COTE : BKI 04-1.4

FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE
THEORIE ELEMENTAIRE (ETAT 3)

Rédaction n° 005

Nombre de pages : 129

Nombre de feuilles : 129

Université Henri Poincaré - Nancy I
INSTITUT ÉLIE CARTAN - UMR 7502
Bibliothèque de mathématiques
B.P. 239
54506 Vandoeuvre-Lès-Nancy

Livre IV
Chap I - II. (état 3)
Dérivées - Primitives - intégrales
Fonctions convexes - Fonctions
élémentaires
5

Chapitres I-II A 5

LIVRE IV

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE (Théorie élémentaire)

(Ancien) CHAPITRE I (Etat 3)

DERIVÉES. PRIMITIVES. INTÉGRALES

§ 1. Dérivée première.

Nous étudierons principalement dans ce Livre les propriétés des fonctions définies sur une partie du corps $\mathbf{R}$ des nombres réels, et prenant leurs valeurs dans un espace vectoriel normé E sur le corps $\mathbf{R}$ (*) ; nous dirons pour abréger qu'une telle fonction est une fonction vectorielle d'une variable réelle. Lorsque $E = \mathbf{R}$, une fonction définie sur une partie de $\mathbf{R}$ et prenant ses valeurs dans $\mathbf{R}$ n'est autre qu'une fonction numérique finie (Top.gén., chap.IV, § 5) définie sur une partie de $\mathbf{R}$; on dit encore dans ce cas que c'est une fonction scalaire d'une variable réelle. Lorsque $E = \mathbf{R}^n$, la considération d'une fonction vectorielle à valeurs dans E revient à la considération simultanée de n fonctions scalaires.

(*) Les éléments (ou vecteurs) d'un espace vectoriel sur un corps commutatif seront notés dans ce Livre par des minuscules grasses, les scalaires par des minuscules latines ; le plus souvent, nous noterons à droite le produit d'un scalaire t et d'un vecteur x, qui s'écrira donc xt ; éventuellement, nous nous permettrons toutefois d'utiliser la notation à gauche tx dans certains cas où elle sera plus commode ; nous écrirons parfois aussi le produit du scalaire $1/t$ et du vecteur x sous la forme $\frac{x}{t}$.

Rappelons (Top.gén., chap.VII, § 3) qu'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels (resp. le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes) est dit normé lorsqu'il est muni de la structure définie par la donnée sur E d'une fonction $x \to \|x\|$ à valeurs $\geqslant 0$, jouissant des propriétés suivantes :

$\|0\| = 0$; $\|x\| > 0$ pour $x \neq 0$; $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$; $\|xt\| = |t| \cdot \|x\|$; $\|x\|$ est appelée norme de x. Une telle norme définit sur E une structure d'espace métrique, la distance de deux points x, y étant égale à $\|x - y\|$; pour la topologie correspondante, la fonction $x + y$ est continue dans $E \times E$, la fonction xt continue dans $E \times \mathbf{R}$ (resp. $E \times \mathbf{C}$).

Conformément aux définitions générales (Alg., chap. IX), on donne le nom de fonction linéaire affine (ou, par abus de langage, fonction linéaire) à toute application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, de la forme $x \longrightarrow ax + b$.

Enfin, si f est une fonction scalaire, définie sur une partie A de $\mathbf{R}$, l'ensemble représentatif de f, c'est-à-dire (Ens. R, §3, n°5) la partie de $\mathbf{R}^2$ définie par les relations $x \in A$ et $y = f(x)$ s'appelle encore courbe représentative de f. La courbe représentative d'une fonction scalaire linéaire est une droite.

Beaucoup des définitions et propriétés considérées dans ce chapitre s'étendent aux fonctions définies dans une partie du corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, et prenant leurs valeurs dans un espace vectoriel normé sur $\mathbf{C}$ (fonctions vectorielles d'une variable complexe). Certaines de ces définitions et propriétés s'étendent même aux fonctions définies sur une partie d'un corps topologique commutatif quelconque K (Top. gén., chap. III, §5), et prenant leurs valeurs dans un espace vectoriel topologique sur K, c'est-à-dire (cf. Livre VI) un espace vectoriel E sur le corps K, muni d'une topologie pour laquelle les fonctions $x + y$ et xt sont continues dans $E \times E$ et $E \times K$ respectivement.

Nous signalerons ces généralisations au passage, en insistant surtout sur le cas des fonctions d'une variable complexe, de beaucoup le plus important, et qui sera repris d'une manière approfondie dans un Livre ultérieur.

1. Dérivée d'une fonction vectorielle. Définition 1. Soit f une fonction vectorielle définie sur un voisinage V d'un point $x_0 \in \mathbf{R}$. On dit que f est dérivable au point x_0 si $\lim_{x \to x_0, x \in V, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe ;

la valeur de cette limite s'appelle dérivée première (ou simplement dérivée) de f au point x_0, et se note $f'(x_0)$ ou $Df(x_0)$.

Définition 2. On dit que f est dérivable dans un ensemble ouvert A si elle est dérivable en tout point de A ; la fonction vectorielle $x \to f'(x)$, définie dans A, est appelée fonction dérivée (ou simplement dérivée) de f, et se note f' ou Df.

Exemples. 1) Une fonction constante a en tout point une dérivée nulle

2) Une fonction linéaire $x \to ax+b$ a en tout point une dérivée égale à a, donc constante.

3) La fonction scalaire $1/x$ est dérivable en tout point $x_0 \neq 0$, car on a $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x-x_0} = -\frac{1}{xx_0}$, et comme $1/x$ est continue au point x_0, la limite de l'expression précédente est $-1/x_0^2$.

4) Au point $x=0$, la fonction scalaire $|x|$ n'admet pas de dérivée, car on a $|x|/x = +1$ pour $x>0$, $|x|/x=-1$ pour $x<0$. Il existe des fonctions continues dans un intervalle et n'ayant de dérivée en aucun point de cet intervalle (exerc. 2 et 3).

Remarques. 1) Une fonction dérivable en un point est nécessairement continue en ce point.

2) Une fonction peut être dérivable dans un intervalle ouvert sans que sa dérivée soit continue en tout point de cet intervalle ; *c'est ce que montre l'exemple de la fonction égale à $x^2 \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, à 0 pour $x=0$: elle a partout une dérivée, mais cette dérivée est discontinue au point $x=0$. *

2. Calcul formel des dérivées. Proposition 1. Soient f et g deux fonctions vectorielles définies dans un voisinage d'un point $x_0 \in R$, et prenant leurs valeurs dans un même espace normé E. Si f et g sont dérivables au point x_0, $f+g$ a en ce point une dérivée égale à $f'(x_0)+g'(x_0)$.

C'est une conséquence immédiate de la continuité de $x + y$ dans $E \times E$.

<u>Proposition 2</u>. <u>Soit</u> f <u>une fonction dérivable au point</u> $x_0 \in R$; <u>pour tout scalaire fixe</u> a , <u>la fonction</u> f a <u>possède au point</u> x_0 <u>une dérivée égale à</u> $f'(x_0)a$.

C'est une conséquence immédiate de la continuité de x a dans E .

On déduit des prop.1 et 2 que l'ensemble des fonctions définies dans une partie ouverte A de R , prenant leurs valeurs dans E , et dérivables dans A , est un <u>sous-espace vectoriel</u> de l'espace $\mathcal{C}(A,E)$ des applications continues de A dans E ; en outre, l'application $f \longrightarrow f'$ de ce sous-espace dans l'espace E^A des applications de A dans E est une application <u>linéaire</u> (homogène).

Considérons maintenant trois espaces normés E,F,G , et une application <u>bilinéaire continue</u> (*) de $E \times F$ dans G , que nous noterons

$$(x, y) \longrightarrow [x \cdot y]$$

<u>Proposition 3</u>. <u>Soient</u> f <u>et</u> g <u>deux fonctions vectorielles définies dans un voisinage</u> V <u>de</u> $x_0 \in R$, <u>prenant respectivement leurs valeurs dans</u> E <u>et</u> F . <u>Si</u> f <u>et</u> g <u>sont dérivables au point</u> x_0 , <u>l'application</u> $x \longrightarrow [f(x) . g(x)]$ <u>de</u> V <u>dans</u> G <u>a en ce point une dérivée égale à</u>

$$[f(x_0) . g'(x_0)] + [f'(x_0) . g(x_0)] .$$

Posons en effet $h(x) = [f(x) . g(x)]$; on a

$$h(x) - h(x_0) = [f(x) . (g(x) - g(x_0))] + [(f(x) - f(x_0)) . g(x_0)]$$

La proposition résulte donc de la continuité de $[x . y]$ dans $E \times F$, puis de la continuité de $u + v$ dans $G \times G$.

(*) Rappelons que l'application $(x , y) \longrightarrow [x . y]$ de $E \times F$ dans G est dite <u>bilinéaire</u> si chacune des applications partielles $x \longrightarrow [x \cdot y]$, $y \longrightarrow [x \cdot y]$ est linéaire, c'est-à-dire si on a identiquement $[(x + x') . y] = [x . y] + [x' . y]$, $[x . (y + y')] = [x . y] + [x . y']$, $[xt . y] = [x . yt] = [x . y]t$

On définit de même les applications multilinéaires.

On montre de même que, si $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \longrightarrow [x_1 . x_2 \ldots x_p]$ est une application multilinéaire continue d'un produit $\prod_{i=1}^{p} E_i$ d'espaces normés dans un espace normé F, et f_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ une application d'un voisinage V de $x_0 \in R$ dans E_i, dérivable au point x_0, l'application $x \longrightarrow [f_1(x) . f_2(x) \ldots f_p(x)]$ de V dans F admet au point x_0 une dérivée égale à

$$\sum_{i=1}^{p} [f_1(x_0) \ldots f_{i-1}(x_0) . f_i'(x_0) . f_{i+1}(x_0) \ldots f_p(x_0)] .$$

Exemples. 1) Soit f une fonction scalaire, g une fonction vectorielle, toutes deux définies et dérivables sur une partie ouverte A de R. La fonction gf est dérivable dans A et a pour dérivée $g'f + gf'$.

2) La fonction $a x^n$ (a vecteur fixe de E, n entier > 0) a pour dérivée $n a x^{n-1}$: on l'a vu ci-dessus lorsque n=1, et on le démontre ensuite par récurrence sur n en utilisant l'exemple précédent.

Il en résulte que la fonction polynome $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ $(a_0, \ldots, a_n$ vecteurs fixes de E) a pour dérivée $n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$: cette dérivée coïncide avec le polynome dérivé défini en Algèbre (Alg., chap.IV).

3) On sait que, dans l'espace R^n, le produit scalaire euclidien $x . y$ (Alg., chap.VIII) est une fonction bilinéaire continue, à valeurs dans R. Si f et g sont deux fonctions à valeurs dans R^n, dérivables au point $x_0 \in R$, la fonction scalaire $x \longrightarrow f(x) . g(x)$ a donc au point x_0 une dérivée égale à $f'(x_0) . g(x_0) + f(x_0) . g'(x_0)$. On a un résultat analogue pour le produit scalaire hermitien dans l'espace C^n (considéré comme espace vectoriel sur R).

4) Le produit vectoriel $x \wedge y$ de deux vecteurs de R^3 (Alg. chap.IX) est une application bilinéaire continue de $R^3 \times R^3$ dans R^3.

Si f et g sont deux fonctions à valeurs dans R^3, dérivables au point $x_0 \in R$, la fonction $x \to f(x) \wedge g(x)$ a au point x_0 une dérivée égale à $f'(x_0) \wedge g(x_0) + f(x_0) \wedge g'(x_0)$.

Proposition 4 (Théorème des fonctions composées). Soit f une fonction scalaire définie dans un voisinage d'un point $x_0 \in R$, g une fonction vectorielle définie dans un voisinage du point $f(x_0)$. Si f est dérivable au point x_0 et si g est dérivable au point $f(x_0)$, la fonction composée $g \circ f$ admet au point x_0 une dérivée égale à $g'(f(x_0))f'(x_0)$.

En effet, posons $h = g \circ f$; on peut écrire $h(x) - h(x_0) = u(x) \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, où on pose $u(x) = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}$ si $f(x) \neq f(x_0)$ et $u(x) = g'(f(x_0))$ dans le cas contraire. Lorsque x tend vers x_0, $f(x)$ a pour limite $f(x_0)$, donc $u(x)$ a pour limite $g'(f(x_0))$ d'où la proposition, en vertu de la continuité de la fonction yx dans $E \times R$.

Corollaire 1. Soit f une fonction scalaire dérivable en un point $x_0 \in R$, si $f(x_0) \neq 0$, la fonction $1/f$ possède au point x_0 une dérivée égale à $-f'(x_0)/(f(x_0))^2$.

C'est une conséquence immédiate de la prop.4, puisque la dérivée de $1/x$ est $-1/x^2$ en tout point $x \neq 0$.

Corollaire 2. Soient f une fonction scalaire, g une fonction vectorielle, dérivables en un point $x_0 \in R$. Si $f(x_0) \neq 0$, la fonction $g\frac{1}{f}$ admet au point x_0 une dérivée égale à $g'(x_0)\frac{1}{f(x_0)} - g(x_0)\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}$.

Proposition 5. Soit f un homéomorphisme d'un voisinage V de $x_0 \in R$ sur un voisinage W de $y_0 = f(x_0) \in R$, et soit g l'homéomorphisme réciproque. Si f est dérivable au point x_0, et si $f'(x_0) \neq 0$, g admet au y_0 une dérivée égale à $1/f'(x_0)$.

En effet, pour tout $y \in W$, on a $g(y) \in V$ et $y=f(g(y))$; on peut donc écrire, pour $y \neq y_0$, $\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \frac{g(y)-x_0}{f(g(y))-f(x_0)}$. Lorsque y tend vers y_0, $g(y)$ tend vers x_0, et le second membre de la formule précédente a donc une limite égale à $1/f'(x_0)$, puisque par hypothèse $f'(x_0) \neq 0$.

Corollaire. Soit f un homéomorphisme d'une partie ouverte A de $\mathbb{R}$ sur une partie ouverte B de $\mathbb{R}$, et soit g l'homéomorphisme réciproque. Si f est dérivable dans A, et si $f'(x) \neq 0$ en tout point de A, g est dérivable dans B, et sa dérivée en tout point $y \in B$ est $1/f'(g(y))$.

Par exemple, pour tout entier $n>0$, la fonction $x^{1/n}$, qui est un homéomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même, a pour dérivée, en tout point $x>0$, $\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

On en déduit aisément, d'après la prop.4, que, pour tout nombre rationnel $r=p/q>0$, la fonction x^r a pour dérivée rx^{r-1} en tout point $x>0$.

Remarques. 1) Les définitions, propositions et exemples qui précèdent (à l'exception de l'exemple 4 du n°1), restent valables quand on y remplace le corps $\mathbb{R}$ par un corps topologique quelconque K, et les espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ qui interviennent par des espaces vectoriels topologiques quelconques sur K. La prop.4 s'étend en outre au cas suivant : soit K' un sous-corps de K, E un espace vectoriel topologique sur K ; si f est une fonction définie dans un voisinage $V \subset K'$ de $x_0 \in K'$, à valeurs dans K (considéré comme espace vectoriel topologique sur K'), dérivable au point x_0, et si g est une fonction définie dans un voisinage de $f(x_0) \in K$, à valeurs dans E, et dérivable au point $f(x_0)$, l'application $g \circ f$ est dérivable au point x_0 et y a une dérivée égale à $g'(f(x_0))f'(x_0)$ (E étant alors considéré comme espace vectoriel topologique sur K').

En particulier, les règles de dérivation des polynomes et fonctions rationnelles d'une variable réelle, à coefficients réels, s'étendent sans changement aux polynomes et fonctions rationnelles définis dans K' , et à coefficients dans K (prenant donc leurs valeurs dans K).

Enfin, avec les mêmes notations, il est clair que si f est une fonction définie dans un voisinage V de $a \in K$, à valeurs dans E , et dérivable au point a , et si a appartient à K' et n'est pas un point isolé dans K' , la <u>restriction</u> de f à $V \cap K'$ est dérivable au point a , et a pour dérivée $f'(a)$ en ce point.

Ces remarques s'appliqueront surtout, en pratique, au cas où $K = \mathbf{C}$, $K' = \mathbf{R}$.

2) La prop.5 et son corollaire ont été énoncés de façon à se généraliser aussitôt au cas où on remplace $\mathbf{R}$ par un corps topologique quelconque. Mais, lorsque, dans la prop.5 , on suppose que V est un <u>intervalle</u> contenant x_0 , on peut remplacer l'hypothèse que f est un homéomorphisme de V sur un voisinage de $f(x_0)$, par l'hypothèse équivalente que f est <u>strictement monotone</u> dans V (<u>Top.Gén.</u>, chap.IV, §2, th.5).

<u>3. Dérivées à droite et dérivées à gauche</u>. Soit f une fonction vectorielle, définie sur un ensemble contenant un intervalle semi-ouvert $A = [x_0, b[$ de $\mathbf{R}$, et prenant ses valeurs dans un espace normé E .

<u>Définition 3</u>. <u>On dit que la fonction</u> f <u>est continue à droite au point</u> x_0 <u>si elle a en ce point une limite à droite</u> (*) (relativement à A) <u>égale à</u> $f(x_0)$.

(*) La notion de <u>limite à droite</u> (resp. <u>limite à gauche</u>) en un point d'une fonction d'une variable réelle n'a été définie que pour une fonction <u>numérique</u> d'une variable réelle (<u>Top.gén.</u>,,chap.IV, §5,déf.2); mais la définition s'étend immédiatement à une fonction prenant ses valeurs dans un espace topologique quelconque.

On définit de même la continuité à gauche.

Définition 4. Soit f une fonction continue à droite (resp. à gauche) en un point x_0. On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) au point x_0 si la limite à droite (resp. à gauche) de $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe en ce point ; la valeur de cette limite s'appelle dérivée à droite (resp. à gauche) de f au point x_0, et se note $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_s(x_0)$).

