et admet en tout point de $[0,1[$ une dérivée à droite nulle.

3) a) Soit K l'ensemble triadique de Cantor (Top.gén., chap.IV, §2, n°5) $I_{n,p}$ les 2^n intervalles contigus à K et de longueur $1/3^{n+1}$ $(1 \leqslant p \leqslant 2^n)$, $K_{n,p}$ les 2^{n+1} intervalles fermés de longueur $1/3^{n+1}$ dont la réunion est le complémentaire de la réunion des $I_{m,p}$ tels que $m \leqslant n$. Soit a un nombre tel que $1 < a < 3/2$; pour tout n, on désigne par f_n la fonction continue croissante dans $[0,1]$, égale à 0 pour $x=0$, constante dans chacun des intervalles $I_{m,p}$ tels que $m \leqslant n$, linéaire dans chacun des intervalles $K_{n,p}$ $(1 \leqslant p \leqslant 2^{n+1})$ et telle que $f'_d(x)=a^{n+1}$ dans chacun de ces derniers intervalles. Montrer que la série de terme général f_n est uniformément convergente dans $[0,1]$, a pour somme une fonction f qui admet partout une dérivée à droite dans $[0,1[$, et que l'on a $f'_d(x)=+\infty$ en tout point de K distinct des origines des intervalles $I_{n,p}$.

b) Soit g une application continue croissante de $[0,1]$ sur lui-même, constante dans chacun des intervalles $I_{n,p}$ (cf. Top.gén., chap.IV, §8, exerc.9 et 16b)). Si $h=f+g$, montrer que h admet une dérivée à droite égale à $f'_d(x)$ en tout point de $[0,1[$.

4) Soit f une fonction scalaire finie et continue dans un intervalle compact $[a,b]$, et admettant en tout point de l'intervalle ouvert $]a,b[$ une dérivée à droite. Soient m et M les bornes inférieure et supérieure (finies ou non) de $f'_d(x)$ dans $]a,b[$.

a) Montrer que, lorsque x et y parcourent $[a,b]$ de sorte que $x \neq y$, l'ensemble des valeurs de $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ est identique à l'intervalle $]m,M[$ si f n'est pas linéaire, (se ramener à prouver que si f'_d prend deux valeurs de signes contraires en deux points c et d de $]a,b[$, il existe deux points distincts de l'intervalle $]c,d[$ où f prend la même valeur).

b) Si f admet en outre en tout point de $]a,b[$ une dérivée à gauche, les bornes inférieures (resp. supérieures) de f'_d et de f'_s dans $]a,b[$ sont égales.

c) En déduire que si f est dérivable dans $]a,b[$, l'image par f' de tout intervalle contenu dans $]a,b[$ est un intervalle, et par suite est <u>connexe</u> (utiliser a)).

5) Soit f l'application vectorielle de $I=[0,1]$ dans R^3 définie comme suit : pour $0\leqslant t\leqslant \frac{1}{4}$, $f(t)=(-4t,0,0)$; pour $\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}$, $f(t)=(-1,4t-1,0)$; pour $\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant \frac{3}{4}$, $f(t)=(-1,1,4t-2)$; enfin, pour $\frac{3}{4}\leqslant t\leqslant 1$, $f(t)=(4t-1,1,1)$. Montrer que l'ensemble convexe engendré par l'ensemble $f'_d(I)$ n'est pas identique à l'adhérence de l'ensemble des valeurs de $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ lorsque (x,y) parcourt l'ensemble des couples de points distincts de I (cf. exerc.4a)).

6) Dans l'intervalle $I=[-1,+1]$, on considère la fonction vectorielle f , à valeurs dans R^2, définie de la manière suivante : $f(t)=(0,0)$ pour $-1\leqslant t\leqslant 0$; $f(t)=(t^2\sin\frac{1}{t},\ t^2\cos\frac{1}{t})$ pour $0<t\leqslant 1$. Montrer que f est dérivable dans $]-1,+1[$, mais que l'image de cet intervalle par f' n'est pas un ensemble connexe dans R^2 (cf. exerc. 4c)).

7) Soit f une fonction vectorielle continue définie dans un intervalle ouvert $I\subset R$, à valeurs dans un espace normé E sur R , et admettant en tout point de I une dérivée à droite. Montrer que l'ensemble des points de I où f admet une dérivée est le complémentaire d'un ensemble maigre dans I (utiliser l'exerc. 5b) du §1 , et les prop.4 et 5 .).

8) On considère, dans l'intervalle $[0,1]$, une famille $(I_{n,p})$ d'intervalles ouverts deux à deux sans point commun, définie par récurrence comme suit : l'entier n prend toutes les valeurs $\geqslant 0$; pour chaque valeur de n, l'entier p prend les valeurs $1,2,\ldots,2^n$; on a $I_{0,1}=\left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[$; si J_n est la réunion des intervalles $I_{m,p}$ correspondant aux nombres $m \leqslant n$ le complémentaire de J_n est réunion de 2^{n+1} intervalles fermés $K_{n,p}$ $(1 \leqslant p \leqslant 2^{n+1})$ deux à deux sans point commun. Si $K_{n,p}=[a,b]$, on prend alors pour $I_{n+1,p}$ l'intervalle ouvert d'extrémités $b-\frac{b-a}{3}(1+\frac{1}{2^n})$ et $b-\frac{b-a}{3.2^n}$. Soit E l'ensemble parfait complémentaire de la réunion des $I_{n,p}$ par rapport à $[0,1]$. Définir dans $[0,1]$ une fonction scalaire continue f qui admet en tout point de $[0,1[$ une dérivée à droite, mais qui n'a pas de dérivée à gauche aux points de l'ensemble non dénombrable des points de E distincts des extrémités d'intervalles contigus à E (cf.exerc.7) (prendre $f(x)=0$ dans E, et définir convenablement f dans chacun des intervalles $I_{n,p}$ de sorte que pour tout $x \in E$, il y ait des points $y < x$ n'appartenant pas à E, arbitrairement voisins de x et tels que $(f(y)-f(x))/(y-x)=-1$).

9) Soient f et g deux fonctions numériques finies et continues dans $[a,b]$, et ayant chacune une dérivée finie dans $]a,b[$; montrer qu'il existe c tel que $a<c<b$, et que

$$\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & g(b)-g(a) \\ f'(c) & g'(c) \end{vmatrix} = 0 .$$

10) Soient f une fonction scalaire dérivable dans un intervalle ouvert I, g sa dérivée dans I, $[a,b]$ un intervalle compact contenu dans I ; on suppose que g est dérivable dans l'intervalle ouvert $]a,b[$ (mais pas nécessairement continue à droite (resp. à gauche) au point a (resp. b)) ; montrer qu'il existe c tel que $a<c<b$ et que $g(b)-g(a)=(b-a)g'(c)$ (utiliser l'exerc. 4c)).

11) On appelle <u>dérivée symétrique</u> d'une fonction vectorielle f en un point x_0 intérieur à l'intervalle où est définie f, la limite (si elle existe) de $\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ lorsque h tend vers 0 en restant >0 ; on la note $f'_m(x_0)$.

a) Généraliser à la dérivée symétrique des règles de calcul établies au §1 pour la dérivée (ou la dérivée à droite ou à gauche)

b) Montrer que le th.1 est encore vrai quand on y remplace les mots "dérivée à droite" par "dérivée symétrique".

§3. Dérivées d'ordre supérieur.

1. Dérivées d'ordre n.

Soit f une fonction vectorielle d'une variable réelle, continue et dérivable dans un intervalle ouvert I. Si la dérivée f' existe dans un voisinage de $x_0 \in I$, et est dérivable au point x_0, sa dérivée est appelée la <u>dérivée seconde</u> de f au point x_0, et se note $f''(x_0)$ ou $D^2 f(x_0)$. Si cette dérivée seconde existe en tout point de I (ce qui implique que f' existe et est continue dans I), $x \to f''(x)$ est une fonction vectorielle qu'on désigne par la notation f'' ou $D^2 f$. Par récurrence, on définit de même la <u>dérivée n-ème</u> (ou <u>dérivée d'ordre n</u>) de f, qu'on note $f^{(n)}$ ou $D^n f$: par définition, elle a pour valeur en un point $x_0 \in I$ la dérivée de la fonction $f^{(n-1)}$ au point x_0 : cette définition suppose donc l'existence de <u>toutes</u> les dérivées $f^{(k)}$ d'ordre $k \leq n-1$ dans un <u>voisinage</u> de x_0, et la dérivabilité de $f^{(n-1)}$ au point x_0.

On dira que f est <u>n fois dérivable</u> au point x_0 (resp. dans un intervalle ouvert) si elle admet une dérivée n-ème en ce point (resp. dans cet intervalle).

Par récurrence sur m , on voit aussitôt que

(1) $$D^m(D^n f) = D^{m+n} f$$

lorsque le second membre est défini.

PROPOSITION 1.- L'ensemble des fonctions vectorielles définies dans un ensemble ouvert $A \subset \mathbf{R}$, prenant leurs valeurs dans un même espace vectoriel E , et admettant une dérivée n-ème dans A , est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, et $f \to D^n f$ est une application linéaire (homogène) de cet espace dans l'espace vectoriel des applications de A dans $\mathbf{R}$.

On a donc les formules

(2) $$D^n(f+g) = D^n f + D^n g$$

(3) $$D^n(f\,a) = D^n f . a$$

lorsque f et g ont une dérivée n-ème dans A (a constante).

PROPOSITION 2 ("formule de Leibniz").- Soient E,F,G trois espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbf{R}$, $(x,y) \to [x.y]$ une application bilinéaire de $E \times F$ dans G . Si f (resp. g) est définie dans un ensemble ouvert $A \subset \mathbf{R}$, prend ses valeurs dans E (resp. F) et admet une dérivée n-ème dans I , $[f.g]$ admet dans I une dérivée n-ème donnée par la formule

(4) $$D^n [f.g] = [f^{(n)}.g] + \binom{n}{1} [f^{(n-1)}.g'] + \ldots + \binom{n}{p} [f^{(n-p)}.g^{(p)}] + \ldots + [f.g^{(n)}]$$

Les formules (2),(3) et (4) se démontrent aisément par récurrence sur n (compte tenu de la rélation $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ entre coefficients binomiaux, pour la formule de Leibniz).

On vérifie de même la formule suivante (où les hypothèses sont les mêmes que dans la prop.2) :

$$(5)\quad [f^{(n)}\cdot g]+(-1)^{n-1}[f\cdot g^{(n)}] \; 57 = D\big([f^{(n-1)}\cdot g]-[f^{(n-2)}\cdot g']+[f^{(n-3)}\cdot g'']-\dots + (-1)^{n-1}[f\cdot g^{(n-1)}]\big)$$

Les propositions précédentes ont été énoncées pour des fonctions n fois dérivables dans un intervalle ; nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les propositions analogues pour les fonctions n fois dérivables en un point. On peut aussi, de façon évidente, définir la <u>dérivée n-ème à droite</u> (resp. à gauche) d'une fonction vectorielle continue à droite en un point, et aussi considérer, pour les fonctions scalaires, des dérivées n-èmes à droite (ou à gauche ayant des valeurs <u>infinies</u> ; nous laissons également des généralisations au lecteur.

2. Formule de Taylor.

Soit f une fonction vectorielle définie dans un intervalle ouvert I à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$; l'existence de la dérivée de f en un point $a \in I$ signifie que l'on a

$$(6)\qquad \lim_{x\to a,\, x\neq a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a} = 0$$

autrement dit, que f est "approximativement égale" à une fonction <u>linéaire</u> au voisinage de a (cf. chap. IV, où cette notion est développée de façon générale). Nous allons voir que l'existence de la <u>dérivée d'ordre n</u> de f au point a entraîne de la même manière que f est "approximativement égale" à un <u>polynome en x, de degré n</u>, à coeffi- dans E (cf. <u>Top. gén.</u>, chap. X, § 4), au voisinage de a. De façon précise :

THEOREME 1.- <u>Si la fonction f admet une dérivée n-ème au point a on a</u>

$$(7)\qquad \lim_{x\to a,\, x\neq a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)\frac{(x-a)}{1!}-f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}-\dots-f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}}{(x-a)^n} = 0$$

Le théorème est vrai pour $n=1$; supposons-le démontré pour les fonctions admettant une dérivée $(n-1)$-ème au point a. On peut l'appliquer à la dérivée f' de f ; pour tout $\varepsilon>0$, il existe donc $h>0$ tel que, si on pose

$$g(x)=f(x)-f(a)-f'(a)\frac{(x-a)}{1!}-f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}-\dots-f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

on ait, pour $|y-a|\leqslant h$

$$\|g'(y)\|=\|f'(y)-f'(a)-f''(a)\frac{(y-a)}{1}-\dots-f^{(n)}(a)\frac{(y-a)^{n-1}}{(n-1)!}\|\leqslant \varepsilon h^{n-1}$$

Appliquons le th. des accroissements finis (§ 2, cor. 2 du th. 2) dans l'intervalle d'extrémités a,x (avec $|x-a|\leqslant h$), à la fonction g ; il vient $\|g(x)\|\leqslant \varepsilon h^n$, ce qui démontre le théorème.

On peut donc écrire

$$(8)\quad f(x)=f(a)+f'(a)\frac{(x-a)}{1!}+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\dots+f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}+u(x)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

où $u(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers a ; cette formule est dite <u>formule de Taylor d'ordre n</u>, relative au point a, et le second membre de (8) est appelé le <u>développement de Taylor d'ordre</u> n de la fonction f au point a. Le dernier terme $r_n(x)=u(x)\frac{(x-a)^n}{n!}$ est appelé le <u>reste</u> de la formule de Taylor d'ordre n.

Lorsque f admet une <u>dérivée d'ordre</u> $n+1$ dans l'intervalle I, on peut avoir en fonction de cette dérivée $(n+1)$-ème une borne supérieure pour $\|r_n(x)\|$ dans I :

PROPOSITION 3.- <u>Si</u> $\|f^{(n+1)}(x)\|\leqslant M$ <u>dans</u> I, <u>on a</u>

$$(9)\qquad \|r_n(x)\|\leqslant M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

<u>dans</u> I.

En effet, la formule est vraie pour $n=0$, d'après le cor. 2 du th. 2 du § 2. Démontrons-la par récurrence sur n ; d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à f', on a

$$\| r'_n(y) \| \leq M \frac{|y-a|^n}{n!}$$

d'où la formule (9) par application du cor.2 du th.2 du § 2 (en remarquant que $|x|^n$ est la dérivée de $x^{n+1}/(n+1)$ si n est pair, la dérivée à droite de $x\, x^n/(n+1)$ si n est impair).

COROLLAIRE.- <u>Si</u> f <u>est une fonction scalaire admettant une dérivée</u> (n+1)-ème <u>dans</u> I , <u>et si</u> $m \leq f^{(n+1)}(x) \leq M$ <u>dans</u> I , <u>on a pour tout</u> $x \geqslant a$ <u>dans</u> I

$$(10) \qquad m \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq r_n(x) \leq M \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

<u>le second membre ne pouvant être égal au premier</u> (resp. <u>au troisième</u>) <u>que si</u> $f^{(n+1)}$ <u>est constante et égale à</u> m (resp. M) <u>dans l'intervalle</u> $[a,x]$.

La démonstration se fait de la même manière, mais en appliquant la prop.1 du § 2 .

<u>Remarques</u>.- 1) On a déjà noté, au cours de la démonstration du th.1, que si f admet une dérivée n-ème dans I , et si

$$(11) \qquad f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + r_n(x)$$

est son développement de Taylor d'ordre n au point a , le développement de Taylor d'ordre n-1 de f ' au point a est

$$(12) \qquad f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + \ldots + n a_n(x-a)^{n-1} + r'_n(x)$$

On dit qu'il s'obtient en <u>dérivant terme à terme</u> le développement (11) de f .

2) Dans les mêmes hypothèses, les coefficients a_i de (11) sont déterminés par récurrence par les relations

$$a_0 = f(a)$$

$$a_1 = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

$$a_2 = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - a_1(x-a)}{(x-a)^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - a_1(x-a) - \ldots - a_{n-1}(x-a)^{n-1}}{(x-a)^n}.$$

Dans le cas où $a=0$, on conclut de là en particulier que, si $f(x^p)$ (p entier >0) admet une dérivée d'ordre pn dans un voisinage de 0, le développement de Taylor d'ordre pn de cette fonction n'est autre que

(13) $$f(x^p)=a_0+a_1x^p+a_2x^{2p}+\ldots+a_nx^{np}+r_n(x^p)$$

$r_n(x^p)$ étant le reste du développement (cf. chap.IV).

3) La définition de la dérivée d'ordre n et les résultats qui précèdent se généralisent de façon immédiate aux fonctions d'une variable complexe ; nous n'insistons pas davantage ici sur cette question, qui sera reprise en détail dans un Livre ultérieur de cet ouvrage.

<u>Exercices</u>.- 1) Avec les mêmes hypothèses que dans la prop.2, démontrer la formule

$$\left[f^{(n)}.g\right]=D^n\left[f.g\right]-\binom{n}{1}D^{n-1}\left[f.g'\right]+..+(-1)^p\binom{n}{p}D^{n-p}\left[f.g^{(p)}\right]+\ldots+(-1)^n\left[f.g^{(n)}\right].$$

2) Avec les notations de la prop.2, on suppose que la relation $\left[a.y\right]=0$ pour tout $y\in F$ entraîne $a=0$ dans E. Dans ces conditions, si g_i $(0\leqslant i\leqslant n)$ sont $n+1$ fonctions vectorielles à valeurs dans E, définies dans un intervalle ouvert I et telles que pour <u>toute</u> fonction vectorielle f à valeurs dans F et n fois dérivables dans I, on ait

$$\left[g_0.f\right]+\left[g_1.f'\right]+\ldots+\left[g_n.f^{(n)}\right]=0$$

les fonctions g_i sont identiquement nulles.

3) Avec les notations de l'exerc.2, on suppose que chacune des fonctions g_k est n fois dérivable dans I ; pour toute fonction f n fois dérivable dans I, à valeurs dans F, on pose

$$\left[g_0.f\right]-\left[g_1.f\right]'+\left[g_2.f\right]''+\ldots+(-1)^n\left[g_n.f\right]^{(n)}=$$
$$=\left[h_0.f\right]+\left[h_1.f'\right]+\ldots+\left[h_n.f^{(n)}\right]$$

ce qui définit les fonctions h_i sans ambiguité, d'après l'exerc.2; montrer qu'on a identiquement

$$[h_0 . f]-[h_1 . f]'+[h_2 . f]''+..+(-1)^n [h_n . f]^{(n)} =$$
$$= [h_0 . f]+[h_1 . f']+...+[h_n . f^{(n)}].$$

4) Soit f une fonction vectorielle n fois dérivable dans un intervalle ouvert I . Montrer que pour $\frac{1}{x}\in I$, on a identiquement

$$\frac{1}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) =(-1)^n D^n\left[x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

(raisonner par récurrence sur n).

5) Soient u et v deux fonctions scalaires n fois dérivable dans un intervalle ouvert I . Si on pose $D^n\left(\frac{u}{v}\right)=(-1)^n \frac{W_n}{v^{n+1}}$, en tout point où $v(x)=0$, montrer que

$$W_n = \begin{vmatrix} u & v & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ u' & v' & v & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ u'' & v'' & 2v' & v & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u^{(n-1)} & v^{(n-1)} & \binom{n-1}{1}v^{(n-2)} & \binom{n-1}{2}v^{(n-3)} & \cdots\cdots & v \\ u^{(n)} & v^{(n)} & \binom{n}{1}v^{(n-1)} & \binom{n}{2}v^{(n-2)} & \cdots\cdots & \binom{n}{n-1}v' \end{vmatrix}$$

(en posant $f=u/v$, dériver n fois l'identité $u=fv$) .

6) Soit f une fonction vectorielle définie dans un intervalle ouvert I . On pose $\Delta f(x;h_1)= f(x+h_1)-f(x)$, puis par récurrence

$$\Delta^p f(x;h_1,..,h_{p-1},h_p)= \Delta^{p-1} f(x+h_p;h_1,...,h_{p-1})-\Delta^{p-1} f(x;h_1,...,h_{p-1})$$

fonctions qui sont donc ~~ex~~ définies pour $x\in I$ et, pour chaque $x\in I$, lorsque les h_i sont assez petits.

a) Si la fonction f est n fois dérivable <u>au point x</u> (et par suite n-1 fois dérivable en tout point d'un voisinage de x), on a

$$\lim_{(h_1,\ldots,h_n)\to(0,\ldots,0)} \frac{\Delta^n (x;h_1,\ldots,h_n)}{h_1 h_2 \ldots h_n} = f^{(n)}(x)$$

(raisonner par récurrence sur n, en considérant la fonction de t ;

$\Delta^{n-1} f'(x+t;h_1,\ldots,h_{n-1}) - f^{(n)}(x)h_1\ldots h_{n-1}t)$.

b) Si f est n fois dérivable dans l'intervalle I , on a

$$\| \Delta^n f(x;h_1,\ldots,h_n) - f^{(n)}(x_0)h_1\ldots h_n \| \leqslant$$
$$\leqslant |h_1 h_2 \ldots h_n| . \sup \| f^{(n)}(x+t_1h_1+\ldots+t_nh_n) - f^{(n)}(x_0)\|$$

la borne supérieure étant prise dans l'ensemble des (t_i) tels que $0 \leqslant t_i \leqslant 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

c) Si f est une fonction scalaire n fois dérivable dans I , on a

$$\Delta^n f(x;h_1,\ldots,h_n) = h_1 h_2 \ldots h_n f^{(n)}(x+\theta_1 h_1+\ldots+\theta_n h_n)$$

les nombres θ_i appartenant à $[0,1]$.

7) Soient f unefonction scalaire n fois dérivable au point x_0 , g une fonction vectorielle n fois dérivable au point $y_0=f(x_0)$. Soient

$$f(x_0+h) = a_0+a_1h+\ldots+a_nh^n+r_n(h)$$
$$g(y_0+k) = b_0+b_1k+\ldots+b_nk^n+s_n(k)$$

les développements de Taylor d'ordre n de f et g aux points x_0 et y_0 respectivement. Montrer que la somme des n+1 termes du développement de Taylor d'ordre n de la fonction composée $g\circ f$ au point x_0 est égal à la somme des termes de degré $\leqslant$ n dans le polynome

$$b_0 + b_1(a_1h+\ldots+a_nh^n) + b_2(a_1h+\ldots+a_nh^n)^2+\ldots+b_n(a_1h+\ldots+a_nh^n)^n$$

En déduire les deux formules suivantes :

a) $$D^n(g(f(x))) = \sum \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_q!} g^{(p)}(f(x)).\left(\frac{f'(x)}{1!}\right)^{m_1}\ldots\left(\frac{f^{(q)}(x)}{q!}\right)^{m_q}$$

la sommation étant étendue à tous les systèmes d'entiers strictement positifs $(m_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ tels que

$$m_1+2m_2+\ldots+qm_q = n$$

et p désignant la somme $m_1+m_2+\ldots+m_q$.

b) $D^n(g(f(x))) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} g^{(p)}(f(x)) \left[\sum_{q=1}^{p} \binom{p}{q}(-f(x))^{p-q} D^n((f(x))^q) \right]$

8) Soient f une fonction scalaire définie et n-1 fois dérivable dans un intervalle ouvert I , $x_1, x_2, \ldots, x_p$ des points distincts de I, et n_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ p entiers > 0 tels que $n_1+n_2+\ldots+n_p=n$. On suppose qu'au point x_i , f s'annule ainsi que ses n_i-1 premières dérivées, pour $1 \leqslant i \leqslant p$; montrer qu'il existe un point ξ intérieur au plus petit intervalle contenant les x_i , et tel que $f^{(n-1)}(\xi)=0$.

9) a) Avec les mêmes notations que dans l'exerc.8, on suppose que f est n fois dérivable dans I , mais par ailleurs quelconque. Soit g le polynome de degré n (à coefficients réels) tel qu'au point x_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$, g et ses n_i-1 premières dérivées soient respectivement égaux à f et ses n_i-1 premières dérivées. Montrer qu'on a

$$f(x) = g(x) + \frac{(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\ldots(x-x_p)^{n_p}}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

où ξ est intérieur au plus petit intervalle contenant les points x_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ et x (appliquer l'exerc.8 à la fonction de t

$$f(t)-g(t)-a \frac{(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\ldots(x-x_p)^{n_p}}{n!}$$

où a est une constante convenablement choisie).

b) Avec les mêmes notations, soit $\mathfrak{f}$ une fonction vectorielle à valeurs dans E , n fois dérivable dans I , $\mathfrak{g}$ le polynome (à coefficients dans E) de degré n tel qu'au point x_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$, $\mathfrak{g}$ et ses n_i-1 premières dérivées soient respectivement égaux à $\mathfrak{f}$ et ses n_i-1 premières dérivées. Montrer que si l'image par $\mathfrak{f}^{(n)}$ du plus petit intervalle contenant x et les x_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ est contenue dans un ensemble convexe fermé K dans E , on peut écrire

$$f(x) = g(x) + a \frac{(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\dots(x-x_p)^{n_p}}{n!}$$

où a appartient à K .

10) Soit g une fonction scalaire **impaire**, définie dans un voisinage de 0 , et 5 fois dérivable dans ce voisinage. Montrer qu'on a

$$g(x) = \frac{x}{3}(g'(x)+2g'(0)) - \frac{x^5}{180} g^{(5)}(\xi) \quad (\xi = \theta x\ ,\quad 0<\theta<1)$$

(même méthode que dans l'exerc. 9a)).

En déduire que si f est une fonction scalaire définie dans $[a,b]$ et 5 fois dérivable dans cet intervalle, on a

$$f(b)-f(a) = \frac{b-a}{6}\left[f'(a)+f'(b)+4f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(5)}(\xi)$$

avec $a < \xi < b$ ("formule de Simpson").

Généraliser aux fonctions vectorielles (cf.exerc. 9b)).

11) Soient $f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, g_2, \dots, g_n$ 2n fonctions scalaires n-1 fois dérivables dans un intervalle ouvert I . Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une suite strictement croissante de n points de I . Montrer que le rapport des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} g_1(x_1) & g_1(x_2) & \dots & g_1(x_n) \\ g_2(x_1) & g_2(x_2) & \dots & g_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n(x_1) & g_n(x_2) & \dots & g_n(x_n) \end{vmatrix}$$

est égal au rapport des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} f_1(\xi_1) & f_1'(\xi_2) & \dots & f_1^{(n-1)}(\xi_n) \\ f_2(\xi_1) & f_2'(\xi_2) & \dots & f_2^{(n-1)}(\xi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(\xi_1) & f_n'(\xi_2) & \dots & f_n^{(n-1)}(\xi_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} g_1(\xi_1) & g_1'(\xi_2) & \dots & g_1^{(n-1)}(\xi_n) \\ g_2(\xi_1) & g_2'(\xi_2) & \dots & g_2^{(n-1)}(\xi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n(\xi_1) & g_n'(\xi_2) & \dots & g_n^{(n-1)}(\xi_n) \end{vmatrix}$$

où $\xi_1 = x_1$, $\xi_1 < \xi_2 < x_2$, $\xi_2 < \xi_3 < x_3, \dots, \xi_{n-1} < \xi_n < x_n$ (appliquer l'exerc. 9 du § 2).

Cas particulier où $g_1(x)=1$, $g_2(x)=x$,..., $g_n(x)=x^{n-1}$.

12) Soit f une fonction vectorielle définie et continue dans l'intervalle fini $I=[-a,+a]$, et deux fois dérivable dans l'intérieur de I .

a) Si on pose $M_0=\sup_{x\in I}\|f(x)\|$, $M_2=\sup_{x\in I}\|f''(x)\|$, montrer que pour tout $x\in I$, on a

$$\|f'(x)\|\leqslant\frac{M_0}{a}+\frac{x^2+a^2}{2a}M_2$$

(exprimer chacune des différences (a)- (x), (-a)- (x)).

b) Déduire de a) que si f est une fonction deux fois dérivable dans un intervalle ouvert I , et si $M_0=\sup_{x\in I}\|f(x)\|$ et $M_2=\sup_{x\in I}\|f''(x)\|$ sont finis, il en est de même de $M_1=\sup_{x\in I}\|f'(x)\|$; et on a :

$$M_1\leqslant 2\sqrt{M_0M_2}\quad\text{si } I \text{ a une longueur } \geqslant 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$$

$$M_1\leqslant\sqrt{2}\sqrt{M_0M_2}\quad\text{si } I=\mathbb{R}\,.$$

Montrer que dans ces deux inégalités, les nombres 2 et $\sqrt{2}$ respectivement ne peuvent être remplacés par des nombres plus petits (considérer d'abord le cas où on suppose seulement que f admet une dérivée seconde à droite, et montrer que dans ce cas les deux membres des inégalités précédentes peuvent devenir égaux, en prenant pour f une fonction scalaire égale "par morceaux" à des polynomes du second degré).

c) Déduire de b) que si f est p fois dérivable dans $\mathbb{R}$, et si $M_p=\sup_{x\in\mathbb{R}}\|f^{(p)}(x)\|$ et $M_0=\sup_{x\in\mathbb{R}}\|f(x)\|$ sont finis, chacun des nombres $M_k=\sup_{x\in\mathbb{R}}\|f^{(k)}(x)\|$ est fini pour $1\leqslant k\leqslant p-1$, et on a

$$M_k\leqslant 2^{\frac{k(p-k)}{2}}M_0^{1-\frac{k}{p}}M_p^{\frac{k}{p}}$$

d) Par la même méthode que dans a), montrer que si f est trois fois différentiable dans $]-a,+a[$, on a

$$\| f'(0)\| \leqslant \frac{M_0}{a} + \frac{a^2}{6} M_3$$

$$\| f''(0)\| \leqslant \frac{4}{a^2} M_0 + \frac{a}{3} M_3$$

en déduire que, si f est trois fois différentiable dans $\mathbb{R}$ et si M_0 et M_3 sont finis, on peut améliorer les inégalités démontrées dans c) (pour $p=3$) par les suivantes

$$M_1 \leqslant (\tfrac{9}{8})^{\frac{1}{3}} M_0^{\frac{2}{3}} M_3^{\frac{1}{3}}$$

$$M_2 \leqslant 3^{\frac{1}{3}} M_0^{\frac{1}{3}} M_3^{\frac{2}{3}}.$$

12 bis) a) Soit f une fonction scalaire deux fois dérivable dans $\mathbb{R}$, et telle que l'on ait $(f(x))^2 \leqslant a$, et $(f'(x))^2+(f''(x))^2 \leqslant b$ dans $\mathbb{R}$; montrer que l'on a $(f(x))^2+(f'(x))^2 \leqslant \max(a,b)$ dans $\mathbb{R}$ (raisonner par l'absurde, en remarquant que si la fonction $f^2+f'^2$ prend une valeur $c > \max(a,b)$ en un point x_0, il existe deux points x_1, x_2 tels que $x_1 < x_0 < x_2$ et qu'en x_1 et x_2 la fonction $f^2+f'^2$ prenne des valeurs $< c$; considérer alors un point de $]x_1,x_2[$ où $f^2+f'^2$ atteint sa borne supérieure dans cet intervalle).

b) Soit f une fonction scalaire n fois dérivable dans $\mathbb{R}$, et telle que l'on ait $(f(x))^2 \leqslant a$ et $(f^{(n-1)}(x))^2+(f^{(n)}(x))^2 \leqslant b$ dans $\mathbb{R}$; montrer que l'on a $(f^{(k-1)}(x))^2+(f^{(k)}(x))^2 \leqslant \max(a,b)$ dans $\mathbb{R}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ (Raisonner par récurrence sur n ; remarquer que, d'après l'exerc. 12, la borne supérieure $c \geqslant 0$ de $(f'(x))^2$ dans $\mathbb{R}$ est finie ; montrer qu'on a nécessairement $c \leqslant \max(a,b)$, en raisonnant par l'absurde : dans l'hypothèse où $c > \max(a,b)$ choisir les constantes λ et μ de sorte que, pour la fonction $g = \lambda f + \mu$, on ait $|g(x)| \leqslant 1$, $|g'(x)| \leqslant 1$, mais qu'on ne puisse avoir $(g(x))^2+(g'(x))^2 \leqslant 1$ pour tout x).

13) Soit f une fonction n-1 fois dérivable dans un intervalle ouvert I contenant 0, et soit f_n la fonction vectorielle définie pour $x \neq 0$ dans I par la relation

$$f(x)=f(0)+f'(0)\frac{x}{1!}+f''(0)\frac{x^2}{2!}+\dots+f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+f_n(x)x^n$$

a) Montrer que si f admet une dérivée $(n+p)$-ème au point 0, f_n admet une dérivée p-ème au point 0 et une dérivée $(n+p-1)$-ème en tout point de I distinct de 0 ; en outre, on a $f_n^{(k)}(0)=\frac{k!}{(n+k)!}f^{(n+k)}(0)$ pour $0 \leqslant k \leqslant p$, et $f_n^{(p+k)}(x).x^k$ tend vers 0 avec x, lorsque $1 \leqslant k \leqslant n-1$ (exprimer les dérivées de f_n à l'aide des développements de Taylor des dérivées successives de f, et utiliser la prop.4 du § 2).

b) Inversement, soit f_n une fonction vectorielle admettant une dérivée $(n+p-1)$-ème en tout point de I distinct de 0, et telle que $f_n^{(p+k)}(x).x^k$ tende vers une limite pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Montrer que la fonction $f_n(x).x^n$ admet une dérivée $(n+p-1)$-ème dans I ; si en outre f_n admet une dérivée p-ème au point 0, $f_n(x).x^n$ admet une dérivée $(n+p)$-ème au point 0.

c) On suppose I symétrique par rapport à 0, et f paire ($f(-x)=f(x)$) dans I. Montrer, à l'aide de a) et b) que, si f est 2n fois dérivable dans I, il existe une fonction g définie et n fois dérivable dans I, telle que $f(x)=g(x^2)$ dans I.

14) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f une fonction vectorielle définie et continue dans I ; on suppose qu'il existe n fonctions vectorielles g_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ définies dans I, et telles que la fonction de x

$$\frac{1}{h^n}\left(f(x+h)-f(x)-\sum_{p=1}^{n}\frac{h^p}{p!}g_p(x)\right)$$

tend <u>uniformément</u> vers 0 dans tout intervalle compact contenu dans I, lorsque h tend vers 0 ;

a) On pose $f_p(x,h) = \Delta^p f(x;h,h,..,h)$ (exerc.6). Montrer que, pour $1 \leq p \leq n$, $\frac{1}{h^p} f_p(x,h)$ tend uniformément vers $g_p(x)$ sur tout intervalle compact contenu dans I, lorsque h tend vers 0, et que les g_p sont des fonctions continues dans I (le démontrer successivement pour $p=n$, $p=n-1$, etc.).

b) En déduire que f possède dans I une dérivée n-ème continue, et qu'on a $f^{(p)} = g_p$ pour $1 \leq p \leq n$ (tenir compte de la relation $f_{p+1}(x,h) = f_p(x+h,h) - f_p(x,h)$).

§ 4. Variation des fonctions numériques dérivables. Propriétés différentielles des fonctions convexes.

1. Variation des fonctions numériques.

PROPOSITION 1.- Soit f une fonction numérique finie et continue dans un intervalle ouvert I, et admettant une dérivée à droite (finie ou non) en tous les points du complémentaire (par rapport à I) d'une partie dénombrable A de I. Pour que f soit croissante dans I, il faut et il suffit que $f'_d(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I \cap \complement A$; pour que f soit strictement croissante dans I, il faut et il suffit que $f'_d(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I \cap \complement A$, et que dans tout intervalle ouvert contenu dans I, il existe au moins un point x tel que $f'_d(x) > 0$.

La proposition résulte aussitôt de la définition de la dérivée à droite, et du théorème des accroissements finis (§ 2, th.1), où on fait $m=0$.

On peut naturellement remplacer "dérivée à droite" par "dérivée à gauche" dans l'énoncé de la prop.1.

Un grand nombre des fonctions numériques d'une variable réelle les plus usuelles sont du type suivant : elles sont définies et continues dans un ensemble ouvert $A \subset \mathbb{R}$, et admettent en tout point de A

(à l'exception éventuelle d'un ensemble dénombrable de points) une dérivée à droite (finie ou non) ; en outre, dans chaque intervalle compact $I = [a,b]$, contenu dans A , il existe une suite finie $(c_i)_{1 \leq i \leq n}$ strictement croissante de points de I telle que, dans chacun des intervalles $]a,c_1[$, $]c_i,c_{i+1}[$ $(1 \leq i \leq n-1)$, $]c_n,b[$ le signe(*) $\mathrm{sgn}(f'_d(x))$ reste constant. Il résulte alors de la prop.1 que, dans chacun de ces intervalles, f est, soit constante, soit strictement croissante, soit strictement décroissante ; on dit qu'on a "étudié les variations de la fonction f" lorsqu'on a déterminé ces intervalles partiels : il faut pour cela déterminer les points c_i où la fonction f "change de sens de variation", c'est-à-dire où $f'_d(x)$ change de signe.

Remarque.- Il ne faudrait pas croire que toute fonction continue et dérivable dans un intervalle ouvert rentre dans la catégorie que nous venons de considérer. On peut donner des exemples de fonctions continues et dérivables telles que, dans tout intervalle ouvert, leur dérivée prenne des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives(**).

DEFINITION 1.- On dit qu'une fonction numérique finie f , définie dans une partie A d'un espace topologique E , admet un maximum relatif (resp. maximum relatif strict, minimum relatif, minimum relatif strict en un point $x_0 \in A$, par rapport à A , s'il existe un voisinage V de x_0 dans E tel qu'en tout point $x \in V \cap A$ différent de x_0 , on ait $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) < f(x_0)$, $f(x) \geqslant f(x)$ ~~f(x0)~~ , $f(x) > f(x_0)$).

(*) On rappelle que, pour tout nombre réel x , le signe de x , noté $\mathrm{sgn}\, x$, est égal à +1 si $x > 0$, à -1 si $x < 0$, à 0 si $x=0$.

(**) Voir par exemple E.W. HOBSON, The theory of functions of a real variable (2è éd.) (Cambridge University Press, 1926), t.II, p. 412-421.

Il est clair que si f atteint sa borne supérieure (resp. inférieure) dans A en un point de A , elle a un maximum relatif (resp. minimum relatif) par rapport à A en ce point ; la réciproque est bien entendu inexacte.

On notera que si $B \subset A$, et si f admet un maximum relatif (par exemple) en un point $x_0 \in B$, par rapport à B , f n'admet pas nécessairement un maximum relatif par rapport à A en ce point.

PROPOSITION 2.- Soit f une fonction numérique finie, définie dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si, en un point x_0 , intérieur à I , f admet un maximum relatif (resp. minimum relatif), et a en ce point une dérivée à droite et une dérivée à gauche, on a $f'_d(x_0) \leqslant 0$ et $f'_s(x_0) \geqslant 0$ (resp. $f'_d(x_0) \geqslant 0$ et $f'_s(x_0) \leqslant 0$) ; en particulier, si f est dérivable au point x_0 , on a $f'(x_0)=0$.

La proposition résulte trivialement des définitions.

La réciproque de la prop.2 est en général inexacte ; on peut seulement dire que, si f'_d existe dans un intervalle ouvert I contenant x_0 , et change de signe au point x_0 (c'est-à-dire a un signe constant dans un intervalle $[a,x_0[$, et un signe constant distinct du précédent dans un intervalle $]x_0,b]$), alors f admet un maximum relatif au point x_0 si $f'_d(x) \geqslant 0$ pour $x < x_0$ et $f'_d(x) \leqslant 0$ pour $x > x_0$, un minimum relatif au point x_0 dans le cas contraire (prop.1).

2. Dérivabilité d'une fonction convexe.

PROPOSITION 3. Si une fonction numérique f est convexe dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, elle admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche finies en tout point x intérieur à I , et on a $f'_s(x) \leqslant f'_d(x)$.

Remarquons d'abord que la condition de convexité d'une fonction f dans un intervalle I peut s'écrire sous l'une des deux formes équivalentes suivantes : si a,b,c sont trois points quelconques de I tels que

$a < c < b$, on a $\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, et $\frac{f(b)-f(c)}{b-c} \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$; on a en effet $c = \lambda a+(1-\lambda)b$ avec $\lambda = \frac{b-c}{b-a}$, et les deux inégalités précédentes sont chacune équivalente à $f(c) \leqslant \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$; en outre, dire que f est strictement convexe équivaut à remplacer le signe $\leqslant$ (resp. $\geqslant$) par $<$ (resp. $>$) dans ces inégalités. Cela étant, si x est intérieur à I et $x<z\leqslant z'$, on a $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z')-f(x)}{z'-x}$, donc $\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ est fonction croissante de z pour $z>x$; d'autre part, si $x'<x$, on a $\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ donc la fonction $\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ est minorée pour $z>x$; elle a donc au point x une limite à droite finie $f'_d(x)$, et on a $\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \leqslant f'_d(x)$ pour tout $x'<x$. On démontre de même l'existence de $f'_s(x)$ et l'inégalité $f'_s(x)\leqslant \frac{f(x'')-f(x)}{x''-x}$ pour tout $x''>x$. En faisant tendre x' ou x'' vers x dans ces inégalités, il vient $f'_s(x) \leqslant f'_d(x)$.

On a montré en outre que, si x' et x'' sont deux points intérieurs à I et tels que $x'<x''$, on a

$$(1) \qquad f'_d(x') \leqslant \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'} \leqslant f'_s(x'')$$

si f est strictement convexe dans I , on peut écrire

$$(2) \qquad f'_d(x') < \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'} < f'_s(x'')$$

En effet, si $x'<x<x''$, on a

$$f'_d(x') \leqslant \frac{f(x)-f(x')}{x-x'} < \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'} \leqslant \frac{f(x'')-f(x)}{x''-x} \leqslant f'_s(x'').$$

PROPOSITION 4.- Pour qu'une fonction numérique f soit convexe (resp. strictement convexe) dans un intervalle ouvert $I\subset R$, il faut et il suffit qu'elle soit continue dans I , admette en tout point de I une dérivée à droite finie, et que cette dérivée soit croissante (resp. strictement croissante) dans I .

La condition est nécessaire, car il résulte de la prop.3 et des inégalités (1) et (2) que, si f est convexe (resp. strictement convexe),

et $x' < x''$, on a $f'_d(x') \leqslant f'_s(x'') \leqslant f'_d(x'')$ (resp. $f'_d(x') < f'_s(x'')$ $f'_d(x'')$)
Réciproquement, supposons f'_d croissante dans I ; si f n'était pas convexe dans I , il existerait trois points a, b, c de I tels que $a < c < b$ et que $\frac{f(c)-f(a)}{c-a} > \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$; mais d'après le th. des accroissements finis (§ 2, th. 1), on a $\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \sup_{a<x<c} f'_d(x)$, et $\frac{f(b)-f(c)}{b-c} \geqslant \inf_{c<x<b} f'_d(x)$. On aurait donc $\sup_{a<x<c} f'_d(x) > \inf_{c<x<b} f'_d(x)$ contrairement à l'hypothèse que f'_d est croissante.

Si maintenant f'_d est supposée strictement croissante dans I , f est convexe et ne peut être égale à une fonction linéaire dans aucun intervalle ouvert contenu dans I , car dans cet intervalle f'_d serait constante, contrairement à l'hypothèse.

COROLLAIRE 1.- <u>Si</u> f <u>est convexe dans</u> I , f <u>est dérivable dans</u> I <u>sauf aux points d'une partie dénombrable de</u> I , <u>et</u> f'_d <u>et</u> f'_s <u>sont continues en tous les points où</u> f <u>est dérivable</u>.

Soit E l'ensemble des points de I où f n'est pas dérivable ; pour tout $x \in E$, soit J_x l'intervalle ouvert $]f'_s(x), f'_d(x)[$; il résulte de (1) que, si x et y sont deux points de E tels que $x < y$, on a $u < v$ pour tout $u \in J_x$ et tout $v \in J_y$; autrement dit, lorsque x parcourt E , les intervalles ouverts non vides J_x sont deux à deux sans points communs ; l'ensemble de ces intervalles est donc dénombrable, et par suite il en est de même de E . La seconde partie du corollaire est immédiate, car d'après la prop. 4 du § 2 et le fait que f'_d et f'_s sont croissantes, donc ont en tout point une limite à droite et une limite à gauche, et par suite f'_d (resp. f'_s) est en tout point x continue à droite (resp. à gauche) et a une limite à gauche (resp. à droite) égale à $f'_s(x)$ (resp. $f'_d(x)$).

COROLLAIRE 2.- Soit f une fonction continue et deux fois dérivable dans un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$; pour que f soit convexe dans I , il faut et il suffit que $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$; pour que f soit strictement convexe dans I , il faut et il suffit que $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, et que, dans tout intervalle ouvert contenu dans I , il existe un point x tel que $f''(x) > 0$.

C'est une conséquence immédiate des prop. 4 et 1 .

Exemple.- Dans l'intervalle $]0,+\infty[$, la fonction x^r (r rationnel) a une dérivée seconde égale à $r(r-1)x^{r-2}$; donc elle est strictement convexe si $r > 1$ ou $r < 0$, strictement concave si $0 < r < 1$.

PROPOSITION 5.- Soit f une fonction convexe dans un intervalle ~~fermé~~ ouvert $I \subset \mathbb{R}$, et soit D la partie convexe du plan numérique $\mathbb{R}^2$ située au-dessus du graphe G de f ; en tout point $(x_0, f(x_0))$ de G , pour qu'une droite de pente a passant par ce point soit droite d'appui (chap. I, § 1, n°4) de D , il faut et il suffit que $f'_s(x_0) \leqslant a \leqslant f'_d(x_0)$.

La condition est nécessaire, car si $y - f(x_0) = a(x - x_0)$ est droite d'appui de D , on doit avoir $f(x) - f(x_0) \geqslant a(x - x_0)$ pour tout $x \in I$, d'où $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant a$ pour $x > x_0$, et $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant a$ pour $x < x_0$; en faisant tendre x vers x_0 , on a donc $f'_s(x_0) \leqslant a \leqslant f'_d(x_0)$. Inversement, si ces inégalités sont remplies, $y - f(x_0) = a(x - x_0)$ est droite d'appui de D d'après les inégalités (1) .

On voit en particulier que si f est dérivable au point x_0 , il n'existe qu'une seule droite d'appui au point $(x_0, f(x_0))$, la tangente à G en ce point.

3. Variation des fonctions convexes.

Considérons d'abord une fonction f strictement convexe dans un intervalle ouvert I . Comme f'_d est alors strictement croissante, on voit, en considérant les points de I où $f'_d(x) > 0$ et ceux où $f'_d(x) < 0$, que trois cas seulement sont possibles :

1° f est strictement croissante dans I ;

2° f est strictement décroissante dans I ;

3° il existe $a \in I$ tel que, pour $x \leq a$, f soit strictement décroissante, et, pour $x \geq a$, strictement croissante.

Lorsque f est convexe, mais non strictement convexe, f peut être constante dans un intervalle contenu dans I ; soit $J =]a,b[$ le plus grand intervalle ouvert où f est constante (c'est-à-dire l'intérieur de l'intervalle où $f'_d(x)=0$) ; f est alors strictement décroissante dans l'intervalle formé des points x de I tels que $x \leq a$ (s'il en existe), strictement croissante dans l'intervalle formé des points de I tels que $x \geq b$ (s'il en existe).

Dans tous les cas, on voit que f possède une <u>limite à droite</u> à l'origine de I, une <u>limite à gauche</u> à l'extrémité de I (dans $\overline{R}$) ; ces limites peuvent être finies ou infinies (cf. exerc. 10, 11 et 12).

<u>Exercices.</u>- 1) Soit f une fonction numérique continue dans un intervalle semi-ouvert $I = [a,b[$; on suppose qu'en tous les points du complémentaire par rapport à I d'une partie dénombrable A de I, f soit <u>croissante à droite</u>, c'est-à-dire qu'en tout point $x \in I \cap \complement A$, il existe $h > 0$ tel que, pour $x \leq y \leq x+h$, $f(y) \geq f(x)$. Montrer que f est croissante dans I (raisonner comme dans le th. 1 du § 2).

2) Soient f et g deux fonctions numériques finies, strictement positives, continues et dérivables dans un intervalle ouvert I. Montrer que, si f' et g' sont strictement positives, et f'/g' strictement croissante dans I, ou bien f/g est strictement

monotone dans I , ou bien il existe un nombre $c \in I$ tel que f/g soit strictement décroissante pour $x \leqslant c$, et strictement croissante pour $x \geqslant c$ (remarquer que, si on a $f'(x)/g'(x) < f(x)/g(x)$, on a aussi $f'(y)/g'(y) < f(y)/g(y)$ pour tout $y < x$) .

3) Soit f une fonction à valeurs complexes, continue dans un intervalle ouvert I , ne s'y annulant pas, et admettant en tout point de I une dérivée à droite. Pour que $|f|$ soit croissante dans I , il faut et il suffit que $\mathcal{R}(f'_d/f) \geqslant 0$ dans I .

4) Soit f une fonction n fois dérivable dans $I =]-1,+1[$ et telle que $|f(x)| \leqslant 1$ dans cet intervalle.

a) Montrer que si $m_k(\lambda)$ désigne le minimum de $|f^{(k)}(x)|$ dans un intervalle de longueur contenu dans I , on a

$$m_k(\lambda) \leqslant \frac{2^{\frac{n(n+1)}{2}} n^n}{\lambda^n}$$

(remarquer que, si l'intervalle de longueur λ est décomposé en trois intervalles de longueurs α , β , γ , on a

$$m_k(\lambda) \leqslant \frac{1}{\beta}(m_{k-1}(\alpha)+m_{k-1}(\gamma))$$

b) En déduire qu'il existe un nombre μ_n ne dépendant que de n et tel que si $|f'(0)| \geqslant \mu_n$, $f^{(n)}(x)$ s'annule au moins en n-1 points distincts de I (montrer par récurrence sur k que $f^{(k)}$ s'annule au moins k-1 fois dans I) .

5) a) Soit f une fonction vectorielle ayant des dérivées de tout ordre dans un intervalle ouvert I . On suppose que, dans I , on a $\| f^{(n)}(x) \| \leqslant a.n!r^n$, où a et r sont deux nombres > 0 indépendants de x et de n ; montrer qu'en tout point $x_0 \in I$, la "série de Taylor" de terme général $\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$ est convergente et a pour somme $f(x)$ dans un voisinage de x_0 .

b) Inversement, si la série de Taylor de f en un point x_0 converge dans un voisinage de x_0, il existe deux nombres a et r (dépendant de x_0) tels que $\| f^{(n)}(x_0) \| \leqslant a.n!r^n$ pour tout n .

c) Déduire de a) et de l'exerc.4b) que si, dans un intervalle ouvert I , une fonction scalaire f est indéfiniment dérivable, et s'il existe un nombre p indépendant de n tel que $f^{(n)}$ ne s'annule pas en plus de p points distincts de I , la série de Taylor de f au voisinage de tout point x_0 de I , est convergente et a pour somme f(x) en tout point d'un voisinage de x_0 .

6) Toute fonction f convexe dans un intervalle compact I est limite d'une suite décroissante uniformément convergente de fonctions convexes dans I admettant une dérivée seconde en tout point intérieur à I (le démontrer d'abord pour la fonction $|x-a|$, puis approcher f par une combinaison linéaire à coefficients $\geqslant 0$ de telles fonctions

7) Soient f et g deux fonctions positives convexes dans un intervalle $I=[a,b]$, telles qu'il existe un nombre $c \in I$ tel que dans chacun des intervalles $[a,c]$ et $[c,b]$, f et g variant dans le même sens. Montrer que le produit fg est convexe dans I .

8) Soit I un intervalle contenu dans $]0,+\infty[$; montrer que si $f(\frac{1}{x})$ est convexe dans I , il en est de même de $xf(x)$, et réciproquement.

9) Soit f une fonction positive convexe dans $]0,+\infty[$, a et b deux nombres réels quelconques. Montrer que la fonction $x^a f(x^{-b})$ est convexe dans les cas suivants :

1° $a = \frac{1}{2}(b+1)$, $|b| \geqslant 1$;

2° $x^a f(x^{-b})$ croissante, $a(b-a) \geqslant 0$, $a \geqslant \frac{1}{2}(b+1)$

3° $x^a f(x^{-b})$ décroissante, $a(b-a) \geqslant 0$, $a \leqslant \frac{1}{2}(b+1)$.

Dans les mêmes hypothèses, montrer que $e^{x/2}f(e^{-x})$ est convexe (utiliser l'exerc.6).

10) Soit f une fonction convexe dans l'intervalle ouvert $]a,+\infty[$; s'il existe un point c tel que, dans $]c,+\infty[$ f soit strictement croissante, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

11) Soit f une fonction convexe dans un intervalle $]a,+\infty[$; montrer que $\frac{f(x)}{x}$ a une limite (finie ou infinie) lorsque x tend vers $+\infty$, et que cette limite est aussi celle de $f'_d(x)$ et de $f'_s(x)$; cette limite est >0 si $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

12) Soit f une fonction convexe dans l'intervalle $]a,b[$ où $a \geqslant 0$; montrer que, dans cet intervalle, la fonction $f(x)-xf'_d(x)$ ("ordonnée à l'origine" de la demi-tangente à droite) est décroissante (strictement décroissante si f est strictement convexe). En déduire que :

a) Si f admet une limite à droite finie au point a , $(x-a)f'_d(x)$ a une limite à droite égale à 0 en ce point.

b) Dans $]a,b[$, ou bien $f(x)/x$ est croissante, ou bien $f(x)/x$ est décroissante, ou bien il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(x)/x$ soit décroissante dans $]a,c[$ et croissante dans $]c,b[$.

c) On suppose que $b=+\infty$; montrer que si $\beta=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-xf'_d(x))$ est finie, il en est de même de $\alpha=\lim_{x\to+\infty} f(x)/x$, que la droite $y=\alpha x+\beta$ est <u>asymptote</u> au graphe de f , et est située <u>au-dessous</u> de ce graphe (strictement au-dessous si f est strictement convexe).

13) Soit f une fonction convexe dans un intervalle ouvert I . Montrer que, lorsque y et z tendent vers un point $x\in I$ en restant $>x$ et distincts, $\frac{f(y)-f(z)}{y-z}$ tend vers $f'_d(x)$.

14) Soit f une fonction continue dans un intervalle ouvert I et admettant en tout point de I une dérivée à droite finie. Si, pour tout $x \in I$ et tout $y > x$, le point $M_y=(y,f(y))$ est au-dessus de la demi-tangente à droite au point $M_x=(x,f(x))$ du graphe de f, montrer que f est convexe dans I (en utilisant le th. des accroissements finis montrer que l'on a $f'_d(y) \geqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ pour $x < y$).

Donner un exemple de fonction non convexe, ayant en tout point une dérivée à droite finie, et telle que pour tout $x \in I$, il existe un nombre $h_x > 0$ dépendant de x, tel que M_y soit au-dessus de la demi-tangente à droite au point M_x pour tout y tel que $x \leqslant y \leqslant x+h_x$.

15) Soit f une fonction numérique continue dans un intervalle ouvert I ; on suppose que pour tout couple (a,b) de points de I tel que $a < b$, le graphe de f soit tout entier au-dessus ou tout entier au-dessous du segment joignant les points $M_a=(a,f(a))$ et $M_b=(b,f(b))$ dans l'intervalle $[a,b]$. Montrer que f est convexe dans tout I ou concave dans tout I (si dans $]a,b[$ il y a un point c tel que $(c,f(c))$ soit strictement au-dessus du segment M_aM_b, montrer que le graphe de f est au-dessus du segment M_aM_x dans $[a,x]$ pour tout $x \in I$ qui est $> a$).

16) Soit f une fonction numérique dérivable dans un intervalle ouvert I. On suppose que, pour tout couple (a,b) de points de I tel que $a < b$, il existe un seul $c \in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$; montrer que f est strictement convexe dans I ou strictement concave dans I (montrer que f' est strictement monotone dans I).

17) Soient f et g deux fonctions numériques, f étant définie et continue dans un intervalle I, g définie et continue dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout couple (λ, μ) de nombres réels, $g(f(x)+\lambda x+\mu)$ soit convexe dans I.

a) Montrer que g est convexe et monotone dans $\mathbb{R}$.

b) Si g est croissante (resp. décroissante) dans $\mathbb{R}$, montrer que f est convexe (resp. concave) dans I (utiliser la prop.7 du chap.I, §2).

§ 5. Primitives et intégrales.

1. Définition des primitives.

Sauf mention expresse du contraire, nous ne considèrerons, dans ce paragraphe, que des fonctions vectorielles d'une variable réelle, prenant leurs valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Lorsqu'il s'agit en particulier de fonctions numériques, il est donc toujours sous-entendu que ces fonctions sont finies si le contraire n'est pas spécifié.

DÉFINITION 1.- Etant donnée une fonction vectorielle f , définie dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on dit qu'une fonction g définie et continue dans I est une primitive de f si $f(x)$ est la dérivée de g en tout point x intérieur à I , la dérivée à droite de g à l'origine de I , et la dérivée à gauche de g à l'extrémité de I , lorsque ces points appartiennent à I .

On constate aisément qu'une fonction f ne peut admettre de primitive que si elle satisfait à des conditions assez restrictives : par exemple, si f admet une limite à droite et une limite à gauche en un point x_0 intérieur à I , et admet une primitive dans I , elle doit être continue au point x_0 , d'après le cor. de la prop.4 du §2 ; il en résulte que si on prend pour I l'intervalle $[-1,+1]$, pour f la fonction scalaire égale à -1 dans $[-1,0[$, à +1 dans $[0,1]$, f n'admet pas de primitive dans I .