Si une fonction admet une dérivée à droite (resp. à gauche) en tout point d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$, on dit qu'elle est dérivable à droite (resp. à gauche) dans A, et la fonction $x \to f'_d(x)$ (resp. $x \to f'_s(x)$ définie dans A, est appelée fonction dérivée à droite (resp. à gauche) ou simplement dérivée à droite (resp. à gauche) de f, et se note f'_d (resp. f'_s).

Exemples. 1) Au point x=0, la fonction scalaire $|x|$ admet une dérivée à droite égale à +1, une dérivée à gauche égale à -1.

2) Au point x=0, la fonction scalaire $x \sin \frac{1}{x}$ n'admet pas de dérivée à droite ni de dérivée à gauche.

Il résulte immédiatement des définitions que, pour qu'une fonction f continue en un point x_0 admette en ce point une dérivée, il faut et il suffit que f possède au point x_0 une dérivée à droite et une dérivée à gauche, et que ces dérivées soient égales ; on a alors

$$f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_s(x_0) .$$

Les propositions 1,2 et 3 se généralisent aussitôt aux dérivées à droite (resp. à gauche), en y remplaçant partout le mot "dérivée" par "dérivée à droite" (resp. "dérivée à gauche"), le mot "dérivable" par "dérivable à droite" (resp. "dérivable à gauche"). A la prop.4 correspond la suivante :

Proposition 6. Soit f une fonction scalaire définie dans un voisinage d'un point $x_0 \in R$, et dérivable à droite en ce point. Soit g une fonction vectorielle définie dans un voisinage du point ~~une fonction~~ $f(x_0)$

1° Si $f'_d(x_0) > 0$, et si g admet une dérivée à droite au point $f(x_0)$, la fonction composée $g \circ f$ admet au point x_0 une dérivée à droite égale à $g'_d(f(x_0))f'_d(x_0)$.

2° Si $f'_d(x_0) < 0$, et si g admet une dérivée à gauche au point $f(x_0)$, la fonction composée $g \circ f$ admet au point x_0 une dérivée à droite égale à $g'_s(f(x_0))f'_d(x_0)$.

3° Si $f'_d(x_0) = 0$, et si, au point $f(x_0)$, g admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche, $g \circ f$ admet au point x_0 une dérivée à droite égale à 0.

1° L'hypothèse $f'_d(x_0) > 0$ entraîne par définition qu'il existe un intervalle $]x_0, b[$ tel que, pour tout x appartenant à cet intervalle, on ait $f(x) > f(x_0)$. Si $h = g \circ f$, on peut donc écrire $h(x) - h(x_0) = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ pour $x > x_0$ et assez voisin de x_0 ; la proposition résulte du passage à la limite dans cette relation.

2° Démonstration analogue, en remarquant que, cette fois, pour $x > x_0$ et assez voisin de x_0, on a $f(x) < f(x_0)$.

3° Soit a un nombre positif tel que $a > \max(\|g'_d(f(x_0))\|, \|g'_s(f(x_0))\|)$; de la déf.4 il résulte que, pour tout y assez voisin de $f(x_0)$, on a $\|g(y) - g(f(x_0))\| \leqslant a\,|y - f(x_0)|$; par suite $\left\| \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \right\| \leqslant a \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right|$ pour tout $x > x_0$ et assez voisin de x_0 ; à la limite, on voit que la relation $f'_d(x_0) = 0$ entraîne que $g \circ f$ a une dérivée à droite nulle au point x_0.

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer la proposition correspondante pour la dérivée à gauche d'une fonction composée.

Corollaire. Si la fonction f a au point x_0 une dérivée à gauche, (resp. à droite), la fonction $x \longrightarrow f(-x)$ possède au point $-x_0$ une dérivée à droite (resp. à gauche) égale à $-f'_g(-x_0)$ (resp. $-f'_d(-x_0)$).

L'analogue de la prop.5 est de même :

Proposition 7. Soit f une fonction scalaire strictement croissante (resp. strictement décroissante) et continue dans un intervalle $I = [x_0, b]$, et soit g l'application réciproque de f. Si f admet au point x_0 une dérivée à droite $f'_d(x_0) \neq 0$, g admet au point $f(x_0)$ une dérivée à droite (resp. une dérivée à gauche) égale à $1/f'_d(x_0)$.

La démonstration est la même que celle de la prop.5.

4. Le théorème des accroissements finis. Dans toutes les propositions précédentes, hypothèses et conclusions ont un caractère local : elles ne font intervenir que des propriétés des fonctions considérées dans un voisinage arbitrairement petit d'un point fixe. Le théorème qui suit est de caractère différent : d'une majoration de la dérivée d'une fonction valable en tous les points d'un intervalle, il permet de déduire une majoration pour la différence des valeurs de la fonction aux extrémités de l'intervalle :

Théorème 1 (théorème des accroissements finis). Soit f une fonction vectorielle d'une variable réelle, définie dans l'intervalle fermé $I = [a,b]$, continue dans I, et admettant une dérivée à droite en tout point de l'intervalle ouvert $]a,b[$. Dans ces conditions la relation

(1) $$\| f'_d(x) \| \leqslant m \quad \text{pour} \quad a < x < b$$

entraîne

(2) $$\| f(y) - f(x) \| \leqslant m . |y-x|$$

quels que soient les points x,y de l'intervalle fermé I.

Supposons d'abord x et y intérieurs à I, et par exemple $x < y$.

Supposons d'abord x et y <u>intérieurs</u> à I , et par exemple $x < y$.

Soit ε un nombre fixe >0 ; considérons l'ensemble J des $u \in I$ tels que $x \leqslant u \leqslant y$ et que, pour tout v tel que $x \leqslant v \leqslant u$, on ait

$$\| f(v) - f(x) \| \leqslant (m+\varepsilon)(v-x) \tag{3}$$

L'ensemble J n'est pas vide, car il contient évidemment x ; nous allons montrer qu'il est identique à l'intervalle $[x,y]$.

Tout d'abord J est un intervalle d'origine x , car si $u \in J$, tout nombre w tel que $x \leqslant w \leqslant u$ appartient à J par définition (chap.IV, §2, prop.1) ; soit z l'extrémité de J .

1° z <u>appartient à</u> J . En effet, l'inégalité (3) est vérifiée pour tout v tel que $x \leqslant v < z$; la fonction f étant continue, l'inégalité (3) est encore vérifiée pour $v=z$, d'après le principe de prolongement des inégalités (chap.IV, §5, th.1).

2° z <u>est confondu avec</u> y . Sinon, d'après la définition de la dérivée à droite, il existerait u' tel que $z \leqslant u' < y$ et que, pour tout w tel que $z \leqslant w \leqslant u'$, on ait

$$\left\| \frac{f(w) - f(z)}{w-z} \right\| \leqslant \| f'_d(z) \| + \varepsilon$$

donc, d'après (1)

$$\| f(w) - f(z) \| \leqslant (\| f'_d(z) \| + \varepsilon)(w-z) \leqslant (m+\varepsilon)(w-z)$$

et, en tenant compte de la relation (3) pour $v=z$

$$\| f(w) - f(x) \| \leqslant \| f(w) - f(z) \| + \| f(z) - f(x) \| \leqslant (m+\varepsilon)(w-x) \quad ;$$

il en résulte qu'on aurait $u' \in J$ contrairement à la définition de z .

On a donc démontré l'inégalité

$$\| f(y) - f(x) \| \leqslant (m+\varepsilon)(y-x) \ .$$

Comme ε est arbitraire, l'inégalité (2) en résulte bien pour x et y appartenant à l'intervalle <u>ouvert</u> $]a,b[$; en vertu de la continuité de f aux points a et b , l'inégalité (2) est encore vraie quand on y fait $x=a$ ou $y=b$.

Remarques. 1) On observera que les seules propriétés de la fonction scalaire $p(x)=\|x\|$ qui soient intervenues dans la démonstration précédente sont les suivantes : 1° $p(xt)=tp(x)$ pour tout scalaire $t>0$; 2° $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$; 3° $p(x)$ est semi-continue supérieurement en tout point. Pour toute fonction scalaire p ayant ces trois propriétés, on voit donc que la relation $p(f'_d(x))\leqslant m$ pour $a<x<b$ entraîne $p(f(y)-f(x))\leqslant m|y-x|$ quels que soient x et y dans I .

2) L'hypothèse de la continuité de f dans l'intervalle I (et non seulement sa continuité à droite) est essentielle pour la validité du th. des accroissements finis (voir exerc.7).

3) Le th.1 reste valable quand on y remplace "dérivée à droite" par "dérivée à gauche", et l'inégalité $\|f'_d(x)\|\leqslant m$ par $\|f'_s(x)\|\leqslant m$.

Corollaire. Pour qu'une fonction vectorielle continue dans un intervalle ouvert I soit constante, il suffit qu'elle ait en tout point de I une dérivée à droite nulle.

Il suffit d'appliquer le th.1 à deux points quelconques x,y de I , en prenant m=0 .

Proposition 8. Soit f une fonction vectorielle d'une variable réelle, définie et continue dans un intervalle fermé $[x_0,b]$, et admettant une dérivée à droite en tout point de l'intervalle ouvert $]x_0,b[$. Si la limite à droite de $f'_d(x)$ au point x_0 existe et est égale à a , la fonction f admet au point x_0 une dérivée à droite égale à a .

Par hypothèse, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $h>0$ tel que les inégalités $x_0<x\leqslant x_0+h$ entraînent $\|f'_d(x)-a\|\leqslant\varepsilon$; appliquant le th.1 à la fonction $g(x)=f(x)-ax$ dans l'intervalle $[x_0,x_0+h]$, il vient, pour tout k tel que $0<k<h$

$$\left\| \frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k} - a \right\| \leqslant \varepsilon$$

ce qui démontre la proposition.

Proposition 9. Soit f une fonction vectorielle d'une variable réelle, définie et continue dans un intervalle fermé $[a,x_0]$, et admettant une dérivée à droite en tout point de l'intervalle ouvert $]a,x_0[$. Si la limite à gauche de $f'_d(x)$ au point x_0 existe et est égale à b, la fonction f admet au point x_0 une dérivée à gauche égale à b.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h>0$ tel que les inégalités $x_0-h \leqslant x < x_0$ entraînent $\| f'_d(x)-b \| \leqslant \varepsilon$; appliquant le th.1 à la fonction $f(x)-bx$ dans l'intervalle $[x_0-h,x_0]$, il vient, pour $0<k<h$

$$\left\| \frac{f(x_0)-f(x_0-k)}{k} - b \right\| \leqslant \varepsilon$$

d'où la proposition.

Corollaire. Si f est dérivable à droite dans un voisinage de x_0, et si f'_d est continue au point x_0, f est dérivable en ce point.

Proposition 10. Soit f une fonction vectorielle définie, continue et dérivable à droite dans un intervalle ouvert I ; quels que soient les points x_0,x,y de I, on a (en supposant par exemple $x \leqslant y$)

$$(4) \qquad \| f(y)-f(x)-f'_d(x_0)(y-x) \| \leqslant |y-x| \cdot \sup_{x<z<y} \| f'_d(z)-f'_d(x_0) \|$$

Il suffit d'appliquer le th.1 à la fonction $f(x)-f'_d(x_0)x$.

Proposition 11. Soit f une fonction vectorielle définie, continue et dérivable à droite dans un voisinage de x_0 ; pour que f'_d soit continue au point x_0, il faut et il suffit que

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (x_0,x_0) \\ x \neq y}} \frac{f(y)-f(x)-f'_d(x_0)(y-x)}{y-x} = 0 .$$

La prop.10 montre que cette condition est nécessaire, car si f'_d est continue au point x_0, $\sup_{x<z<y} \| f'_d(z)-f'_d(x_0) \|$ tend vers 0 quand x et y tendent vers x_0. La condition est aussi suffisante :

supposons en effet que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $h>0$ tel que les relations $|x-x_0|<h$, $|y-x_0|<h$ entraînent

(5) $$\|f(y)-f(x)-f'_d(x_0)(y-x)\| \leqslant \varepsilon|y-x|$$

Pour tout x tel que $|x-x_0|<h$, il existe $k>0$ (dépendant de ε et de x) tel que la relation $x<y<x+k$ entraîne $\|f(y)-f(x)-f'_d(x)(y-x)\| \leqslant \varepsilon|y-x|$; tenant compte de la relation (5), on voit qu'on a

$$\|f'_d(x)-f'_d(x_0)\| \leqslant 2\varepsilon$$

pour $|x-x_0|<h$, ce qui prouve la continuité de f'_d au point x_0 .

Le th.1 se généralise de la façon suivante aux fonctions vectorielles d'une variable complexe :

Proposition 12. Soit f une fonction vectorielle d'une variable complexe, définie, continue et dérivable dans une partie ouverte A du corps C . Si on a $\|f'(z)\| \leqslant m$ quel que soit $z \in A$, on a $\|f(b)-f(a)\| \leqslant m.|b-a|$ pour tout couple de points a,b de A tel que le segment d'extrémités a et b soit contenu dans A (ce qui est toujours le cas si a et b sont assez voisins).

Posons en effet, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, $g(t)=f(a+t(b-a))$; par hypothèse, g est une fonction vectorielle de la variable réelle t , définie, continue et dérivable dans $[0,1]$; on a $g'(t)=f'(a+t(b-a))(b-a)$, donc $\|g'(t)\| \leqslant m|b-a|$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$; l'application du th.1 à la fonction g conduit à l'inégalité annoncée.

Corollaire. Pour qu'une fonction vectorielle f d'une variable complexe, définie dans un domaine A , soit constante, il suffit qu'elle ait une dérivée nulle en tout point de A .

En effet, soit a un point quelconque de A ; l'ensemble des points de A où $f(z)=f(a)$ est fermé puisque f est continue ; il est aussi ouvert par application de la prop.12 (avec $m=0$) ; donc il est identique à A .

Remarque. La démonstration du th.1 fait intervenir de manière essentielle les propriétés topologiques particulières au corps R ; on ne peut effectivement étendre le th.1 à un corps topologique commutatif quelconque (voir exerc.6).

5. Cas des fonctions réelles. Les définitions et propositions qui précèdent se complètent sur quelques points lorsqu'il s'agit de fonctions réelles (finies) d'une variable réelle.

Tout d'abord, si f est une fonction réelle définie dans un voisinage d'un point $x_0 \in R$ et continue en ce point, il peut se faire que, lorsque x tend vers x_0 en restant $\neq x_0$, la fonction $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ait une limite égale à $+\infty$ ou $-\infty$; on dit alors encore que f est dérivable au point x_0 et a pour dérivée en ce point $+\infty$ (resp. $-\infty$) ; si, en tout point x d'une partie ouverte A de R, la fonction f a une dérivée (finie ou infinie) $f'(x)$, la fonction f' (à valeurs dans $\overline{R}$) est encore appelée la fonction dérivée (ou simplement dérivée) de f . On généralise de même les définitions de la dérivée à droite et de la dérivée à gauche.

Exemple. Au point x=0, la fonction $x^{1/3}$ a une dérivée égale à $+\infty$, la fonction $|x|^{1/3}$ a une dérivée à droite égale à $+\infty$, une dérivée à gauche égale à $-\infty$.

Soit C la courbe représentative $y=f(x)$ d'une fonction numérique finie f dans le plan R^2. Si, en un point x_0, f a une dérivée à droite finie, la demi-droite ayant pour origine le point $M_{x_0}=(x_0,f(x_0))$ de C, de paramètres directeurs $(1,f'_d(x_0))$, est appelée demi-tangente à droite à la courbe C au point M_{x_0} ; lorsque $f'_d(x_0)=+\infty$ (resp. $f'_d(x_0)=-\infty$), on appelle encore ainsi la demi-droite d'origine M_{x_0}, de paramètres (0,1) (resp. (0,-1)). On définit de même la demi-tangente à gauche au point M_{x_0}, lorsqu'elle existe. Avec ces définitions, on vérifie aussitôt que l'angle que fait la demi-tangente à droite (resp. à gauche) avec l'axe des abscisses, est la limite de

de l'angle que fait avec cet axe la demi-droite d'origine M_{x_0}, passant par le point $M_x=(x,f(x))$ de C, lorsque x tend vers x_0 en restant $> x_0$ (resp. $< x_0$).

On peut dire aussi que la demi-tangente à droite (resp. à gauche) est la <u>limite</u> de la demi-droite d'origine M_{x_0}, et passant par M_x, en considérant sur l'ensemble des demi-droites de même origine, la topologie de l'espace quotient C^*/R_+^* (<u>Top.gén.</u>, chap.VI).

Si les deux demi-tangentes en un point M_{x_0} de C existent, elles ne sont opposées que lorsque f a une dérivée (finie ou non) au point x_0 ; elles ne sont confondues que lorsque $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ sont infinies de signes contraires. Dans les deux cas, on dit que la droite qui contient les deux demi-tangentes est la <u>tangente</u> à C au point M_{x_0}.

Lorsque la tangente en M_{x_0} existe, elle est la <u>limite</u> de la droite passant par M_{x_0} et M_x, lorsque x tend vers x_0 en restant $\neq x_0$, la topologie sur l'ensemble des droites passant par un même point étant celle de l'espace quotient C^*/R^* (<u>Top.gén.</u>, chap.VI) ; c'est d'ailleurs aussi la topologie induite par celle de l'espace $P_{2,1}(R)$ des droites projectives du plan projectif $P_2(R)$ (le plan numérique étant considéré comme plongé dans le plan projectif, les droites de R^2 identifiées aux droites projetives dont elles sont les traces).

Les prop.1 à 3 s'étendent au cas où les fonctions qui y interviennent sont réelles et peuvent avoir des dérivées (resp. dérivées à droite, dérivées à gauche) infinies, pourvu que toutes les expressions qui y figurent conservent un sens. Il en est de même de la prop.4 et des deux premières parties de la prop.6 (la troisième partie ne peut avoir de sens que si g a une dérivée à droite et une dérivée à gauche <u>finies</u>).