Pour ne pas exclure des fonctions aussi simples que la précédente, on élargit la définition 1 de la manière suivante :

DEFINITION 2.- Etant donnée une fonction vectorielle f , définie dans un intervalle $I \subset R$, on dit qu'une fonction g définie et continue dans I est une primitive impropre de f si g admet une dérivée égale à $f(x)$ en tout point du complémentaire (par rapport à I) d'une partie dénombrable de I .

Avec cette définition, on voit aussitôt que la fonction scalaire f considérée ci-dessus admet une primitive impropre égale à $|x|$.

Par abus de langage, lorsque nous parlerons désormais d'une primitive d'une fonction, il s'agira d'une primitive impropre, sauf mention expresse du contraire.

Il est clair que si f admet une primitive (impropre) dans I , toute primitive de f est aussi une primitive de toute fonction égale à f sauf aux points d'une partie dénombrable de I .

PROPOSITION 1.- Si g_1 et g_2 sont deux primitives (impropres) d'une même fonction f dans un intervalle I , $g_1 - g_2$ est constante dans I .

En effet, $g_1 - g_2$ admet une dérivée égale à 0 sauf aux points d'une partie dénombrable de I (§ 2,cor.3 du th.2).

En d'autres termes, si f admet une primitive g dans I , l'ensemble des primitives de f dans I est identique à l'ensemble des fonctions $g + a$, où a est un élément arbitraire de E ; on dit que les primitives d'une fonction f (lorsqu'elles existent) sont définies "à l'addition près d'une constante". Pour définir sans ambiguité une primitive de f , il suffit de se donner (arbitrairement) sa valeur en un point x_0 de I ; en particulier, il existe une primitive et une seule g de f telle que $g(x_0)=0$; pour toute primitive h de f , on a $g(x) = h(x)-h(x_0)$.

2. Existence des primitives.

THEOREME 1.- Soit A un ensemble filtré par un filtre $\mathfrak{F}$, $(f_a)_{a\in A}$ une famille de fonctions définies dans un intervalle I, g_a une primitive (impropre) de f_a pour tout $a \in A$. On suppose que : 1° suivant le filtre $\mathfrak{F}$, les fonctions f_a convergent uniformément dans toute partie compacte de I vers une fonction f ; 2° il existe un point $a \in I$ tel que, suivant le filtre $\mathfrak{F}$, la famille $(g_a(a))$ a une limite dans F. Dans ces conditions, les fonctions g_a convergent uniformément (suivant $\mathfrak{F}$) dans toute partie compacte de I vers une primitive g de f.

Démontrons d'abord que les g_a convergent uniformément vers une fonction continue g dans tout intervalle compact $[b,c]$ contenu dans I et contenant a. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $M \in \mathfrak{F}$ telle que pour deux indices quelconques α,β appartenant à M, on ait $\|f_\alpha(x)-f_\beta(x)\| \leq \varepsilon$ pour tout $x\in [b,c]$; on a par suite (§ 2, cor.2 du th.2)

$$\|g_\alpha(x)-g_\beta(x)-(g_\alpha(a)-g_\beta(a))\| \leq \varepsilon|x-a| \leq \varepsilon|c-b|$$

et comme par hypothèse $(g_a(a))$ a une limite suivant $\mathfrak{F}$, les g_a convergent uniformément dans $[b,c]$. Reste à voir que la limite g des g_a est une primitive de f.

Pour cela, remarquons que I est réunion dénombrable d'une suite croissante d'intervalles compacts I_n. Pour tout entier n, soit a_n un indice tel que $\|f(x)-f_{a_n}(x)\| \leq 1/n$ dans I_n ; il est clair que la suite (f_{a_n}) converge uniformément vers f et que la suite (g_{a_n}) converge uniformément vers g dans toute partie compacte de I. Soit D_n la partie dénombrable de I où f_{a_n} n'est pas dérivable, D la réunion des D_n, qui est donc une partie dénombrable de I ; nous allons voir qu'en tout point x n'appartenant pas à D et intérieur à I ,

g admet une dérivée égale à $f(x)$. En effet, soit $[b,c]$ un intervalle compact contenu dans I et auquel x est intérieur ; on voit comme ci-dessus que, pour tout n tel que $[b,c] \subset I_n$ et tout $m \geqslant n$, on a

$$\| g_{a_m}(y) - g_{a_m}(x) - (g_{a_n}(y) - g_{a_n}(x)) \| \leqslant \frac{2}{n} |y-x|$$

pour tout $y \in [b,c]$; en faisant croître m indéfiniment, on voit qu'on a aussi

$$\| g(y) - g(x) - (g_{a_n}(y) - g_{a_n}(x)) \| \leqslant \frac{2}{n} |y-x|$$

pour tout $y \in [b,c]$; or, il existe $h > 0$ tel que, pour $|y-x| \leqslant h$ on ait $\| g_{a_n}(y) - g_{a_n}(x) - f_{a_n}(x)(y-x) \| \leqslant \frac{1}{n} |y-x|$; comme d'autre part, on a $\| f(x) - f_{a_n}(x) \| \leqslant \frac{1}{n}$, on obtient finalement

$$\| g(y) - g(x) - f(x)(y-x) \| \leqslant \frac{4}{n} |y-x|$$

ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1.- <u>L'ensemble $\mathcal{H}$ des applications de I dans E qui admettent une primitive dans I est un sous-espace vectoriel fermé</u> (donc complet) <u>de l'espace vectoriel complet $\mathcal{F}_c(I,E)$ des applications de I dans E muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de I</u> .

COROLLAIRE 2.- <u>Soit x_0 un point de I , et pour chaque fonction $f \in \mathcal{H}$, soit $P(f)$ la primitive de f dans I qui s'annule au point x_0 ; l'application $f \to P(f)$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{F}_c(I,E)$ est une application linéaire continue</u>.

Le cor. 1 du th. 1 permet d'établir l'existence de primitives de certaines catégories de fonctions par le procédé suivant : si on sait que les fonctions appartenant à une partie $\mathfrak{A}$ de $\mathcal{F}_c(I,E)$ admettent une primitive, il en sera de même des fonctions appartenant à l'<u>adhérence</u> dans $\mathcal{F}_c(I,E)$ du sous-espace vectoriel engendré par $\mathfrak{A}$. Nous allons appliquer cette méthode au n° suivant.

<u>3. Fonctions règlées.</u>

DEFINITION 3.- <u>On dit qu'une fonction vectorielle définie dans un intervalle I est une fonction en escalier si elle n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité, et si elle est constante dans tout intervalle où elle est continue.</u>

Soit f une fonction en escalier dans I ; soit $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ la suite finie strictement croissante telle que a_0 soit l'origine de I , a_n l'extrémité de I , et les a_i d'indice tel que $1 \leq i \leq n-1$, les points de discontinuité de f qui sont <u>intérieurs</u> à I . Dans chacun des n intervalles ouverts $]a_i, a_{i+1}[$ $(0 \leq i \leq n-1)$, la fonction f est constante ; soit c_i la valeur qu'elle prend dans cet intervalle, φ_i la fonction caractéristique de l'intervalle ; la fonction $f - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \varphi_i$ ne peut être $\neq 0$ qu'aux points a_i ; en d'autres termes, en modifiant au besoin une fonction en escalier en un nombre fini de points, on voit qu'elle est identique à une combinaison linéaire (à coefficients dans E) de <u>fonctions caractéristiques d'intervalles ouverts</u>.

DEFINITION 4.- <u>On dit qu'une fonction vectorielle définie dans un intervalle I est une fonction réglée si elle est limite uniforme de fonctions en escalier dans toute partie compacte de</u> I .

Il résulte aussitôt de cette définition que si une fonction est <u>limite uniforme de fonctions règlées</u> dans toute partie compacte de I , elle est elle-même <u>règlée</u> dans I (autrement dit, l'espace vectoriel des fonctions règlées dans I , muni de la structure uniforme de la convergence uniforme sur les ensembles compacts, est <u>complet</u>).

Nous allons transformer la déf.4 en une autre équivalente :

THEOREME 2.- Pour qu'une fonction f définie dans un intervalle I soit règlée, il faut et il suffit qu'elle ait une limite à droite et une limite à gauche en tout point intérieur à I , une limite à droite à l'origine de I , et une limite à gauche à l'extrémité de I , lorsque ces points appartiennent à I . L'ensemble des points de discontinuité de f dans I est alors dénombrable.

1° La condition est nécessaire. Supposons en effet que f soit règlée dans I , et soit x un point quelconque de I distinct de l'extrémité de I , $[x,y]$ un intervalle compact contenu dans I et non réduit à un point. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier g telle que $\|f(z)-g(z)\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $z \in [x,y]$; comme g admet une limite à droite au point x , il existe $y' \in]x,y]$ tel que, pour tout couple de points z, z' de l'intervalle $]x,y'[$, on ait $\|g(z)-g(z')\| \leqslant \varepsilon$, et par suite $\|f(z)-f(z')\| \leqslant 3\varepsilon$; cela prouve (critère de Cauchy) que f a une limite à droite au point x . On montre de même que f a une limite à gauche en tout point de I distinct de l'origine de I .

2° La condition est suffisante. Supposons-la remplie, et soit J un intervalle compact contenu dans I ; pour tout $x \in J$ il existe un intervalle ouvert $V_x =]c_x, d_x[$ contenant x et tel que, dans l'intersection de J et de chacun des intervalles ouverts $]c_x, x[$, $]x, d_x[$, l'oscillation de f soit $\leqslant \varepsilon$. Comme J est compact, il existe un nombre fini de points x_i de J tels que les V_{x_i} forment un recouvrement de I ; soit $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ la suite obtenue en rangeant dans l'ordre croissant les points de l'ensemble fini formé de l'origine et de l'extrémité de J et des points x_i , c_{x_i} et d_{x_i} qui appartiennent à J ; dans tout intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ f a une oscillation $\leqslant \varepsilon$; soit c_k une de ses valeurs dans cet intervalle $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$.

En posant $g(a_k)=f(a_k)$ pour $0\leqslant k\leqslant n$, et, pour tout $x\in\left]a_k,a_{k+1}\right[$ $g(x)=c_k$ $(0\leqslant k\leqslant n-1)$, on définit une fonction en escalier g telle que $\|f(z)-g(z)\|\leqslant\varepsilon$ pour tout $z\in J$; donc f est règlée dans I .

Pour voir que les points de discontinuité de f dans I forment un ensemble dénombrable, il suffit de le démontrer lorsque I est compact, puisque dans le cas général, I est réunion d'une suite croissante d'intervalles compacts. Or, lorsque I est compact, pour tout $n>0$ il existe une fonction en escalier g_n telle que $\|f(x)-g_n(x)\|\leqslant 1/n$ dans I ; la suite (g_n) convergeant uniformément vers f dans I , f est continue en tout point où les g_n sont toutes continues (<u>Top.gén.</u>,chap.X, §2) mais comme g_n est continue sauf aux points d'un ensemble fini H_n , f est continue aux points du complémentaire de l'ensemble $H=\bigcup_n H_n$, qui est dénombrable.

Le th.2 montre en particulier que toute fonction <u>continue</u> dans I est règlée.

COROLLAIRE 1.- <u>Une fonction numérique monotone dans I est règlée.</u>

En effet, si a et b sont l'origine et l'extrémité de I , une fonction monotone dans I admet une limite à droite en tout point de $\left[a,b\right[$, et une limite à gauche en tout point de $\left]a,b\right]$ (<u>Top.gén.</u>, chap.IV, §5, prop.4) .

COROLLAIRE 2.- <u>Soient</u> f_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ <u>n fonctions règlées dans un intervalle</u> I , f_i <u>prenant ses valeurs dans un espace vectoriel</u> E_i <u>de dimension finie sur</u> $\mathbb{R}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. <u>Si</u> g <u>est une application continue du sous-espace</u> $\prod_{i=1}^{n}\overline{f_i(I)}$ <u>de</u> $\prod_{i=1}^{n}E_i$ <u>dans un espace vectoriel F de dimension finie sur</u> $\mathbb{R}$, <u>la fonction composée</u> $x\to g(f_1(x),f_2(x),\dots,f_n(x))$ <u>est règlée dans</u> I .

En effet, elle satisfait de façon évidente aux conditions du th.2 .

On voit en particulier que si f est une fonction vectorielle règlée dans I , la fonction scalaire $x \to \|f(x)\|$ est aussi règlée. De même, les fonctions <u>scalaires</u> règlées dans I forment un <u>anneau</u>.

<u>Remarque</u>.- Si f est une fonction scalaire règlée dans I , ~~g une~~ g une fonction vectorielle règlée dans un intervalle contenant f(I), la fonction composée $g \circ f$ n'est pas nécessairement règlée dans I (cf. exerc. 1).

THEOREME 3.- <u>Toute fonction règlée f dans un intervalle I admet une primitive</u> (impropre) <u>dans</u> I ; <u>en outre, en tout point de I , sauf l'extrémité</u> (resp. <u>l'origine</u>) <u>de</u> I , <u>si ce point appartient à I</u> , <u>toute primitive de f a une dérivée à droite égale à</u> $f(x+)$ (resp. <u>une dérivée à gauche égale à</u> $f(x-)$).

La seconde partie de l'énoncé résulte de la première et de la prop4 du § 2. Pour voir que toute fonction règlée admet une primitive, il suffit, d'après le cor.1 du th.1, de le démontrer pour la fonction caractéristique φ d'un intervalle ouvert $]a,b[$. Or il est clair que la fonction égale à x dans $]a,b[$, à a pour $x \leqslant a$ et à b pour $x \geqslant b$ est une primitive (impropre) de φ .

COROLLAIRE.- <u>Toute fonction continue dans</u> I <u>admet une primitive</u> propre <u>dans</u> I .

<u>Remarques</u>.- 1) Pour démontrer ce dernier corollaire, on peut utiliser le fait que tout <u>polynome</u> (à coefficients dans E) d'une variable réelle admet une primitive ; comme d'après le th. de Weierstrass (<u>Top.gén.</u>,chap.X, § 4) toute fonction continue est limite uniforme de polynomes dans tout intervalle compact, le cor.1 du th.1 montre que toute fonction continue admet une primitive.

2) Le principe de la méthode précédente s'étend sans modification importante aux fonctions vectorielles d'une variable <u>complexe</u>. Si U est un domaine relativement compact dans $\mathbb{C}$, une <u>primitive</u> d'une fonction vectorielle f définie dans U est par définition une fonction continue dans U , ayant une dérivée égale à f en tout point de U . Avec cette définition, le th.1 s'étend sans modification (on démontre en effet, en tenant compte de ce que U est connexe, que (g_a) est localement uniformément convergente suivant $\mathfrak{F}$ en tout point de U , d'où résulte que (g_a) est uniformément convergente suivant $\mathfrak{F}$ sur toute partie compacte de U ; la fin de la démonstration se fait en utilisant la prop.3 du §2). Par suite, toute fonction qui est <u>limite uniforme de polynomes</u> dans toute partie compacte de U , admet une primitive dans U ; ces fonctions ne sont autres que les fonctions dites <u>holomorphes</u> dans U , que nous étudierons en détail dans un Livre ultérieur.

3) Il ne faudrait pas croire que les fonctions réglées dans un intervalle I soient les seules fonctions ayant une primitive dans I (cf.exerc. 3 et 4).

<u>4. Intégrales</u>.

Nous allons désormais nous borner à l'étude des primitives des fonctions <u>réglées</u> dans un intervalle I ; la primitive d'une telle fonction f , qui s'annule en un point $x_0 \in I$, se notera $\int_{x_0} f$ ou $\int_{x_0} f(t)$, ou enfin $\int_{x_0} f(t)dt$; la valeur de cette primitive en un point quelconque $x \in I$ se notera $\int_{x_0}^{x} f$ ou $\int_{x_0}^{x} f(t)$, ou enfin $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$, et s'appelle <u>intégrale de la fonction</u> f <u>de</u> x_0 <u>à</u> x ; c'est un élément de l'espace E où f prend ses valeurs. Si h est une primitive quelconque de f dans I , on a identiquement

(1) $$h(x)-h(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

Le premier membre de cette formule s'écrit aussi souvent $h(t)\Big|_{x_0}^{x}$

<u>Remarques</u>.- 1) La terminologie et les notations précédentes sont empruntées au Calcul intégral, qui constitue, sous certains de ses aspects, une généralisation étendue de la théorie précédente (cf. Livre VI).

2) L'expression $\int_{x_0}^{x} f(t)$, ou $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$, est un "symbole fonctionnel" dans lequel x, x_0 et f sont des variables <u>libres</u>, t une variable <u>liée</u> (cf. Livre I, chap. II, § 1) ; on peut donc y remplacer t par tout autre argument distinct de x, x_0 et f (et des arguments qui entrent éventuellement dans la démonstration où figure un tel symbole) sans changer le sens du symbole obtenu (le lecteur comparera ces symboles à des symboles tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$, où i est de même une variable liée).

Nous avons obtenu (th. 1 et déf. 4) la valeur de l'intégrale d'une fonction règlée f (entre deux nombres fixes x_0 et x) comme limite d'intégrales (entre les mêmes nombres) de fonctions en escalier. Ce procédé peut s'exprimer de façon légèrement différente ; supposons par exemple $x_0 < x$, et appelons <u>subdivision</u> de l'intervalle $[x_0, x]$ toute suite d'intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, de réunion $[x_0, x]$, où $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une suite strictement croissante de points de $[x_0, x]$ telle que $x_n = x$. Nous appellerons <u>somme de Riemann</u> relative à la fonction f et à la subdivision formée des $[x_i, x_{i+1}]$, toute expression de la forme $\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1}-x_i)$, où t_i appartient à $[x_i, x_{i+1}]$ pour $0 \leq i \leq n-1$. On peut alors énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 2.- <u>Soit f une fonction règlée dans un intervalle I, $[x_0, x]$ un intervalle compact contenu dans I. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\rho > 0$ tel que, pour toute subdivision de $[x_0, x]$</u>

<u>en intervalles de longueur</u> $\leqslant \rho$, <u>on ait</u>

(2) $$\left\| \int_{x_0}^{x} f(t)dt - \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1}-x_i) \right\| \leqslant \varepsilon$$

<u>pour toute somme de Riemann relative à cette subdivision</u>.

En effet, soit g une fonction en escalier telle que $\| f(y)- g(y)\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $y \in [x_0,x]$; on a $\left\| \int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} g(t)dt \right\| \leqslant \varepsilon(x-x_0)$ d'après le th. des accroissements finis, et

$$\left\| \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1}-x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i)(x_{i+1}-x_i) \right\| \leqslant \varepsilon(x-x_0)$$

Il suffit donc de démontrer la proposition lorsque f est une <u>fonction en escalier</u>. Soit $(y_k)_{0\leqslant k\leqslant m}$ la suite finie strictement croissante telle que $y_0=x_0$, $y_m=x$, les y_k intérieurs à $[x_0,x]$ étant les points de discontinuité de f . Pour toute subdivision de $[x_0,x]$ en intervalles de longueur $\leqslant \rho$, chacun des points y_k appartient à deux intervalles au plus ; il ne peut donc y avoir que 2m intervalles au plus dans lesquels la fonction f soit discontinue, et par suite non constante ; or, dans un tel intervalle $[x_i,x_{i+1}]$, on a $\left\| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt- f(t_i)(x_{i+1}-x_i) \right\| \leqslant M(x_{i+1}-x_i)$, en désignant par M l'oscillation de f dans $[x_0,x]$; au contraire, si f est constante dans $[x_i,x_{i+1}]$, on a $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt- f(t_i)(x_{i+1}-x_i)=0$. On voit donc que la différence $\left\| \int_{x_0}^{x} f(t)dt - \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1}-x_i) \right\|$ ne peut excéder $2Mm\rho$; il suffit donc de prendre $\rho \leqslant \frac{\varepsilon}{2Mm}$ pour obtenir (2).

<u>Remarque</u>.- Lorsque f est <u>continue</u>, la prop.2 se démontre plus simplement : comme f est uniformément continue dans $[x_0,x]$, il existe $\rho > 0$ tel que dans tout intervalle de longueur $\leqslant \rho$ contenu dans $[x_0,x]$, l'oscillation de f soit $\leqslant \frac{\varepsilon}{x-x_0}$; pour toute subdivision de $[x_0,x]$ en intervalles $[x_i,x_{i+1}]$ de longueur $\leqslant \rho$ et tout choix de t_i

dans $[x_i, x_{i+1}]$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, la fonction en escalier g égale à $f(t_i)$ dans $[x_i, x_{i+1}[$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, à $f(x_n)$ au point x_n, est telle que $\| f(y) - g(y) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{x-x_0}$ dans $[x_0, x]$, d'où la relation (2) par application du th. des accroissements finis, puisque l'on peut écrire

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1}-x_i) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt .$$

COROLLAIRE.- Si f est une fonction réglée dans I, on a

$$(3) \qquad \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)dt = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_0 + k \frac{x-x_0}{n}\right)$$

Cette formule montre que $\frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ est limite de la moyenne arithmétique des valeurs de f en n points équidistants appartenant à $[x_0, x]$; aussi cette expression s'appelle-t-elle encore la moyenne (ou valeur moyenne) de la fonction f dans l'intervalle $[x_0, x]$.

5. Propriétés des intégrales.

Les propriétés des intégrales des fonctions réglées ne sont autres que la traduction, dans la notation qui leur est propre, des propriétés des dérivées démontrées aux §§ 1 et 2.

En premier lieu, la formule (1) montre que, quels que soient les points x, y, z de I, on a

$$(4) \qquad \int_x^y f(t)dt + \int_y^x f(t)dt = 0$$

et

$$(5) \qquad \int_x^y f(t)dt + \int_y^z f(t)dt + \int_z^x f(t)dt = 0 .$$

D'après la prop. 1 du § 1, on a

$$(6) \qquad \int_{x_0} (f+g) = \int_{x_0} f + \int_{x_0} g$$

et, pour tout scalaire fixe k

$$(7) \qquad \int_{x_0} kf = k \int_{x_0} f .$$

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{R}$, u une application linéaire de E dans F. Si f est une fonction réglée dans I à valeurs dans E, $u \circ f$ est une fonction réglée dans I, à valeurs dans F, et on a $\int_a^b u(f(t))dt = u(\int_a^b f(t)dt)$ (§ 1, prop.2)

Soient maintenant E,F,G trois espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbf{R}$, $(x,y) \to [x.y]$ une application bilinéaire de $E \times F$ dans G. Soient f et g deux fonctions vectorielles définies et continues dans I, prenant leurs valeurs dans E et F respectivement : supposons en outre que f et g soient toutes deux primitives de fonctions <u>règlées</u> dans I, que nous désignerons par f' et g' par abus de langage (ces fonctions ne sont en effet égales respectivement aux dérivées de f et g qu'aux points du complémentaire d'un ensemble dénombrable). D'après la prop.3 du § 1 et le th.3 ci-dessus, la fonction $h(x) = [f(x).g(x)]$ admet en tout point x de I, sauf aux points d'une partie dénombrable A de I, une dérivée égale à $[f(x).g'(x)]+[f'(x).g(x)]$. Or, d'après la continuité de $[x.y]$ et le th.2, chacune des fonctions $[f.g']$ et $[f'.g]$ est une fonction règlée dans I ; on en déduit la formule

$$(8) \qquad \int_{x_0}^{x} [f(t).g'(t)]dt = [f(t).g(t)]\Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} [f'(t).g(t)]dt$$

dite <u>formule d'intégration par parties</u>, qui permet de calculer de nombreuses primitives.

Par exemple, la formule d'intégration par parties donne la formule suivante

$$\int_{x_0}^{x} t f'(t)dt = t f(t)\Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

et ramène donc l'un à l'autre le calcul des primitives des deux fonctions $f(x)$ et $x f'(x)$.

De même, si f et g sont n fois dérivables dans un intervalle ouvert I, et si $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$ sont des fonctions règlées dans I, la formule (5) du § 3 équivaut à la suivante :

(9) $$\int_{x_0}^{x}\left[f^{(n)}(t).\,g(t)\right]dt = \\ = \left(\sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p\left[f^{(n-p-1)}(t).\,g^{(p)}(t)\right]\right)\Big|_{x_0}^{x} + (-1)^n\int_{x_0}^{x}\left[f(t).\,g^{(n)}(t)\right]dt$$

et s'appelle alors formule d'intégration par parties d'ordre n .

Traduisons maintenant la formule de dérivation des fonctions composées (§ 1, prop. 5). Soit f une fonction scalaire définie et continue dans I , et qui soit primitive d'une fonction réglée dans I (que nous désignerons encore par f' par abus de langage) ; soit d'autre part g une fonction vectorielle continue dans un intervalle ouvert J contenant f(I) ; si h désigne une primitive quelconque de g dans J , h admet en tout point de J une dérivée égale à g (cor. du th. 3) ; donc la fonction composée $h \circ f$ admet une dérivée égale à $g(f(x))f'(x)$ en tous les points du complémentaire (par rapport à I) d'une partie dénombrable de I (§ 1, prop. 5) ; comme la fonction $g(f(x))f'(x)$ est réglée d'après le th. 2, on peut écrire la formule

(10) $$\int_{x_0}^{x} g(f(t))f'(t)dt = \int_{f(x_0)}^{f(x)} g(u)du$$

dite formule du changement de variable, qui facilite également le calcul des primitives.

Si on prend par exemple $f(x)=x^2$, on voit que la formule (10) ramène l'un à l'autre le calcul des primitives des fonctions $g(x)$ et $x\,g(x^2)$.

Le th. des accroissements finis (§ 2, th. 1) donne, pour les fonctions numériques réglées, la proposition suivante :

PROPOSITION 3 (théorème de la moyenne). - Soit f une fonction numérique réglée dans un intervalle compact $I = [a,b]$; si J est l'ensemble des points de I où f est continue, et $m = \inf_{x\in J} f(x)$ $M = \sup_{x\in J} f(x)$, on a

(11) $$m < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt < M$$

sauf lorsque f est constante dans J , auquel cas les trois membres de (11) sont égaux.

En d'autres termes, la moyenne de la fonction règlée f dans I est comprise entre les bornes de f dans la partie de I où f est continue.

COROLLAIRE 1.- Si une fonction numérique f règlée dans I est telle que $f(x) \geqslant 0$ aux points où f est continue, on a $\int_a^b f(t)dt > 0$ sauf si $f(x)=0$ aux points où f est continue.

COROLLAIRE 2.- Soient f et g deux fonctions numériques règlées dans I, telles que $g(x) \geqslant 0$ aux points où g est continue ; si m et M sont les bornes inférieure et supérieure de f dans l'ensemble des points de I où f est continue, on a

$$m \int_a^b g(t)dt \leqslant \int_a^b f(t)g(t)dt \leqslant M \int_a^b g(t)dt \tag{12}$$

Les deux premiers membres (resp. les deux derniers) ne sont égaux que si $g(x)(f(x)-m) = 0$ (resp. $g(x)(f(x)-M)=0$) en tout point où f et g sont continues.

Dans la prop.3 et ses corollaires, on peut naturellement remplacer partout les limites à droite par les limites à gauche.

Pour les fonctions vectorielles, on a de même les propriétés suivantes :

PROPOSITION 4.- Soit $\mathbf{f}$ une fonction vectorielle règlée dans $I = [a,b]$, prenant ses valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'aux points du complémentaire par rapport à I d'une partie dénombrable A de I, $\mathbf{f}(x)$ appartient à une partie convexe fermée D de E. Dans ces conditions, pour toute fonction numérique $g \geqslant 0$, règlée dans I et telle que $\int_a^b g(t)dt > 0$, le point $\mathfrak{a} = (\int_a^b \mathbf{f}(t)g(t)dt)/(\int_a^b g(t)dt)$ appartient à D ; il ne peut appartenir à la coque de D que si $\mathbf{f}(t)$ appartient à l'intersection de D et de tous les hyperplans d'appui de D en $\mathfrak{a}$, en tout point de $I \cap \complement A$ où $\mathbf{f}$ et g sont continues et $g(t) \neq 0$.

COROLLAIRE.- Soit $\|x\|$ une norme sur E , f une fonction vectorielle règlée, g une fonction numérique règlée et $\geqslant 0$ dans I . On a

(13) $$\left\| \int_a^b f(t)g(t)dt \right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\| g(t)dt$$

En outre, si $\|x\|$ est la norme euclidienne dans $E=\mathbb{R}^n$, les deux membres de (13) ne peuvent être égaux que s'il existe un vecteur fixe a tel que $f(t)= a\|f(t)\|$ en tout point où f et g sont continues et $\neq 0$.

En particulier, on a
$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\| dt$$
et lorsque $\|x\|$ est la norme euclidienne, l'égalité n'a lieu que si $f(t)= a\|f(t)\|$ aux points où f est continue.

6. Forme intégrale du reste de la formule de Taylor ; primitives d'ordre supérieur .

La formule d'intégration par parties d'ordre n (formule (9)) permet d'exprimer sous forme d'une intégrale le reste $r_n(x)$ du développement de Taylor d'ordre n d'une fonction f admettant une dérivée (n+1)-ème règlée dans un intervalle I ; en effet, en remplaçant, dans (9) , f par f' , x_o par a et g(t) par la fonction $\frac{(t-x)^n}{n!}$, il vient

(15) $$f(x)=f(a)+ \frac{x-a}{1!} f'(a)+f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!}+\ldots+ f^{(n)} (a) \frac{(x-a)^n}{n!} + \\ + \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(t-x)^n}{n!} dt$$

autrement dit

(16) $$r_n(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(t-x)^n}{n!} dt$$

formule qui permet souvent d'obtenir des majorations simples du reste.

Etant donnée une fonction f règlée dans un intervalle I , une primitive quelconque g de f , étant continue dans I , admet à son tour une primitive ; une quelconque des primitives de g est appelée primitive seconde de f . Plus généralement, on appelle primitive d'ordre n de f une primitive d'une primitive d'ordre n-1 de f . On voit immédiatement, par récurrence sur n , que la différence de deux primitives d'ordre n de f est un <u>polynome de degré au plus égal à</u> $n-1$ (à coefficients dans E). Une primitive d'ordre n de f est entièrement déterminée si on se donne, en un point a de I, sa valeur et celles de ses $n-1$ premières dérivées.

On désignera en particulier par la notation $\int_a^{(n)} f$ celle des primitives d'ordre n de la fonction f qui est nulle au point a, ainsi que ses $n-1$ premières dérivées. La formule de Taylor d'ordre $n-1$, appliquée à cette primitive, montre que

$$\int_a^{(n)x} f = \int_a^x f(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt \tag{17}$$

et ramène donc la détermination des primitives d'ordre n au calcul d'une seule intégrale.

7. Intégrales impropres.

Soit I un intervalle quelconque dans $\mathbb{R}$, $(c_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une suite finie strictement croissante de points de $\overline{\mathbb{R}}$, telle que c_0 soit l'origine et c_n l'extrémité de I ; on suppose qu'une fonction vectorielle f, à valeurs dans E, soit réglée dans tout intervalle contenu dans I et ne contenant pas les c_i ; proposons-nous de chercher à quelle condition f admet une <u>primitive</u> (impropre) <u>dans l'intérieur de l'intervalle</u> I tout entier.

S'il existe une telle primitive g, et si a est un point de l'intervalle $]c_i, c_{i+1}[$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, on a par hypothèse, pour tout x appartenant à cet intervalle, $g(x) - g(a) = \int_a^x f(t)dt$; g étant continue dans l'intérieur de I par hypothèse, on voit que $\int_a^x f(t)dt$ doit tendre vers une limite dans E lorsque x tend vers c_{i+1} à gauche (pour $i < n-1$) et lorsque x tend vers c_i à droite (pour $i > 0$). Inversement, supposons que ces conditions soient vérifiées, et soit g_i une primitive de f dans l'intervalle $]c_i, c_{i+1}[$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$;

on voit aussitôt que la fonction g, définie dans le complémentaire par rapport à I) de l'ensemble des c_i par la condition d'être égale à $g_i(x)+\sum_{k=1}^{i}(g_{k-1}(c_k-)-g_k(c_k+))$ dans $]c_i,c_{i+1}[$ pour $0\leqslant i\leqslant n-1$, est continue en tout point intérieur à I et distinct des c_i $(1\leqslant i\leqslant n-1)$ et admet en chacun des c_i $(1\leqslant i\leqslant n-1)$ une limite à droite et une limite à gauche égales ; elle peut donc être prolongée par continuité en chacun des c_i $(1\leqslant i\leqslant n-1)$, et la fonction prolongée est évidemment une primitive (impropre) de f dans I .

On notera qu'au contraire de ce qui se passe pour la primitive d'une fonction règlée dans tout l'intervalle I , la primitive d'une fonction f du type précédent, lorsqu'elle existe, n'admet pas nécessairement de dérivées à droite ou à gauche aux points c_i intérieurs à I (cf. exerc. 5).

L'existence de la primitive de f dans I n'implique pas l'existence des limites de cette primitive à l'origine et à l'extrémité de I ; lorsqu'en outre ces deux limites existent, on dit que f admet une intégrale impropre dans I ; en d'autres termes :

DEFINITION 5.- Soit $(c_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une suite strictement croissante de points de $\overline{R}$, f une fonction règlée dans chacun des intervalles ouverts $]c_i,c_{i+1}[$ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$, mais non règlée dans aucun intervalle ouvert contenant au moins un des c_i tels que $1\leqslant i\leqslant n-1$ (on dit que f est règlée dans $]c_0,c_n[$ sauf au voisinage des c_i tels que $1\leqslant i\leqslant n-1$). On dit que f admet une intégrale impropre dans un intervalle d'extrémités c_0,c_n si, dans chacun des intervalles $]c_i,c_{i+1}[$ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$, toute primitive de f admet (dans E) une limite à droite au point c_i et une limite à gauche au point c_{i+1} ; si g est une primitive de f dans $]c_0,c_n[$, on appelle intégrale impropre (ou simplement intégrale) de f de x_0 à x (pour $c_0\leqslant x_0\leqslant x\leqslant c_n$) l'élément $g(x-)-g(x_0+)$ qu'on note encore $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$.

Ce qui précède ramène la question de l'existence de l'intégrale impropre de f dans un intervalle I au cas où I est un intervalle non compact de $\mathbb{R}$ d'extrémités a,b ($a < b$), où f est règlée dans I et : 1° ou bien un des nombres a,b (au moins) est infini ; 2° ou bien f n'est pas règlée dans un intervalle compact contenant au moins un des points a,b (les deux hypothèses ne s'excluant pas mutuellement). Pour que f ait une intégrale impropre dans I, il faut et il suffit alors que l'intégrale $\int_x^y f(t)dt$ tende vers une limite lorsque le point (x,y) tend vers $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ en restant dans $I \times I$, et cette limite n'est autre que $\int_a^b f(t)dt$ par définition.

Remarquons maintenant que les intervalles compacts $J \subset I$ forment un <u>ensemble ordonné filtrant</u> $\mathfrak{K}(I)$ pour la relation $\subset$ (*), car si $[\alpha,\beta]$ et $[\gamma,\delta]$ sont deux intervalles compacts contenus dans I, et si on pose $\lambda = \min(\alpha,\gamma)$, $\mu = \max(\beta,\delta)$, l'intervalle $[\lambda,\mu]$ est contenu dans I et contient les deux intervalles considérés ; si, pour tout intervalle compact $J = [\alpha,\beta]$ contenu dans I, on pose $\int_J f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(t)dt$, il résulte aussitôt des remarques précédentes et de la définition de la limite suivant un ensemble ordonné filtrant que :

PROPOSITION 5.- <u>Pour qu'une fonction f règlée dans I ait une intégrale impropre dans I, il faut et il suffit que l'application $J \to \int_J f(t)dt$ ait une limite dans E suivant l'ensemble ordonné filtrant</u> $\mathfrak{K}(I)$ <u>des intervalles compacts contenus dans I</u>.

(*) Rappelons (Ens. R, §6) qu'un ensemble $\mathfrak{F}$ de parties de I est <u>filtrant pour la relation</u> $\subset$ si, quels que soient $X \in \mathfrak{F}$, $Y \in \mathfrak{F}$, il existe $Z \in \mathfrak{F}$ tel que $X \subset Z$ et $Y \subset Z$. Si S(X) désigne la partie de $\mathfrak{F}$ formée des $Y \in \mathfrak{F}$ tels que $X \subset Y$, les S(X) forment la base d'un filtre sur $\mathfrak{F}$, dit <u>filtre des sections</u> de $\mathfrak{F}$; la limite (si elle existe) d'une application f de $\mathfrak{F}$ dans un espace topologique, suivant le filtre des sections de $\mathfrak{F}$, est encore dite <u>limite de f suivant l'ensemble ordonné filtrant</u> $\mathfrak{F}$ (cf. <u>Top. gén.</u>, chap. I, §§5 et 6, et chap. IV, §5, n°2).

Cette limite est alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$, qu'on note encore $\int_I f(t)dt$. Par abus de langage, au lieu de dire que f a une intégrale impropre dans I , on dit encore que l'intégrale de f dans I est <u>convergente</u>.

<u>Exemples</u>.- 1) L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente et égale à 1 , car $\int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x}$.

2) L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est convergente et égale à 2 , car $\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2(1-\sqrt{x})$.

3) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite infinie de points de E , et soit f la fonction en escalier définie dans l'intervalle $[1,+\infty[$ par les conditions : $f(x)=u_n$ pour $n\leqslant x<n+1$. Pour que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ soit convergente, il faut et il suffit que la série de terme général u_n soit <u>convergente</u> dans E ; en effet, on a $\int_1^n f(t)dt = \sum_{p=1}^{n-1} u_p$, donc la condition est nécessaire ; réciproquement, si la série de terme général u_n converge dans E , $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$; or, si $n\leqslant x<n+1$, on a $\int_1^x f(t)dt = \sum_{p=1}^{n-1} u_p + u_n(x-n)$, donc cette intégrale a bien pour limite $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ lorsque x tend vers $+\infty$.

La proposition suivante est une conséquence de la prop.5 et du critère de Cauchy (E étant <u>complet</u>) :

PROPOSITION 6 (critère de Cauchy pour les intégrales).- <u>Pour que l'intégrale impropre d'une fonction règlée</u> f <u>dans un intervalle</u> I <u>existe, il faut et il suffit que, pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe un intervalle un intervalle compact</u> $J_0=[\alpha,\beta]$ <u>contenu dans</u> I , <u>tel que, pour tout intervalle compact</u> $K=[x,y]$ <u>contenu dans</u> I <u>et n'ayant aucun point intérieur commun avec</u> J_0 , <u>on ait</u> $\left\| \int_x^y f(t)dt \right\| \leqslant \varepsilon$.

En effet, le critère de Cauchy montre que, pour que l'intégrale $\int_I f(t)dt$ soit convergente, il faut et il suffit qu'il existe un intervalle compact $J_0=[\alpha,\beta]$ tel que, pour tout intervalle compact J contenant J_0, on ait

$$\left\| \int_J f(t)dt - \int_{J_0} f(t)dt \right\| \leqslant \varepsilon$$

En particulier, si $x \leqslant \alpha$ est dans I, on aura $\left\| \int_x^\alpha f(t)dt \right\| \leqslant \varepsilon$, d'où, si $x < y \leqslant \alpha$, $\left\| \int_x^y f(t)dt \right\| \leqslant 2\varepsilon$; on voit de même que, si $\beta \leqslant x < y$, on a $\left\| \int_x^y f(t)dt \right\| \leqslant 2\varepsilon$. Réciproquement, si pour tout intervalle compact $K=[x,y]$ n'ayant aucun point intérieur commun avec J_0, on a $\left\| \int_x^y f(t)dt \right\| \leqslant \varepsilon$, pour tout intervalle compact $J=[u,v]$ contenant J_0, on aura $\left\| \int_u^\alpha f(t)dt \right\| \leqslant \varepsilon$, $\left\| \int_\beta^v f(t)dt \right\| \leqslant \varepsilon$, d'où

$$\left\| \int_J f(t)dt - \int_{J_0} f(t)dt \right\| = \left\| \int_u^\alpha f(t)dt + \int_\beta^v f(t)dt \right\| \leqslant 2\varepsilon .$$

<u>Exemple</u>.- Si l'intervalle I est <u>borné</u>, et si la fonction f est <u>bornée</u> dans I, l'intégrale $\int_I f(t)dt$ existe toujours, car on a, d'après le th. de la moyenne

$$\left\| \int_x^\alpha f(t)dt \right\| \leqslant (\alpha-a) \sup_{x\in I} \| f(x) \| , \left\| \int_\beta^y f(t)dt \right\| \leqslant (b-\beta) \sup_{x\in I} \| f(x) \|$$

et il suffit donc de prendre $\alpha-a$ et $b-\beta$ assez petits pour que le critère de Cauchy soit satisfait.

La déf. 5 montre que, si f admet une intégrale impropre dans un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$, les formules (4) et (5) sont encore valables dans cet intervalle, ainsi que (7) pour tout scalaire k ; de même, si f et g admettent chacune une intégrale impropre dans un même intervalle, il en est de même de $f+g$, et on a la formule (6) ; si u est une application linéaire de E dans un espace vectoriel F, $u\circ f$ admet une intégrale impropre dans I et on a $\int_{x_0} u(f(t))dt = u(\int_{x_0}^x f(t)dt)$ dans cet intervalle.

On généralise de même la formule d'intégration par parties (formule (8)) aux intégrales impropres ; il faut y supposer que f et g sont

sont des primitives de fonctions f' et g' qui sont règlés dans I sauf au voisinage d'un nombre fini de points ; si on désigne par $[f\cdot g]\Big|_{x_0}^{x}$ la limite (lorsqu'elle existe) de $[f\cdot g]\Big|_{y}^{z}$ lorsque (y,z) tend vers (x_0,x) $(x_0<y\leqslant z<x)$, on voit que si deux des trois expressions $[f\cdot g]\Big|_{x_0}^{x}$, $\int_{x_0}^{x}[f(t).g'(t)]dt$, $\int_{x_0}^{x}[f'(t).g(t)]dt$ existent, il en est de même de la troisième, et que la formule (8) subsiste.

Nous laissons au lecteur le soin d'étendre de la même façon la formule d'intégration par parties d'ordre n .

Enfin, soit f une fonction scalaire définie et continue dans I , primitive d'une fonction f' qui est règlée dans I sauf au voisinage d'un nombre fini de points ; soit d'autre part g une fonction vectorielle continue dans un intervalle ouvert I' contenant $f(I)$; on voit aussitôt que $g(f(x))f'(x)$ admet une primitive dans I ; en outre si elle admet une intégrale impropre entre les points x_0 et x de $\bar{I}$, et si f est continue en ces points, g admet une intégrale impropre entre $f(x_0)$ et $f(x)$ et réciproquement, et on a la formule (10). On peut en effet pour le démontrer se borner au cas où f est règlée dans I , $f(x_0)$ et $f(x)$ les extrémités de I' ; par hypothèse, si $(y,z)\in I\times I$ tend vers (x_0,x) , $(f(y),f(z))$ tend vers $(f(x_0),f(x))$; la proposition résulte donc de la formule (10), appliquée entre y et z , et de la définition b .

8. Intégrales impropres de fonctions positives.

PROPOSITION 7.- Soit f une fonction numérique règlée et $\geqslant 0$ dans un intervalle $I\subset \mathbb{R}$. Pour que l'intégrale impropre de f dans I soit convergente, il faut et il suffit que l'ensemble des nombres $\int_J f(t)dt$ soit majoré, lorsque J parcourt l'ensemble des intervalles compacts contenus dans I ; l'intégrale $\int_I f(t)dt$ est alors la borne supérieure l'ensemble des $\int_J f(t)dt$.

En effet, comme $f \geqslant 0$, la relation $J \subset J'$ entraîne $\int_J f(t)dt \leqslant \int_{J'} f(t)dt$; l'application $J \to \int_J f(t)dt$ est donc croissante, et la proposition est une conséquence du théorème de la limite monotone (Top.gén.,chap.IV, § 5, th.2).

Lorsque l'application $J \to \int_J f(t)dt$ n'est pas bornée, elle a pour limite $+\infty$ suivant l'ordonné filtrant $\mathfrak{K}(I)$; on dit alors, par extension, que l'intégrale $\int_I f(t)dt$ est égale à $+\infty$. Les propriétés des intégrales impropres établies ci-dessus s'étendent (lorsqu'il s'agit de fonctions $\geqslant 0$) au cas où certaines des intégrales qui interviennent dans ces propriétés sont infinies, pourvu que les relations où elles figurent gardent un sens.

PROPOSITION 8 (principe de comparaison).- Soient f et g deux fonctions numériques réglées dans un intervalle $I \subset R$, telles que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ en tout point où f et g sont continues. Si l'intégrale impropre de g dans I est convergente, il en est de même de l'intégrale impropre de f, et on a $\int_I f(t)dt \leqslant \int_I g(t)dt$. En outre, les deux intégrales ne peuvent être égales que si $f(x)=g(x)$ en tout point de I où f et g sont continues.

En effet, pour tout intervalle compact $J \subset I$, on a $\int_J f(t)dt \leqslant \int_J g(t)dt$; comme $\int_J g(t)dt \leqslant \int_I g(t)dt$, l'intégrale $\int_J f(t)dt$ reste bornée, donc l'intégrale de f dans I est convergente ; en outre, en passant à la limite, on a $\int_I f(t)dt \leqslant \int_I g(t)dt$. Supposons en outre que $f(x) < g(x)$ en un point $x \in I$ où f et g sont continues ; il existe alors un intervalle compact $[c,d]$ contenu dans I, non réduit à un point et tel que $x \in [c,d]$; on a $\int_c^d f(t)dt < \int_c^d g(t)dt$ (cor.1 de la prop.5), et comme d'autre part $\int_a^c f(t)dt \leqslant \int_a^c g(t)dt$ et $\int_d^b f(t)dt \leqslant \int_d^b g(t)dt$ d'après ce qui précède, on voit en ajoutant membre à membre que $\int_a^b f(t)dt < \int_a^b g(t)dt$.

Cette proposition fournit le moyen le plus fréquemment employé pour décider si une intégrale impropre d'une fonction $f \geqslant 0$ est ou non convergente, en <u>comparant</u> f à une fonction plus simple g , dont on sait déjà si son intégrale est ou non convergente ; nous verrons au chap.IV comment peut se faire, dans les cas les plus usuels, la recherche de ces fonctions de comparaison, et nous en déduirons les critères d'application courante pour la convergence des intégrales impropres et des séries.

<u>9. Intégrales absolument convergentes</u>.

DEFINITION 6.- <u>On dit que l'intégrale impropre d'une fonction</u> f <u>réglée dans un intervalle</u> $I \subset \mathbb{R}$ <u>est absolument convergente, si l'intégrale de la fonction positive</u> $\|f(x)\|$ <u>dans</u> I <u>est convergente</u> .

PROPOSITION 9.- <u>Si l'intégrale impropre de</u> f <u>dans</u> I <u>est absolument convergente, elle est convergente, et on a</u>

$$(18) \qquad \left\| \int_I f(t)dt \right\| \leqslant \int_I \|f(t)\| \, dt$$

En effet, pour tout intervalle compact $J \subset I$, on a (formule (14))

$$(19) \qquad \left\| \int_J f(t)dt \right\| \leqslant \int_J \|f(t)\| \, dt$$

Si l'intégrale de la fonction positive $\|f(x)\|$ est convergente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle compact $[\alpha,\beta]$ contenu dans I , tel que, pour tout intervalle compact $[x,y]$ contenu dans I et n'ayant aucun point intérieur commun avec $[\alpha,\beta]$, on ait $\int_x^y \|f(t)\| dt \leqslant \varepsilon$ (prop.6) ; on en tire $\left\| \int_x^y f(t)dt \right\| \leqslant \varepsilon$, ce qui démontre la convergence de l'intégrale dans I (prop.6) ; en passant à la limite dans (19), on en déduit alors l'inégalité (18).

COROLLAIRE.- <u>Soient</u> E,F,G <u>trois espaces vectoriels de dimension finie sur</u> $\mathbb{R}$, $(x,y) \to [x \cdot y]$ <u>une application bilinéaire de</u> $E \times F$ <u>dans</u> G . <u>Soient</u> f, g <u>deux fonctions réglées dans</u> I , <u>à valeurs dans</u> E <u>et</u> F <u>respectivement. Si</u> f <u>est bornée dans</u> I <u>et si l'intégrale de</u> g <u>dans</u> I <u>est absolument convergente, l'intégrale de</u> $[f \cdot g]$ <u>dans</u> I <u>est absolument convergente</u>.

En effet, comme $[x.y]$ est continue dans $E \times F$, il existe un nombre $a > 0$ tel que $\|[x.y]\| \leqslant a \|x\| . \|y\|$ identiquement ; si on pose $b = \sup_{x \in I} \|f(x)\|$, on a donc $\|[f(x).g(x)]\| \leqslant ab \|g(x)\|$ dans I ; le principe de comparaison montre donc que l'intégrale de $[f.g]$ est absolument convergente, et on a, d'après (18), $\left\|\int_I [f(t).g(t)]\,dt\right\| \leqslant ab \int_I \|g(t)\|\,dt$.

Remarque.- Une intégrale impropre peut bien entendu être convergente sans l'être absolument. C'est ce que montre l'exemple de la fonction en escalier définie dans l'exemple 5 du n°7, lorsque la série de terme général u_n est convergente sans être absolument convergente.

Exercices.- 1) Donner un exemple d'une fonction réglée f dans un intervalle compact I telle que la fonction composée sgn f(x) ne soit pas réglée dans I (bien que sgn x soit réglée dans $\mathbb{R}$).

2) Pour qu'une fonction f soit égale à une fonction réglée dans un intervalle ouvert I, sauf en une infinité dénombrable de points de I, il faut et il suffit qu'elle satisfasse à la condition suivante : pour tout x dans I et tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $h > 0$ et deux éléments a, b de E tels que l'on ait $\|f(y) - a\| \leqslant \varepsilon$ pour tout y appartenant à $]x, x+h[$, sauf en une infinité dénombrable de points, et $\|f(z) - b\| \leqslant \varepsilon$ pour tout z appartenant à $]x-h, x[$ sauf en une infinité dénombrable de points.

*3) Montrer que la fonction égale à $\sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, à 0 pour $x=0$, admet une primitive (propre) dans $\mathbb{R}$ (remarquer que $x^2 \sin \frac{1}{x}$ admet une dérivée en tout point).

En déduire que, si $g(x,u,v)$ est une fonction continue dans le cube défini par $|x| \leqslant 1$, $|u| \leqslant 1$, $|v| \leqslant 1$, toute primitive de la fonction égale à $g(x, \sin \frac{1}{x}, \cos \frac{1}{x})$ pour $x \in [-1,+1]$ et et $x \neq 0$, à une valeur quelconque pour $x=0$, admet une dérivée pour $x=0$ (approcher uniformément g par un polynome en x,u,v, et appliquer le th.1). Donner un exemple où cette dérivée est distincte de $g(0,0,0)$. *

* 4) Montrer qu'il existe une fonction continue dans $]-1,+1[$ admettant une dérivée finie en tout point de cet intervalle, cette dérivée étant égale à $\sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}\right)$ aux points x distincts de $\frac{1}{n\pi}$ (n entier) et de 0 (Au voisinage de $x = \frac{1}{n\pi}$, faire le changement de variable $x = \frac{1}{n\pi + \operatorname{Arc\,sin} u}$ et utiliser l'exerc.3 ; à l'aide du même changement de variable, montrer qu'il existe une constante $a > 0$ tel que

$$\left| \int_{\frac{2}{(2n+1)\pi}}^{\frac{2}{(2n-1)\pi}} \sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}\right) dx \right| \leqslant \frac{a}{n^3}$$

(intégrale impropre) : en déduire que si on pose $g(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{x} \sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{t}}\right) dt$, g admet au point $x=0$ une dérivée nulle). *

5) soient α et β deux nombres réels finis tels que $\alpha < \beta$. Montrer que, si γ et δ sont deux nombres tels que $\alpha < \gamma \leqslant \delta < \beta$ il existe une fonction scalaire f , définie dans un intervalle $]0,a]$, ne prenant que les valeurs α et β , telle que dans tout intervalle $[\varepsilon,a]$ $(\varepsilon > 0)$, f soit une fonction en escalier et que, si on pose $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ (intégrale impropre), on ait

$$\liminf_{x\to 0,\, x>0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \gamma \ , \quad \lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \delta$$

(prendre pour $g(x)$ une fonction dont le graphe est une ligne brisée dont les cotés consécutifs ont pour pente α et β , et dont les sommets se trouvent alternativement, soit sur les droites $y=\gamma x$, $y=\delta x$ pour $\delta \neq \gamma$, soit sur la droite $y=\gamma x$ et la parabole $y = \gamma x + x^2$ pour $\delta = \gamma$).

Par la même méthode, montrer que, si γ et δ sont finis ou non ($\gamma < \delta$), il existe une fonction scalaire f définie dans $]0,a]$, telle que, dans tout intervalle $[\varepsilon,a]$, f soit une fonction en escalier, que l'intégrale impropre $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ existe, et qu'on ait

$$\liminf_{x\to 0, x>0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \gamma \quad , \quad \limsup_{x\to 0, x>0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \delta \ .$$

6) Soit f une fonction scalaire >0, définie dans un intervalle $]0,a]$, et réglée dans cet intervalle, telle que l'intégrale impropre $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ de f dans $]0,x]$ existe, mais n'ait pas de dérivée à droite au point 0 . Montrer qu'il existe une fonction f_1 réglée dans $]0,a]$, telle que $(f_1(x))^2=f(x)$ pour tout x , et que l'intégrale impropre $g_1(x)=\int_0^x f_1(t)dt$ existe et ait une dérivée à droite au point 0 (considérer d'abord le cas où f est identique à une fonction en escalier dans tout intervalle $[\varepsilon,a]$ ($\varepsilon > 0$). Dans ce cas, diviser chaque intervalle où f est constante en un assez grand nombre de parties égales, et prendre f_1 constant dans chacun de ces intervalles, le signe de f_1 étant différent dans deux intervalles consécutifs. Dans le cas général, approcher convenablement f par une fonction du type précédent).

7) Définir dans l'intervalle $[0,1]$ deux fonctions scalaires f,g telles que f et g admettent des primitives <u>propres</u>, mais que fg soit en tout point de $[0,1[$ la dérivée à droite d'une fonction continue qui n'admet pas de dérivée à gauche en un ensemble de points ayant la puissance du continu (utiliser la construction de l'exerc.6 et celle de l'exerc. 8 du § 2).

8) Soit f une fonction réglée dans un intervalle compact I . Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction g continue dans I et telle que $\int_I \| f(t)-g(t)\| dt \leq \varepsilon$ (se ramener au cas où f est une fonction en escalier). En déduire qu'il existe un polynome h tel que $\int_I \| f(t)-g(t)\| dt \leq \varepsilon$.

9) Soit f une fonction règlée dans $[a,b]$, prenant ses valeurs dans E, g une fonction règlée dans $[a,c]$ $(c > b)$, prenant ses valeurs dans F, $(x,y) \to [x.y]$ une application bilinéaire de $E \times F$ dans G. Montrer que

$$\lim_{h \to 0, h > 0} \int_a^b [f(t).g(t+h)]\,dt = \int_a^b [f(t).g(t)]\,dt$$

(se ramener au cas où f est une fonction en escalier).

10) Les hypothèses étant les mêmes que dans l'exerc. 9, montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\rho > 0$ tel que, pour toute subdivision de $[x_0, x] \subset [a,b]$ en intervalles de longueur $\leqslant \rho$, on ait

$$\left\| \int_a^b [f(t).g(t)]\,dt - \sum_{i=0}^{n} [f(u_i).g(v_i)](x_{i+1} - x_i) \right\| \leqslant \varepsilon$$

quels que soient, pour chaque indice i, les points u_i, v_i tels que $x_i \leqslant u_i \leqslant x_{i+1}$ et $x_i \leqslant v_i \leqslant x_{i+1}$ (se ramener au cas où f et g sont des fonctions en escalier).

11) On dit qu'une suite (x_n) de nombres réels appartenant à l'intervalle $[0,1]$ est <u>également répartie</u> dans cet intervalle si, pour tout couple de nombres α, β tels que $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$, on a, en désignant par $\nu_n(\alpha,\beta)$ le nombre des indices i tels que i $1 \leqslant i \leqslant n$ et $\alpha \leqslant x_i \leqslant \beta$,

$$(1) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{\nu_n(\alpha,\beta)}{n} = \beta - \alpha$$

Montrer que, si la suite (x_n) est également répartie, et si f est une fonction règlée dans $[0,1]$, on a

$$(2) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \int_0^1 f(t)\,dt$$

(se ramener au cas où f est une fonction en escalier). Réciproque.

Montrer que, pour que la suite (x_n) soit également répartie, il suffit que la relation (2) ait lieu pour toute fonction numérique f appartenant à un ensemble <u>partout dense</u> dans l'espace des fonctions continues dans $[0,1]$, muni de la topologie de la convergence uniforme.