Enfin, dans la prop.7, si on suppose f strictement croissante (resp. strictement décroissante) et continue dans $[x_0,b[$ et si $f'_d(x_0)=0$, la fonction réciproque g admet au point $f(x_0)$ une dérivée à droite (resp. une dérivée à gauche) égale à $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Pour les fonctions réelles, le th. des accroissements finis est susceptible d'être précisé comme suit :

Proposition 13. *Soit f une fonction numérique finie et continue dans l'intervalle fermé* $I=[a,b]$, *admettant une dérivée à droite* (finie ou non) *en tout point de l'intervalle ouvert* $]a,b[$. *Si* m *et* M *sont les bornes inférieure et supérieure de* f'_d *dans* $]a,b[$, *on a*

$$(6) \qquad m(b-a) < f(b)-f(a) < M(b-a)$$

sauf lorsque f est une fonction linéaire, auquel cas on a

$$m = M = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} .$$

Démontrons d'abord les inégalités (6) en y remplaçant les signes $<$ par $\leqslant$. Il suffit de démontrer que $f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)$, l'autre inégalité s'en déduisant par le changement de f en -f . Or, cette inégalité est évidente si $M = +\infty$. Sinon, d'après la remarque 1 qui suit le th.1, appliquée au cas où $p(x)=x$ on voit que, pour tout nombre réel fini $k > M$, on a $f(b)-f(a) \leqslant k(b-a)$, et par suite aussi $f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)$.

Supposons maintenant f non linéaire ; en remplaçant au besoin $f(x)$ par $f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, on peut toujours supposer que $f(a)=f(b)$. Il existe par hypothèse un point $c \in]a,b[$ tel que $f(c) \neq f(a)$. Supposons par exemple $f(c) > f(a)$. En appliquant l'inégalité qui vient d'être démontrée aux intervalles $[a,c]$ et $[c,b]$, il vient $M \geqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} > 0$, et $m \leqslant \frac{f(b)-f(c)}{b-c} < 0$, ce qui achève la démonstration.

Remarque. Les inégalités (6) prouvent qu'une fonction continue ne peut avoir une dérivée à droite égale à $+\infty$ en tout point d'un intervalle.

Les prop.8 et 9, appliquées à une fonction réelle, sont encore valables lorsque les limites qui figurent dans leurs énoncés (et qui sont ici des nombres réels) sont égales à $+\infty$ ou $-\infty$, comme il résulte aussitôt de la prop.13.

Proposition 14. Soit f une fonction numérique finie et continue dans un intervalle ouvert I et admettant en tout point de I une dérivée à droite (finie ou non). Pour que f soit croissante dans I il faut et il suffit que $f'_d(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$; pour que f soit strictement croissante dans I, il faut et il suffit que $f'_d(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, pour que f soit strictement croissante dans I, il faut et il suffit que $f'_d(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, et que tout intervalle ouvert intérieur à I contienne un point x tel que $f'_d(x) > 0$.

La partie de l'énoncé concernant les fonctions croissantes résulte aussitôt de la définition de la dérivée à droite et de la première inégalité (6) où on fait $m=0$. En outre, si $f'_d(x)=0$ en tout point d'un intervalle ouvert contenu dans I, f est constante dans cet intervalle (cor. du th.1) ; inversement, si f est croissante, mais non strictement croissante dans I, il existe un intervalle ouvert contenu dans I et dans lequel f est constante, et on a par suite $f'_d(x)=0$ dans cet intervalle.

Remarque. On peut encore remplacer partout "dérivée à droite" par "dérivée à gauche" dans les deux propositions précédentes sans modifier leur validité.

6. Variation des fonctions réelles. La plupart des fonctions numériques finies d'une variable réelle que l'on rencontre en Analyse sont du type suivant:

elles sont définies et continues dans un ensemble ouvert A , et admettent en tout point de A une dérivée à droite (finie ou non) ; en outre, dans chaque intervalle $I =]a,b[$, composante connexe de A , il existe une suite **finie** strictement croissante $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de points de I telle que, dans chacun des intervalles $]a,c_1[$, $]c_i,c_{i+1}[$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ $]c_n,b[$, le signe (*) $\operatorname{sgn}(f'_d(x))$ reste constant . Il résulte alors de la prop.14 que, dans chacun de ces intervalles, f est soit constante, soit strictement croissante, soit strictement décroissante ; on dit qu'on a "étudié les variations de la fonction f " lorsqu'on a déterminé ces intervalles partiels : il faut pour cela déterminer les points c_i où la fonction "change de sens de variation" , c'est-à-dire où f'_d change de signe.

Remarque. Il ne faudrait pas croire que toute fonction continue et dérivable dans un intervalle ouvert rentre dans la catégorie que nous venons de considérer. On peut former des exemples de fonctions continues et dérivables telles que, dans tout intervalle ouvert, leur dérivée prenne des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives (**).

Définition 5. On dit qu'une fonction numérique finie f définie dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, admet un maximum relatif (resp. maximum relatif strict, minimum relatif, minimum relatif strict) en un point $x_0 \in I$ s'il existe dans I un voisinage V de x_0 tel qu'en tout point $x \in V$ différent de x_0 , on ait $f(x) \leqslant f(x_0)$ (resp. $f(x) < f(x_0)$, $f(x) \geqslant f(x_0)$, $f(x) > f(x_0)$).

Remarque. Lorsqu'une fonction définie dans I atteint sa borne supérieure (resp. sa borne inférieure) en un point de I , elle a un maximum relatif (resp. minimum relatif) en ce point.

(*) Rappelons qu'on pose, pour x réel, $\operatorname{sgn} x = +1$ si $x > 0$, $\operatorname{sgn} x = -1$ si $x < 0$, et $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

(**) Voir par exemple KOPCKE , Math. Ann., t. XXXV (1890), p.104.

Proposition 15. *Soit f une fonction numérique finie, définie dans un intervalle I . Si, en un point x_0 intérieur à I , f admet un maximum (resp. minimum) relatif, et a en ce point une dérivée à droite et une dérivée à gauche, on a $f'_d(x_0) \leqslant 0$ (resp. $f'_d(x_0) \geqslant 0$), et $f'_s(x_0) \geqslant 0$ (resp. $f'_s(x_0) \leqslant 0$). En particulier, si f est dérivable au point x_0 , on a $f'(x_0)=0$.*

La proposition résulte trivialement des définitions.

Proposition 16. (théorème de Rolle). *Soit f une fonction numérique finie et continue dans un intervalle fermé $I=[a,b]$, dérivable dans l'intervalle ouvert $]a,b[$ et telle que $f(a)=f(b)$. Il existe alors un point c de $]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.*

La proposition est évidente si f est constante ; sinon, elle prend par exemple des valeurs $>f(a)$, et atteint donc sa borne supérieure en un point c intérieur à I ; comme f admet un maximum relatif au point c , $f'(c)=0$.

7. **Le théorème des accroissements finis généralisé.** **Proposition 17.** *Soient f une fonction vectorielle, g une fonction numérique finie croissante, définies dans l'intervalle fermé $I=[a,b]$, continues dans I et dérivables à droite dans l'intervalle ouvert $]a,b[$. Dans ces conditions, la relation*

$$\|f'_d(x)\| \leqslant m.g'_d(x) \quad \text{pour} \quad a<x<b \tag{7}$$

entraîne

$$\|f(y)-f(x)\| \leqslant m.|g(y)-g(x)| \tag{8}$$

quels que soient les points x,y de I .

Supposons d'abord que $g'_d(x)>0$ pour $a<x<b$; si u est la fonction réciproque de g , définie dans l'intervalle $g(I)$, u admet en tout point y intérieur à $g(I)$ une dérivée à droite égale à $1/g'_d(u(y))$;

la fonction composée $h(y)=f(u(y))$ admet donc en tout point y intérieur à g(I) une dérivée à droite $h'_d(y) = f'_d(u(y))u'_d(y) = f'_d(u(y)) \frac{1}{g'_d(u(y))}$ (prop.6) ; la relation (7) équivaut à $\| h'_d(y) \| \leqslant m$ pour $g(a)<y<g(b)$; on en tire immédiatement la relation (8) par application du th.1 .

Si maintenant g'_d s'annule dans $]a,b[$, la relation (7) entraîne à fortiori $\| f'_d(x) \| \leqslant m.(g'_d(x)+\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon>0$; on peut alors appliquer la proposition à la fonction strictement croissante $g(x)+\varepsilon x$, et par suite, on a, quels que soient les points x,y de I

$$\| f(y)-f(x) \| \leqslant m(|g(y)-g(x)|+\varepsilon|y-x|) \quad ;$$

comme ε est arbitraire, on en déduit encore l'inégalité (8) .

Remarques. 1) Dans l'énoncé de la prop.17, on n'exclut pas le cas où $g'_d(x)$ peut prendre la valeur $+\infty$ en certains points.

2) En raisonnant comme dans la prop.17, on déduit de même de la prop.13 que, si f et g sont deux fonctions numériques finies et continues dans I , dérivables à droite dans $]a,b[$ (les dérivées à droite étant finies ou non), et si g est croissante dans I les relations

$$m.g'_d(x) \leqslant f'_d(x) \leqslant M.g'_d(x) \qquad \text{pour} \quad a<x<b$$

entraînent

$$m(g(b)-g(a))<f(b)-f(a)<M(g(b)-g(a))$$

sauf si $m=M$ et $f(x) = m.g(x)+k$ (k constante) ou si g est constante dans $[a,b]$.

On remarquera d'ailleurs que, lorsque f'_d ne devient pas infini aux mêmes points que g'_d , cette proposition résulte immédiatement de la prop.13 , appliquée aux fonctions Mg-f et mg-f .

Exercices. 1) Soit f une fonction vectorielle d'une variable réelle, dérivable en un point x_0. Montrer que le rapport $\frac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k}$ tend vers $f'(x_0)$ lorsque h et k tendent vers 0 par valeurs >0.

2) Dans l'intervalle $[0,1]$, on définit par récurrence une suite de fonctions continues (f_n) de la manière suivante : on prend $f_1(x)=x$; pour toute valeur de n, f_n est linéaire dans chacun des 3^n intervalles $\left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$ $(0\leqslant k\leqslant 3^n-1)$; en outre, on prend

$$f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)$$

$$f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n}+\frac{1}{3^{n+1}}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n}+\frac{2}{3^{n+1}}\right)$$

$$f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n}+\frac{2}{3^{n+1}}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction continue f, et que f n'a de dérivée finie en aucun point de $]0,1[$ (montrer que pour aucun point x_0 de cet intervalle, le rapport $\frac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k}$ ne tend vers une limite finie lorsque h et k tendent vers 0 par valeurs >0).

3) Soit $\mathcal{C}(I)$ l'espace (complet) des fonctions numériques continues finies, définies dans l'intervalle compact $I=[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Soit A la partie de $\mathcal{C}(I)$ formée des fonctions x telles que pour un point au moins $t\in[a,b[$ (dépendant de x), x ait en ce point une dérivée à droite finie. Montrer que dans $\mathcal{C}(I)$, A est un ensemble maigre - et par suite que son complémentaire est un sous-espace inépuisable (soit A_n l'ensemble des fonctions $x\in\mathcal{C}(I)$ telles que, pour une valeur de t au moins satisfaisant à $a\leqslant t\leqslant b-\frac{1}{n}$ (et dépendant de x), on ait $|x(t')-x(t)|\leqslant n|t'-t|$ pour tout $t'\geqslant t$; montrer que chacun des A_n est un ensemble formé rare : on remarquera pour cela que, dans $\mathcal{C}(I)$, toute boule contient un polynome, et d'autre part que, quels que soient $\varepsilon>0$ et $m>0$, il existe une fonction

$y \in \mathcal{C}(I)$ ayant en tout point une dérivée à droite, telle que, pour tout $t \in I$, $|y(t)| \leqslant \varepsilon$, $|y'_d(t)| \geqslant m$).

4) Soit f une fonction vectorielle continue dans un intervalle ouvert I, et admettant en tout point de cet intervalle une dérivée à droite. Montrer que les points où f'_d est discontinue forment un sous-ensemble maigre de I (cf. Top. rém. chap. VII, § 5, exerc.).

5) Soit f une fonction vectorielle continue dans un intervalle ouvert I ; on suppose que f admet une dérivée à droite en tous les points de $[a,b[$, sauf aux points d'une partie dénombrable A de cet intervalle. Montrer que si on a $\|f'_d(x)\| \leqslant m$ en tous les points $x \notin A$, on a $\|f(b)-f(a)\| \leqslant m|b-a|$. (Soit (a_n) la suite formée des points de A, rangés dans un ordre quelconque ; pour tout n, il existe un point $b_n > a_n$ tel que, pour $a_n \leqslant x \leqslant b_n$, $\|f(x)-f(a_n)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$. Considérer l'ensemble J des points $u \in I$ tels que, pour $a \leqslant x \leqslant u$, on ait $\|f(x)-f(a)\| \leqslant (m+\varepsilon)(x-a) + \varepsilon \sum_n \frac{1}{2^n}$, la somme étant étendue aux indices n tels que $a_n < u$; montrer que $J=I$ en terminant le raisonnement comme dans le th. 1).

6) On sait que, dans le corps $\mathbf{Q}_p$ des nombres p-adiques, tout entier p-adique $x \in \mathbf{Z}_p$ admet un développement et un seul de la forme $x = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_n p^n + \ldots$, où les a_i sont des entiers tels que $0 \leqslant a_i \leqslant p-1$. A tout $x \in \mathbf{Z}_p$, on fait correspondre l'entier p-adique $f(x) = a_0 + a_1 p^2 + a_2 p^4 + \ldots + a_n p^{2n} + \ldots$. Montrer que, dans $\mathbf{Z}_p$, f est une fonction continue, qui n'est constante dans le voisinage d'aucun point, et qui admet partout une dérivée nulle.

7) Pour tout nombre x de l'intervalle $[0,1[$, soit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ le développement dyadique propre de x ; on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{2n}}$.

Montrer que f est continue à droite en tout point de $[0,1[$, et admet en tout point une dérivée à droite nulle, mais n'est constante dans aucun intervalle.

8) Soit f une application continue d'un intervalle ouvert I dans un espace normé E ; si f admet une dérivée à droite au point $x \in I$, montrer que, pour toute forme linéaire continue u sur E, la fonction scalaire $u \circ f$ admet au point x une dérivée à droite égale à $u(f'_d(x))$.

* En déduire que, si f admet une dérivée à droite en tout point de I, et si K est une partie convexe fermée de E, contenant l'ensemble $f'_d(I)$, pour tout couple de points distincts x,y de I, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ appartient à K (utiliser le th. de Hahn-Banach, et le th. des accroissements finis pour les fonctions scalaires). Soit V le sous-espace vectoriel fermé de E engendré par K ; si, dans V, K possède des points intérieurs, montrer que $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ ne peut être égal à un point a de la frontière de K par rapport à V que si, pour tout z tel que $x \leqslant z \leqslant y$, $f'_d(z)$ appartient à tous les hyperplans d'appui de K au point a.

Généraliser de même l'exercice 5. En déduire que, pour tout ensemble convexe fermé K de E, l'intersection d'un intervalle ouvert quelconque contenu dans I et du complémentaire de l'ensemble $f'^{-1}_d(K)$ est vide ou n'est pas dénombrable. *

9) Soit f l'application vectorielle de $I=[0,1[$ dans $\mathbb{R}^3$ définie comme suit : pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{4}$, $f(t)=(-4t,0,0)$; pour $\frac{1}{4} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$, $f(t)=(-1,4t-1,0)$; pour $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3}{4}$, $f(t)=(-1,1,4t-2)$; enfin, pour $\frac{3}{4} \leqslant t < 1$, $f(t)=(4t-1,1,1)$. Montrer que l'ensemble convexe engendré par l'ensemble $f'_d(I)$ n'est pas identique à l'adhérence de

l'ensemble des valeurs de $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, lorsque (x,y) parcourt l'ensemble des couples de points distincts de I .

10) Soit f une fonction scalaire finie et continue dans un intervalle compact $[a,b]$, et admettant en tout point de l'intervalle ouvert $]a,b[$ une dérivée à droite. Soient m et M les bornes inférieure et supérieure (finies ou non) de f'_d dans $]a,b[$.

a) Montrer que, lorsque x et y parcourent $[a,b]$ de sorte que $x \neq y$, l'ensemble des valeurs de $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ est identique à l'intervalle $]m,M[$ si f n'est pas linéaire (se ramener à prouver que si f'_d prend deux valeurs de signes contraires en deux points c et d de $]a,b[$, il existe deux points distincts de l'intervalle $]c,d[$ où f prend la même valeur).

b) Si f admet en outre en tout point de $]a,b[$ une dérivée à gauche, les bornes inférieures (resp. supérieures) de ces deux dérivées dans $]a,b[$ sont égales.

c) Si f est dérivable dans $]a,b[$, l'image par la fonction f' de tout intervalle contenu dans $]a,b[$ est un intervalle (utiliser a)).

11) Soit f une fonction vectorielle continue, prenant ses valeurs dans un espace normé E , définie dans un intervalle ouvert I et admettant en tout point de I une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Soit F une partie fermée de E , A l'ensemble $f^{-1}_d(F)$, supposé non vide. Montrer que l'ensemble des points $x \in A$ où $f'_g(x) \notin F$ est <u>dénombrable</u> (soit U_n l'ensemble ouvert des points de E dont la distance à F est $< \frac{1}{n}$, A_n l'ensemble des points $x \in A$ tels qu'il existe $y \in I$ satisfaisant aux relations $x - \frac{1}{n} \leqslant y < x$ et $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \in U_n$; montrer que l'ensemble des points de A n'appartenant pas à A_n est dénombrable, on remarquant que c'est une partie de l'ensemble des origines des intervalles contigus d'une partie fermée de $\mathbb{R}$).

En déduire que, si la topologie de E admet une base dénombrable, l'ensemble des points $x \in I$ où $f'_d(x) \neq f'_s(x)$ est dénombrable (si (U_n) est une base dénombrable de la topologie de E, remarquer que, pour deux points distincts de E, il existe un U_n contenant l'un mais ne contenant pas l'autre).