12) Soit f une fonction numérique règlée dans un intervalle $[a,b]$. On pose

$$r(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a+k\,\frac{b-a}{n}) - \int_a^b f(t)dt$$

a) Montrer que, si f est croissante dans $[a,b]$, on a $0 \leqslant r(n) \leqslant \frac{b-a}{n}(f(b)-f(a))$.

b) Si f admet dans $[a,b[$ une dérivée à droite règlée et bornée, montrer qu'on a $\lim\limits_{n\to\infty} nr(n) = \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a))$ (en posant $x_k = a+k\,\frac{b-a}{n}$, remarquer qu'on a $r(n) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(x_{k+1})-f(t))dt$).

c) Donner un exemple de fonction f croissante dans $[a,b]$ telle que $nr(n)$ ne tende pas vers $\frac{b-a}{2}(f(b)-f(a))$ lorsque n croît indéfiniment (prendre pour f la limite d'une suite décroissante (f_n) de fonctions décroissantes dont les courbes représentatives sont des lignes brisées, telles que

$$f_n(a+k\,\frac{b-a}{2^n}) = f(a+k\,\frac{b-a}{2^n}) \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant k \leqslant 2^n$$

et

$$(b-a)\sum_{k=1}^{2^n} f_n(a+k\,\frac{b-a}{2^n}) - 2^n\int_a^b f_n(t)dt \geqslant \frac{3}{4}(b-a)(f_n(b)-f_n(a)).$$

13) a) Soit f une fonction règlée dans un intervalle ouvert borné $]a,b[$, telle qu'il existe une fonction scalaire g, décroissante dans $]a,b[$, telle que $\|f(x)\| \leqslant g(x)$, et que l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ soit convergente. Montrer que, si (ε_n) est une suite de nombres >0, tendant vers 0 et telle que $\inf\limits_n n\varepsilon_n > 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+\varepsilon_n+k\,\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(t)dt \tag{3}$$

b) Donner un exemple de fonction règlée f telle que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ soit absolument convergente, qu'il n'existe pas de fonction décroissante g telle que $\|f(x)\| \leqslant g(x)$ et que $\int_a^b g(t)dt$ soit convergente, et que la relation (3) n'ait pas lieu (donner à n les valeurs 2^p).

c) Avec les mêmes hypothèses que dans a), montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)=0 .$$

14) Soit f une fonction règlée dans un intervalle $]a,+\infty[$ telle qu'il existe une fonction scalaire g décroissante dans $]a,+\infty[$, telle que $\|f(x)\| \leqslant g(x)$, et que l'intégrale $\int_a^\infty g(t)dt$ soit convergente. Montrer que la série $\sum_{n=1} f(a+nh)$ est absolument convergente pour tout $h > 0$, et qu'on a

$$\lim_{h\to 0} h\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(a+nh)\right) = \int_a^{+\infty} f(t)dt .$$

15) Soit f une fonction vectorielle primitive d'une fonction f' règlée dans $[a,b]$, et telle que $f(a)=f(b)=0$. Montrer que, si M est la borne supérieure de $\|f'(x)\|$ dans l'ensemble des points de $[a,b]$ où f' est continue, on a $\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leqslant M\,\frac{(b-a)^2}{4}$.

16) Soit f une fonction numérique continue, strictement croissante dans un intervalle $[0,a]$ et telle que $f(0)=0$; soit g sa fonction réciproque, définie et strictement croissante dans $[0,f(a)]$; montrer que, pour $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant f(a)$ on a $xy \leqslant \int_0^x f(t)dt + \int_0^y g(u)du$, l'égalité n'ayant lieu que si $y=f(x)$ (étudier les variations en fonction de x (y restant fixe) de $xy-\int_0^x f(t)dt$). En déduire que, pour $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $p > 1$, $p'=p/(p-1)$, on a $xy \leqslant ax^p+by^{p'}$ pour $a > 0$, $b > 0$ et $(pa)^{p'}(p'b)^p \geqslant 1$.

17) Soient f et g deux fonctions scalaires règlées, définies dans un intervalle compact $[a,b]$, telles que g soit décroissante et $\geqslant 0$ dans $[a,b]$. Montrer qu'il existe un point c tel que $a \leqslant c \leqslant b$, et

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(a+)\int_a^c f(t)dt$$

("deuxième théorème de la moyenne" : se ramener au cas où g est une fonction en escalier, et raisonner alors par récurrence sur le nombre des points de discontinuité de g).

Avec les mêmes hypothèses sur g, soit f une fonction vectorielle réglée définie dans $[a,b]$, et prenant ses valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Soit K le plus petit ensemble convexe fermé dans E, contenant les points $\int_a^x f(t)dt$, lorsque x parcourt $[a,b]$. Montrer que le point $\frac{1}{g(a+)}\int_a^b f(t)g(t)dt$ appartient à K.

18) Soit g une fonction scalaire admettant une dérivée continue et non nulle dans $[a,x]$; si f est une fonction scalaire ayant une dérivée $(n+1)$-ème règlée dans $[a,x]$, montrer que le reste $r_n(x)$ du développement de Taylor d'ordre n de f au point a, peut s'écrire

$$r_n(x) = (g(x)-g(a))\,\frac{(x-\xi)^n}{n!}\,\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{g'(\xi)}$$

où $a < \xi < x$ (utiliser la forme intégrale de $r_n(x)$).

19) Soient f et g deux fonctions règlées et > 0 dans un intervalle ouvert $]a,b[$. Montrer que les intégrales impropres des fonctions $f/(1+fg)$ et $\inf(f,1/g)$ dans $]a,b[$ sont à la fois convergentes.

20) Soit f une fonction numérique finie et continue dans un intervalle ouvert I. Pour que f soit convexe dans I, il faut et il suffit que, pour tout $x \in I$, on ait

$$\limsup_{h\to 0}\left(\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt - f(x)\right) \geqslant 0$$

(raisonner comme dans la prop.8 du chap.I, § 2).

21) Soit f une fonction convexe dans un intervalle I, h un nombre >0, et I_h l'intersection de I et des intervalles $I+h$ et $I-h$; montrer que, si I_h n'est pas vide, la fonction $g_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$ est convexe dans I_h ; si $h < k$, montrer que $g_h \leqslant g_k$.

22) Soit (f_α) un ensemble de fonctions numériques définies dans un intervalle ouvert I, admettant chacune une primitive propre dans I, et formant un ensemble filtrant pour la relation $\leqslant$.

soit f l'enveloppe supérieure de la famille (f_α) ; si f admet une primitive propre dans I, et si g_α (resp. g) est la primitive de f_α (resp. f) qui s'annule en un point $x_0 \in I$, montrer que g est l'enveloppe supérieure de la famille (g_α). (Si u est l'enveloppe supérieure de la famille (g_α), montrer d'abord que $u(x+h)-u(x) \leqslant g(x+h)-g(x)$, puis que pour tout α , $u(x+h)-u(x) \geqslant g_\alpha(x+h)-g_\alpha(x)$, et conclure de cette dernière inégalité que $\liminf_{h\to 0,\, h>0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \geqslant f(x)$; en déduire la proposition).

Donner un exemple de suite croissante (f_n) de fonctions continues dans un intervalle I , uniformément bornée, et dont l'enveloppe supérieure f n'admet pas de primitive propre dans I (cf. exerc.5) .

23) Soit (f_α) un ensemble de fonctions numériques règlées dans un intervalle compact I , filtrant pour la relation $\geqslant$ et ayant 0 comme enveloppe inférieure ; montrer que le filtre des sections de cet ensemble filtrant converge uniformément vers 0 (raisonner comme pour le th. de Dini ; cf. <u>Top.gén.</u>, chap. X, § 4).

§6. Dérivées et intégrales de fonctions dépendant d'un paramètre.

1. Intégrale d'une limite de fonctions.

Le th.1 du § 2, appliqué au cas particulier des primitives de fonctions règlées dans un intervalle compact, se traduit de la manière suivante dans la notation propre aux intégrales :

PROPOSITION 1.- <u>Soit A un ensemble filtré par un filtre</u> $\mathfrak{F}$, $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ <u>une famille de fonctions règlées dans un intervalle compact</u> $I = [a,b]$

si les fonctions f_α convergent uniformément dans I vers une fonction (règlée) f suivant le filtre $\mathfrak{F}$, on a

(1) $$\lim_{\mathfrak{F}} \int_a^b f_\alpha(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

Deux corollaires de cette proposition sont importants dans les applications :

COROLLAIRE 1.- Soit (f_n) une suite de fonctions règlées dans un intervalle compact $I=[a,b]$. Si la suite (f_n) converge uniformément dans I vers une fonction (règlée) f, on a

(2) $$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

En particulier, si une série dont le terme général u_n est une fonction règlée dans I, converge uniformément vers f dans I, la série de terme général $\int_a^b u_n(t)dt$ est convergente et a pour somme $\int_a^b f(t)dt$ ("intégration terme à terme d'une série uniformément convergente").

Remarque.- Le corollaire 1 est inexact lorsqu'on suppose seulement que la suite (f_n) converge simplement vers f dans I (même si f est règlée) : la limite du premier membre de (2) peut alors ne pas exister, ou être distincte du second membre. On a un exemple du second de ces deux cas en prenant $f_n(0)=0$, $f_n(x)=n$ pour $0<x<1/n$, $f_n(x)=0$ pour $1/n \leqslant x \leqslant 1$; la suite (f_n) converge simplement en tout point de $[0,1]$ vers la fonction 0, mais on a $\int_0^1 f_n(t)dt = 1$ pour tout n. On aurait un exemple où le premier membre de (2) ne tend vers aucune limite en remplaçant la suite (f_n) précédente par la suite $((-1)^n f_n)$ qui converge encore simplement vers 0.

Toutefois, la convergence uniforme de la suite (f_n) n'est nullement nécessaire pour la validité de la formule (2) ; nous généraliserons plus tard cette formule, en même temps que la notion d'intégrale (voir Livre VI), et obtiendrons des conditions beaucoup moins restrictives.

COROLLAIRE 2.- Soit A une partie d'un espace topologique F, f une application de $I \times A$ dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$, telle que, pour tout $\alpha \in A$, la fonction $x \to f(x,\alpha)$ soit règlée dans I. Si les fonctions $f(x,\alpha)$ convergent uniformément dans I vers une fonction (règlée) $g(x)$, lorsque α tend vers un point $\alpha_0 \in \bar{A}$ en restant dans A, on a

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0,\ \alpha \in A} \int_a^b f(x,\alpha)dx = \int_a^b g(x)dx \tag{3}$$

en particulier :

PROPOSITION 2 ("continuité d'une intégrale par rapport au paramètre"). Soient F un espace compact, $I = [a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, une application continue de $I \times F$ dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$; la fonction $h(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)dx$ est continue dans F.

En effet, comme f est uniformément continue dans l'espace compact $I \times F$, les fonctions $f(x,\alpha)$ convergent uniformément vers $f(x,\alpha_0)$ lorsque α tend vers un point quelconque $\alpha_0 \in F$.

Voici une application de cette proposition : la fonction $(x,\alpha) \to x^\alpha$ est continue dans le produit $I \times J$, où $I = [a,b]$ est un intervalle compact tel que $0 < a < b$, J un intervalle compact quelconque dans $\mathbb{R}$; on en conclut que $\int_a^b x^\alpha dx$ est fonction continue de α dans $\mathbb{R}$; or, pour α rationnel et $\neq -1$, cette fonction est égale à $\dfrac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, et est par suite uniformément continue sur l'intersection de $\mathbb{Q}$ et de tout intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas -1 ; on a donc $\int_a^b x^\alpha dx = \dfrac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ pour tout α réel et $\neq -1$; cela signifie encore que, pour tout α réel, la dérivée de x^α est $\alpha x^{\alpha-1}$ (cf.chap.III, § 1).

2. Intégrale impropre d'une limite de fonctions.

Elargissons les hypothèses de la prop. 1 de la manière suivante :

I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, $(c_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une suite finie strictement croissante de points de $\overline{\mathbb{R}}$ telle que c_0 soit l'origine et c_n l'extrémité de I, et on suppose que :

1° pour tout $\alpha \in A$, f_α est règlée dans tout intervalle contenu dans I et ne contenant pas les c_i, et l'intégrale impropre de f_α dans I existe ;

2° suivant le filtre $\mathfrak{F}$, la famille (f_α) converge uniformément vers f dans tout intervalle compact contenu dans I et ne contenant aucun des c_i.

Dans ces conditions, la formule (1) (où a et b sont deux points quelconques de $\overline{I}$) n'est plus nécessairement valable : l'un ou l'autre des deux membres peut ne pas exister, et lorsqu'ils existent tous deux, ils peuvent avoir des valeurs différentes.

Z

L'exemple donné à la suite du cor. 1 de la prop. 1 montre que ces phénomènes peuvent se produire même lorsque toutes les intégrales considérées sont propres : en effet, la suite (f_n) considérée dans cet exemple converge uniformément vers 0 dans tout intervalle compact contenu dans l'intervalle ouvert $]0,1[$.

D'un autre côté, lorsque I est un intervalle non borné, la formule (1) peut aussi cesser d'être valable bien que la famille (f_α) converge vers f uniformément dans tout l'intervalle I (et non plus seulement sur tout intervalle compact contenu dans I) par exemple, prenons $I=]0,+\infty[$, $f_n(x)=1/n$ pour $n^2 \leqslant x \leqslant (n+1)^2$, $f_n(x)=0$ pour toute autre valeur de x dans I $(n \geqslant 1)$; la suite (f_n) converge uniformément vers 0 dans I, mais $\int_0^\infty f_n(t)dt=(2n+1)/n$ tend vers 2 lorsque n croît indéfiniment.

En d'autres termes, lorsque I est non borné, si on désigne par $\mathcal{J}$ l'espace vectoriel formé des fonctions f règlées dans I , à valeurs dans E , et telles que l'intégrale impropre $\int_I f(t)dt$ soit convergente, l'application $f \to \int_I f(t)dt$ de $\mathcal{J}$ dans $\mathbf{R}$ <u>n'est pas continue</u> lorsqu'on munit $\mathcal{J}$ de la topologie de la convergence uniforme dans I (cf. § 5, cor.2 du th.1).

Pour chercher des conditions suffisantes pour assurer la validité de la prop.1 dans les hypothèses plus larges que nous envisageons, nous pouvons évidemment (comme dans le n° 7 du § 5) nous borner au cas où il n'y a aucun des c_i qui soit intérieur à I , autrement dit, au cas où I est non compact, où chacune des f_α est règlée dans I et admet une intégrale impropre dans I , et où enfin la famille (f_α) converge uniformément (suivant le filtre $\mathfrak{F}$) dans tout intervalle <u>compact</u> contenu dans I . Dans ces conditions, et en désignant par $\mathfrak{K}(I)$ l'ensemble ordonné filtrant des intervalles compacts contenus dans I (§ 5, n° 7), le premier membre de la formule (1) peut s'écrire $\lim_{\mathfrak{F}}(\lim_{J \in \mathfrak{K}(I)} \int_J f_\alpha(t)dt)$; compte tenu de la prop.1 et du fait que la famille (f_α) est uniformément convergente dans tout intervalle compact $J \subset I$, le second membre de (1) peut aussi s'écrire $\lim_{J \in \mathfrak{K}(I)}(\lim_{\mathfrak{F}} \int_J f_\alpha(t)dt)$. On voit donc que la prop.1 s'étendra lorsqu'on pourra <u>intervertir les limites</u> de l'application $(J,\alpha) \to \int_J f_\alpha(t)dt$ suivant le filtre $\mathfrak{F}$, et suivant le filtre des sections Φ de l'ordonné filtrant $\mathfrak{K}(I)$. Or, nous connaissons une condition <u>suffisante</u> pour que cette interversion soit licite, savoir l'existence de la limite de l'application $(J,\alpha) \to \int_J f_\alpha(t)dt$ suivant le <u>filtre produit</u> $\Phi \times \mathfrak{F}$ (<u>Top.gén.</u>, chap.I, § 8, prop.8). Compte tenu du fait que E est complet et que pour tout $\alpha \in A$, l'intégrale impropre $\int_I f_\alpha(t)dt$ est par hypothèse <u>convergente</u>, cette dernière condition est elle-même équivalente à la condition plus maniable suivante : <u>pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe un intervalle compact</u> $J_0 \subset I$ <u>et un ensemble</u> $M \in \mathfrak{F}$ (<u>dépendant de</u> ε) <u>tels que, pour tout intervalle compact</u> $K \subset I$, <u>ne rencontrant pas</u> J_0 , <u>et tout</u> $\alpha \in M$, <u>on ait</u> $\left\| \int_K f_\alpha(t)dt \right\| \leq \varepsilon$.

Rappelons rapidement le raisonnement de "convergence uniforme locale" qui conduit à ce résultat (<u>Top.gén.</u>, chap.X, § 2). Si $(J,\alpha) \to \int_J f_\alpha(t)dt$ admet une limite suivant $\Phi \times \mathfrak{F}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle compact $J_0 = [c,d]$ contenu dans I et un ensemble $M \in \mathfrak{F}$ tels que, si J et J' sont deux intervalles compacts quelconques contenant J_0 (et contenus dans I) α et β deux éléments de M , on ait $\left\| \int_J f_\alpha(t)dt - \int_{J'} f_\beta(t)dt \right\| \leq \varepsilon$. On en déduit aussitôt que si $x < c$ est dans I , on aura $\left\| \int_x^c f_\alpha(t)dt \right\| \leq \varepsilon$ pour tout $\alpha \in M$, d'où, si $x < y < c$, $\left\| \int_x^y f_\alpha(t)dt \right\| \leq 2\varepsilon$ pour tout $\alpha \in M$; on montre de même que si $d < x < y$, on a aussi $\left\| \int_x^y f_\alpha(t)dt \right\| \leq 2\varepsilon$ pour tout $\alpha \in M$.

Réciproquement, supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle compact $J_0 \subset I$ et un ensemble $M \in \mathfrak{F}$ tels que, pour tout intervalle compact K contenu dans I et ne rencontrant pas J_0 , et pour tout $\alpha \in M$, on ait $\left\| \int_K f_\alpha(t)dt \right\| \leq \varepsilon$. En passant à la limite suivant $\mathfrak{F}$ dans cette relation (pour un K fixe), ce qui est possible d'après la prop.1, on a $\left\| \int_K f(t)dt \right\| \leq \varepsilon$, ce qui entraîne la convergence de l'intégrale impropre $\int_I f(t)dt$ (§ 5,prop6) ; en outre on a $\left\| \int_I f(t)dt - \int_{J_0} f(t)dt \right\| \leq 2\varepsilon$ et $\left\| \int_I f_\alpha(t)dt - \int_{J_0} f_\alpha(t)dt \right\| \leq 2\varepsilon$ pour <u>tout</u> $\alpha \in M$. D'après la prop.1, il existe un ensemble $N \in \mathfrak{F}$, contenu dans M et tel que pour tout $\alpha \in N$, on ait $\left\| \int_{J_0} f(t)dt - \int_{J_0} f_\alpha(t)dt \right\| \leq \varepsilon$; on a par suite aussi, pour tout $\alpha \in N$, $\left\| \int_I f(t)dt - \int_I f_\alpha(t)dt \right\| \leqslant 5\varepsilon$. Ceci montre que $\lim_{\mathfrak{F}} \int_I f_\alpha(t)dt = \int_I f(t)dt$. En outre, pour tout intervalle compact H contenant J_0 et tout $\alpha \in N$, on a $\left\| \int_I f(t)dt - \int_H f_\alpha(t)dt \right\| \leqslant 7\varepsilon$, ce qui montre que l'application $(J,\alpha) \longrightarrow \int_J f_\alpha(t)dt$ converge vers $\int_I f(t)dt$ suivant le filtre produit $\Phi \times \mathfrak{F}$.

On utilise le plus souvent une condition plus restrictive que la précédente :

DEFINITION 1.- <u>On dit que l'intégrale impropre $\int_I f_\alpha(t)dt$ est uniformément convergente pour</u> $\alpha \in A$ (ou uniformément convergente dans A) <u>si, pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe un intervalle compact</u> $J_0 \subset I$ <u>tel que, pour tout intervalle compact</u> $K \subset I$ <u>ne rencontrant pas</u> J_0 , <u>et tout</u> $\alpha \in A$, <u>on ait</u>

$$\left\| \int_K f_\alpha(t)dt \right\| \leqslant \varepsilon . \tag{4}$$

La prop.6 du § 2 montre que si $\int_I f_\alpha(t)dt$ est uniformément convergente dans A , elle est a fortiori convergente pour tout $\alpha \in A$ (la réciproque étant naturellement inexacte). Avec cette définition, on a la proposition suivante, cas particulier de celle que nous venons de démontrer ci-dessus :

PROPOSITION 3.- <u>Soit</u> (f_α) <u>une famille de fonctions règlées dans l'intervalle</u> I , <u>telles que</u> : 1° <u>suivant le filtre</u> $\mathfrak{F}$, <u>la famille</u> (f_α) <u>converge uniformément vers une fonction</u> f (règlée dans I) <u>dans tout intervalle compact contenu dans</u> I ; 2° <u>l'intégrale impropre</u> $\int_I f_\alpha(t)dt$ <u>soit uniformément convergente dans</u> A . <u>Dans ces conditions, l'intégrale impropre</u> $\int_I f(t)dt$ <u>est convergente, et on a</u>

$$\lim_{\mathfrak{F}} \int_I f_\alpha(t)dt = \int_I f(t)dt . \tag{5}$$

Comme pour la prop.1, deux corollaires de la prop.3 sont importants pour les applications :

COROLLAIRE 1.- Soit (f_n) une suite de fonctions réglées dans un intervalle quelconque I, convergeant uniformément vers une fonction f dans tout intervalle compact contenu dans I ; si l'intégrale impropre $\int_I f_n(t)dt$ est uniformément convergente, l'intégrale impropre $\int_I f(t)dt$ est convergente, et on a

$$(6) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)dt = \int_I f(t)dt .$$

COROLLAIRE 2.- Soit A une partie d'un espace topologique F, f une application de $I\times A$ dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbf{R}$, telle que, pour tout $\alpha\in A$, la fonction $x \to f(x,\alpha)$ soit réglée dans I. Si d'une part, les fonctions $f(x,\alpha)$ convergent uniformément, sur tout intervalle compact contenu dans I, vers une fonction $f(x)$ lorsque α tend vers $\alpha_0 \in \bar{A}$ en restant dans A ; si d'autre part, l'intégrale impropre $\int_I f(x,\alpha)dx$ est uniformément convergente dans A, l'intégrale impropre $\int_I f(x)dx$ est convergente, et on a

$$(7) \qquad \lim_{\alpha\to\alpha_0,\, \alpha\in A} \int_I f(x,\alpha)dx = \int_I f(x)dx .$$

En particulier :

PROPOSITION 4 ("continuité d'une integrale impropre par rapport au paramètre").- Soient F un espace compact, I un intervalle quelconque de $\mathbf{R}$, f une application continue de $I\times F$ dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbf{R}$; si l'intégrale impropre $h(\alpha)=\int_I f(x,\alpha)dx$ est uniformément convergente dans F, elle est fonction continue de α dans F.

Compte tenu de la prop.2, cette proposition résulte aussitôt de la continuité d'une limite uniforme de fonctions continues (Top.gén., chap.X, §1, th.2).

3. <u>Intégrales normalement convergentes.</u>

Soit $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de fonctions réglées dans un intervalle quelconque $I \subset \mathbf{R}$, à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbf{R}$. Supposons qu'il existe une fonction numérique g réglée dans I, telle que, pour tout $x \in I$ et tout $\alpha \in A$, on ait $\|f_\alpha(x)\| \leqslant g(x)$ et que l'intégrale impropre $\int_I g(t)dt$ soit convergente. Dans ces conditions, l'intégrale impropre $\int_I f_\alpha(t)dt$ est <u>absolument et uniformément convergente</u> dans A, car pour tout intervalle compact K contenu dans I, on a

$$\left\| \int_K f_\alpha(t)dt \right\| \leqslant \int_K g(t)dt$$

et la convergence de l'intégrale $\int_I g(t)dt$ entraîne que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle compact $J \subset I$ tel que, pour tout intervalle compact $K \subset I$ ne rencontrant pas J, on ait $\int_K g(t)dt \leqslant \varepsilon$. Lorsqu'il existe une fonction numérique g ayant les propriétés précédentes, on dit que l'intégrale $\int_I f_\alpha(t)dt$ est <u>normalement convergente</u> dans A.

2 une intégrale impropre peut être uniformément convergente dans A sans être normalement convergente. C'est ce que montre par exemple la suite (f_n) de fonctions numériques définies par les conditions $f_n(x)=1/x$ pour $n \leqslant x \leqslant n+1$, $f_n(x)=0$ pour les autres valeurs de x dans $[1,+\infty[$. Il est immédiat que l'intégrale $\int_1^\infty f_n(t)dt$ est uniformément convergente, mais elle n'est pas normalement convergente, car la relation $g(x) \geqslant f_n(x)$ pour tout x et tout n entraîne $g(x) \geqslant 1/x$, et par suite l'intégrale impropre de g dans $[1,+\infty[$ n'est pas convergente.

En particulier, considérons une <u>série</u> dont le terme général u_n est une fonction réglée dans l'intervalle I, et supposons que la série de de terme général $\| u_n(x) \|$ (qui est une fonction règlée dans I) converge uniformément dans tout intervalle compact contenu dans I, et ait pour somme une fonction (règlée) g telle que l'intégrale $\int_I g(t)dt$ soit convergente. Alors, si on pose $f_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$, l'intégrale impropre $\int_I f_n(t)dt$ est normalement convergente, car on a $\| f_n(x) \| \leqslant \sum_{p=1}^{n} \| u_p(x) \| \leqslant g(x)$ pour tout $x \in I$; par suite, la somme f de la série de terme général u_n est une fonction règlée dans I telle que l'intégrale impropre $\int_I f(t)dt$ soit convergente, et on a

$$\int_I f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I u_n(t)dt$$

("intégration (impropre) terme à terme d'une série").

4. Dérivée d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

Soit A un voisinage compact d'un point α_0 dans le corps $\mathbb{R}$ (resp. le corps $\mathbb{C}$), $I = [a,b]$ un intervalle compact dans $\mathbb{R}$, f une application continue de $I \times A$ dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$ (resp. C). On a vu (prop.2) que, dans ces conditions, $g(\alpha) = \int_a^b f(t,\alpha)dt$ est une fonction continue dans A. Cherchons des conditions suffisantes pour que g ait une dérivée au point α_0. On a pour $\alpha \neq \alpha_0$

$$\frac{g(\alpha) - g(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} = \int_a^b \frac{f(t,\alpha) - f(t,\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} dt$$

donc (cor.2 de la prop.1), si les fonctions $\frac{f(x,\alpha) - f(x,\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0}$ convergent uniformément dans I vers une fonction (nécessairement continue) $h(x)$ lorsque tend vers α_0 (en restant $\neq \alpha_0$), g admet une dérivée égale à $\int_a^b h(t)dt$ au point α_0 ; d'ailleurs, pour chaque $x \in I$, $\frac{f(x,\alpha) - f(x,\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0}$ tend vers $h(x)$, donc $h(x)$ est la dérivée au point α_0 de l'application $\alpha \to f(x,\alpha)$; nous désignerons cette dérivée (dite dérivée partielle de f par rapport à α ; cf. Livre VII) par la notation $f'_\alpha(x,\alpha_0)$; les hypothèses faites entraînent donc que

(8) $$g'(\alpha_0) = \int_a^b f'_\alpha(t,\alpha_0)dt$$

La proposition suivante donne une condition suffisante plus simple pour la validité de la formule (8) :

PROPOSITION 5.- On suppose que la dérivée partielle $f'_\alpha(x,\alpha)$ existe pour tout $x \in I$ et tout α appartenant à un voisinage ouvert V de α_0, et que, pour tout $\alpha \in V$, l'application $x \to f'_\alpha(x,\alpha)$ soit règlée dans I. Dans ces conditions, si $f'_\alpha(x,\alpha)$ converge uniformément dans I vers $f'_\alpha(x,\alpha_0)$ lorsque α tend vers α_0, la fonction $g(\alpha)=\int_a^b f(t,\alpha)dt$ admet au point α_0 une dérivée donnée par la formule (8).

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe par hypothèse $r > 0$ tel que $|\alpha-\alpha_0| \leq r$ entraîne $\| f'_\alpha(x,\alpha) - f'_\alpha(x,\alpha_0) \| \leq \varepsilon$ quel que soit $x \in I$. D'après la prop.5 du § 2 et son corollaire, on a donc, pour $|\alpha-\alpha_0| \leq r$ $(\alpha \neq \alpha_0)$ et pour tout $x \in I$

$$\left\| \frac{f(x,\alpha)-f(x,\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0} - f'_\alpha(x,\alpha_0) \right\| \leq \varepsilon$$

ce qui prouve la convergence uniforme de $\dfrac{f(x,\alpha)-f(x,\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0}$ vers $f'_\alpha(x,\alpha_0)$ dans I lorsque α tend vers α_0 (en restant $\neq \alpha_0$), et établit donc la formule (8).

COROLLAIRE.- Si la dérivée partielle $f'_\alpha(x,\alpha)$ existe dans $I \times V$ et est fonction continue de (x,α) dans cet ensemble, la fonction g admet au point α_0 une dérivée donnée par la formule (8).

En effet, si W est un voisinage compact de α_0 contenu dans V, l'application $(x,\alpha) \to f'_\alpha(x,\alpha)$ est uniformément continue dans l'ensemble compact $I \times W$, donc $f'_\alpha(x,\alpha)$ tend uniformément vers $f'_\alpha(x,\alpha_0)$ dans I lorsque α tend vers α_0.