11 bis) On considère, dans l'intervalle $[0,1]$, une famille $(I_{n,p})$ d'intervalles ouverts deux à deux sans point commun, définis par récurrence comme suit : l'entier n prend toutes les valeurs $\geqslant 0$; pour chaque valeur de n, p prend les valeurs $1,2,..,2^n$; on a $I_{0,1} =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Si J_n est la réunion des intervalles $I_{m,p}$ définis pour $0 \leqslant m \leqslant n$, le complémentaire de J_n est réunion de 2^{n+1} intervalles fermés $K_{n,p}$ $(1 \leqslant p \leqslant 2^{n+1})$ deux à deux sans point commun;. Si $K_{n,p} = [a,b]$, on prend alors pour $I_{n+1,p}$ l'intervalle ouvert d'extrémités $b - \frac{b-a}{3}(1 + \frac{1}{2^n})$ et $b - \frac{b-a}{3.2^n}$.

Soit E l'ensemble parfait complémentaire de la réunion des $I_{n,p}$ par rapport à $[0,1]$. Montrer qu'on peut définir dans $[0,1]$ une fonction scalaire continue f qui admet en tout point x une dérivée à droite et qui n'a pas de dérivée à gauche aux points de E (prendre $f(x)=0$ dans E, et définir convenablement f dans chacun des intervalles $I_{n,p}$).

12) Soit f une fonction numérique finie et continue dans un intervalle compact $[a,b]$, et dérivable en tout point de $]a,b[$; montrer qu'il existe c tel que $a<c<b$, et que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

En déduire que, si f et g sont deux fonctions numériques finies et continues dans $[a,b]$, et ayant chacune une dérivée finie dans $]a,b[$, il existe c tel que $a<c<b$, et que

$$\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & g(b)-g(a) \\ f'(c) & g'(c) \end{vmatrix} = 0 .$$

13) Soient f et g deux fonctions numériques finies, strictement positives, continues et dérivables dans un intervalle compact $[a,b]$. Montrer que si f' et g' sont strictement positives, et si f'/g' est strictement croissante dans $[a,b]$, ou bien f/g est strictement monotone dans $[a,b]$, ou bien il existe un nombre c tel que $a<c<b$, et que f/g soit strictement décroissante dans $[a,c]$, et strictement croissante dans $[c,b)$.

14) Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, continue dans un intervalle ouvert I, ne s'y annulant pas, et admettant en tout point de I une dérivée à droite. Pour que $|f|$ soit croissante dans I, il faut et il suffit que $\mathcal{R}(\frac{f'd}{f}) \geqslant 0$ dans I.

§ 2. Primitives et intégrales.

1. Le problème des primitives. Nous ne considérerons en principe dans ce paragraphe, que des fonctions vectorielles d'une variable réelle, prenant leurs valeurs dans un espace normé complet E sur le corps $\mathbb{R}$.

Lorsqu'il s'agit en particulier de fonctions numériques, il est toujours sous-entendu que ces fonctions sont finies.

Le problème qui donne naissance à la notion de primitive est le suivant :

Problème A. Etant donné une fonction vectorielle f, définie dans un intervalle compact $I=[a,b]$ de $\mathbb{R}$, existe-t-il une fonction g définie dans I, telle que $f(x)$ soit la dérivée de g en tout point x intérieur à I, que $f(a)$ soit la dérivée à droite de g au point a, $f(b)$ la dérivée à gauche de g au point b ?

Il résulte de la formulation de ce problème que s'il admet une solution g, cette fonction est nécessairement continue dans I.

Toute solution du problème A est donc aussi solution du problème suivant

Problème B. *Etant donné une fonction f définie dans l'intervalle $I = [a,b]$, existe-t-il une fonction g définie et continue dans I, telle que f soit la dérivée à droite de g dans l'intervalle semi-ouvert $[a,b[$?*

Avant d'examiner si ce problème est effectivement plus général que le problème A, nous montrerons d'abord que s'il admet des solutions, toutes ces solutions sont déterminées quand on connaît l'une d'elles ; de façon précise :

Proposition 1. *Si deux fonctions g_1, g_2 continues dans $I = [a,b]$, ont une même dérivée à droite f dans $[a,b[$, la différence $g_1 - g_2$ est constante dans I.*

C'est en effet une conséquence immédiate du corollaire du théorème des accroissements finis (§ 1, th. 1). On voit donc que si le problème B a une solution g, l'ensemble des solutions est identique à l'ensemble des fonctions $g + a$, où a est un élément arbitraire de E.

Montrons maintenant qu'il existe des fonctions f pour lesquelles le problème B possède des solutions, mais non le problème A. En effet, si f est la dérivée de g dans $]a,b[$, et si, en un point x de cet intervalle, elle admet une limite à droite et une limite à gauche, elle est nécessairement continue en ce point, d'après les prop. 8 et 9 du § 1. Le problème A n'admet donc pas de solution si on prend pour I l'intervalle $[-1,+1]$, pour f la fonction scalaire égale à -1 dans $[-1,0[$, à +1 dans $[0,1]$; par contre le problème B admet alors des solutions, puisque f est la dérivée à droite de la fonction $|x|$ dans $[-1,+1[$.

On voit donc qu'en se limitant au problème A, on serait conduit à exclure la considération de fonctions aussi simples que la précédente;

c'est pourquoi nous étudierons dans ce qui suit le problème B , et nous poserons la définition suivante :

Définition 1. Etant donnée une fonction vectorielle f , définie dans $I = [a,b[$, on appelle primitive de f toute fonction g définie et continue dans I , telle que f soit la dérivée à droite de g dans $[a,b[$.

La prop.8 du § 1 entraîne que, si f admet une primitive f est continue à droite en tout point de $[a,b[$ où elle admet une limite à droite.

Soit x_0 un point (quelconque) de $[a,b[$ choisi une fois pour toutes ; si f admet une primitive, il existe, d'après la prop.1, une primitive g de f et une seule, telle que $g(x_0)=0$; nous désignerons pour le moment cette primitive par la notation $\mathcal{J}(f)$; si h est une autre primitive quelconque de f , on a $g(x)=h(x)-h(x_0)$.

Il est clair que l'ensemble des fonctions définies dans I et admettant une primitive est un sous-espace vectoriel $\mathcal{H}_0$ de l'espace vectoriel E^I de toutes les applications de I dans E , et que l'application $f \longrightarrow \mathcal{J}(f)$ est une application linéaire de $\mathcal{H}_0$ dans le sous-espace $\mathcal{K}_0$ des fonctions continues dans I , nulles au point x_0 .

2. Existence des primitives. Nous n'aborderons pas dans ce Livre le problème des primitives dans toute sa généralité ; une première restriction consistera à ne considérer, parmi les fonctions appartenant à $\mathcal{H}_0$ que celles qui sont bornées dans I , autrement dit celles dont l'ensemble est l'intersection $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \cap \mathcal{B}(I)$ de $\mathcal{H}_0$ et du sous-espace vectoriel $\mathcal{B}(I)$ de E^I formé des fonctions bornées dans I . On sait que, pour toute fonction $f \in \mathcal{B}(I)$, on pose $\|f\| = \sup_{x \in I} \|f(x)\|$; on obtient ainsi une norme sur $\mathcal{B}(I)$, qui définit sur $\mathcal{B}(I)$ une structure d'espace normé complet (Top.gén., chap.VIII).

Proposition 2. L'application $f \to \mathcal{T}(f)$ est une application linéaire continue de $\mathcal{H}$ dans le sous-espace $\mathcal{K}$ de $\mathcal{B}(I)$ formé des fonctions continues dans I, nulles au point x_0.

En effet, soit x un point quelconque de I ; comme $\|f(y)\| \leqslant \|f\|$ pour tout $y \in I$, le th. des accroissements finis, appliqué à l'intervalle d'extrémités x et x_0 donne, pour la primitive $g = \mathcal{T}(f)$, $\|g(x)\| \leqslant |x-x_0| \cdot \|f\|$, d'où

(1) $$\|g\| \leqslant (b-a)\|f\|$$

qui démontre la proposition (Top.gén., chap. VII).

Théorème 1. Le sous-espace $\mathcal{H}$ de $\mathcal{B}(I)$ est fermé (et par suite complet).

Comme l'application linéaire $f \to \mathcal{T}(f)$ est continue dans $\mathcal{H}$, on peut la prolonger par continuité à $\overline{\mathcal{H}}$; nous la désignerons encore par la même notation ; comme $\mathcal{K}$ est fermé, elle applique encore $\overline{\mathcal{H}}$ dans $\mathcal{K}$. Soit alors f une fonction bornée, adhérente à $\mathcal{H}$, et posons $g = \mathcal{T}(f)$; le théorème sera démontré si on établit que f est en tout point x de $[a,b[$, la dérivée à droite de g.

Soit V_a la boule fermée de centre f et de rayon a dans $\overline{\mathcal{H}}$; si u et v appartiennent à $V_a \cap \mathcal{H}$, on a $\|u-v\| \leqslant 2a$; si on pose $h = \mathcal{T}(u)$, $k = \mathcal{T}(v)$, le théorème des accroissements finis prouve que, pour tout $y \in I$ (distinct de x)

(2) $$\left\| \frac{h(x)-h(y)}{x-y} - \frac{k(x)-k(y)}{x-y} \right\| \leqslant 2a$$

Faisons tendre v vers f en restant dans $\mathcal{H}$; k tend vers g, et l'inégalité (2) donne à la limite (principe de prolongement des inégalités

(3) $$\left\| \frac{h(x)-h(y)}{x-y} - \frac{g(x)-g(y)}{x-y} \right\| \leqslant 2a$$

D'autre part, il existe $z>0$ tel que pour $x<y\leqslant x+z$, on ait

$$\left\| \frac{h(x)-h(y)}{x-y} - u(x) \right\| \leqslant a$$

et, comme $\|u-f\| \leqslant a$,

$$\left\| \frac{h(x)-h(y)}{x-y} - f(x) \right\| \leqslant 2a$$

Tenant compte de (3), il vient finalement, pour $x<y<x+z$

$$\left\| \frac{g(x)-g(y)}{x-y} - f(x) \right\| \leqslant 4a$$

ce qui démontre le théorème, puisque a est arbitraire.

Scholie. Le th.1 permet d'établir l'existence des primitives de fonctions bornées par le raisonnement suivant : si on sait que les fonctions d'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}(I)$ admettent une primitive, il en sera de même des fonctions appartenant au sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}(I)$ engendré par $\mathcal{A}$. Nous allons donner dans ce qui suit deux applications de ce procédé.

Proposition 3. Toute fonction continue dans I admet une primitive.

En effet, tout polynome $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ admet pour primitive le polynome $a_0\frac{x^{n+1}}{n+1}+a_1\frac{x^n}{n}+\ldots+a_{n-1}\frac{x^2}{2}+a_nx+a_{n+1}$, quelle que soit la constante a_{n+1}. Or, on sait, d'après le th. de Weierstrass (Top.gén.,chap.VIII) que le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}(I)$ engendré par l'ensemble des polynomes est identique à l'espace $\mathcal{C}(I)$ des fonctions continues dans I ; d'où la proposition.

On voit en outre, d'après les prop.8 et 9 du §1 que pour toute fonction f continue dans I, les primitives de f sont solutions du problème A.

Remarque. Le principe de la méthode précédente s'étend sans modification importante aux fonctions vectorielles d'une variable complexe. Si U est l'adhérence d'un domaine relativement compact dans $\mathcal{C}$, une primitive d'une fonction vectorielle f définie

dans U est par définition une fonction continue dans U ayant une dérivée égale à f en tout point intérieur à U . Si $\mathscr{H}$ désigne encore le sous-espace de l'espace $\mathscr{B}(U)$ des fonctions bornées dans U , formé des fonctions admettant une primitive, le th.1 s'étend sans modification, en utilisant la prop.12 du § 1 . Si on prend par exemple pour U un disque fermé, on voit comme ci-dessus que toute fonction limite uniforme de polynomes dans U admet une primitive dans U ; ces fonctions ne sont autres que les fonctions dites holomorphes dans U , que nous étudierons en détail dans un Livre ultérieur.

3. Primitives des fonctions réglées. L'espace $\mathscr{H}$ des fonctions bornées admettant une primitive contient, d'après la prop.3, l'espace $\mathscr{C}(I)$ des fonctions continues dans I ; mais nous savons, par l'exemple de la dérivée à droite de la fonction $|x-a|$ (où $a \in I$), qu'il contient aussi des fonctions discontinues dans I . Dans cet exemple, il s'agit d'une fonction qui n'a qu'un seul point de discontinuité dans I , et qui est constante dans tout intervalle où elle est continue. Plus généralement, posons la définition suivante :

Définition 2. *On dit qu'une fonction vectorielle définie dans I est une fonction en escalier si elle n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité, et si elle est constante dans tout intervalle où elle est continue.*

Soit f une fonction en escalier, $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ la suite finie strictement croissante de points de I , telle que $a_0=a$, $a_n=b$, les a_i d'indice tel que $1 \leqslant i \leqslant n-1$ étant les points intérieurs à I , où f est discontinue. Dans chacun des n intervalles $]a_i, a_{i+1}[$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, la fonction f est constante ; soit c_i la valeur qu'elle prend dans cet intervalle ;

on voit donc qu'en tout point de $[a,b[$, f a une limite à droite, et en tout point de $]a,b]$ une limite à gauche ; pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, on a $f(a_i+) = c_i$, et pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $f(a_i-) = c_{i-1}$; les valeurs de f aux $n+1$ points a_i peuvent naturellement être distinctes de la limite à droite ou de la limite à gauche de f en ces points.

Pour que f admette une primitive, il est nécessaire que f soit partout continue à droite dans $[a,b[$, puisqu'elle admet une limite à droite en tout point de cet intervalle ; autrement dit, on doit avoir $f(a_i) = c_i$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Mais cette condition est aussi suffisante ; en effet, si on définit la fonction g dans I par les conditions suivantes :

$$g(a_0) = 0, \qquad g(x) = g(a_i) + c_i(x - a_i) \text{ pour } a_i \leqslant x \leqslant a_{i+1} \text{ et } 0 \leqslant i \leqslant n-1$$

on vérifie aussitôt que g est une primitive de f.

Il est clair que les fonctions en escalier continues à droite dans $[a,b[$ forment un sous-espace vectoriel $\mathscr{E}_d$ de $\mathscr{B}(I)$; le th. 1 nous permet par suite d'affirmer l'existence des primitives de toutes les fonctions appartenant à l'adhérence $\overline{\mathscr{E}}_d$ de $\mathscr{E}_d$ dans $\mathscr{B}(I)$, c'est-à-dire les fonctions limites uniformes de fonctions en escalier continues à droite. Nous allons caractériser autrement ces fonctions.

Définition 3. On dit qu'une fonction vectorielle bornée dans I est réglée si elle est limite uniforme de fonctions en escalier.

Autrement dit, si $\mathscr{E}$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathscr{B}(I)$ formé des fonctions en escalier, le sous-espace des fonctions réglées est l'adhérence $\overline{\mathscr{E}}$ de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{B}(I)$.

Théorème 2. Pour qu'une fonction bornée f définie dans I soit réglée, il faut et il suffit qu'elle ait une limite à droite en tout point de $[a,b[$ et une limite à gauche en tout point de $]a,b]$.

1° La condition est nécessaire. En effet, supposons que $f \in \overline{\mathcal{E}}$, et soit x un point quelconque de $[a,b[$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe par hypothèse une fonction en escalier g telle que $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$; d'autre part, g admet une limite à droite au point x, donc il existe $y > x$ tel que, pour tout couple (z,z') de points de l'intervalle $]x,y[$, on ait $\|g(z) - g(z')\| \leqslant \varepsilon$, et par suite $\|f(z) - f(z')\| \leqslant 3\varepsilon$; cela prouve que l'image par f de la base de filtre formée des intervalles $]x,y[$ où $y > x$, est une base de filtre de Cauchy dans E ; cette base de filtre est donc convergente, ce qui signifie que f a une limite à droite au point x. On démontre de même que f a une limite à gauche en tout point de $]a,b]$.

2° La condition est suffisante. Supposons-la remplie ; étant donné $\varepsilon > 0$, pour tout $x \in I$ il existe un intervalle ouvert $V_x =]c_x, d_x[$ contenant x et tel que, dans l'intersection de I et de chacun des intervalles $]c_x, x[$, $]x, d_x[$, l'oscillation de f soit $\leqslant \varepsilon$. Comme I est compact, il existe un nombre fini de points x_i de I tels que les V_{x_i} forment un recouvrement de I ; soit $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ la suite obtenue en rangeant dans l'ordre croissant les points de l'ensemble fini formé des points a, b, x_i, c_{x_i} et d_{x_i} appartenant à I ; dans tout intervalle $]a_k, a_{k+1}[$, f a une oscillation $\leqslant \varepsilon$; soit c_k une de ses valeurs $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$. En posant $g(a_k) = f(a_k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, et, pour tout $x \in]a_k, a_{k+1}[$, $g(x) = c_k$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$, on définit une fonction en escalier g telle que $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$.

On observera que si f est <u>continue à droite</u> dans $[a,b[$, on peut modifier légèrement le raisonnement précédent de façon que g soit aussi <u>continue à droite</u> dans $[a,b[$: en effet, dans chacun des intervalles <u>semi-ouverts</u> $[a_k, a_{k+1}[$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ l'oscillation de f est alors $\leqslant \varepsilon$, et on peut donc prendre $c_k = f(a_k)$.

Corollaire 1. L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction règlée dans I est dénombrable.

En effet, soit f une fonction règlée, H l'ensemble de ses points de discontinuité, H_n l'ensemble des points de I où l'oscillation de f est $>1/n$; on a $H = \bigcup_n H_n$. Or, il existe une fonction en escalier g telle que $\|f-g\| \leqslant 1/2n$; on en conclut qu'en tout point où g est continue, l'oscillation de f est $\leqslant 1/n$; donc H_n est contenu dans l'ensemble des points de discontinuité de g, et est par suite fini, ce qui prouve que H est dénombrable.

Corollaire 2. Une fonction numérique bornée et monotone dans I est règlée.

En effet, elle admet en tout point de $[a,b[$ une limite à droite et en tout point de $]a,b]$ une limite à gauche (Top.gén., chap.IV, § 5, prop.4).

Corollaire 3. Soient f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ n fonctions règlées dans I, prenant respectivement leurs valeurs dans des espaces normés E_i. Si g est une application continue du sous-espace $\prod_{i=1}^{n} \overline{f_i(I)}$ de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ dans un espace normé F, la fonction composée $x \to g(f_1(x), f_2(x), .., f_n(x))$ est règlée dans I.

Elle a en effet une limite à droite et une limite à gauche en tout point de I.

Il résulte en particulier de ce corollaire que les fonctions scalaires règlées dans I forment un anneau.

Remarque. Si f est une fonction scalaire règlée dans I, g une fonction vectorielle règlée dans un intervalle contenant f(I), la fonction composée $g \circ f$ n'est pas nécessairement règlée dans I (cf. exerc. 2).

Proposition 4. Si f est une fonction réglée définie dans I, la fonction g définie par les conditions $g(x)=f(x+)$ pour $x\in[a,b[$ et $g(b)=f(b)$, est une fonction réglée dans I, continue à droite dans $[a,b[$, telle que $g(x-)=f(x-)$ pour tout $x\in]a,b]$.

En effet, soit h une fonction en escalier telle que $\|f-h\|\leqslant\varepsilon$; on en conclut aussitôt que si on pose $k(x)=h(x+)$ dans $[a,b[$ et $k(b)=h(b)$, on a $\|g-k\|\leqslant\varepsilon$, et k est une fonction en escalier continue à droite; d'après le th.2, g est donc continue à droite; d'autre part, on a $k(x-)=h(x-)$, $\|f(x-)-h(x-)\|\leqslant\varepsilon$ et $\|g(x-)-k(x-)\|\leqslant\varepsilon$ pour tout $x\in]a,b]$, donc $\|f(x-)-g(x-)\|\leqslant 2\varepsilon$ pour tout $x\in]a,b]$, et comme ε est arbitraire, $f(x-)=g(x-)$.

On dit pour abréger que g est la fonction f rendue continue à droite dans $[a,b[$.

Nous pouvons maintenant énoncer le th. suivant :

Théorème 3. Pour toute fonction f réglée dans I, et tout point $x_0\in I$, il existe une fonction g et une seule définie et continue dans I, telle que $g(x_0)=0$, admettant en tout point x de $[a,b[$ une dérivée à droite égale à $f(x+)$, et en tout point x de $]a,b]$ une dérivée à gauche égale à $f(x-)$.

En effet, soit f_1 la fonction f rendue continue à droite dans $[a,b[$, et soit g la primitive de f_1 s'annulant pour $x=x_0$, primitive qui existe en vertu du th.1; en tout point $x\in[a,b[$, on a donc $g'_d(x)=f_1(x)=f(x+)$; d'autre part, en tout point $x\in]a,b]$ f_1 admet une limite à gauche égale à $f(x-)$; donc (§1, prop.9) g a une dérivée à gauche $g'_g(x)=f(x-)$.

Corollaire. Sauf aux points d'une partie dénombrable de I, la fonction g admet une dérivée égale à $f(x)$.

En effet, l'ensemble des points x où les trois éléments $f(x)$, $f(x+)$ et $f(x-)$ ne sont pas identiques est dénombrable (cor.1 du th.2).

Remarque. Il ne faudrait pas croire que les fonctions règlées dans I soient les seules fonctions bornées dans I admettant une primitive (cf. exerc. 3 et 4).

4. Intégrales. Par abus de langage, nous dirons encore, pour une fonction règlée f, que toute primitive de $f(x+)$ est une primitive de f ; toutes ces primitives sont de la forme $g + a$ (a élément de E). Nous nous bornerons désormais à l'étude des primitives des fonctions règlées ; la primitive d'une telle fonction f, désignée par g dans le th.3, se notera désormais $\int_{x_0} f$ ou $\int_{x_0} f(t)dt$; la valeur de cette primitive en un point quelconque $x \in I$ se note $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ et s'appelle intégrale de la fonction f de x_0 à x ; c'est un élément de l'espace normé E. Si h est une primitive quelconque de f, on a identiquement

$$h(x) - h(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \qquad (4)$$

Le premier membre de cette formule s'écrit aussi souvent $h(t)\Big|_{x_0}^{x}$

Remarques. 1) La terminologie et les notations précédentes sont empruntées au Calcul intégral, qui constitue, sous certains de ses aspects, une généralisation étendue de la théorie précédente (cf. Livre VIII).

2) Dans la notation $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ la "variable" t ne joue aucun rôle : l'élément représenté par ce symbole n'est nullement fonction de t, mais bien de x et x_0 ; on peut donc remplacer la lettre t par toute autre lettre (de préférence distincte de x et x_0 afin d'éviter toute confusion) sans modifier le sens du symbole obtenu.

Nous avons obtenu la valeur de l'intégrale d'une fonction règlée f (entre deux nombres fixes x_0 et x) comme limite d'intégrales

(entre les mêmes nombres) de fonctions en escalier. Ce procédé peut s'exprimer d'une façon légèrement différente : supposons par exemple $x_0 < x$, et appelons <u>subdivision</u> de l'intervalle $[x_0,x]$ toute suite d'intervalles $[x_i,x_{i+1}]$, de réunion $[x_0,x]$, où $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une suite strictement croissante de points de $[x_0,x]$ telle que $x_n=x$. Nous appellerons <u>somme de Riemann</u> relative à la fonction f et à la subdivision formée des $[x_i,x_{i+1}]$, toute expression de la forme $\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1}-x_i)$, où t_i appartient à $[x_i,x_{i+1}]$ pour $0\leqslant i\leqslant n-1$. On peut alors énoncer la proposition suivante :

<u>Proposition 5</u>. <u>Soit</u> f <u>une fonction réglée dans</u> I, $[x_0,x]$ <u>un intervalle contenu dans</u> I. <u>Pour tout</u> $\varepsilon>0$, <u>il existe un nombre</u> $\rho>0$ <u>tel que, pour toute subdivision de</u> $[x_0,x]$ <u>en intervalles de longueur</u> $<\rho$, <u>on ait</u>

$$(5)\qquad \left\| \int_{x_0}^{x} f(t)dt - \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1}-x_i) \right\| \leqslant \varepsilon$$

<u>pour toute somme de Riemann relative à cette subdivision</u>.

En effet, soit g une fonction en escalier telle que $\|f-g\|\leqslant\varepsilon$. On a $\left\| \int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} g(t)dt \right\| \leqslant \varepsilon\,(x-x_0)$ d'après le th. des accroissements finis, et $\left\| \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1}-x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i)(x_{i+1}-x_i) \right\| \leqslant \varepsilon(x-x_0)$; il suffit donc de démontrer la proposition lorsque f est une <u>fonction en escalier</u>. Soit $(y_k)_{0\leqslant k\leqslant m}$ la suite finie strictement croissante telle que $y_0=x_0$, $y_m=x$, les y_k intérieurs à $[x_0,x]$ étant les points de discontinuité de f.

Pour toute subdivision de $[x_0,x]$ en intervalles de longueur $<\rho$, chacun des points y_k appartient à deux intervalles au plus ; il ne peut donc y avoir que $2m$ intervalles dans lesquels la fonction f soit discontinue et par suite non constante. L'expression de $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ montre alors que, si M désigne l'oscillation de f dans $[x_0,x]$,

la différence $\left\| \int_{x_0}^{x} f(t)dt - \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1}-x_i) \right\|$ ne peut excéder $2mM\rho$; il suffit donc de prendre $\rho \leqslant \varepsilon/2mM$ pour obtenir (5).

<u>Corollaire</u>. <u>Si</u> f <u>est une fonction réglée dans</u> I , <u>on a</u>

(6) $$\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_0 + k\,\frac{x-x_0}{n}\right)$$

En effet, les points $x_0 + k\,\frac{x-x_0}{n}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ définissent une subdivision de $[x_0, x]$ en intervalles de longueur $1/n$, tendant donc vers 0 lorsque n croit indéfiniment.

La formule (6) montre que l'intégrale de f de x_0 à x multipliée par le facteur $\frac{1}{x-x_0}$ est limite de la <u>moyenne arithmétique</u> des valeurs de f en n points équidistants appartenant à $[x_0, x]$; aussi dit-on encore que l'expression $\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ est la <u>moyenne</u> de la fonction f dans l'intervalle $[x_0, x]$.

<u>5. Propriétés des intégrales</u>. Les propriétés des intégrales des fonctions réglées ne sont autres que la traduction, dans la notation qui leur est propre, des propriétés des dérivées démontrées au § 1.

En premier lieu, la formule (4) montre que, quels que soient les points x, y, z de I , on a

(7) $$\int_x^y f(t)dt + \int_y^x f(t)dt = 0$$

et

(8) $$\int_x^y f(t)dt + \int_y^z f(t)dt + \int_z^x f(t)dt = 0 .$$

D'après les prop. 1 et 2 du § 1 , on a

(9) $$\int_{x_0} (f+g) = \int_{x_0} f + \int_{x_0} g$$

et, pour tout scalaire fixe k

(10) $$\int_{x_0} k f = k \int_{x_0} f .$$

Soient maintenant E, F, G trois espaces normés complets, $(x, y) \to [x.y]$ une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans G . Soient f et g deux fonctions vectorielles définies et continues dans I , prenant leurs valeurs dans E et F respectivement ; supposons en outre que f et g

soient toutes deux primitives de fonctions <u>règlées</u> dans I . D'après la prop.3 du §1, la fonction $h(x)=[f(x).g(x)]$ admet en tout point de $[a,b[$ une dérivée à droite égale à $[f(x).g'_d(x)]+[f'_d(x).g(x)]$. Or, chacune des fonctions $[f.g'_d]$ et $[f'_d.g]$ est une fonction règlée dans I , d'après la continuité de $[x.y]$ et le th.2 (les fonctions f'_d et g'_d étant prolongées de manière quelconque au point b). On en déduit la formule

$$(11)\qquad \int_{x_0}^{x}[f(t).g'_d(t)]\,dt = [f(t).g(t)]\Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x}[f'_d(t).g(t)]\,dt$$

dite formule d'<u>intégration par parties</u>, qui permet de calculer de nombreuses primitives.

Par exemple, la formule d'intégration par parties donne la formule suivante

$$\int_{x_0}^{x} t\,f'_d(t)\,dt = tf(t)\Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

et ramène donc l'un à l'autre le calcul des primitives des deux fonctions $f(x)$ et $xf'_d(x)$.

Traduisons maintenant la formule de dérivation des fonctions composées (§1, prop.4 et 6). Soit f une fonction scalaire définie et continue dans I , et qui soit primitive d'une fonction <u>règlée</u>; soit d'autre part g une fonction vectorielle <u>continue</u> dans l'intervalle compact f(I) ; si h désigne une primitive quelconque de g , h admet en tout point intérieur à l'intervalle f(I) une <u>dérivée</u> égale à g à l'origine de l'intervalle une dérivée à droite égale à g , à l'extrémité une dérivée à gauche égale à g ; il en résulte que la fonction composée $h\circ f$ admet en tout point x de $[a,b[$ une dérivée à droite égale à $g(f(x))f'_d(x)$; cette dernière fonction est d'ailleurs règlée d'après le th.2, et par suite on peut écrire la formule

$$(12)\qquad \int_{x_0}^{x} g(f(t))f'_d(t)\,dt = \int_{f(x_0)}^{f(x)} g(u)\,du$$

dite formule du changement de variable, qui facilite également le calcul des primitives.

Si on prend par exemple $f(x)=x^2$, on voit que la formule (12) ramène l'un à l'autre le calcul des primitives des fonctions $g(x)$ et $xg(x^2)$.

Remarque. On peut étendre la formule (12) au cas où on suppose seulement que g est une fonction réglée quelconque dans $f(I)$, mais en supposant en outre que f est strictement croissante dans I ; en effet, h désignant toujours une primitive de g, $h \circ f$ a encore en tout point de $[a,b[$ une dérivée à droite égale à $h'_d(f(x))f'_d(x)$ (§ 1, prop.6), c'est-à-dire à $g(f(x)+)f'_d(x)$; cette dernière expression n'est autre que la limite à droite de la fonction $g(f(x))f'_d(x)$, et cette fonction est réglée, donc on a encore la formule (12) (on peut montrer d'ailleurs que la formule (12) s'étend aussi au cas où g est une fonction réglée quelconque, et f une primitive d'une fonction réglée quelconque ; cf. Livre VIII).

Traduisons enfin le théorème des accroissements finis sous sa forme générale (§ 1, prop.17); on obtient la proposition suivante :

Proposition 6. Soient f une fonction vectorielle réglée, g une fonction scalaire réglée et $\geqslant 0$, définies dans I. Quels que soient les points x_0 et x de I tels que $x_0 \leqslant x$, on a

$$(13) \qquad \left\| \int_{x_0}^{x} f(t)g(t)dt \right\| \leqslant \int_{x_0}^{x} \|f(t)\| g(t)dt \leqslant \|f\| \cdot \int_{x_0}^{x} g(t)dt$$

Cela résulte de la prop.17 du § 1, appliquée aux primitives des fonctions $f(x)g(x)$ (qui est réglée d'après le cor.3 du th.2), $\|f(x)\| g(x)$ et $g(x)$ (ces deux dernières primitives étant croissantes dans I d'après la prop.14 du § 1).

En particulier, pour $g(t)=1$:

Corollaire (théorème de la moyenne). *Pour toute fonction vectorielle règlée f, définie dans I, on a pour $x_0 \leqslant x$*

$$(14) \qquad \left\| \int_{x_0}^{x} f(t)dt \right\| \leqslant \int_{x_0}^{x} \|f(t)\| \, dt \leqslant \|f\| \cdot (x-x_0) .$$

On peut d'ailleurs, dans les formules (13) et (14), remplacer la norme $\|f\|$ par $\sup_{x \in I} \|f(x+)\|$.

Lorsqu'il s'agit de fonctions réelles, la prop.13 du § 1 permet de préciser le corollaire précédent de la façon suivante :

Proposition 7. *Soit f une fonction réelle règlée définie dans I ; si $m = \inf_{x \in I} f(x+)$, $M = \sup_{x \in I} f(x+)$, on a*

$$(15) \qquad m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$$

sauf lorsque $f(x+)$ est constante dans I auquel cas les trois membres de (15) sont égaux.

En d'autres termes, la moyenne de la fonction règlée f dans l'intervalle $[a,b]$ est comprise entre les bornes de $f(x+)$ dans cet intervalle.

Corollaire 1. *Si une fonction règlée réelle f est telle que $f(x+) \geqslant 0$ dans I, on a $\int_a^b f(t)dt > 0$ sauf si $f(x+)=0$ dans I.*

Corollaire 2. *Soient f et g deux fonctions réelles règlées définies dans I, telles que $g(x) \geqslant 0$ dans I ; si $m=\inf_{x \in I} f(x+)$, $M = \sup_{x \in I} f(x+)$, on a*

$$(16) \qquad m\int_a^b g(t)dt \leqslant \int_a^b f(t)g(t)dt \leqslant M \int_a^b g(t)dt$$

Les deux premiers membres ne sont égaux que si $g(x+)(f(x+)-m)=0$ dans I, les deux derniers que si $g(x+)(f(x+)-M)=0$ dans I.

6. **Intégrales impropres.** Soit I un intervalle quelconque de R, fini ou non, d'origine a et d'extrémité b (a et b appartenant à $\overline{R}$). Soit f une fonction vectorielle définie dans I, prenant ses valeurs dans un espace normé complet E, et telle que la restriction de f à tout intervalle compact $J \subset I$ soit une fonction règlée dans J ;

d'après le th.2, il revient au même de dire que f est <u>bornée sur tout intervalle compact contenu dans</u> I , <u>et admet en tout point intérieur à</u> I <u>une limite à droite et une limite à gauche</u> (ainsi qu'une limite à droite au point a , si $a \in I$, une limite à gauche au point b , si $b \in I$) ; nous dirons encore qu'une telle fonction est une fonction <u>réglée</u> dans l'intervalle I .

Remarquons maintenant que les intervalles compacts $J \subset I$ forment un <u>ensemble ordonné filtrant</u> $\mathfrak{K}(I)$ pour la relation $\subset$ (*) , car si $[\alpha, \beta]$ et $[\gamma, \delta]$ sont deux intervalles compacts contenus dans I , et si $\lambda = \min(\alpha, \gamma)$, $\mu = \max(\beta, \delta)$, l'intervalle $[\lambda, \mu]$ est contenu dans I et contient les deux intervalles considérés. Pour tout intervalle compact $J = [\alpha, \beta] \subset I$, nous désignerons par S_J l'intégrale $\int_\alpha^\beta f(t)dt$; on définit ainsi une application $J \longrightarrow S_J$ de $\mathfrak{K}(I)$ dans E .

<u>Définition 4. On appelle intégrale impropre de la fonction</u> f <u>dans l'intervalle</u> I (ou simplement <u>intégrale</u> de f dans I) <u>et on désigne par la notation</u> $\int_a^b f(t)dt$ <u>ou</u> $\int_I f(t)dt$, <u>la limite, si elle existe de l'application</u> $J \longrightarrow S_J$ <u>suivant l'ordonné filtrant</u> $\mathfrak{K}(I)$.

Il revient au même de dire que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est la limite de $\int_x^y f(t)dt$ lorsque le point (x,y) tend vers le point $(a,b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$, en restant dans l'ensemble $I \times I$

Par abus de langage, lorsque l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ existe, on dit aussi que c'est une intégrale <u>convergente</u>.