De la prop.5, on déduit une proposition analogue permettant de calculer la dérivée d'une intégrale lorsque non seulement la fonction intégrée f, mais aussi les limites d'intégration, dépendent du paramètre α :

PROPOSITION 6.- Soit I un intervalle ouvert dans $\mathbf{R}$, A un voisinage d'un point α_0 dans le corps $\mathbf{R}$ (resp. le corps $\mathbf{C}$), f une application continue de $I \times A$ dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{C}$). On suppose que pour tout $x \in I$ et tout $\alpha \in A$, $f'_\alpha(x,\alpha)$ existe et que pour tout $\alpha \in A$, l'application $x \to f'_\alpha(x,\alpha)$ est réglée dans I ; en outre, on suppose que, dans tout intervalle compact contenu dans I ; $f'_\alpha(x,\alpha)$ converge uniformément vers $f'_\alpha(x,\alpha_0)$ lorsque α tend vers α_0. Soient alors $a(\alpha)$, $b(\alpha)$ deux fonctions définies dans A, à valeurs dans I ; si les dérivées $a'(\alpha_0)$, $b'(\alpha_0)$ existent, la fonction $g(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(t,\alpha)dt$ admet au point α_0 une dérivée donnée par la formule

$$(9) \quad g'(\alpha_0) = \int_{a(\alpha_0)}^{b(\alpha_0)} f'_\alpha(t,\alpha_0)dt + b'(\alpha_0) f(b(\alpha_0),\alpha_0) - a'(\alpha_0) f(a(\alpha_0),\alpha_0)$$

En effet, pour tout $\alpha \in A$ distinct de α_0, on peut écrire

$$\frac{g(\alpha)-g(\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0} = \int_{a(\alpha_0)}^{b(\alpha_0)} \frac{f(t,\alpha)-f(t,\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0}dt + \frac{1}{\alpha-\alpha_0}\int_{b(\alpha_0)}^{b(\alpha)} f(t,\alpha)dt - \frac{1}{\alpha-\alpha_0}\int_{a(\alpha_0)}^{a(\alpha)} f(t,\alpha)dt .$$

D'après la prop. 5, le premier terme du second membre de cette formule tend vers $\int_{a(\alpha_0)}^{b(\alpha_0)} f'_\alpha(t,\alpha_0)dt$ lorsque α tend vers α_0. Posons $M = \operatorname{Max}(\| f(b(\alpha_0),\alpha_0)\| , |b'(\alpha_0)|+1)$; la fonction $b(\alpha)$ étant continue au point α_0, et la fonction f continue au point $(b(\alpha_0),\alpha_0)$, pour tout ε tel, que $0<\varepsilon<1$ il existe $r>0$ tel que la relation $|\alpha-\alpha_0| \leq r$ entraîne $\| f(t,\alpha)-f(b(\alpha_0),\alpha_0)\| \leq \varepsilon$ pour tout t appartenant à l'intervalle d'extrémités $b(\alpha_0)$ et $b(\alpha)$; on peut aussi supposer que la relation $|\alpha-\alpha_0| \leq r$ entraîne $\left| \frac{b(\alpha)-b(\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0} - b'(\alpha_0)\right| \leq \varepsilon$
D'après la formule de la moyenne (§ 5, formule (13)), on a donc

$$\left\| \frac{1}{\alpha-\alpha_0}\int_{b(\alpha_0)}^{b(\alpha)} f(t,\alpha)dt - \frac{b(\alpha)-b(\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0} f(b(\alpha_0),\alpha_0)\right\| \leq \left|\frac{b(\alpha)-b(\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0}\right| \varepsilon$$

et par suite

$$\left\| \frac{1}{\alpha-\alpha_0}\int_{b(\alpha_0)}^{b(\alpha)} f(t,\alpha)dt - b'(\alpha_0) f(b(\alpha_0),\alpha_0)\right\| \leq 2M\varepsilon$$

ce qui montre que $\frac{1}{a-a_0}\int_{b(\alpha_0)}^{b(\alpha)} f(t,a)dt$ tend vers $b'(a_0)f(b(a_0),a_0)$. De la même manière, on montre que $\frac{1}{a-a_0}\int_{a(\alpha_0)}^{a(\alpha)} f(t,a)dt$ tend vers $a'(a_0)f(a(a_0),a_0)$.

L'ensemble A ayant la même signification, soit maintenant I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, f une application continue de $I\times A$ dans E ; si l'intégrale impropre $g(a)=\int_I f(t,a)dt$ existe pour tout $a\in A$ et est fonction continue de a, la fonction g n'a pas nécessairement au point a_0 une dérivée égale à $\int_I f'_a(t,a_0)dt$, même si $f'_a(x,a)$ converge uniformément vers $f'_a(x,a_0)$ dans tout intervalle compact contenu dans I, et si l'intégrale impropre $\int_I f'_a(t,a)dt$ existe pour tout $a\in A$ (cf. exerc. 2).

Une condition suffisante pour que la formule (8) soit encore valable dans ce cas est donnée par la proposition suivante :

PROPOSITION 7.- Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, f une fonction continue dans $I\times A$. On suppose que :

1°- la dérivée partielle $f'_a(x,a)$ existe pour tout $x\in I$ et tout $a\in A$ et, pour tout $a\in A$, l'application $x\to f'_a(x,a)$ est réglée dans I ;

2°- il existe un voisinage ouvert $V\subset A$ de a_0 tel que, pour tout $a\in V$, $f'_a(x,\beta)$ converge uniformément vers $f'_a(x,a)$ dans tout intervalle compact contenu dans I, lorsque β tend vers a ;

3°- l'intégrale impropre $\int_I f'_a(t,a)dt$ est uniformément convergente dans V ;

4°- l'intégrale impropre $\int_I f(t,a_0)dt$ est convergente.

Dans ces conditions, l'intégrale impropre $g(a)=\int_I f(t,a)dt$ est uniformément convergente dans V, et la fonction g admet en tout point de V une dérivée donnée par la formule

(10) $$g'(\alpha) = \int_I f'_\alpha(t,\alpha)dt .$$

En effet, pour tout intervalle compact J contenu dans I , posons $u_J(\alpha) = \int_J f(t,\alpha)dt$; en vertu des hypothèses, la prop.5 montre que pour tout $\alpha \in V$, on a $u'_J(\alpha) = \int_J f'_\alpha(t,\alpha)dt$. La convergence uniforme dans V de l'intégrale $\int_I f'_\alpha(t,\alpha)dt$ signifie que la fonction $u'_J(\alpha)$ converge uniformément dans V vers $\int_I f'_\alpha(t,\alpha)dt$, suivant le filtre des sections Φ de l'ordonné filtrant $\mathfrak{K}(I)$ des intervalles compacts contenus dans I ; comme d'autre part $u_J(\alpha_0)$ a une limite suivant Φ , on peut appliquer aux fonctions u_J le th.1 du § 5 (le rôle de l'ensemble d'indices étant ici tenu par $\mathfrak{K}(I)$, celui du filtre $\mathfrak{F}$ par le filtre des sections Φ de cet ordonné filtrant) ; d'où la proposition.

Remarques.- 1) Les conditions 1° et 2° de la prop.7 sont a fortioti remplies lorsque $f'_\alpha(x,\alpha)$ existe dans $I \times A$ et est fonction continue de (x,α) dans cet ensemble.

2) Soit $(c_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une suite strictement croissante de points de $\overline{R}$; supposons que dans chacun des intervalles ouverts $]c_i, c_{i+1}[$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ la fonction $f(x,\alpha)$ satisfasse aux conditions de la prop.7 (l'une ou l'autre de ces conditions cessant d'être vérifiée dans un voisinage d'un c_i d'indice tel que $1 \leqslant i \leqslant n-1$; par exemple, la dérivée de l'application $\alpha \to f(c_i,\alpha)$ peut ne pas exister). Alors, si $c_0 \leqslant x_0 \leqslant x \leqslant c_n$, l'intégrale impropre $g(\alpha) = \int_{x_0}^{x} f(t,\alpha)dt$ admet en tout point de V une dérivée qu'on peut encore écrire $\int_{x_0}^{x} f'_\alpha(t,\alpha)dt$ (cf. § 5, déf. 5) .

3) Lorsque, dans une intégrale impropre $\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(t,\alpha)dt$, les extrémités de l'intervalle d'intégration sont des fonctions finies du paramètre, l'étude de cette intégrale en fonction de α

peut se rattacher à celle d'une intégrale impropre dans $[0,1]$: en effet, par le changement de variable $t=a(\alpha)(1-u)+b(\alpha)u$, on a

$$\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(t,\alpha)dt = \int_0^1 f(a(\alpha)(1-u)+b(\alpha)u)(b(\alpha)-a(\alpha))du$$

5. Interversion des intégrations.

Soient $I=[a,b]$ et $A=[c,d]$ deux intervalles compacts de $\mathbb{R}$; soit f une fonction continue dans $I\times A$, à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$; d'après la prop.2, $\int_a^b f(x,\alpha)dx$ est fonction continue de α dans A ; son intégrale $\int_c^d (\int_a^b f(x,\alpha)dx)d\alpha$ se note aussi pour simplifier $\int_c^d d\alpha \int_a^b f(x,\alpha)dx$.

PROPOSITION 8.- Si f est continue dans $I\times A$, on a

$$\int_c^d d\alpha \int_a^b f(x,\alpha)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,\alpha)d\alpha \tag{11}$$

("formule d'interversion des intégrations").

Nous allons montrer que, pour tout $y\in A$, on a

$$\int_c^y d\alpha \int_a^b f(x,\alpha)dx = \int_a^b dx \int_c^y f(x,\alpha)d\alpha \quad . \tag{12}$$

Comme les deux membres de cette relation sont des fonctions de y égales pour $y=c$, il suffira de prouver qu'elles sont dérivables dans $]c,d[$ et que leurs dérivées sont égales en tout point de cet intervalle.

Si on pose $g(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)dx$, $h(x,y)= \int_c^y f(x,\alpha)d\alpha$, la relation (12) s'écrit

$$\int_c^y g(\alpha)d\alpha = \int_a^b h(x,y)dx$$

or, la dérivée du premier membre par rapport à y est $g(y)$, celle du second est $\int_a^b h'_y(x,y)dx$ d'après le cor. de la prop.5, puisque $h'_y(x,y)= f(x,y)$ est continue dans $I\times A$; les deux expressions ainsi obtenues sont bien identiques.

Supposons maintenant que $A=[c,d]$ soit un intervalle compact dans $\mathbb{R}$, I un intervalle quelconque dans $\mathbb{R}$; soit f une fonction continue dans $I\times A$, à valeurs dans E , telle que l'intégrale impropre $g(\alpha)=\int_I f(t,\alpha)dt$ soit convergente pour tout $\alpha\in A$; même si $g(\alpha)$ est continue dans A , 103

on ne peut pas toujours intervertir les intégrations dans l'intégrale $\int_c^d d\alpha \int_I f(t,\alpha)dt$, car l'intégrale $\int_I dt \int_c^d f(t,\alpha)d\alpha$ peut ne pas exister, ou être distincte de l'intégrale $\int_c^d d\alpha \int_I f(t,\alpha)dt$ (cf. exerc. 6).

PROPOSITION 9.- <u>Si la fonction</u> f <u>est continue dans</u> $I \times A$, <u>et si l'intégrale impropre</u> $\int_I f(t,\alpha)dt$ <u>est uniformément convergente dans</u> A <u>l'intégrale impropre</u> $\int_I dt \int_c^d f(t,\alpha)d\alpha$ <u>est convergente, et on a</u>

$$\int_c^d d\alpha \int_I f(t,\alpha)dt = \int_I dt \int_c^d f(t,\alpha)d\alpha \quad . \tag{13}$$

Pour tout intervalle compact J contenu dans I, posons $u_J = \int_J f(t,\alpha)dt$. L'hypothèse entraîne que, suivant le filtre des sections Φ de l'ordonné filtrant $\mathfrak{K}$ (I), la fonction continue u_J converge uniformément dans A vers $\int_I f(t,\alpha)dt$; donc (prop. 1), $\int_c^d d\alpha \int_J f(t,\alpha)dt$ a pour limite $\int_c^d d\alpha \int_I f(t,\alpha)dt$ suivant Φ ; mais, d'après la prop. 8, on a

$$\int_c^d d\alpha \int_J f(t,\alpha)dt = \int_J dt \int_c^d f(t,\alpha)d\alpha \tag{14}$$

Le résultat précédent signifie donc que l'intégrale impropre $\int_I dt \int_c^d f(t,\alpha)d\alpha$ est convergente, et en passant à la limite suivant Φ dans la relation (14), on obtient la relation (13).

<u>Exercices</u>.- 1) Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, A un ensemble quelconque, $g(t,\alpha)$ une fonction numérique définie dans $I \times A$, telle que, pour tout $\alpha \in A$, $t \to g(t,\alpha)$ soit $\geqslant 0$ et décroissante dans I ; on suppose en outre qu'il existe un nombre M indépendant de α tel que $g(t,\alpha) \leqslant M$ dans $I \times A$.

a) Montrer que si f est une fonction réglée dans I , telle que l'intégrale impropre $\int_I f(t)dt$ soit convergente, l'intégrale $\int_I g(t,\alpha) f(t)dt$ est uniformément convergente pour $\alpha \in A$ (utiliser le second théorème de la moyenne ; cf. § 5, exerc. 17)

b) On suppose que $I = [a, +\infty[$, et en outre que $g(t,\alpha)$ tende uniformément vers 0 (pour $\alpha \in A$) lorsque t tend vers $+\infty$. Montrer que si f est une fonction règlée daas I , et s'il existe un nombre $k > 0$ tel que $\| \int_J f(t)dt \| \leqslant k$ pour tout intervalle compact J contenu dans I , l'intégrale $\int_I g(t,\alpha) f(t)dt$ est uniformément convergente pour $\alpha \in A$ (même méthode).

c) On suppose que $a \geqslant 0$, $A = [0, +\infty[$, et $g(t,\alpha) = \varphi(\alpha t)$, où φ est une fonction convexe décroissante et $\geqslant 0$ dans A , tendant vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ et telle que $\varphi(0)=1$. On suppose en outre que $f = h''$, où h est une fonction deux fois dérivable dans $]a, +\infty[$, bornée ainsi que h' dans cet intervalle. L'intégrale $\int_a^{\infty} \varphi(\alpha t) f(t)dt$ est alors convergente pour $\alpha > 0$; montrer que lorsque α tend vers 0 , elle tend vers $-h'(a)$ (intégrer par parties et utiliser le second théorème de la moyenne).

d) On prend $\varphi(t) = e^{-t}$, $a=1$ et pour f la fonction numérique $\frac{1}{t}\cos(\log t)$, qui est la dérivée d'une fonction bornée dans I ; montrer que l'intégrale $\int_1^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{\cos(\log t)}{t} dt$, qui est convergente pour tout $\alpha > 0$, ne tend vers aucune limite lorsque α tend vers 0 .

2) Soit $f(x,\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2\alpha x + \alpha^2}}$ pour $-1 < x < 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$; montrer que la fonction $g(\alpha) = \int_{-1}^{+1} \dfrac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x + \alpha^2}}$ est continue dans $\mathbb{R}$, mais n'admet pas de dérivée pour $\alpha=1$ et $\alpha=-1$; montrer que $f'_\alpha(x,\alpha)$ existe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour $x \in I =]-1,+1[$ et est continue dans $I \times \mathbb{R}$, que l'intégrale impropre $\int_{-1}^{+1} f'_\alpha(x,\alpha)dx$ existe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, mais vérifier que cette intégrale n'est pas uniformément convergente dans un voisinage du point $\alpha=1$ ou du point $\alpha=-1$.

3) Soit I un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$, A un voisinage d'un point α_0 dans le corps $\mathbb{R}$ (resp. le corps $\mathbb{C}$), f une application continue de $I \times A$ dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), telle que $f'_\alpha(x,\alpha)$ existe et soit continue dans $I \times A$. Soient $a(\alpha)$, $b(\alpha)$ deux fonctions définies dans A , à valeurs dans I , continues dans A et telles que l'on ait identiquement $f(a(\alpha),\alpha)= f(b(\alpha),\alpha)=0$ dans A . Montrer que la fonction $g(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(t,\alpha)dt$ admet au point α_0 une dérivée égale à $\int_{a(\alpha_0)}^{b(\alpha_0)} f'(t,\alpha_0)dt$, même si a et b ne sont pas dérivables au point α_0 (si M est la borne supérieure de $\| f'_\alpha(x,\alpha)\|$ dans $I \times A$, remarquer, à l'aide du th. de Bolzano appliqué $b(\alpha)$, que pour tout point x appartenant à l'intervalle d'extrémités $b(\alpha_0)$ et $b(\alpha)$, on a, pour α suffisamment voisin de α_0 , $\| f(x,\alpha) \| \leqslant$ $\leqslant M|\alpha-\alpha_0|$).

4) Soit f une fonction vectorielle continue dans l'intervalle compact $I=[0,a]$. Montrer que si, au point $\alpha_0 \in I$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(f(x)- f(\alpha_0))/ |x-\alpha_0|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ reste borné lorsque x tend vers α_0 , la fonction $g(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{f(x)}{\sqrt{\alpha-x}} dx$ admet au point α_0 une dérivée (resp. dérivée à droite ou dérivée à gauche si $\alpha_0=0$ resp. $\alpha_0=a$) égale à

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_0}} \quad (\alpha_0)-\frac{1}{2} \int_0^{\alpha_0} \frac{f(x)-(a_0)}{(a_0-x)^{3/2}} dx$$

pour $\alpha_0 > 0$, à 0 pour $\alpha_0=0$.

Lorsque f est la fonction scalaire $\sqrt{\alpha_0-x}$, montrer que la fonction g correspondante a une dérivée infinie (à gauche) au point α_0 .

5) Soient $I=[a,b]$, $A=[c,d]$ deux intervalles compacts dans $\mathbb{R}$; soit f une fonction définie dans $I \times A$, à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$, telle que l'ensemble D

des points de discontinuité de f dans $I \times A$ soit rencontré en un nombre <u>fini</u> de points par toute droite $x=x_0$ et toute droite $\alpha=\alpha_0$ ($x_0 \in I$; $\alpha_0 \in A$).

a) Montrer que la fonction $g(\alpha)=\int_a^b f(t,\alpha)dt$ est continue dans A (étant donnés $\alpha_0 \in A$ et $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe un voisinage V de α_0 et un nombre fini d'intervalles J_k contenus dans I et dont la somme des longueurs est $\leq \varepsilon$, tels que, si J désigne le complémentaire par rapport à J de $\bigcup_k J_k$, f soit continue dans $V \times J$).

b) Montrer que la formule d'interversion des intégrations (formule (11)) est encore valable (même méthode que dans a)).

6) Soit f une fonction scalaire définie et ayant une dérivée continue dans l'intervalle $]0,+\infty[$, et telle que $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. L'intégrale impropre $\int_0^\infty f'(\alpha t)dt$ est définie et continue dans tout l'intervalle $]0,a]$; montrer que l'intégrale impropre $\int_0^\infty dt \int_0^a f'(\alpha t)d\alpha$ peut ne pas exister ou être distincte de $\int_0^a d\alpha \int_0^\infty f'(\alpha t)dt$.

7) Soient I et J deux intervalles quelconques dans $\mathbf{R}$, f une fonction définie et continue dans $I \times J$, à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbf{R}$. On suppose que :

1°- l'intégrale impropre $\int_I f(x,y)dx$ est uniformément convergente lorsque y décrit un intervalle compact quelconque contenu dans J ;

2°- l'intégrale impropre $\int_J f(x,y)dy$ est uniformément convergente lorsque x décrit un intervalle compact quelconque contenu dans I ;

3°- si, pour tout intervalle compact H contenu dans I, on pose $u_H(y)=\int_H f(x,y)dx$, l'intégrale impropre $\int_J u_H(y)dy$ est uniformément convergente pour $H \in \mathfrak{K}(I)$ (ordonné filtrant des intervalles compacts contenus dans I).

Dans ces conditions, montrer que les intégrales impropres $\int_I dx \int_J f(x,y)dy$ et $\int_J dy \int_I f(x,y)dx$ existent et sont égales.

*8) Déduire de l'exerc.7 que les intégrales impropres $\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-yx^2} \sin y\, dy$ et $\int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-yx^2} \sin y\, dx$ existent et sont égales. *

CHAPITRE III (Etat 4)

FONCTIONS ELEMENTAIRES.

§ 1. Dérivées des fonctions exponentielles et circulaires.

1. Dérivée d'une représentation continue du groupe R .

THEOREME 1.- Soit E une algèbre de rang fini sur R , ayant un élément unité e , et f une représentation continue du groupe additif R dans le groupe multiplicatif G des éléments inversibles de E . L'application f est dérivable en tout point x de R , et on a

(1) $$f'(x) = f(x) f'(0) .$$

Remarquons d'abord que E étant complet, G est ouvert dans E (Top.gén., chap.IX, §3, prop.).

Considérons la fonction $g(x)=\int_0^a f(x+t)dt$, où $a>0$ est un nombre réel que nous préciserons plus loin ; comme $f(x+t)= f(x)f(t)$ par hypothèse, on a $g(x)=\int_0^a f(x)f(t)dt= f(x) \int_0^a f(t)dt$ (chap.II, §1, prop.3) comme $f(0)= e$ et que f est continue par hypothèse, on peut supposer que a est pris assez petit pour que les valeurs de f dans $[0,a]$ appartiennent à un ensemble convexe fermé dans E , contenu dans le groupe G ; par suite, $b=\int_0^a f(t)dt$ appartient à G , autrement dit est inversible (chap.II, § 5,prop.4) ; on a donc $f(x)= g(x) b^{-1}$, et il suffit de prouver que g est dérivable ; or, on peut écrire, par le changement de variable $x+t=u$, $g(x)=\int_x^{x+a} f(u)du$; comme f est continue, g est dérivable pour tout $x \in R$, et on a

$g'(x) = f(x+a) - f(x) = f(x)(f(a)-e)$. D'où $f'(x) = g'(x)b^{-1} = f(x)c$, où $c = (f(a)-e)b^{-1}$, et on a évidemment $f'(0) = c$.

2. Dérivées des fonctions exponentielles ; nombre e.

On sait que toute représentation continue du groupe additif $\mathbb{R}$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$ des nombres réels $\neq 0$ est une fonction de la forme $x \to a^x$ (dite fonction exponentielle), où a est un nombre >0 (Top.gén., chap.V, §4) ; c'est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$ des nombres >0, si $a \neq 1$, et l'isomorphisme réciproque de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ se note $\log_a x$ et est appelé logarithme de base a.

PROPOSITION 1.- Pour tout nombre $a>0$ et $\neq 1$, la fonction exponentielle a^x admet en tout point $x \in \mathbb{R}$ une dérivée égale à $\log_e a . a^x$, où e est un nombre >1 (indépendant de a).

L'application du th.1 au cas où E est le corps $\mathbb{R}$ lui-même montre en effet que a^x admet en tout point une dérivée égale à $\varphi(a).a^x$, où $\varphi(a)$ est un nombre réel $\neq 0$ ne dépendant que de a. Soit b un second nombre >0 et $\neq 1$; la fonction b^x a une dérivée égale à $\varphi(b).b^x$ d'après ce qui précède ; d'autre part, on a $b^x = a^{x.\log_a b}$, donc (chap.II, §1, prop.5) la dérivée de b^x est égale à $\log_a b . \varphi(a) b^x$; par comparaison des deux expressions obtenues, on obtient

$$\varphi(b) = \varphi(a).\log_a b \quad . \tag{2}$$

On en déduit qu'il existe un nombre b et un seul tel que $\varphi(b)=1$; en effet, cette relation équivaut, d'après (2), à $b = a^{1/\varphi(a)}$. Il est d'usage de désigner par e le nombre réel ainsi déterminé ; d'après (2), on a $\varphi(a) = \log_e a$, d'où la proposition.

La définition du nombre e montre qu'on a

$$D(e^x) = e^x \tag{3}$$

ce qui montre que e^x est strictement croissante, et par suite que $e>1$.

Au § 2, nous verrons comment on peut calculer des valeurs aussi approchées qu'on veut du nombre e .

DEFINITION 1.- Les logarithmes de base e sont appelés logarithmes népériens (ou logarithmes naturels).

On convient d'ordinaire d'omettre la base dans la notation d'un logarithme népérien. Sauf mention expresse du contraire, la notation $\log x$ $(x>0)$ désignera donc le logarithme népérien de x . Avec cette notation, la prop.1 s'exprime par la relation

$$D(a^x) = \log a . a^x \tag{4}$$

valable pour a quelconque >0 (puisque pour $a=1$, $\log a=0$).

Cette relation montre que a^x a des dérivées de tout ordre, et qu'on a

$$D^n(a^x) = (\log a)^n a^x \tag{5}$$

En particulier, pour tout $a>0$ et $\neq 1$, on a $D^2(a^x)>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et par suite a^x est strictement convexe dans $\mathbb{R}$ (chap.II, § 4 cor.2 de la prop.4). On en déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 2.- ("inégalité de la moyenne géomètrique").- Quels que soient les nombres $z_i>0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et les nombres $p_i>0$ tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$, on a

$$z_1^{p_1} z_2^{p_2} \ldots z_n^{p_n} \leqslant p_1 z_1+p_2 z_2+\ldots+p_n z_n \tag{6}$$

En outre, les deux membres de (6) ne sont égaux que si tous les z_i sont égaux.

En effet, posons $z_i=e^{x_i}$; l'inégalité (6) s'écrit

$$e^{p_1 x_1+p_2 x_2+\ldots+p_n x_n} \leqslant p_1 e^{x_1}+p_2 e^{x_2}+\ldots+p_n e^{x_n} \tag{7}$$

La proposition résulte alors de la prop.2 du chap.I, § 2, appliquée à la fonction convexe e^x dans $\mathbb{R}$.

On dit que le premier membre (resp. le second membre) de (6) est la **moyenne géométrique pondérée** (resp. la **moyenne arithmétique pondérée**) des n nombres z_i, relatifs aux **poids** p_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Pour $p_i = \frac{1}{n}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on dit que les moyennes arithmétique et géomètrique correspondantes sont les moyennes arithmétique et géomètrique **ordinaires** des z_i. L'inégalité (6) s'écrit alors

(8) $$(z_1 z_2 \ldots z_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}(z_1+z_2+\ldots+z_n) .$$

3. Dérivée de $\log_a x$.

Comme a^x est strictement monotone dans $\mathbb{R}$ pour $a \neq 1$, l'application de la formule de dérivation des fonctions réciproques (chap. II, §1, prop. 6) donne, pour tout $x > 0$

(9) $$D(\log_a x) = \frac{1}{x \log a}$$

et en particulier

(10) $$D(\log x) = \frac{1}{x} .$$

Si u est une fonction numérique admettant une dérivée à droite (resp. à gauche) au point x_0, et telle que $u(x_0) > 0$, la fonction $\log u$ admet au point x_0 une dérivée à droite (resp. à gauche) égale à $u'_d(x_0)/u(x_0)$ (resp. $u'_g(x_0)/u(x_0)$). En particulier, on a $D(\log|x|) = \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}$ si $x > 0$, et $D(\log|x|) = -\frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}$ si $x < 0$; autrement dit, on a $D(\log|x|) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \neq 0$. On en conclut que si, dans un intervalle ouvert I, la fonction numérique u n'est pas nulle et admet une dérivée finie, $\log|u(x)|$ admet dans I une dérivée égale à u'/u ; cette dérivée est dite **dérivée logarithmique** de u. Il est clair que la dérivée logarithmique de $|u|^\alpha$ est $\alpha u'/u$, et que la dérivée logarithmique d'un produit est égale à la somme des dérivées logarithmiques des facteurs ; l'application de ces règles permet souvent de calculer plus rapidement la dérivée d'une fonction. Elles redonnent en particulier la formule

(11) $$D(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (\alpha \text{ réel quelconque, } x > 0)$$

déjà démontrée par une autre voie au chap. II (§ 6, n°1).

Exemple.- Si u est une fonction $\neq 0$ dans un intervalle I, v une fonction numérique quelconque, on a $\log(|u|^v) = v.\log|u|$ donc

$$\frac{1}{|u|^v} D(|u|^v) = v'\log|u| + \frac{vu'}{u} .$$

4. Dérivées des fonctions circulaires ; nombre π.

On a défini, en Topologie générale (Top. gén., chap. VIII, §), l'homomorphisme $x \to e(x)$ du groupe additif $\mathbf{R}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbf{U}$ des nombres complexes de valeur absolue 1 ; c'est une fonction périodique de période principale 1, et on a $e(\frac{1}{4}) = i$. On sait (loc. cit.) que tout homomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{U}$ est de la forme $x \to e(\frac{x}{a})$, et qu'on pose $\cos_a x = \mathcal{R}(e(\frac{x}{a}))$, $\sin_a x = \mathcal{I}(e(\frac{x}{a}))$ (fonctions circulaires de base a) ; ces dernières fonctions sont des applications continues de $\mathbf{R}$ dans $[-1,+1]$, et admettant a pour période principale. On a $\sin_a(x + \frac{a}{4}) = \cos_a x$; pour $-\frac{a}{4} \leq x \leq \frac{a}{4}$ on a $\cos_a x \geq 0$; pour $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$, on a $\sin_a x \geq 0$.