(*) Rappelons (<u>Ens.</u> R, § 6) qu'un ensemble $\mathfrak{F}$ de parties de I est <u>filtrant pour la relation</u> $\subset$ si, quels que soient $X \in \mathfrak{F}$, $Y \in \mathfrak{F}$, il existe $Z \in \mathfrak{F}$ tel que $X \subset Z$, $Y \subset Z$. Si S(X) désigne la partie de $\mathfrak{F}$ formée des $Y \in \mathfrak{F}$ tels que $Y \supset X$, les S(X) forment la base d'un filtre sur $\mathfrak{F}$, dit <u>filtre des sections</u> de $\mathfrak{F}$; la limite (si elle existe) d'une application f de $\mathfrak{F}$ dans un espace topologique, suivant le filtre des sections de $\mathfrak{F}$, est encore dite <u>limite de</u> f <u>suivant l'ensemble ordonné filtrant</u> $\mathfrak{F}$ (cf. <u>Top. gén.</u>, chap.I, §§5 et 6, et chap.IV, § 5 , n° 2) .

Remarque. Lorsque I est un intervalle fini, et que f est une fonction bornée et règlée dans l'intervalle compact $[a,b]$, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est évidemment limite de S_J suivant l'ordonné filtrant $\mathcal{K}(I)$; ce qui justifie la notation $\int_a^\sigma f(t)dt$ dans le cas général où cette intégrale impropre existe.

Exemples. 1) L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente et égale à 1, car $\int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x}$.

2) L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est convergente et égale à 2, car $\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2(1-\sqrt{x})$.

3) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de points de E, et soit f la fonction en escalier définie dans l'intervalle $[1,+\infty[$ par les conditions $f(x)=u_n$ pour $n\leqslant x<n+1$. Pour que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ soit convergente, il faut et il suffit que la série de terme général u_n soit convergente dans E : en effet, on a $\int_1^n f(t)dt = \sum_{p=1}^{n-1} u_p$, donc la condition est nécessaire ; réciproquement, si la série $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge, $\lim_{n\to\infty} u_n=0$; or, si $n\leqslant x<n+1$, $\int_1^x f(t)dt = \sum_{p=1}^{n-1} u_p + u_n(x-n)$ donc cette intégrale a bien pour limite $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ lorsque x tend vers $+\infty$.

La proposition suivante est une conséquence de la déf.4 et du critère de Cauchy, E étant complet par hypothèse :

Proposition 8. (critère de Cauchy pour les intégrales). Pour que l'intégrale impropre de f dans l'intervalle I existe, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un intervalle compact $J_0=[\alpha,\beta]\subset I$ tel que, pour tout intervalle compact $J_0=[\alpha,\beta]\subset I$ tel que, pour tout intervalle compact $K=[x,y]$ contenu dans I et n'ayant aucun point intérieur commun avec J_0, on ait $\int_x^y f(t)dt$.

En effet, le critère de Cauchy montre que, pour que l'intégrale $\int_I f(t)dt$ soit convergente, il faut et il suffit qu'il existe un intervalle compact $J_o = [\alpha,\beta]$ tel que pour tout intervalle compact J contenant J_o, on ait

$$\left\| \int_J f(t)dt - \int_{J_o} f(t)dt \right\| \leqslant \varepsilon$$

En particulier, si $x \leqslant \alpha$ est dans I, on aura $\left\| \int_x^\alpha f(t)dt \right\| \leqslant \varepsilon$, d'où si $x < y \leqslant \alpha$, $\left\| \int_x^y f(t)dt \right\| \leqslant 2\varepsilon$; on voit de même que si $\beta \leqslant x < y$ on a $\left\| \int_x^y f(t)dt \right\| \leqslant 2\varepsilon$. Réciproquement, si pour tout intervalle compact $K = [x,y]$ n'ayant aucun point intérieur commun avec J_o, on a $\left\| \int_x^y f(t)dt \right\| \leqslant \varepsilon$, pour tout intervalle compact $J = [u,v]$ contenant J_o, on aura $\left\| \int_u^\alpha f(t)dt \right\| \leqslant \varepsilon$, $\left\| \int_\beta^v f(t)dt \right\| \leqslant \varepsilon$, d'où

$$\left\| \int_J f(t)dt - \int_{J_o} f(t)dt \right\| = \left\| \int_u^\alpha f(t)dt + \int_\beta^v f(t)dt \right\| \leqslant 2\varepsilon$$

Exemple. Si l'intervalle I est fini, et si la fonction f est bornée dans I, l'intégrale $\int_I f(t)dt$ existe, car on a d'après le th. de la moyenne

$$\left\| \int_x^\alpha f(t)dt \right\| \leqslant \|f\|(\alpha - a) \quad , \quad \left\| \int_\beta^y f(t)dt \right\| \leqslant \|f\|(b - \beta)$$

et il suffit donc de prendre $\alpha - a$ et $b - \beta$ assez petits pour que le critère de Cauchy soit satisfait.

Si c est un point intérieur à I, la prop.8 prouve que si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente, il en est de même des intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$, et on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt \qquad (17)$$

comme on le voit en passant à la limite dans la relation

$$\int_x^y f(t)dt = \int_x^c f(t)dt + \int_c^y f(t)dt \quad .$$

x et y sont deux points de l'intervalle $[a,b]$ de $\overline{R}$, tels que $y < x$, et dont l'un au moins est identique à a ou b, on pose encore, par définition, $\int_x^y f(t)dt = -\int_y^x f(t)dt$. Avec cette convention, il résulte de (17) que, quels que soient les points x,y,z de l'intervalle $[a,b]$, on a encore

(18) $$\int_x^y f(t)dt + \int_y^z f(t)dt + \int_z^x f(t)dt = 0 .$$

Si f est règlée dans I , et si chacune des intégrales impropres $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ existe, il résulte inversement du critère de Cauchy que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ existe, et on a naturellement la formule (17).

Cette propriété conduit à généraliser encore la définition de l'intégrale de f dans $]a,b[$ lorsque l'on suppose seulement que f est règlée dans chacun des intervalles <u>ouverts</u> $]a,c[$ et $]c,b[$, et que les deux intégrales impropres $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ existent ; on définit alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ par la relation (17), et on vérifie aussitôt que $\int_x^y f(t)dt$ existe quels que soient les points x,y, de $[a,b]$, et qu'on a la relation (18).

On étend immédiatement cette définition au cas où il existe une suite finie strictement croissante $(c_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de points de $[a,b]$, telle que $c_0=a$, $c_n=b$, que dans chacun des intervalles ouverts $]c_i,c_{i+1}[$ la fonction f soit règlée $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, et que chacune des intégrales impropres $\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(t)dt$ soit convergente.

On pose alors $\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(t)dt$.

Si l'intégrale impropre de f dans I converge, il en est de même de celle de $k.f$ pour tout scalaire k , et on a

$$\int_a^b k.f(t)dt = k.\int_a^b f(t)dt$$

Si f_1, f_2 sont deux fonctions règlées dans I , il en est de même de leur somme f ; si l'intégrale impropre de deux des fonctions f, f_1, f_2 converge, il en est de même de l'intégrale impropre de la troisième, et on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f_1(t)dt + \int_a^b f_2(t)dt .$$

La formule d'intégration par parties (formule (11)) se généralise de même aux intégrales impropres : il faut y supposer f et g continues

dans I, primitives de fonctions règlées dans I ; si on désigne par $[f\cdot g]_a^b$ la limite (lorsqu'elle existe) de $[f\cdot g]_x^y$ lorsque (x,y) tend vers (a,b), on voit que si deux des trois expressions $[f-g]_a^b$, $\int_a^b [f(t)\cdot g'_d(t)]dt$, $\int_a^b [f'_d(t)\cdot g(t)]dt$ existent, il en est de même de la troisième, et on a

$$(19)\qquad \int_a^b [f(t)\cdot g'_d(t)]dt = [f\cdot g]_a^b - \int_a^b [f'_d(t)\cdot g(t)]\,dt .$$

Enfin, soit f une fonction scalaire définie et continue dans I primitive d'une fonction règlée dans I ; soit d'autre part g une fonction vectorielle continue dans l'intervalle $f(I)$; en passant à la limite dans la relation (12), on voit que si l'une des deux intégrales impropres $\int_a^b g(f(t))f'_d(t)dt$, $\int_{f(a)}^{f(b)} g(u)du$ est convergente, il en est de même de l'autre, et elles sont égales.

Ce résultat s'étend d'ailleurs, par le même raisonnement, lorsqu'on suppose seulement g règlée dans $f(I)$, mais f strictement croissante dans I .

7. Intégrales impropres de fonctions positives. Proposition 9. Soit f une fonction règlée réelle et $\geqslant 0$, définie dans un intervalle I de R. Pour que l'intégrale impropre de f dans I soit convergente, il faut et il suffit que l'ensemble des nombres $\int_J f(t)dt$ soit majoré, lorsque J parcourt l'ensemble des intervalles compacts contenus dans I ; l'intégrale $\int_I f(t)dt$ est alors la borne supérieure de cet ensemble.

En effet, comme $f\geqslant 0$, la relation $J\subset J'$ entraîne $s_J\leqslant s_{J'}$; l'application $J\to s_J$ est donc croissante, et la proposition est une conséquence du théorème de la limite monotone (Top.gén., chap.IV ; §5, th.2).

Lorsque l'application $J\to s_J$ n'est pas bornée, elle a pour limite $+\infty$ suivant l'ordonné filtrant $\mathcal{K}(I)$; on dit alors, par extension,

que l'intégrale $\int_I f(t)dt$ existe encore et a pour valeur $+\infty$. Les propriétés des intégrales impropres établies ci-dessus s'étendent (lorsqu'il s'agit de fonctions $\geqslant 0$) au cas où certaines des intégrales qui interviennent dans ces propriétés sont infinies, pourvu que les relations où elles interviennent gardent un sens.

Proposition 10.(principe de comparaison). Soient f et g deux fonctions réelles $\geqslant 0$, définies dans I , et telles que $f \leqslant g$. Si l'intégrale impropre de g dans I est convergente, il en est de même de l'intégrale impropre de f , et on a $\int_I f(t)dt \leqslant \int_I g(t)dt$; en outre, les deux intégrales ne peuvent être égales que si $f(x+) = g(x+)$ en tout point intérieur à I .

En effet, pour tout intervalle compact $J \subset I$, on a $\int_J f(t)dt \leqslant \int_J g(t)dt$; comme $\int_J g(t)dt \leqslant \int_I g(t)dt$, l'intégrale $\int_J f(t)dt$ reste bornée, donc l'intégrale de f dans I est convergente ; en outre, en passant à la limite, on a $\int_I f(t)dt \leqslant \int_I g(t)dt$.

Supposons en outre qu'il existe un point x intérieur à I tel que $f(x+) < g(x+)$, et soit $[c,d]$ un intervalle compact non réduit à un point contenu dans I et tel que $x \in [c,d]$; on a $\int_c^d f(t)dt < \int_c^d g(t)dt$ (cor.1 de la prop.7), et comme d'autre part $\int_a^c f(t)dt \leqslant \int_a^c g(t)dt$ et $\int_d^b f(t)dt \leqslant \int_d^b g(t)dt$ d'après ce qui précède, on voit en ajoutant membre à membre que $\int_a^b f(t)dt < \int_a^b g(t)dt$.

Cette proposition fournit le moyen le plus fréquemment employé pour décider si une intégrale impropre d'une fonction $f \geqslant 0$ est ou non convergente, en comparant f à une fonction plus simple g , dont on sait déjà si son intégrale est ou non convergente ; nous verrons au chap.III comment peut se faire, dans les cas les plus importants, la recherche de ces fonctions de comparaison, et nous en déduirons les critères d'application usuelle pour la convergence des intégrales impropres et les séries.

8. Intégrales absolument convergentes. Définition 5 . On dit que l'intégrale impropre d'une fonction règlée f dans un intervalle I est absolument convergente, si l'intégrale de la fonction positive $x \longrightarrow \|f(x)\|$ dans l'intervalle I est convergente.

Proposition 11. Si l'intégrale impropre de f dans I est absolument convergente, elle est convergente, et on a

(20) $$\left\| \int_I f(t)dt \right\| \leqslant \int_I \|f(t)\| dt$$

En effet, pour tout intervalle compact $J \subset I$, on a (prop.6)

(21) $$\left\| \int_J f(t)dt \right\| \leqslant \int_J \|f(t)\| dt$$

Si l'intégrale de la fonction positive $x \to \|f(x)\|$ est convergente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle compact $[\alpha,\beta]$ contenu dans I tel que, pour tout intervalle compact $[x,y]$ contenu dans I et n'ayant aucun point intérieur commun avec $[\alpha,\beta]$ on ait $\int_x^y \|f(t)\| dt \leqslant \varepsilon$; on en tire $\left\| \int_x^y f(t)dt \right\| \leqslant \varepsilon$, ce qui démontre la convergence de l'intégrale de f dans I ; en passant à la limite dans (21), on en déduit alors l'inégalité (20).

Corollaire. Soit f une fonction règlée et bornée dans un intervalle I. Si g est une fonction règlée $\geqslant 0$ dans I , telle que l'intégrale impropre de g dans I soit convergente, l'intégrale de la fonction fg dans I est absolument convergente, et si on pose $\|f\| = \sup_{x \in I} \|f(x)\|$, on a

(22) $$\left\| \int_I f(t)g(t)dt \right\| \leqslant \|f\| \int_I g(t)dt \ .$$

En effet, on a $\|f(x)g(x)\| \leqslant \|f\| \cdot g(x)$, ce qui, en vertu du principe de comparaison, prouve que l'intégrale de fg dans I est absolument convergente ; l'inégalité (22) s'obtient en passant à la limite dans l'inégalité $\left\| \int_J f(t)g(t)dt \right\| \leqslant \|f\| \cdot \int_J g(t)dt$, valable pour tout intervalle compact $J \subset I$ (prop.6).

Remarque. Une intégrale impropre peut naturellement être convergente sans l'être absolument. C'est ce que montre l'exemple de la fonction en escalier définie dans l'exemple 3 du n° 6 , lorsque la série (u_n) est convergente sans être absolument convergente.

Exercices. 1) On considère, dans l'espace $\mathcal{B}(I)$ des fonctions vectorielles bornées dans un intervalle compact I , le sous-espace $\mathcal{F}$ formé des fonctions f ayant la propriété suivante : il existe une fonction vectorielle continue g dans I et une partie dénombrable D de I (dépendant de f) tels que, pour tout x intérieur à I et n'appartenant pas à D , g admette une dérivée égale à $f(x)$. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{B}(I)$ (même raisonnement que dans le th.1, en considérant une suite de Cauchy dans $\mathcal{F}$, et utilisant l'exerc. 5 du § 1).

2) Si f est une fonction scalaire continue dans un intervalle compact I , g une fonction réglée dans $f(I)$, la fonction composée $g \circ f$ n'est pas nécessairement réglée dans I (prendre pour g la fonction scalaire sgn x).

3) Montrer que la fonction égale à $\sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, à 0 pour $x=0$, est la dérivée d'une fonction continue dans $\mathbb{R}$ (intégrer par parties l'intégrale impropre $\int_0^x \sin \frac{1}{t}\, dt$, en remarquant que la fonction $x^2 \sin \frac{1}{x}$ admet une dérivée en tout point).

En déduire que, si $g(x,u,v)$ est une fonction continue dans le cube défini par $|x| \leqslant 1$, $|u| \leqslant 1$, $|v| \leqslant 1$, la fonction égale à $g(x, \sin \frac{1}{x}, \cos \frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$, à $g(0,0,0)$ pour $x=0$, est la dérivée d'une fonction continue dans $]-1,+1[$ (approcher uniformément g par un polynome en x,u,v , et appliquer le th.1) .

4) Montrer que la fonction égale à $\sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}\right)$ pour les valeurs de x distinctes de $\frac{1}{n\pi}$ (n entier $\neq 0$) et de 0, et à 0 pour les autres valeurs de x, est la dérivée d'une fonction continue dans R (au voisinage de $x = \frac{1}{n\pi}$, faire le changement de variable $x = \frac{1}{n\pi + \operatorname{Arc}\sin u}$ et utiliser l'exerc.3 ; à l'aide du même changement de variable, montrer qu'il existe une constante $a>0$ telle que

$$\left| \int_{\frac{2}{(2n+1)\pi}}^{\frac{2}{(2n-1)\pi}} \sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}\right) dx \right| \leqslant \frac{a}{n^3}$$

En déduire que, si on pose $g(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{x} \sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{t}}\right) dt$, g admet pour $x=0$ une dérivée nulle.)

5) Soient α et β deux nombres réels finis tels que $\alpha < \beta$. Montrer que, si γ et δ sont deux nombres tels que $\alpha < \gamma \leqslant \delta < \beta$, il existe une fonction scalaire f, définie dans un intervalle $]0,a]$, ne prenant que les valeurs α et β, telle que, dans tout intervalle $[\varepsilon,a]$ $(\varepsilon>0)$, f soit une fonction en escalier et que, si on pose $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ (intégrale impropre), on ait

$$\liminf_{x\to 0, x>0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \gamma \quad , \quad \limsup_{x\to 0, x>0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \delta$$

(prendre pour $g(x)$ une fonction dont la courbe représentative est une ligne brisée dont les cotés consécutifs ont pour pentes α et β, et dont les sommets se trouvent alternativement, soit sur les droites $y=\gamma x$, $y = \delta x$ pour $\gamma \neq \delta$, soit sur la droite $y = \gamma x$ et la parabole $y = \gamma x + x^2$ pour $\delta = \gamma$).

Par la même méthode, montrer que si α et β sont finis ou non, il existe une fonction scalaire f définie dans $]0,a]$, telle que dans tout intervalle $[\varepsilon,a]$, f soit une fonction en escalier, que l'intégrale impropre $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ existe, et qu'on ait

$$\liminf_{x\to 0,x>0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \alpha \ , \qquad \limsup_{x\to 0,x>0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \beta \ .$$

6) On considère la fonction scalaire f définie dans $]0,1]$ par les conditions

$$f(x)=+1 \text{ pour } \frac{1}{3^{2n+1}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{3^{2n}} \ , \ f(x)=-1 \text{ pour } \frac{1}{3^{2n+2}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{3^{2n+1}}$$

L'intégrale impropre $\int_0^x f(t)dt$ n'a pas de dérivée à droite au point x=0 (exerc.5). Montrer qu'il existe deux fonctions g,h, règlées dans $]0,1]$, telles que $f(x)=g(x)h(x)$, et que chacune des intégrales impropres $\int_0^x g(t)dt$, $\int_0^x h(t)dt$ admette une dérivée à droite au point x=0 (diviser l'intégralle $\left]\frac{1}{3^{2n+1}} , \frac{1}{3^{2n}}\right]$ en 2^n intervalles égaux, et prendre alternativement $g(x)=h(x)=\sqrt{f(x)}$, $g(x)=h(x)=-\sqrt{f(x)}$ dans deux intervalles consécutifs ; opérer de même dans $\left]\frac{1}{3^{2n+2}} , \frac{1}{3^{2n+1}}\right]$).