PROPOSITION 3.- *La fonction $e(x)$ admet en tout point de $\mathbf{R}$ une dérivée égale à $2\pi i\, e(x)$, où π est une constante > 0.*

En effet, le th. 1, appliqué au cas où E est le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, donne la relation $e'(x) = e'(0)\, e(x)$. Les fonctions $\cos_a x$ et $\sin_a x$ sont donc dérivables dans $\mathbf{R}$; comme au point 0, $\cos_a x$ admet un maximum relatif, sa dérivée est nulle en ce point ; celle de $\sin_a x$ est ≥ 0, puisque $\sin_a x$ est croissante dans $[0, \frac{a}{4}]$. Comme $D(e(\frac{x}{a})) = D(\cos_a x) + iD(\sin_a x)$, on voit (en prenant $a=1$), que $e'(0)$ est de la forme αi, où $\alpha \geq 0$; comme $e(x)$ n'est pas constante, on a $\alpha > 0$; il est d'usage de désigner le nombre α ainsi défini par la notation 2π.

Nous montrerons au § 2 comment on peut calculer des valeurs aussi approchées qu'on veut du nombre π .

On a donc la formule

(12) $$D(e(\frac{x}{a})) = \frac{2\pi i}{a} e(\frac{x}{a})$$

et par suite

(13) $$D(\cos_a x) = -\frac{2\pi}{a}\sin_a x \quad , \quad D(\sin_a x) = \frac{2\pi}{a}\cos_a x \ .$$

On voit que ces dernières formules se simplifient lorsque $a=2\pi$; c'est pourquoi on utilise excluṣivement en Analyse les fonctions circulaires relatives à la base 2π ; on convient d'omettre la base dans la notation de ces fonctions ; sauf mention expresse du contraire, les notations $\cos x$, $\sin x$ et $\operatorname{tg} x$ désigneront donc respectivement $\cos_{2\pi} x$, $\sin_{2\pi} x$ et $\operatorname{tg}_{2\pi} x$. Avec ces conventions, on a donc

(14) $$D(\cos x) = -\sin x \ , \ D(\sin x) = \cos x \ , \ D(\operatorname{tg} x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

A coté des trois fonctions circulaires $\cos x$, $\sin x$ et $\operatorname{tg} x$ on emploie encore, dans la pratique du calcul numérique, les trois fonctions auxiliaires : <u>cotangente</u>, <u>sécante</u> et <u>cosécante</u>, définies par les formules

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \quad , \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad , \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \ .$$

5. Fonctions circulaires réciproques.

La restriction de la fonction $\sin x$ à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ est strictement croissante : on désigne par $\operatorname{Arc\,sin} x$ sa fonction réciproque, qui est donc une application strictement croissante et continue de l'intervalle $[-1,+1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$. La formule de dérivation des fonctions réciproques (chap.II, § 1,prop.6) donne la dérivée de cette fonction :

$$D(\operatorname{Arc\,sin} x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{Arc\,sin} x)}$$

Comme $-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{Arc\,sin} x \leqslant \frac{\pi}{2}$, on a $\cos(\operatorname{Arc\,sin} x) \geqslant 0$, et comme $\sin(\operatorname{Arc\,sin} x) = x$, $\cos(\operatorname{Arc\,sin} x) = \sqrt{1-x^2}$, d'où

(15) $$D(\text{Arc sin } x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

De même, la restriction de cos x à l'intervalle $\left[0,\pi\right]$ est strictement décroissante ; on désigne par Arc cos x sa fonction réciproque, qui est une application strictement décroissante de $\left[-1,+1\right]$ sur $\left[0,\pi\right]$. On a d'ailleurs

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \text{Arc cos } x) = \cos(\text{Arc cos } x) = x$$

et comme $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - \text{Arc cos } x \leqslant \frac{\pi}{2}$, on a

(16) $$\text{Arc cos } x = \frac{\pi}{2} - \text{Arc sin } x$$

d'où résulte en particulier que

(17) $$D(\text{Arc cos } x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Enfin, la restriction de tg x à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ est strictement croissante ; on désigne par Arc tg x sa fonction réciproque qui est une application strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$; on a

$$\lim_{x\to-\infty} \text{Arc tg } x = -\frac{\pi}{2} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \text{Arc tg } x = \frac{\pi}{2} ,$$

et par application de la formule de dérivation des fonctions réciproques et de la dernière formule (14), on a

(18) $$D(\text{Arc tg } x) = \frac{1}{1+x^2}$$

6. <u>L'exponentielle complexe.</u>

On a déterminé (<u>Top.gén.</u>, chap.VIII, § , n°) tous les homomorphismes du groupe topologique (additif) $\mathbb{C}$ des nombres complexes sur le groupe topologique (multiplicatif) $\mathbb{C}^*$ des nombres complexes $\neq 0$; ce sont les applications

(19) $$x+iy \to e^{\alpha x+\beta y}\, e(\gamma x + \delta y)$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont quatre nombres réels assujettis à la seule condition $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Si on désigne par f l'application (19), l'application partielle $x \to f(x+iy)$ est dérivable quels que soient x et y et a pour dérivée $(\alpha+2\pi i\gamma)f(x+iy)$ d'après les formules (5) et (12). De même, l'application partielle $y \longrightarrow f(x+iy)$ est dérivable quels que soient x et y, et a pour dérivée $(\beta+2\pi i\delta)f(x+iy)$.

Cherchons si on peut déterminer les nombres $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ de sorte que l'application $z \rightarrow f(z)$ ait une dérivée (par rapport à la variable <u>complexe</u> z) dans $\mathbb{C}$; s'il en est ainsi, et si on désigne par g cette dérivée, l'application partielle $x \longrightarrow f(x+iy)$ aura pour dérivée $g(x+iy)$, l'application partielle $y \longrightarrow f(x+iy)$ aura pour dérivée $ig(x+iy)$. Une condition <u>nécessaire</u> pour que le problème soit possible est donc, d'après ce qui précède, que $\beta = -2\pi\gamma$ et $\alpha=2\pi\delta$; on a alors $\alpha\delta-\beta\gamma = 2\pi(\gamma^2+\delta^2)$, donc il faut en outre que $\gamma^2+\delta^2\neq 0$. Si on prend en particulier $\alpha=1$, $\gamma=0$, on obtient l'homomorphisme $x+iy \longrightarrow e^x e(\frac{y}{2\pi})$, que nous noterons pour le moment f_0 ; pour tout autre système de nombres $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ satisfaisant aux conditions que nous venons de trouver, on a, en posant $a=\alpha+2\pi i\gamma$, $\alpha x+\beta y = \mathcal{R}(az)$ et $\gamma x+\delta y = \mathcal{I}(\frac{az}{2\pi})$; l'homomorphisme correspondant à ces nombres est donc $z \rightarrow f_0(az)$.

Nous allons montrer maintenant que les conditions trouvées sont <u>suffisantes</u> ; d'après la formule de dérivation des fonctions composées (chap. II, § 1, prop. 5), il suffira de montrer que $f_0(z)$ a une dérivée en tout point $z\in\mathbb{C}$. D'ailleurs, comme f_0 est un homomorphisme de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{f_0(z+h)-f_0(z)}{h} = f_0(z).\frac{f_0(h)-1}{h} \tag{20}$$

si bien que tout revient à montrer que f_0 est dérivable au point $z=0$; sa dérivée en ce point (si elle existe) est nécessairement égale à 1, puisque c'est la dérivée de la restriction e^x de f_0 à l'axe réel ; nous sommes donc ramenés à prouver que

(21) $$\lim_{z\to 0, z\neq 0} \frac{f_0(z)-1-z}{z} = 0 .$$

Mettons z sous forme trigonomètrique $z=t(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ $(t>0)$, et posons (pour α fixe quelconque)

$$g(t)=f_0(t(\cos\alpha + i\sin\alpha))-1-t(\cos\alpha + i\sin\alpha) =$$
$$= e^{t\cos\alpha}\, e\left(\frac{t\sin\alpha}{2\pi}\right)-1-t(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

On a

$$g'(t)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(e^{t\cos\alpha}\, e\left(\frac{t\sin\alpha}{2\pi}\right)-1)$$
$$g''(t)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2 e^{t\cos\alpha}\, e\left(\frac{t\sin\alpha}{2\pi}\right)$$

On a donc $|g''(t)|\leqslant e^t$ et $g'(0)=g(0)=0$, quel que soit α . Supposons $t\leqslant 1$; le développement de Taylor d'ordre 1 de $g(t)$ au point 0 montre que $|g(t)|\leqslant e\,\frac{t^2}{2}$, et comme $t=|z|$, cela démontre a fortiori la relation (21).

La formule (20) montre alors que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

(22) $$D(f_0(z))=f_0(z) .$$

Cette propriété rapproche encore f_0 de la fonction e^x , qui est d'ailleurs la restriction de f_0 à l'axe réel ; pour cette raison, on pose la définition suivante :

DEFINITION 2.- <u>On appelle exponentielle complexe l'homomorphisme $x+iy \to e^x\, e\left(\frac{y}{2\pi}\right)$ de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$; sa valeur pour un nombre complexe quelconque z se note e^z ou exp z .</u>

Avec cette notation, la formule (22) s'écrit

(23) $$D(e^z)=e^z$$

d'où, pour tout nombre complexe a

(24) $$D(e^{az})=ae^{az}$$

<u>Remarque</u>.- Si, dans la formule (24), on restreint la fonction e^{az} à l'axe réel, on obtient encore, pour x réel

(24) $$D(e^{ax}) = ae^{ax}$$

Cette formule permet de calculer une primitive de chacune des fonctions $e^{\alpha x}\cos \beta x$, $e^{\alpha x}\sin \beta x$ (α et β réels) ; en effet, on a $e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos \beta x + i\, e^{\alpha x}\sin \beta x$, donc, d'après (2'),

$$D(\mathcal{R}(\frac{1}{\alpha+i\beta}\, e^{(\alpha+i\beta)x})) = e^{\alpha x}\cos \beta x$$

$$D(\mathcal{I}(\frac{1}{\alpha+i\beta}\, e^{(\alpha+i\beta)x})) = e^{\alpha x}\sin \beta x$$

De la même manière, on ramène le calcul d'une primitive de $x^n e^{\alpha x}\cos \beta x$, ou de $x^n e^{\alpha x}\sin \beta x$ (n <u>entier</u> $\geqslant 0$) à celui d'une primitive de $x^n e^{(\alpha+i\beta)x}$; or, la formule d'intégration par parties d'ordre $n+1$ (chap. II, § 5, formule (9)) montre qu'une primitive de cette dernière fonction est

$$e^{(\alpha+i\beta)x}\left[\frac{x^n}{\alpha+i\beta} - \frac{nx^{n-1}}{(\alpha+i\beta)^2} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{(\alpha+i\beta)^3} - \dots + (-1)^n \frac{n!}{(\alpha+i\beta)^{n+1}}\right]$$

<u>7. Propriétés de la fonction e^z</u> .

D'après la définition de la fonction e^z , on a, pour x réel

(25) $$e(x) = e^{2\pi i x}$$

ce qui permet d'écrire les formules qui définissent $\cos x$ et $\sin x$ sous la forme

(26) $$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) , \qquad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

(<u>formules d'Euler</u>).

En vertu des formules d'Euler, on peut exprimer toute puissance entière positive de $\cos x$ ou de $\sin x$ comme combinaison linéaire d'exponentielle e^{ipx} (p entier positif ou négatif). D'après la formule (24), on pourra donc exprimer par une combinaison linéaire de fonctions de la forme $x^p e^{\alpha x}\cos \lambda x$ et $x^p e^{\alpha x}\sin \mu x$, une primitive de la fonction $x^n e^{\alpha x}(\cos \beta x)^r (\sin \gamma x)^s$ (n,p,r,s entiers, $\alpha,\beta,\gamma, \lambda , \mu$ réels).

Exemple.- On a

$$\sin^{2n}x = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}(e^{ix}-e^{-ix})^{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\left[e^{2nix}-\binom{2n}{1}e^{(2n-2)ix}+\ldots+e^{-2nix}\right]$$

d'où

$$\int_0^x \sin^{2n}t\,dt = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\left[\frac{1}{n}\sin 2nx-\binom{2n}{1}\frac{1}{n-1}\sin(2n-2)x+\ldots+(-1)^n\binom{2n}{n}x\right]$$

et en particulier

$$(27)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}t\,dt = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}\,\frac{\pi}{2} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2}$$

Pour tout $z = x+iy$, on a

$$(28)\qquad e^z=e^{x+iy}= e^x(\cos y + i \sin y)$$

et comme $e^x > 0$, on voit que e^z a pour valeur absolue e^x , pour amplitude y (modulo 2π) .

Le fait que $z \to e^z$ est une représentation de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$ se traduit par les identités

$$(29)\qquad e^{z+z'} = e^z e^{z'} \quad , \quad e^0=1 \quad , \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}$$

Comme 2π est période principale de $e(\frac{x}{2\pi})$, $2\pi i$ est période principale e^z ; autrement dit, le groupe des périodes e e^z est l'ensemble des nombres $2n\pi i$, où n parcourt $\mathbb{Z}$.

On déduit de là que, si B désigne la "bande" formée des points $z=x+iy$ tels que $-\pi \leqslant y < \pi$, e^z prend chacune de ses valeurs une fois et une seule dans B ; autrement dit, $z \to e^z$ est une application biunivoque et continue de B sur $\mathbb{C}^*$; l'image par cette application du segment (semi-ouvert) $x=x_0$, $-\pi \leqslant y < \pi$ est le cercle $|z| = e^{x_0}$; l'image de la droite $y=y_0$ est la demi-droite (ouverte) définie par $\mathrm{Am}\, z \equiv y_0$ (mod. 2π) .

8. Le logarithme complexe.

Il résulte de ce qui précède que l'image par $z \to e^z$ de l'intérieur $\overset{\circ}{B}$ de la bande B , c'est-à-dire de l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que

$|\mathcal{I}(z)| < \pi$, est le complémentaire F du semi-axe négatif (fermé) dans $\mathbb{C}$; si on convient de désigner par Am z la mesure de l'amplitude de z qui appartient à $[-\pi,+\pi[$, l'ensemble F peut encore être défini comme le <u>secteur angulaire ouvert</u> $-\pi < \text{Am}\, z < +\pi$. Comme $z \to e^z$ est un <u>homomorphisme</u> de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$, l'image par cette application de tout ensemble ouvert dans $\overset{\circ}{B}$ (donc dans $\mathbb{C}$) est un ensemble ouvert dans $\mathbb{C}^*$ (donc dans F) ; autrement dit, la restriction de $z \to e^z$ à $\overset{\circ}{B}$ est un <u>homéomorphisme</u> de $\overset{\circ}{B}$ sur F. On désigne par $z \to \text{Log}\, z$ l'homéomorphisme de F sur $\overset{\circ}{B}$, réciproque du précédent ; pour un nombre complexe $z \in F$, Log z est appelé la <u>détermination principale du logarithme de z</u>. Si $z=x+iy$, $\text{Log}\, z=u+iv$, on a $x+iy=e^{u+iv}$, d'où $e^u=|z|$, et comme $-\pi < v < \pi$, $v=\text{Am}\, z$. D'ailleurs, on a $\text{tg}(v + \frac{\pi}{2}) = -\frac{x}{y}$ si $y \neq 0$; on peut donc écrire

$$(30) \quad \begin{cases} u = \log|z| = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) & \\ v = \frac{\pi}{2} - \text{Arc tg}\,\frac{x}{y} & \text{si } y > 0 \\ v = 0 & \text{si } y = 0 \\ v = -\frac{\pi}{2} - \text{Arc tg}\,\frac{x}{y} & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Il est clair que Log z est un prolongement à F de la fonction log x définie sur le demi-axe réel positif ouvert $\mathbb{R}_+^*$. Si z,z' sont deux points de F tels que zz' ne soit pas réel négatif, on a $\text{Log}(zz')=\text{Log}\, z + \text{Log}\, z' + 2\varepsilon\pi i$, où $\varepsilon = +1$, -1 ou 0 suivant les valeurs de Am z et Am z'.

On notera qu'aux points du demi-axe réel négatif, la fonction Log z <u>n'a pas de limite</u> ; de façon précise, si x tend vers $x_0 < 0$ et si y tend vers 0 en restant positif (resp. négatif), Log z tend vers $\log|x_0| + \pi i$ (resp. $\log|x_0| - \pi i$) ; lorsque z tend vers 0, $|\text{Log}\, z|$ croît indéfiniment.

Nous verrons plus tard comment la théorie des fonctions analytiques permet de prolonger la fonction Log z , et de définir le logarithme complexe dans toute sa généralité.

Comme Log z est un homéomorphisme réciproque de e^z , la formule de dérivation des fonctions réciproques (chap.II, § 1,prop.6) montre qu'en tout point z de F , Log z est dérivable, et qu'on a

$$D(\text{Log } z) = \frac{1}{e^{\text{Log } z}} = \frac{1}{z} \tag{31}$$

formule qui généralise la formule (10).

9. Primitives des fonctions rationnelles.

La formule (31) permet de calculer une primitive d'une fonction rationnelle quelconque $r(x)$ d'une variable réelle x , à coefficients réels ou complexes. En effet, on sait (Alg.,chap.VI, § 3) qu'une telle fonction peut s'écrire (d'une seule manière) comme somme d'un nombre fini de termes, qui sont :

a) soit des monômes ax^p (p entier $\geqslant 0$, a nombre complexe) ;

b) soit des fonctions de la forme $\frac{a}{(x-b)^m}$ (m entier > 0, a et b nombres complexes).

Or, il est facile d'obtenir une primitive de chacun de ces termes :

a) une primitive de ax^p est $a\frac{x^{p+1}}{p+1}$;

b) si $m > 1$, une primitive de $\frac{a}{(x-b)^m}$ est $\frac{a}{(1-m)(x-b)^{m-1}}$;

c) enfin, d'après les formules (10) et (31), une primitive de $\frac{a}{x-b}$ est:

$$a.\log|x-b| \quad \text{si } b \text{ est réel ;}$$

$$a.\text{Log}(x-b) \quad \text{si } b \text{ est complexe.}$$

Dans ce dernier cas, si $b=p+iq$ on a d'ailleurs (formules (30))

$$\text{Log}(x-b)=\log\sqrt{(x-p)^2+q^2} + i \text{ Arc tg } \frac{x-p}{q} \pm i \frac{\pi}{2}$$

Nous renvoyons à la partie de cet ouvrage consacrée au Calcul numérique, l'examen des méthodes les plus pratiques pour la détermination explicite d'une primitive d'une fonction rationnelle donnée explicitement.

On peut ramener au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle :

1° le calcul d'une primitive d'une fonction de la forme $r(e^{ax})$, r étant une fonction rationnelle, a un nombre réel ; en effet, par le changement de variable $u=e^{ax}$, on est ramené à trouver une primitive de $r(u)/u$;

2° le calcul d'une primitive d'une fonction de la forme $f(\sin ax , \cos ax)$, où f est une fonction rationnelle de deux variables, et a un nombre réel ; par le changement de variable $u = \operatorname{tg} \frac{ax}{2}$, on est ramené à trouver une primitive de

$$\frac{2}{1+u^2} f\left(\frac{2u}{1+u^2} , \frac{1-u^2}{1+u^2} \right)$$

10. Fonctions circulaires complexes ; fonctions hyperboliques.

Les formules d'Euler (26) et la définition de e^z pour tout z complexe, permettent de prolonger à $\mathbb{C}$ les fonctions $\cos x$ et $\sin x$ définies dans $\mathbb{R}$, en posant, pour tout $z \in \mathbb{C}$

(32) $\quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $\quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ (cf. exerc.)

Soit $f(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ un polynome rapport à m indéterminées, à coefficients complexes, tel que lorsqu'on substitue à X_j la fonction $\cos(\sum_{k=1}^{n} p_{jk}x_k)$ pour $1 \leqslant j \leqslant r$, la fonction $\sin(\sum_{k=1}^{n} p_{jk}x_k)$ pour $r+1 \leqslant j \leqslant m$, où les p_{jk} sont entiers (positifs ou négatifs), et les x_k réels, on obtienne une fonction des x_k identiquement nulle ; nous allons montrer que la même identité a lieu lorsqu'on donne aux x_k des valeurs complexes arbitraires. En effet, en substituant dans f à X_j la fraction rationnelle $\frac{1}{2}(Y_j + \frac{1}{Y_j})$ pour $1 \leqslant j \leqslant r$, la fraction rationnelle $\frac{1}{2i}(Y_j - \frac{1}{Y_j})$ pour $r+1 \leqslant j \leqslant m$, on obtient une fraction rationnelle dont le dénominateur est un produit de puissances des Y_j, et le numérateur un polynome $g(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$; substituons dans ce polynome à chaque Y_j le monôme $\prod_{k=1}^{n} Z_k^{p_{jk}}$; on obtient une fraction rationnelle dont le dénominateur est un produit de puissances des Z_k, et le numérateur un polynome $h(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$. Par hypothèse, ce polynome s'annule quand on y remplace Z_k par e^{ix_k}, et qu'on donne à chacun des x_k une valeur réelle arbitraire ; chacun des Z_k pouvant ainsi être remplacé par une infinité de valeurs le polynome est identiquement nul (Alg., chap. IV, § 2, prop. 6) ; a fortiori, il est nul quand on y remplace Z_k par e^{ix_k}, où x_k est un nombre complexe arbitraire ; d'où la proposition, en vertu des formules (32).

En particulier, on a, lorsque z et z' sont quelconques dans $\mathcal{C}$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

$$\cos(z+z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z'$$

$$\sin(z+z') = \sin z \cos z' + \cos z \sin z'$$

D'autre part, la formule (23) montre que cos z et sin z sont dérivables dans $\mathcal{C}$, et que l'on a

$$D(\cos z) = -\sin z$$

$$D(\sin z) = \cos z$$

Pour $z = ix$ (x réel), les formules (32) donnent

$$\cos ix = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad , \quad \sin ix = \frac{i}{2}(e^x - e^{-x})$$

Il est commode de désigner par une notation particulière les fonctions réelles qui s'introduisent ainsi ; on pose

$$(33)\quad \begin{cases} \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) & (\underline{\text{cosinus hyperbolique}} \text{ de } x) \\ \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) & (\underline{\text{sinus hyperbolique}} \text{ de } x) \\ \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} & (\underline{\text{tangente hyperbolique}} \text{ de } x) \end{cases}$$

On a donc, pour tout x réel

$$(34)\qquad \cos ix = \operatorname{ch} x \quad , \qquad \sin ix = i \operatorname{sh} x$$

De toute identité algèbrique entre cosinus et sinus d'un nombre fini d'arguments de la forme $p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n$ (p_k entiers, x_k réels) on déduit donc une identité entre cosinus et sinus hyperboliques des mêmes arguments, en remplaçant dans l'identité donnée chaque variable x_k par ix_k , puis en utilisant (34) ; en particulier, on a

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{ch}(x+x') = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} x' + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} x'$$

$$\operatorname{sh}(x+x') = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x' + \operatorname{sh} x' \operatorname{ch} x$$

Ces fonctions permettent en outre d'exprimer les parties réelles et imaginaires de $\cos z$ et $\sin z$ pour $z=x+iy$, car

$$\cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$$

$$\sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$$

Enfin, on a

$$D(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x \quad , \qquad D(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x$$

$$D(\operatorname{th} x) = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

Comme $\operatorname{ch} x > 0$ pour tout x , on déduit de là que $\operatorname{sh} x$ est strictement croissante dans $\mathbb{R}$; comme $\operatorname{sh} 0=0$, $\operatorname{sh} x$ a donc le signe de x . Par suite, $\operatorname{ch} x$ est strictement décroissante pour $x \leqslant 0$, strictement croissante pour $x \geqslant 0$. Enfin, $\operatorname{th} x$ est strictement croissante dans $\mathbb{R}$. On a en outre

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{sh} x = -\infty \quad , \qquad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{ch} x = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{ch} x = +$$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{th} x = -1 \quad , \qquad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = +1 \ .$$

On désigne parfois par Arg sh x la fonction réciproque de sh x , qui est une application strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Cette fonction s'exprime d'ailleurs à l'aide du logarithme, car de la relation $x = \operatorname{sh} y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$, on tire $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$, et comme $e^y > 0$, $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$, c'est-à-dire

$$\operatorname{Arg\,sh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$$

De même, on désigne parfois par Arg ch x la fonction réciproque de la restriction de ch x à $\left[0,+\infty\right[$; c'est une application strictement croissante de $\left[1,+\infty\right[$ sur $\left[0,+\infty\right[$; on montre comme ci-dessus que

$$\operatorname{Arg\,ch} x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$$

Enfin, on désigne par Arg th x la fonction réciproque de th x , qui est une application strictement croissante de $\left]-1,+1\right[$ sur $\mathbb{R}$; on a d'ailleurs

$$\operatorname{Arg\,th} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

<u>Exercices</u>.- 1) a) Pour que la fonction $(1+\frac{1}{x})^{x+p}$ soit décroissante (resp. croissante) pour $x > 0$, il faut et il suffit que $p \geqslant \frac{1}{2}$ (resp. $p \leqslant 0$) ; pour $0 \leqslant p \leqslant \frac{1}{2}$, la fonction est décroissante dans un intervalle $\left]0,x_0\right[$, croissante dans $\left]x_0,+\infty\right[$. Dans tous les cas, la fonction tend vers e lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Etudier de même les fonctions $(1-\frac{1}{x})^{x-p}$, $(1+\frac{1}{x})^x(1+\frac{p}{x})$ et $(1+\frac{p}{x})^{x+1}$ pour $x > 0$.

2) a) Démontrer que, pour $\alpha \geqslant 1$ et $x \geqslant 0$, $(1+x)^\alpha \geqslant 1+\alpha x$, et pour $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $(1+x)^\alpha \leqslant 1+\alpha x$.

b) Démontrer de même que pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $\alpha \geqslant 0$, on a $(1-x)^\alpha \leqslant \frac{1}{1+\alpha x}$.

3) Soit a un nombre > 0 ; montrer que la fonction $\frac{\log a - \log x}{a-x}$ est décroissante pour $0 < x < a$ et croissante pour $x > a$.

4) Pour $x > 0$ et y réel quelconque, montrer qu'on a

$$xy \leqslant x.\log x + e^{y-1}$$

(voir chap. II, § 5, exerc. 16) ; dans quel cas les deux membres sont-ils égaux ?

5) Soient a_i $(1 \leqslant i \leqslant n+1)$ $n+1$ nombres > 0, A_n et G_n les moyennes arithmétique et géométrique ordinaires de $a_1, \ldots, a_n$, A_{n+1} et G_{n+1} celles de $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Démontrer que

$$n(A_n - G_n) \leqslant (n+1)(A_{n+1} - G_{n+1})$$

l'égalité n'ayant lieu que si $a_{n+1} = G_n$ (poser $a_{n+1} = x^{n+1}$, $G_n = y^{n+1}$).

6) Soient A et G les moyennes arithmétique et géométrique ordinaires des nombres strictement positifs a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Montrer que, si on pose $x_i = \frac{a_i}{A}$, la relation $G \geqslant (1-\alpha)A$, où $0 \leqslant \alpha < 1$, entraîne, pour $1 \leqslant i \leqslant n$

$$x_i\left(1 - \frac{x_i - 1}{n-1}\right)^{n-1} \geqslant (1-\alpha)^n$$

En déduire que, pour tout indice i, on a $1 + x' \leqslant x_i \leqslant 1 + x''$, où x' est la racine négative, x'' la racine positive de l'équation $(1+x)e^{-x} = (1-\alpha)^n$ (cf. exerc. 1).

7) Soient a_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n)$ des nombres $\geqslant 0$ tels que, pour tout indice i, on ait $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ et pour tout indice j, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$. Soient x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ des nombres > 0 ; on pose

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

Montrer que $y_1 y_2 \ldots y_n \geqslant x_1 x_2 \ldots x_n$ (minorer $\log y_i$ pour chaque indice i).

8) a) Soit $\sum_{i,j} c_{ij} x_i \overline{x}_j$, où $c_{ji} = \overline{c}_{ij}$ $(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n)$ une forme hermitienne définie positive, Δ son déterminant ; montrer que $\Delta \leqslant c_{11} c_{22} \ldots c_{nn}$ (exprimer Δ et les c_{ii} à l'aide des valeurs propres de la forme hermitienne, et utiliser la prop. 2).

b) En déduire que, si (a_{ij}) est une matrice carrée d'ordre n à éléments complexes quelconques, Δ son déterminant, on a ("inégalité de Hadamard")

$$|\Delta|^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{1j}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{2j}|^2\right)\cdots\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{nj}|^2\right)$$

l'égalité n'ayant lieu que si un des facteurs du second membre est nul, ou si on a, quels que soient les indices distincts h,k

$$a_{h1}\bar{a}_{k1}+a_{h2}\bar{a}_{k2}+\dots+a_{hn}\bar{a}_{kn} = 0$$

(multiplier la matrice (a_{ij}) par la conjuguée de sa transposée).

9) Si x,y,a,b sont > 0, montrer que

$$x \log \frac{x}{a} + y \log \frac{y}{b} \geqslant (x+y) \log \frac{x+y}{a+b} ,$$

l'égalité n'ayant lieu que si $x/a = y/b$.