7) Soit f une fonction règlée dans un intervalle compact I ; montrer que pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction g continue dans I , telle que $\int_I \| f(t)-g(t)\| dt \leqslant \varepsilon$ (se ramener au cas où f est une fonction en escalier). En déduire qu'il existe un polynome p tel que $\int_I \| f(t)-p(t)\| dt \leqslant \varepsilon$.

8) Soit f une fonction règlée dans $[a,b]$, prenant ses valeurs dans E , g une fonction règlée dans $[a,c]$ $(c>b)$ prenant ses valeurs dans F , $(x,y)\to[x.y]$ une application bilinéaire continue de $E\times F$ dans G . Montrer que

$$\lim_{h\to 0,h>0} \int_a^b [f(t).g(t+h)]\,dt = \int_a^b [f(t).g(t)]\,dt$$

(se ramener au cas où f est une fonction en escalier).

9) Les hypothèses étant les mêmes que dans l'exerc.8, montrer que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un nombre $\rho>0$ tel que pour toute subdivision de $[x_0,x]\subset I$ en intervalles de longueur $\leqslant \rho$, on ait

$$\left\| \int_a^b \left[f(t).g(t)\right]dt - \sum_{i=0}^{n} \left[f(u_i).g(v_i)\right](x_{i+1}-x_i) \right\| \leqslant \rho$$

quels que soient, pour chaque indice i, les points u_i, v_i tels que $x_i \leqslant u_i \leqslant x_{i+1}$, $x_i \leqslant v_i \leqslant x_{i+1}$ (se ramener au cas où f et g sont des fonctions en escalier).

10) On dit qu'une suite (x_n) de nombres réels appartenant à l'intervalle $[0,1[$ est <u>également répartie</u> dans cet intervalle si, pour tout couple de nombres α, β tels que $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$, on a, en désignant par $\vartheta_n(\alpha,\beta)$ le nombre des indices i tels que $1 \leqslant i \leqslant n$, et $\alpha \leqslant x_i \leqslant \beta$,

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\vartheta_n(\alpha,\beta)}{n} = \beta - \alpha$$

Montrer que, si la suite (x_n) est également répartie, et si f est une fonction réglée dans $[0,1]$, on a

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \int_0^1 f(t)dt$$

(se ramener au cas où f est une fonction en escalier). Réciproque.

Montrer que, pour que la suite (x_n) soit également répartie, il faut et il suffit que la relation (2) ait lieu pour toute fonction f appartenant à un ensemble <u>partout dense</u> dans l'espace $\mathcal{C}(I)$ des fonctions numériques continues dans I.

11) Soit f une fonction scalaire croissante et bornée dans l'intervalle $[a,b[$. Si on pose

$$r(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(t)dt$$

montrer qu'on a $0 \leqslant r(n) \leqslant \frac{b-a}{n}\,(f(b)-f(a))$.

12) Soit f une fonction vectorielle continue dans $I = [a,b]$, ayant dans $[a,b[$ une dérivée à droite réglée et bornée. Si on pose

$$r(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(t)dt$$

montrer qu'on a $\lim_{n\to\infty} n\,r(n) = \frac{b-a}{2}\,(f(b)-f(a))$

(exprimer $r(n)$ sous la forme $\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_{k+1}) - f(t))dt$ en posant $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$).

13) Donner un exemple de fonction scalaire croissante et bornée f dans $[a,b]$, telle que $nr(n)$ ne tende pas vers $\frac{b-a}{2}(f(b)-f(a))$ lorsque n croît indéfiniment (prendre pour f la limite d'une suite décroissante (f_n) de fonctions croissantes dont les courbes représentatives sont des lignes brisées, telles que

$$f_n(a + k\frac{b-a}{2^n}) = f(a + k\frac{b-a}{2^n}) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant k \leqslant 2^n$$

et

$$(b-a)\sum_{k=1}^{2^n} f_n(a+k\frac{b-a}{2^n} - 2^n \int_a^b f_n(t)dt \geqslant \frac{3}{4}(b-a)(f_n(b)-f_n(a)) .$$

14) Soit f une fonction règlée dans un intervalle ouvert borné $]a,b[$, telle qu'il existe une fonction scalaire g, décroissante dans $]a,b[$, telle que $\|f(x)\| \leqslant g(x)$, et que l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ soit convergente. Montrer que $r(n)$ (exerc.12) tend vers 0 lorsque n croît indéfiniment. Plus généralement, si (ε_n) est une suite de nombres >0 tendant vers 0, et telle que $\inf_n n\varepsilon_n > 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + \varepsilon_n + k\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(t)dt$$

Montrer par un exemple que ces résultats peuvent tomber en défaut lorsqu'on suppose l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ absolument convergente, mais qu'il n'existe pas de fonction décroissante $g \geqslant \|f\|$ et telle que $\int_a^b g(t)dt$ soit convergente (donner à n les valeurs 2^p).

14bis) Avec les mêmes hypothèses que dans l'exerc.14, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f(a+k\frac{b-a}{n}) = 0 .$$

15) Soit f une fonction règlée dans un intervalle $]a,+\infty[$, telle qu'il existe une fonction scalaire g décroissante dans $]a,+\infty[$, telle que $\|f(x)\| \leqslant g(x)$, et que l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ soit convergente. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f(a+nh)$ est absolument convergente pour tout $h>0$ et qu'on a $\lim_{h\to 0} h(\sum_{n=1}^{\infty} f(a+nh)) = \int_a^{+\infty} f(t)dt$.

16) Soit f une fonction vectorielle continue dans $[a,b]$, admettant une dérivée à droite règlée dans $[a,b[$, et telle que $f(a)=f(b)=0$. Montrer que

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leqslant \frac{(b-a)^2}{4} \sup_{a<x<b} \left\| f'_d(x) \right\|$$

17) Soit f une fonction réelle continue, strictement croissante dans un intervalle $[0,a]$, et telle que $f(0)=0$; soit g sa fonction réciproque, définie dans l'intervalle $[0,f(a)]$; montrer que, si $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant f(a)$, on a

$$xy - \int_0^x f(t)dt - \int_0^y g(t)dt \leqslant 0$$

l'égalité n'ayant lieu que si $y=f(x)$ (étudier les variations du premier membre en fonction de x, y restant fixe). En déduire que, pour $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $p>1$, $p'=p/(p-1)$, on a $xy \leqslant ax^p + by^{p'}$ si $a>0$, $b>0$ et $(pa)^{p'}(p'b)^p \geqslant 1$.

18) Soient f et g deux fonctions scalaires règlées, définies dans un intervalle compact $[a,b]$, telles que g soit décroissante et $\geqslant 0$ dans $[a,b]$. Montrer qu'il existe un point c tel que $a \leqslant c \leqslant b$ et

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(a)\int_a^c f(t)dt$$

("deuxième théorème de la moyenne" : se ramener au cas où g est une fonction en escalier, et raisonner alors par récurrence sur le nombre de points de discontinuité de g).

Avec les mêmes hypothèses sur g, soit f une fonction vectorielle règlée définie dans $[a,b]$, et prenant ses valeurs dans un espace normé complet E. Soit K l'ensemble convexe fermé dans E, engendré par l'ensemble des valeurs de l'intégrale $\int_a^x f(t)dt$, lorsque x parcourt $[a,b]$. Montrer que le point $\frac{1}{g(a)}\int_a^b f(t)g(t)dt$ appartient à K (pour toute forme linéaire continue u sur E, appliquer le deuxième théorème de la moyenne à l'intégrale $\int_a^b u(f(t))g(t)dt$)

§ 3. Dérivées d'ordre supérieur.

1. Dérivées d'ordre n . Soit f une fonction vectorielle d'une variable réelle, continue et dérivable dans un intervalle ouvert I . Si la dérivée f' est continue dans un voisinage de $x_0 \in I$, et admet en ce point une dérivée première, cette dérivée est appelée la dérivée seconde de f au point x_0 , et se note $f''(x_0)$ ou $D^2 f(x_0)$. Si cette dérivée seconde existe en tout point de I , $x \to f(x)$ est une fonction vectorielle qu'on désigne par la notation f ou $D^2 f$. Par récurrence, on définit de même la dérivée n-ème (ou dérivée d'ordre n) de f , qu'on note $f^{(n)}$ ou $D^n f$: par définition, sa valeur en un point $x_0 \in I$ est égale à la dérivée de la fonction $f^{(n-1)}$ en ce point : cette définition suppose donc l'existence de toutes les dérivées $f^{(k)}$ d'ordre $k \leqslant n-1$ dans un voisinage de x_0 , et la dérivabilité de $f^{(n-1)}$ au point x_0 .

Par récurrence sur m , on voit que

$$D^m(D^n f) = D^{m+n} f \tag{1}$$

lorsque le second membre est défini.

Dans ce qui suit, f et g sont deux fonctions vectorielles continues dans I , et admettant en tout point de I une dérivée d'ordre n . Si f et g prennent leurs valeurs dans le même espace vectoriel, $f+g$ admet une dérivée n-ème dans I , et on a

$$D^n(f+g) = D^n f + D^n g \tag{2}$$

De même, pour tout scalaire a , fa admet une dérivée n-ème dans I , et on a

$$D^n(fa) = D^n f \cdot a \tag{3}$$

Si maintenant f prend ses valeurs dans E et g dans F , et si $(x, y) \to [x.y]$ est une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans G , la fonction $x \to [f(x).g(x)]$ admet dans I une dérivée n-ème donnée par la formule (dite formule de Leibniz)

(4) $D^n[f\cdot g] = [f^{(n)}\cdot g] + \binom{n}{1}[f^{(n-1)}\cdot g'] + \ldots + \binom{n}{p}[f^{(n-p)}\cdot g^{(p)}] + \ldots + [f\cdot g^{(n)}]$

Ces trois formules se démontrent aisément par récurrence sur n (en tenant compte de la relation $\binom{n}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n-1}{p-1}$ pour la formule de Leibniz).

Enfin, on vérifie aussitôt la formule suivante, où les hypothèses sont les mêmes que dans (4)

(5) $[f^{(n)}\cdot g] + (-1)^{n-1}[f\cdot g^{(n)}] = D\left([f^{(n-1)}\cdot g] - [f^{(n-2)}\cdot g'] + [f^{(n-3)}\cdot g''] + \ldots + (-1)^{n-1}[f\cdot g^{(n-1)}]\right)$

Lorsque $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$ sont des fonctions <u>réglées</u> (§ 2), cette formule s'écrit sous la forme équivalente

(6) $\int_a^x [f^{(n)}(t)\cdot g(t)]\,dt = \left([f^{(n-1)}(t)\cdot g(t)] - [f^{(n-2)}(t)\cdot g'(t)] + \ldots + (-1)^{n-1}[f(t)\cdot g^{(n-1)}(t)]\right)\Big|_a^x + (-1)^n \int_a^x [f(t)\cdot g^{(n)}(t)]\,dt$

et s'appelle alors <u>formule d'intégration par parties d'ordre</u> n .

<u>2. Formule de Taylor</u>. Soit f une fonction vectorielle définie dans un intervalle ouvert I ; l'existence de la dérivée de f au point $a \in I$ signifie que l'on a

(7) $$\lim_{x\to a,\, x\neq a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = 0$$

autrement dit, que f est "approximativement égale" à une fonction <u>linéaire</u> au voisinage de a (cf. chap. III). Nous allons montrer que l'existence de la <u>dérivée d'ordre n</u> de f au point a entraîne de la même manière que f est "approximativement égale" à un <u>polynome de degré n</u> au voisinage de a . De façon précise :

<u>Théorème 1.</u> <u>Si la fonction</u> f <u>admet une dérivée n-ème au point a , on a</u>

(8) $$\lim_{x\to a,\, x\neq a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)\frac{(x-a)}{1!} - f''(a)\frac{(x-a)}{2!} - \ldots - f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}}{(x-a)^n} = 0$$

Le théorème est vrai pour n=1 ; supposons-le démontré pour les fonctions admettant une dérivée (n-1)-ème au point a . On peut l'appliquer à la dérivée f' de f ; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $h > 0$ tel que, pour $|y-a| \leqslant h$, on ait

$$\left\| f'(x) - f'(a) - f''(a)\frac{(x-a)}{1!} - f'''(a)\frac{(x-a)}{2!} - \ldots - f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \right\| \leqslant \varepsilon\, h^{n-1}$$

Appliquons le th. des accroissements finis (§ 1, th. 1) dans l'intervalle d'extrémités a et x , en supposant $|x-a| \leqslant h$; il vient

$$\left\| f(x) - f(a) - f'(a)\frac{(x-a)}{1!} - f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} - \ldots - f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} \right\| \leqslant \varepsilon\, h^n$$

ce qui démontre le théorème.

On peut donc écrire

$$(9) \quad f(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + u(x)\left(\frac{(x-a)^n}{n!}\right)$$

où $u(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers a ; cette formule est dite <u>formule de Taylor d'ordre</u> n , relative au point a et le second membre est appelé le <u>développement de Taylor d'ordre</u> n de la fonction au point a . Le dernier terme $r_n(x) = u(x)\frac{(x-a)^n}{n!}$ est appelé le <u>reste</u> de la formule de Taylor d'ordre n .

Lorsqu'on suppose que f admet une dérivée (n+1)-ème dans l'intervalle I , et que cette dérivée est une fonction <u>réglée</u> dans I , on peut exprimer $r_n(x)$ à l'aide de $f^{(n+1)}$. Appliquons en effet la formule d'intégration par parties d'ordre n au produit $f^{(n+1)}g$, où $g(t) = \frac{(t-x)^n}{n!}$; il vient

$$(10) \quad f(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(t-x)^n}{n!}\,dt$$

autrement dit,

$$(11) \qquad r_n(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(t-x)^n}{n!}\,dt$$

Cette expression du reste permet souvent d'en donner des majorations simples ; par exemple, si $\left\| f^{(n+1)}(x) \right\| \leqslant M$ dans I , on a d'après la formule de la moyenne (§ 2, formule (13))

$$(12) \qquad \left\| r_n(x) \right\| \leqslant M\frac{|x-a|^{n-1}}{(n+1)!}$$

De manière plus précise, si f est une fonction scalaire admettant une dérivée (n+1)-ème réglée dans I , et si $m \leqslant f^{(n+1)}(x) \leqslant M$ dans I ,

on a, pour le reste de la formule de Taylor d'ordre n , les inégalités (pour $x > a$)

$$(13) \qquad m\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant r_n(x) \leqslant M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

(§ 2, formule (16)) ; il n'y a égalité que lorsque $f^{(n+1)}$ est constante dans l'intervalle $[a,x]$.

La définition de la dérivée d'ordre n et les formules précédentes se généralisent de façon immédiate aux fonctions d'une variable complexe ; nous n'insisterons pas davantage ici sur cette question, qui sera reprise en détail dans le Livre consacré aux fonctions analytiques.

Remarques. 1) Si f admet une dérivée $(n+1)$-ème au point a , et si

$$(14) \qquad f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + r_n(x)$$

est son développement de Taylor d'ordre n au point a , le développement de Taylor d'ordre $n+1$ au point a d'une primitive quelconque g de f est

$$g(x) = g(a) + a_0(x-a) + a_1\frac{(x-a)^2}{2} + a_2\frac{(x-a)^3}{3} + \ldots + a_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + \int_a^x r_n(t)\,dt$$

On dit qu'il s'obtient en "intégrant terme à terme" le développement (14).

2) Dans les mêmes hypothèses, les coefficients a_i de (14) sont déterminés par récurrence par les relations

$$a_0 = f(a)$$

$$a_1 = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

$$a_2 = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - a_1(x-a)}{(x-a)^2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - a_1(x-a) - \ldots - a_{n-1}(x-a)^{n-1}}{(x-a)^{n-1}}$$

Dans le cas où a=0, on conclut en particulier de là que le développement de Taylor d'ordre pn de $f(x^p)$ (p entier >0) n'est autre que

$$f(x^p) = a_0 + a_1 x^p + a_2 x^{2p} + \ldots + a_n x^{pn} + r_n(x^p)$$

$r_n(x^p)$ étant le reste de ce développement (cf. chap. III).

3. Primitives d'ordre supérieur. Une primitive g d'une fonction f réglée dans un intervalle compact I, étant continue dans I, y admet à son tour une primitive ; une quelconque des primitives de g est dite primitive seconde de f. Plus généralement, on appelle primitive d'ordre n de f une primitive d'une primitive d'ordre n-1 de f. On voit immédiatement, par récurrence sur n, que la différence de deux primitives d'ordre n de f est un polynome de degré au plus égal à n-1. Une primitive d'ordre n de f est entièrement déterminée si l'on se donne, au point a, sa valeur et celles de ses n-1 premières dérivées.

On désigne en particulier par la notation $\int_a^{(n)} f$ celle des primitives d'ordre n de la fonction f qui est nulle au point a, ainsi que ses n-1 premières dérivées. La formule de Taylor d'ordre n-1, appliquée à cette primitive, montre que

$$\int_a^{(n)} f = \int_a^x f(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, dt$$

et ramène donc la détermination des primitives d'ordre n au calcul d'une seule intégrale.