10) Montrer que $\operatorname{tg} x > x$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

11) Soit a un nombre réel tel que $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Montrer que la fonction

$$\frac{\frac{\operatorname{tg} x}{x} - \frac{\operatorname{tg} a}{a}}{x \operatorname{tg} x - a \operatorname{tg} a}$$

est strictement croissante dans l'intervalle $\left]a, \frac{\pi}{2}\right[$ (cf. chap. II, § 4, exerc. 2).

12) Soient u et v deux polynomes en x, à coefficients réels, tels qu'on ait identiquement $\sqrt{1-u^2} = v\sqrt{1-x^2}$; montrer que, si n est le degré de u, on a $u'=nv$; en déduire que l'on a $u=\cos(n \operatorname{Arc} \cos x)$.

13) Démontrer (par récurrence sur n) la formule

$$D^n(\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin\left(n \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}\right) .$$

14) Soit f une fonction réelle définie dans un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, telle que pour tout système de trois points x_1, x_2, x_3 de I satisfaisant à $x_1 < x_2 < x_3 < x_1+\pi$, on ait

(1) $\quad f(x_1)\sin(x_3-x_2)+f(x_2)\sin(x_1-x_3)+f(x_3)\sin(x_2-x_1) \geqslant 0$.

Montrer que :

a) f est continue en tout point de I , et admet en tout point de I une dérivée à droite et une dérivée à gauche finies ; on a en outre

$$(2) \qquad f(x)\cos(x-y)-f'_d(x)\sin(x-y) \leqslant f(y)$$

pour tout couple de points x, y de I tels que $|x-y| \leqslant \pi$; on a aussi l'inégalité analogue à (2), où on remplace f'_d par f'_s ; enfin, on a $f'_s(x) \leqslant f'_d(x)$ pour tout $x \in I$. (Pour démontrer (2), faire tendre, dans (1), x_2 vers x_1 en laissant fixe x_3 , et obtenir ainsi une majoration de $\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$; puis faire tendre x_3 vers x_1 dans l'inégalité trouvée ; en déduire l'existence de $f'_d(x)$ et l'inégalité (2) pour $y > x$; procédés analogues pour les autres questions).

b) Réciproquement, si (2) a lieu pour tout couple de point x, y de I tels que $|y-x| \leqslant \pi$, f vérifie (1) dans I (considérer la différence

$$\frac{f(x_2)}{\sin(x_3-x_2)} - \frac{f(x_1)}{\sin(x_3-x_1)}$$

c) Si f admet une dérivée seconde dans I , (1) est équivalente à la condition

$$(3) \qquad f(x)+f''(x) \geqslant 0$$

pour tout $x \in I$.

Interpréter ces résultats en considérant la courbe plane définie par $x = \frac{1}{f(t)} \cos t$, $y = \frac{1}{f(t)} \sin t$ ("convexité par rapport à l'origine").

15) Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n nombres complexes distincts. Montrer que si n polynomes $p_i(z)$ (à coefficients complexes) vérifient l'identité

$$p_1(z)e^{a_1 z} + p_2(z)e^{a_2 z} + \ldots + p_n(z)e^{a_n z} = 0$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ (ou seulement pour tout z réel), ils sont identiquement nuls (procéder par récurrence sur n , et dérivations successives).

16) On sait (Alg.,chap.IX) que, dans le plan complexe $\mathbb{C}^2$, le groupe des angles A est isomorphe au groupe orthogonal $O_2(\mathbb{C})$; l'isomorphie canonique entre ces deux groupes faisant correspondre à l'angle θ la rotation d'angle θ ; on transporte au groupe A la topologie de $O_2(\mathbb{C})$ (considéré comme sous-espace de l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ des matrices d'ordre 2 sur $\mathbb{C}$, cf.Top.gén., chap.VI, § 1,n° et chap.VIII, § 4,n°) par cette isomorphie, ce qui fait de A un groupe topologique localement compact ; en outre l'application $\theta \to \cos\theta + i \sin\theta$ est un isomorphisme du groupe topologique A sur le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ des nombres complexes $\neq 0$, l'isomorphisme réciproque étant défini par les formules $\cos\theta = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, $\sin\theta = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$. Déduire de ces relations que tout homomorphisme $z \to \varphi(z)$ du groupe additif $\mathbb{C}$ sur A , tel que les fonctions complexes $\cos\varphi(z)$, $\sin\varphi(z)$ soient dérivables dans $\mathbb{C}$, est défini par les relations $\cos\varphi(z) = \cos az$, $\sin\varphi(z) = \sin az$ (a nombre complexe quelconque).

17) Soit D la partie de $\mathbb{C}$ réunion de l'ensemble défini par $-\pi < \mathcal{R}(z) \leqslant +\pi$, $\mathcal{I}(z) > 0$, et du segment $\mathcal{I}(z)=0$, $0 \leqslant \mathcal{R}(z) \leqslant \pi$. Montrer que la restriction de la fonction cos z à D applique biunivoquement D sur $\mathbb{C}$; la restriction de cos z à l'intérieur de D est un homéomorphisme de cet ensemble ouvert sur le complémentaire, dans $\mathbb{C}$, de la demi-droite $y=0$, $x \leqslant 1$.

18) Soient f et g deux polynomes (à coefficients complexes) premiers entre eux, le degré de f étant strictement inférieur à celui de g .

Soit p le p.g.c.d. de g et de sa dérivée g' , q le quotient de g par p ; montrer qu'il existe deux polynomes u,v uniquement déterminés, de degrés respectifs strictement inférieurs à ceux de p et q , et tels que

$$\frac{f}{g} = D\left(\frac{u}{p}\right) + \frac{v}{q}$$

En déduire que les coefficients de u et v appartiennent au plus petit corps (sur $\mathbb{Q}$) contenant les coefficients de f et g et contenu dans $\mathbb{C}$.

19) Soient f et g deux polynomes premiers entre eux, f étant de degré strictement inférieur à celui de g . Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$ contenant les coefficients de f et de g , et tel que g soit irréductible sur K . Pour qu'il existe une primitive de $\frac{f}{g}$ de la forme $\sum_i a_i \operatorname{Log} u_i$, où les a_i sont des constantes appartenant à K , les u_i des polynomes irréductibles sur K , il faut et il suffit qu'on ait $f=cg'$, où c est une constante appartenant à K .

20) Montrer qu'on peut ramener le calcul d'une primitive de $(a+bx)^p x^q$ (p et q réels) au calcul de la primitive d'une fonction rationnelle lorsque l'un des nombres $p,q,p+q$ est un entier (positif ou négatif).

21) Si $f(x,y)$ est un polynome quelconque en x,y , montrer que le calcul d'une primitive de $f(x,\log x)$ et de $f(x,\operatorname{Arc\,sin} x)$ se ramène au calcul d'une primitive de fonction rationnelle.

22) a) Si m et n sont deux entiers tels que 0 m n , démontrer la formule

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$$

b) Montrer que, pour $0<a<1$, l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}$ est uniformément convergente, pour a variant dans un intervalle compact, et déduire de a), que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

23) Si $I_{m,n}$ est une primitive de $\sin^m x \cos^n x$ (m et n nombre réels quelconques), montrer que si $m+n+2 \neq 0$

$$I_{m+2,n} = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+n+2} + \frac{m+1}{m+n+2} I_{m,n}$$

est une primitive de $\sin^{m+2} x \cos^n x$.

Retrouver à l'aide de cette formule la formule (27) du texte et démontrer la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2.4.6 \,..\, 2n}{1.3.5 \ldots (2n+1)} \quad (n \text{ entier} \geqslant 0)$$

24) Démontrer la <u>formule de Wallis</u>

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2.4.6 \ldots 2n}{1.3.5 \ldots (2n-1)} = \sqrt{\pi}$$

en utilisant l'exerc.23 et l'inégalité $\sin^{n+1} x \leqslant \sin^n x$ pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

25) a) Calculer les intégrales

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \qquad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

à l'aide de l'exerc. 23 .

b) Montrer que l'on a

$$1-x^2 \leqslant e^{-x^2} \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{pour} \quad x \geqslant 0 .$$

c) Déduire de a) et b) et de la formule de Wallis (exerc. 24) que

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

26) a) Montrer que, pour $\alpha > 0$, la dérivée de $I(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx$ est égale à $-\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin x \, dx$.

b) En déduire que

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

27) Démontrer, par dérivation par rapport au paramètre et utilisation de l'exerc.25, les formules

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos\alpha x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha^2}\ ,\quad \int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2}\,dx = \sqrt{\pi\,\alpha}\qquad (\alpha > 0)$$

$$\int_0^\infty e^{-(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2})}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\alpha}$$

28) Déduire de l'exerc.25 ci-dessus, et de l'exerc.8 du chap.II, § 6, que l'on a

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

29) Soit f une fonction vectorielle règlée dans $]0,1[$, telle que l'intégrale impropre $\int_0^\pi f(\sin x)dx$ soit convergente. Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^\pi x\,f(\sin x)dx$ est convergente et qu'on a

$$\int_0^\pi x\,f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx\ .$$

30) Soit f une fonction vectorielle règlée pour $x \geqslant 0$, continue au point $x=0$, et telle que l'intégrale $\int_a^\infty f(x)\frac{dx}{x}$ soit convergente pour $a > 0$. Montrer que, pour $a > 0$ et $b > 0$, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx$$

est convergente et égale à $f(0)\log\frac{b}{a}$.

§ 2. Développements des fonctions exponentielles et circulaires, et des fonctions qui s'y rattachent.

1. Développement de l'exponentielle réelle.

Comme $D^n(e^x)=e^x$, le développement de Taylor d'ordre n de e^x ,

(1) $$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t dt$$

Le reste de cette formule est > 0 pour $x > 0$, du signe de $(-1)^{n+1}$ pour $x < 0$; en outre, l'inégalité de la moyenne montre que

(2) $$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t dt < \frac{x^{n+1}e^x}{(n+1)!}\qquad \text{pour } x > 0$$

(3) $$\frac{|x|^{n+1}e^x}{(n+1)!} < \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t dt\right| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\qquad \text{pour } x < 0$$

Or, on sait que la suite $(\frac{x^n}{n!})$ a pour limite 0 pour tout nombre $x \geqslant 0$ (*Top.gén.*, chap.IV, § 7,n°) ; donc, si on fait croître n indéfiniment dans (1), x restant fixe, on a

(4) $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

et d'après (2) et (3), la série du second membre <u>converge absolument et uniformément</u> dans tout intervalle compact. En particulier, on a

(5) $$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Cette formule permet de calculer des valeurs rationnelles aussi rapprochées que l'on veut du nombre e (cf. <u>Calcul numérique</u>) ; on obtient ainsi

$$e = 2,718281828\ldots$$

à $1/10^9$ près par défaut. La formule (5) prouve en outre que e est un nombre <u>irrationnel</u> (<u>Top. gén.</u>, chap. IV, § 8, n° 3).

<u>Remarque</u>.- Comme le reste de la formule (1) est > 0 pour $x > 0$, on a, pour $x \geqslant 0$

$$e^x \geqslant 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

et a fortiori

$$e^x \geqslant \frac{x^n}{n!}$$

pour tout entier n ; on en déduit que $\frac{e^x}{x^n}$ <u>tend vers</u> $+\infty$ avec x, pour tout entier n ; nous retrouverons ce résultat au chap. IV par une autre méthode.

2. <u>Développements de l'exponentielle complexe, de</u> cos x <u>et</u> sin x .

Soit z un nombre complexe quelconque, et considérons la fonction $\varphi(t)=e^{zt}$ de la variable réelle t ; on a $D^n\varphi(t)=z^n e^{zt}$ et $e^z=\varphi(1)$; l'expression de $\varphi(1)$ par la formule de Taylor d'ordre n relative au point $t=0$, donne donc

(6) $$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + z^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^{zt}\, dt$$

formule qui, lorsque z est réel, est équivalente à (1). Le reste $r_n(z)=z^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^{zt}dt$ de cette formule se majore encore, en valeur absolue, à l'aide de l'inégalité de la moyenne ; si $z=x+iy$, on a $\left|e^{zt}\right| = e^{xt}$, donc $\left|e^{zt}\right| \leqslant 1$ si $x \leqslant 0$, $\left|e^{zt}\right| \leqslant e^{x}$ si $x > 0$; il vient donc

(7) $$\left|r_n(z)\right| \leqslant \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{si } x \leqslant 0$$

(8) $$\left|r_n(z)\right| \leqslant \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{x} \qquad \text{si } x > 0 \ .$$

Comme ci-dessus, on en conclut que

(9) $$e^{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

la série convergeant <u>absolument et uniformément</u> dans toute partie compacte de $\mathbb{C}$.

De (6) on tire en particulier, pour x réel

(10) $$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{i^2x^2}{2!} + \ldots + i^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, e^{it}\, dt$$

d'où on déduit les développements de Taylor de $\cos x$ et $\sin x$: en prenant la partie réelle de (10) pour l'ordre $2n+1$, on a

(11) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos t\, dt$$

avec la limitation du reste

(12) $$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos t\, dt \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

De même, en prenant la partie imaginaire de (10) pour l'ordre $2n$, il vient

(13) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \cos t\, dt$$

avec la limitation du reste

(14) $$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \cos t\, dt \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

En outre, en comparant les restes de (11) pour l'ordre $2n+1$ et l'ordre $2n+3$, on a

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+3}}{(2n+3)!} \cos t \, dt = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos t \, dt$$

et en tenant compte de (12), on voit que le reste de (11) est <u>du signe de</u> $(-1)^{n+1}$ quel que soit x ; de la même manière, on montre que le reste de (13) est <u>du signe de</u> $(-1)^n x$. En particulier, pour $n=0$ et $n=1$ dans (11), pour $n=1$ et $n=2$ dans (13), on obtient les inégalités

(15) $$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 \qquad \text{pour tout } x$$

(16) $$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x \qquad \text{pour tout } x \geqslant 0 .$$

Enfin, en faisant $z=ix$ dans (9), on a

(17) $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

(18) $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

les séries étant absolument et uniformément convergentes dans tout intervalle compact.

<u>3. Le développement du binôme</u>.

Soit m un nombre réel <u>quelconque</u>. Pour $x > 0$, on a $D^n(x^m) = m(m-1)..(m-n+1)x^{m-n}$; en appliquant à la fonction $(1+x)^m$ la formule de Taylor d'ordre n relative au point $x=0$, on obtien, pour tout $x > -1$, la formule

(19) $$(1+x)^m = 1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+..+\binom{m}{n}x^n + \frac{m(m-1)..(m-n)}{n!}\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{m-1} dt$$

où on a posé $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)..(m-n+1)}{n!}$. La formule (19) se réduit à la formule du binôme (<u>Alg</u>., chap. I) lorsque m est entier >0 et $n \geqslant m$; par extension, on la nomme encore <u>formule du binôme</u>, et les coefficients $\binom{m}{n}$ sont dits <u>coefficients binomiaux</u>, lorsque m est un nombre réel <u>quelconque</u> et n un entier quelconque.

Le reste de (19) a le signe de $\binom{m}{n+1}$ si $x > 0$, le signe de $(-1)^{n+1}\binom{m}{n+1}$ si $x < 0$. Comme $\left|\frac{x-t}{1+t}\right| \leqslant |x|$ pour tout $t > -1$ appartenant à l'intervalle d'extrémités 0 et x , on a la limitation générale du reste, pour m et n quelconques et $x > -1$

(20) $$\left| \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{m-1} dt \right| \leqslant \left| \binom{m-1}{n} x^n \left[(1+x)^m - 1\right] \right|$$

Il est souvent utile d'avoir d'autres limitations, qui ne sont valables que moyennant certaines restrictions sur x, m ou n. En premier lieu, si $x \geqslant 0$ et $n \geqslant m-1$, on a $(1+t)^{n-m+1} \geqslant 1$ pour $0 \leqslant t \leqslant x$, d'où la limitation

(21) $$\left| \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n-m+1}} dt \right| \leqslant \left| \binom{m}{n+1} \right| x^{n+1}$$

Pour $-1 \leqslant m < 0$, on a une autre limitation de la façon suivante ; en faisant le changement de variable $xu = \frac{x-t}{1+t}$ dans l'intégrale $\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{m-1} dt$, on a

(22) $$\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{n-1} dt = x^{n+1}(1+x)^m \int_0^1 \frac{u^n du}{(1+ux)^{m+1}}$$

L'intégrale du second membre de cette formule est évidemment majorée par l'intégrale convergente $\int_0^1 \frac{u^n du}{(1-u)^{m+1}}$ pour tout $x \geqslant -1$; elle est donc uniformément convergente dans cet intervalle, et par suite fonction continue de x. Or, si on divise les deux membres de (19) par $(1+x)^m$ et qu'on fasse tendre x vers -1, on voit (puisque $m \leqslant 0$) qu'il vient à la limite (d'après (22))

(23) $$1 = (-1)^{n+1} \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!} \int_0^1 \frac{u^n du}{(1-u)^{m+1}}$$

d'où la limitation du reste, valable pour $-1 \leqslant m < 0$

(24) $$\left| \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{m-1} dt \right| \leqslant |x|^{n+1} (1+x)^m$$

De ces inégalités, nous allons déduire d'abord qu'on a, pour $|x| < 1$

(25) $$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$$

la série du second membre étant <u>absolument et uniformément convergente</u> dans tout intervalle <u>compact</u> contenu dans $]-1,+1[$. En effet, on peut écrire

(26) $$\binom{m}{n} = (-1)^n \left(1 - \frac{m+1}{1}\right)\left(1 - \frac{m+1}{2}\right)\ldots\left(1 - \frac{m+1}{n}\right)$$

d'où

$$\left|\binom{m}{n}\right| \leqslant \left(1 + \frac{|m+1|}{1}\right)\left(1 + \frac{|m+1|}{2}\right)\ldots\left(1 + \frac{|m+1|}{n}\right)$$

Si $|x| \leqslant r < 1$, il existe n_0 tel que $1 + \frac{|m|}{n_0} < \frac{1}{r'}$, où $r < r' < 1$, d'où, en posant $k = (1 + \frac{|m|}{1})(1 + \frac{|m|}{2}) \ldots (1 + \frac{|m|}{n_0})$

$$\left| \binom{m-1}{n} x^n \right| \leqslant k |x|^{n_0} \left(\frac{r}{r'}\right)^{n-n_0}$$

ce qui démontre la proposition. Au contraire, pour $x > 1$, la valeur absolue du terme général de la série (25) croît indéfiniment avec n, si m n'est pas entier positif ; en effet, d'après (26), on a pour $n > n_1 \geqslant |m+1|$

$$\left| \binom{m}{n} \right| \geqslant \left| (1 - \frac{m+1}{1}) \ldots (1 - \frac{m+1}{n_1}) \right| (1 - \frac{|m+1|}{n_1+1}) \ldots (1 - \frac{|m+1|}{n})$$

Soit $n_0 \geqslant n_1$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, on ait $1 - \frac{|m+1|}{n} > \frac{1}{x'}$, où $1 < x' <$

si on pose $k' = \left| (1 - \frac{m+1}{1}) \ldots (1 - \frac{m+1}{n_1}) \right| (1 - \frac{|m+1|}{n_1+1}) \ldots (1 - \frac{|m+1|}{n_0})$

on aura, pour $n > n_0$

$$\left| \binom{m}{n} x^n \right| \geqslant k' |x|^{n_0} \left(\frac{x}{x'}\right)^{n-n_0}$$

d'où la proposition.

Etudions maintenant la convergence de la série du second membre de (25) lorsque $x=1$ ou $x=-1$. La formule (26) montre que lorsque $m+1 > 0$, $\binom{m}{n}$ tend vers 0 lorsque n croît indéfiniment, car le produit infini de facteur général $1 - \frac{m+1}{n}$ a ses termes < 1 et ne converge pas dans $\mathbb{R}_+^*$ (<u>Top.gén.</u>, chap.IV, § 7, th.4); on déduit donc de la formule (21) que le reste de la formule (19) tend vers 0 pour $m > -1$, uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$; autrement dit, la série de terme général $\binom{m}{n} x^n$ est alors <u>uniformément convergente dans tout intervalle compact contenu dans</u> $]-1, +1]$, et a pour somme $(1+x)^m$; en particulier, pour $m > -1$, on a

$$2^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} \quad . \tag{27}$$

Au contraire, pour $m+1 \leqslant 0$, $\binom{m}{n}$ ne tend pas vers 0 lorsque n croît indéfiniment ; on a en effet $\left| \binom{-1}{n} \right| = 1$ pour tout n ; pour $m+1 < 0$, le produit infini de facteur $1 - \frac{m+1}{n}$ converge vers $+\infty$ (Top. gén., chap. IV, § 7, th. 4), donc $\left|\binom{m}{n}\right|$ tend vers $+\infty$.

La formule (19) n'a été établie que pour $x > -1$; lorsqu'on fait tendre x vers -1, le premier membre de cette formule tend vers $+\infty$ lorsque $m < 0$, vers 0 lorsque $m > 0$; dans le premier cas, le reste tend donc vers $+\infty$, dans le second cas vers une limite finie r_n. En outre, en faisant tendre x vers -1 dans l'inégalité (20), on a $|r_n| \leqslant \left|\binom{m-1}{n}\right|$; comme $m-1 > -1$, $\binom{m-1}{n}$ tend vers 0 lorsque n croît indéfiniment. Par suite, pour $m > 0$, la série de terme général $\binom{m}{n}x^n$ est uniformément convergente dans l'intervalle $[-1,+1]$ et a pour somme $(1+x)^m$; en particulier, on a

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{m}{n} . \tag{28}$$

On remarquera que dans cette dernière série (avec $m > 0$) tous les termes sont de même signe à partir d'une certaine valeur de n ; cela prouve que la série de terme général $\binom{m}{n}$ est absolument convergente, et par suite que, lorsque $m > 0$, la série de terme général $\binom{m}{n}x^n$ est non seulement uniformément convergente, mais normalement convergente dans l'intervalle $[-1,+1]$.

Enfin, pour $-1 < m < 0$, la série de terme général $\binom{m}{n}$ n'est pas absolument convergente ; en effet, dans le cas contraire, le second membre de (25) serait une série normalement convergente dans $[-1,+1]$, donc aurait pour somme une fonction continue dans cet intervalle ; mais comme cette somme est égale à $(1+x)^m$ pour $x > -1$, elle ne tend pas vers une limite finie quand x tend vers -1, et nous obtenons ainsi une contradiction.

On notera que pour $m=-1$, la forme du reste donnée par la formule (22) redonne l'identité algébrique

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-\dots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+(-1)^n\frac{x^n}{1+x} \tag{29}$$

4. Développements de $\log(1+x)$, de $\text{Arc tg } x$ et de $\text{Arc sin } x$.

Intégrons les deux membres de (29) entre 0 et x ; on obtient le développement de Taylor d'ordre n de $\log(1+x)$, valable pour $x > -1$

(30) $$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n dt}{1+t}$$

Le reste est du signe de $(-1)^n$ si $x > 0$, et est < 0 si $-1 < x < 0$; en outre, pour $x > 0$, on a $1+t \geqslant 1$ pour $0 \leqslant t \leqslant x$, et, pour $x < 0$, $1+t \geqslant 1-|x|$ pour $x \leqslant t \leqslant 0$; donc on a les limitations

(31) $$\left| \int_0^x \frac{t^n \, dt}{1+t} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \qquad \text{pour } x \geqslant 0$$

(32) $$\left| \int_0^x \frac{t^n dt}{1+t} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1-|x|)} \qquad \text{pour } -1 < x \leqslant 0$$

De ces deux dernières formules, on déduit aussitôt que, pour $-1 < x \leqslant 1$, on a

(33) $$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

la série étant uniformément convergente dans tout intervalle compact contenu dans $]-1,+1]$, absolument convergente pour $|x| < 1$.

Au contraire, pour $|x| > 1$, le terme général de la série du second membre de (33) croît indéfiniment en valeur absolue avec n (n°1). Pour $x=-1$, la série se réduit à la série harmonique, qui a pour somme $+\infty$.

De même, remplaçons dans (29) x par x^2, et intégrons les deux membres entre 0 et x ; on obtient le développement de Taylor d'ordre $2n-1$ de $\text{Arc tg } x$, valable pour tout x réel

(34) $$\text{Arc tg } x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n} dt}{1+t^2}$$

Le reste est du signe de $(-1)^n x$, et comme $1+t^2 \geqslant 1$ pour tout t , on a la limitation

(35) $$\left| \int_0^x \frac{t^{2n} dt}{1+t^2} \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$$

d'où on tire que, pour $|x| \leqslant 1$

(36) $$\operatorname{Arc\,tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

la série étant uniformément convergente dans $[-1,+1]$, et absolument convergente pour $|x| < 1$.

En particulier, pour $x=1$, on obtient la formule

(37) $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots$$

Pour $|x| > 1$, le terme général de la série du second membre de (36) croît indéfiniment en valeur absolue avec n.

Enfin, pour obtenir le développement de Taylor de $\operatorname{Arc\,sin} x$, partons du développement de sa dérivée $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$; ce dernier s'obtient en remplaçant x par $-x^2$ dans le développement de $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ suivant la formule du binôme, ce qui donne, pour $|x| < 1$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1.3}{2.4} x^4 + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} x^{2n} + r_n(x)$$

et comme ici l'inégalité (24) est applicable, on a

(38) $$0 \leqslant r_n(x) \leqslant \frac{x^{2n+2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

En prenant la primitive du développement précédent, il vient

(39) $$\operatorname{Arc\,sin} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_n(x)$$

où $R_n(x)$ est du signe de x et satisfait, d'après (38), à l'inégalité

$$|R_n(x)| \leqslant \int_0^{|x|} \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Or, en faisant le changement de variable $t = \sin z$, la dernière intégrale devient $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} z\,dz = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}$ d'après la formule (27) du § 1. La formule (39) montre d'ailleurs que lorsque x tend vers $+1$ ou -1, $R_n(x)$ a une limite finie que nous désignerons encore par $R_n(1)$ (resp. $R_n(-1)$) ; avec cette convention, la formule (39) est valable pour $|x| \leqslant 1$, et on a, dans l'intervalle $[-1,+1]$

(40) $$|R_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{2n+2}\right)$$

ce qui montre que l'on a, pour $|x| \leqslant 1$

(41) $$\operatorname{Arc\,sin} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

la série du second membre convergeant normalement dans $[-1,+1]$.

Au contraire, on montre, comme pour la formule du binôme, que le terme général de la série du second membre de (41) croît indéfiniment en valeur absolue pour $|x| > 1$.

En faisant par exemple $x=\frac{1}{2}$ dans (41), on obtient une nouvelle expression du nombre π :

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \; \frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}$$

qui se prête beaucoup mieux que la formule (37) au calcul de valeurs approchées de π (voir Calcul numérique) ; on peut ainsi obtenir

$$\pi = 3{,}141592653\ldots$$

à $1/10^9$ près par défaut.

Exercices.- 1) Soit f une fonction vectorielle n fois dérivable dans un intervalle $I \subset R_+$. Démontrer la formule

$$D^n f(e^x) = \sum_{m=1}^{n} \frac{a_m}{m!} e^{mx} f^{(m)}(e^x)$$

en tout point x tel que $e^x \in I$, le coefficient a_m ayant pour expression

$$a_m = \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} (m-p+1)^n$$

(méthode de l'exerc.7 du chap.II, §3, en utilisant le développement de Taylor de e^x).

2) Soient f une fonction scalaire n fois dérivable au point x, g une fonction vectorielle n fois dérivable au point f(x). Si on pose $D^n(g(f(x)))= \sum_{k=1}^{n} g^{(k)}(f(x))u_k(x)$, u_k ne dépend que de la fonction f ; en déduire que $u_k(x)$ est le coefficient de a^k dans le développement (par rapport à a) de $e^{-af(x)}D^n(e^{af(x)})$.

3) Pour tout x réel et tout nombre $p > 1$, démontrer la formule

$$|1+x|^p \leqslant 1+px + \frac{p(p-1)}{2!} x^2+\ldots+ \frac{p(p-1)..(p-m+2)}{(m-1)!} x^{m-1} + \frac{p(p-1)..(p-m+1)}{m!} |x|^m + h_p |x|^p$$

où on a posé $m=[p]$ (partie entière de p), et

$$h_p = \frac{p(p-1)\dots(p-m+1)}{(m-1)!}\int_0^1 z^{p-m}\,(1-z)^{m-1}\,dz$$

4) Montrer que, dans l'intervalle $[-1,+1]$, la foncton $|x|$ est limite uniforme de polynomes, en remarquant que $|x|=(1-(1-x^2))^{\frac{1}{2}}$. En déduire une nouvelle démonstration du théorème de Weierstrass (Top. gén., chap. X, § 4).

5) Lorsque n croît indéfiniment, montrer que le polynome

$f_n(x) = \dfrac{\int_0^x (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt}$ tend uniformément vers -1 dans tout intervalle $[-1, -\varepsilon]$, et tend uniformément vers $+1$ dans tout intervalle $[\varepsilon, 1]$, où $\varepsilon > 0$ (remarquer que $\int_0^1 (1-t^2)^n dt \geqslant \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-t^2)^n dt$).
En déduire que le polynome $g_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$ tend uniformément vers $|x|$ dans $[-1,+1]$.