Exercices. 1) Soient E, F, G trois espaces normés, $(x, y) \to [x \cdot y]$ une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans G. Si f est une fonction vectorielle à valeurs dans E, g une fonction vectorielle à valeurs dans F, définies et n fois dérivables dans un intervalle ouvert I, on a identiquement

2) Avec les notations de l'exerc.1) on suppose que la relation $[a.y]=0$ pour tout $y \in F$ entraîne $a=0$. Dans ces conditions, si les a_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ sont $n+1$ fonctions vectorielles à valeurs dans E, définies dans un intervalle ouvert I, et telles que, pour <u>toute</u> fonction vectorielle f à valeurs dans F, n fois dérivable dans I, on ait

$$[a_0 \cdot f] + [a_1 \cdot f] + \dots + [a_n \cdot f^{(n)}] = 0$$

les fonctions a_i sont identiquement nulles.

3) Avec les notations de l'exerc.2, on suppose que chacune des fonctions a_k est k fois dérivable ; pour toute fonction f n fois dérivable dans I, on pose

$$[a_0 f] - [a_1 \cdot f]' + [a_2 \cdot f]'' + \dots + (-1)^n [a_n f]^{(n)} = [b_0 \cdot f] + [b_1 \cdot f'] + \dots + [b_n \cdot f^{(n)}]$$

ce qui définit les fonctions b_i sans ambiguité, d'après l'exerc.2 ; montrer qu'on a identiquement

$$[b_0 f] - [b_1 \cdot f]' + [b_2 \cdot f]'' + \dots + (-1)^n [b_n f]^{(n)} = [a_0 \cdot f] + [a_1 f'] + \dots + [a_n \cdot f^{(n)}]$$

4) Soit f une fonction vectorielle n fois dérivable dans un intervalle I. Montrer que, pour $1/x \in I$, on a identiquement

$$\frac{1}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n D^n \left[x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

(raisonner par récurrence sur n).

5) Soient u et v deux fonctions scalaires n fois dérivables dans un intervalle ouvert I. Si on pose $D^n\left(\frac{u}{v}\right) = (-1)^n \frac{f_n}{v^{n+1}}$ en tout point où $v \neq 0$, montrer que

$$f_n = \begin{vmatrix} u & v & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u' & v' & v & 0 & \cdots & 0 \\ u'' & v'' & 2v' & v & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u^{(n-1)} & v^{(n-1)} & \binom{n-1}{1}v^{(n-2)} & \binom{n-1}{2}v^{(n-3)} & \cdots & v \\ u^{(n)} & v^{(n)} & \binom{n}{1}v^{(n-1)} & \binom{n}{2}v^{(n-2)} & \cdots & \binom{n}{n-1}v' \end{vmatrix}$$

(posant $f=uv$, dériver n fois l'identité $u=fv$).

6) Etant données n fonctions scalaires f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, n-1 fois dérivables dans un intervalle I, on appelle <u>wronskien</u> de la séquence de fonctions $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, le déterminant

$$W(f_1, f_2, .., f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_1' & f_1'' & \cdots & f_1^{(n-1)} \\ f_2 & f_2' & f_2'' & \cdots & f_2^{(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & f_n' & f_n'' & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Démontrer les formules :

a) $W(f_1 \circ g, f_2 \circ g, \ldots, f_n \circ g) = g'^{\frac{n(n-1)}{2}} (W(f_1, f_2, \ldots, f_n) \circ g)$;

b) $W(gf_1, gf_2, \ldots, gf_n) = g^n W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$;

c) $\frac{1}{f_1^n} W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = W\left[\left(\frac{f_2}{f_1}\right)', \left(\frac{f_3}{f_1}\right)', \ldots, \left(\frac{f_n}{f_1}\right)' \right]$

d) $D\left[\frac{W(f_1, .., f_{n-2}, f_n)}{W(f_1, .., f_{n-2}, f_{n-1})}\right] = \frac{W(f_1, .., f_{n-2}).W(f_1, .., f_{n-2}, f_{n-1}, f_n)}{\left[W(f_1, .., f_{n-2}, f_{n-1})\right]^2}$

7) Soit f une fonction vectorielle définie dans un intervalle ouvert I. On pose $\Delta f(x; h_1) = f(x+h_1) - f(x)$, puis par récurrence

$\Delta^p f(x; h_1, h_2, .., h_p) = \Delta^{p-1} f(x+h_p; h_1, .., h_{p-1}) - \Delta^{p-1} f(x; h_1, .., h_{p-1})$

fonctions qui sont définies pour $x \in I$, et, pour chaque x, lorsque les h_i sont assez petits.

a) Si la fonction f est n fois dérivable <u>au point</u> x (et par suite n-1 fois dérivable en tout point d'un voisinage de x), on a

$$\lim_{(h_1, .., h_n) \to (0, 0, .., 0)} \frac{\Delta^n f(x; h_1, h_2, .., h_n)}{h_1 h_2 .. h_n} = f^{(n)}(x)$$

(raisonner par récurrence sur n , en considérant la fonction de t $\Delta^{n-1} f'(x+t;h_1,..,h_{n-1}) - f^{(n)}(x)h_1h_2..h_{n-1}t$).

b) Si f est n fois dérivable dans l'intervalle I , on a

$$\|\Delta^n f(x;h_1,..,h_n) - f^{(n)}(x_0)h_1h_2..h_n\| \leqslant |h_1h_2..h_n| \sup \|f^{(n)}(x+t_1h_1+..+t_nh_n) - f^{(n)}(x_0)\|$$

où les t_i prennent toutes les valeurs de l'intervalle $[0,1)$.

c) Si f est une fonction scalaire n fois dérivable dans I , on a

$$\Delta^n f(x;h_1,h_2,..,h_n) = h_1h_2..h_n f^{(n)}(x+\theta_1h_1+..+\theta_nh_n)$$

les nombres θ_i appartenant à $[0,1)$.

8) Soient f une fonction scalaire n fois différentiable au point x_0 , g une fonction vectorielle n fois différentiable au point $f(x_0)=y_0$. Soient

$$f(x_0+h) = a_0+a_1h+...+a_nh^n + r_n(h)$$
$$(y_0+k) = b_0 + b_1k +...+ b_nk^n + s_n(k)$$

les développements de Taylor d'ordre n de f et g aux points x_0 et y_0 respectivement. Montrer que la somme des n+1 termes du développement de Taylor d'ordre n de la fonction composée $g \circ f$ au point x_0 est le polynome formé des termes de degré $\leqslant n$ dans le polynome

$$b_0+ b_1(a_1h+..+a_nh^n)+ b_2(a_1h+..+a_nh^n)^2+..+ b_n(a_1h+..+a_nh^n)^n$$

En déduire les deux formules suivantes :

a) $$D^n(g(f(x))) = \sum \frac{n!}{m_1!m_2!..m_q!} g^{(p)}(f(x)).\left(\frac{f'(x)}{1!}\right)^{m_1}\left(\frac{f''(x)}{2!}\right)^{m_2}..\left(\frac{f^{(q)}(x)}{q!}\right)^{m_q}$$

la sommation étant étendue à tous les systèmes d'entiers strictement positifs $(m_1,..,m_q)$ tels que

$$m_1+2m_2+...+qm_q = n$$

et p désignant la somme $m_1+m_2+...+m_q$.

b) $$D^n(g(f(x))) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} g^{(p)}(f(x))\left[\sum_{q=1}^{p} \binom{p}{q}(-f(x))^{p-q} D^n((f(x))^q)\right]$$

9) Soit f une fonction scalaire définie et n-1 fois dérivable dans un intervalle ouvert I , $x_1, x_2, \ldots, x_p$ des points distincts de I , n_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ p entiers > 0 tels que $n_1+n_2+\ldots+n_p=n$. On suppose qu'au point x_i , f s'annule ainsi que ses n_i-1 premières dérivées pour $1 \leqslant i \leqslant p$; montrer qu'il existe un point ξ intérieur au plus petit intervalle contenant les x_i , et tel que $f^{(n-1)}(\xi)=0$.

10) Avec les mêmes notations que dans l'exerc.9, on suppose f n fois dérivable dans I , mais par ailleurs quelconque. Soit g le polynome de degré n tel qu'au point x_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$, g et ses n_i-1 premières dérivées soient respectivement égaux à f et ses n_i-1 premières dérivées. Montrer qu'on a

$$f(x)=g(x)+\frac{(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\ldots(x-x_p)^{n_p}}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

où ξ est intérieur au plus petit intervalle contenant les points $x_1, \ldots, x_p$ et x (Appliquer l'exerc.9 à la fonction de t

$$f(t)-g(t)-a\frac{(x-x_1)^{n_1}\ldots(x-x_p)^{n_p}}{n!}$$

où a est une constante convenable).

11) Avec les mêmes notations, soit f une fonction vectorielle n fois dérivable dans I , g le polynome (vectoriel) de degré n tel qu'au point x_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$, g et ses n_i-1 premières dérivées soient respectivement égaux à f et ses n_i-1 premières dérivées. Montrer que, si K est le plus petit ensemble convexe fermé contenant l'image par $f^{(n)}$ du plus petit intervalle contenant x et les x_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$, on peut écrire

$$f(x)=g(x)+a\frac{(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\ldots(x-x_p)^{n_p}}{n!}$$

où a appartient à K (méthode de l'exerc.8 du § 1).

12) Soit g une fonction scalaire <u>impaire</u>, définie dans un voisinage de 0 et 5 fois dérivable dans ce voisinage. Montrer qu'on a

$$g(x)=\frac{x}{3}(g'(x)+2g'(0))-\frac{x^5}{180}g^{(5)}(\xi) \qquad (\xi=\theta x\ ,\ 0<\theta<1)$$

(même méthode que dans l'exerc.10).

En déduire que, si f est une fonction scalaire définie dans $[a,b]$, et cinq fois dérivable dans cette intervalle, on a

$$f(b)-f(a)=\frac{b-a}{6}\left[f'(a)+f'(b)+4f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(5)}(\xi) \quad (a<\xi<b)$$

(formule de Simpson).

Généraliser aux fonctions vectorielles (cf. exerc.11).

13) Soit φ une fonction scalaire admettant une dérivée règlée et non nulle dans l'intervalle $[a,x]$; si f est une fonction scalaire ayant une dérivée $(n+1)^{e}$ règlée dans $[a,x]$ montrer que le reste $r_n(x)$ de la formule de Taylor d'ordre n au point a peut s'écrire

$$r_n(x)=(\varphi(x)-\varphi(a))\frac{(x-\xi)^n}{n!}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

14) Soient $f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_n$ 2n fonctions scalaires n-1 fois dérivables dans un intervalle I . Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une suite strictement croissante de n points de I . Montrer que le rapport des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} g_1(x_1) & g_1(x_2) & \dots & g_1(x_n) \\ g_2(x_1) & g_2(x_2) & \dots & g_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n(x_1) & g_n(x_2) & \dots & g_n(x_n) \end{vmatrix}$$

est égal au rapport des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} f_1(\xi_1) & f_1'(\xi_2) & \dots & f_1^{(n-1)}(\xi_n) \\ f_2(\xi_1) & f_2'(\xi_2) & \dots & f_2^{(n-1)}(\xi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(\xi_1) & f_n'(\xi_2) & \dots & f_n^{(n-1)}(\xi_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} g_1(\xi_1) & g_1'(\xi_2) & \dots & g_1^{(n-1)}(\xi_n) \\ g_2(\xi_1) & g_2'(\xi_2) & \dots & g_2^{(n-1)}(\xi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n(\xi_1) & g_n'(\xi_2) & \dots & g_n^{(n-1)}(\xi_n) \end{vmatrix}$$

où $\xi_1 = x_1$, $\xi_1 < \xi_2 < x_2$, $\xi_2 < \xi_3 < x_3, \ldots, \xi_{n-1} < \xi_n < x_n$.

Appliquer au cas où

$$g_1(x)=1 \ , \quad g_2(x)=x \ , \ldots, \ g_n(x)=x^{n-1} \ .$$

15) Soit f une fonction vectorielle définie dans l'intervalle fini $I = [-a,+a]$, et deux fois dérivable dans cet intervalle. Si on pose $m_0 = \sup_{x\in I} \|f(x)\|$, $m_2 = \sup_{x\in I} \|f''(x)\|$, montrer que, pour tout $x \in I$, on a

$$\|f'(x)\| \leqslant \frac{m_0}{a} + \frac{x^2+a^2}{2a} m_2$$

En déduire que, si f est définie dans $\mathbb{R}$ tout entier, et si $M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x)\|$, $M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f''(x)\|$ sont finis, il en est de même de $M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f'(x)\|$, et on a

$$M_1 \leqslant \sqrt{2}\sqrt{M_0 M_2}$$

En déduire que, si f est p fois dérivable dans $\mathbb{R}$, et si M_0 et $M_p = \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f^{(p)}(x)\|$ sont finis, $M_k = \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f^{(k)}(x)\|$ est fini pour $1 \leqslant k \leqslant p-1$, et on a

$$M_k \leqslant 2^{\frac{k(p-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{p}} M_p^{\frac{k}{p}}$$

(procèder par récurrence).

16) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f une fonction vectorielle définie et continue dans I ; on suppose qu'il existe n fonctions vectorielles a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ définies dans I et telles que la fonction de x

$$\frac{1}{h^n}\left(f(x+h) - f(x) - \sum_{p=1}^{n} \frac{h^p}{p!} a_p(x)\right)$$

tende uniformément vers 0 sur tout intervalle compact contenu dans I , lorsque h tend vers 0 .

a) On pose $g_p(x,h) = \Delta^p f(x;h,h,..,h)$ (exerc.7). Montrer que pour $1 \leqslant p \leqslant n$, $\frac{1}{h^p} g_p(x,h)$ tend uniformément vers $a_p(x)$ sur tout intervalle compact contenu dans I , lorsque h tend vers 0 , et que les a_p

sont des fonctions continues dans I (le démontrer successivement pour $p=n$, $p=n-1$, etc.)

b) En déduire que f possède dans I une dérivée n-ème continue, et qu'on a $f^{(p)}=a_p$ pour $1 \leqslant p \leqslant n$ (tenir compte de la relation $g_{p+1}(x,h)=g_p(x+h,h)-g_p(x,h)$).

§ 4. Dérivées et intégrales de fonctions dépendant d'un paramètre.

1. Dérivée d'une limite de fonctions. Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Dans l'espace normé complet $\mathcal{B}(I)$ des fonctions vectorielles bornées définies dans I , à valeurs dans un espace normé complet E , on a vu (§ 2, th.1) que le sous-espace $\mathcal{H}$ formé des fonctions bornées admettant une primitive, est fermé. Ce résultat peut s'exprimer autrement : il signifie que si un filtre sur $\mathcal{H}$ a une limite dans $\mathcal{B}(I)$, cette limite appartient à $\mathcal{H}$. Si on se rappelle que la convergence dans $\mathcal{B}(I)$ n'est autre, par définition, que la convergence uniforme sur I , et si on tient compte par ailleurs de la continuité de la fonction $\mathcal{J}(f)$ dans $\mathcal{H}$ (§ 2, prop.2), on obtient l'énoncé suivant :

Proposition 1. Soit $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de fonctions vectorielles à valeurs dans un espace normé complet E , définies et continues dans l'intervalle compact $I=[a,b]$, et admettant une dérivée à droite bornée dans $[a,b[$. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur l'ensemble d'indices A ; si les fonctions $(f_\alpha)'_d$ convergent uniformément dans $[a,b[$ vers une fonction g , suivant le filtre $\mathcal{F}$, et s'il existe un point $c \in I$ tel que $\lim_{\mathcal{F}} f_\alpha(c)$ existe, les fonctions f_α convergent uniformément dans I vers une fonction h , suivant le filtre $\mathcal{F}$, et on a $h'_d(x)=g(x)$ pour tout $x \in [a,b[$.

La démonstration résulte des remarques qui précèdent, appliquées aux fonctions $f_\alpha(x)-f_\alpha(c)$.

Remarque. Cette proposition s'étend aux fonctions d'une variable complexe définies et continues dans l'adhérence d'un domaine relativement compact $D \subset \mathbb{C}$, et admettant dans D une dérivée bornée (pourvu que deux points quelconques de D puissent être joints par une ligne brisée contenue dans D et de longueur bornée) ; les raisonnements de la prop.2 et du th.1 du § 2 s'étendent en effet dans ce cas sans modification.

2. Intégrale d'une limite de fonctions. Appliquée au cas particulier des primitives de fonctions règlées, la prop.1 se traduit de la manière suivante dans la notation propre aux intégrales :

Proposition 2. Soit A un ensemble filtré par un filtre $\mathfrak{F}$, $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de fonctions règlées définies dans $I = [a,b]$, à valeurs dans E. Si les fonctions f_α convergent uniformément dans I vers une fonction (règlée) f, suivant le filtre $\mathfrak{F}$, on a

$$\lim_{\mathfrak{F}} \int_a^b f_\alpha(t)dt = \int_a^b f(t)dt \tag{1}$$

Deux corollaires de cette proposition sont importants dans les applications :

Corollaire 1. Soit A une partie d'un espace topologique F, f une application de $A \times I$ dans un espace normé complet E, telle que, pour tout $\alpha \in A$, la fonction $x \to f(x,\alpha)$ soit règlée. Si les fonctions $f(x,\alpha)$ convergent uniformément dans I vers une fonction (règlée) $g(x)$ lorsque α tend vers un point $\alpha_0 \in \bar{A}$ en restant dans A, on a

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0, \alpha \in A} \int_a^b f(x,\alpha)dx = \int_a^b g(x)dx \tag{2}$$

En particulier, si A=F ont compact, et si f est une application continue de $A \times I$ dans E, f est uniformément continue, et par suite les fonctions $f(x,\alpha)$ convergent uniformément vers $f(x,\alpha_0)$ lorsque α tend vers un point quelconque $\alpha_0 \in A$; on en conclut que la fonction $h(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)dx$ est continue dans A ("continuité d'une intégrale par rapport au paramètre").

Voici un exemple d'application de cette dernière remarque ; la fonction x^a est continue dans le produit $I \times J$, où $I = [a,b]$ est un intervalle tel que $0 < a < b$, J un intervalle compact quelconque dans $\mathbf{R}$; on en conclut que $\int_a^b x^a dx$ est fonction continue de a dans $\mathbf{R}$; or, pour a rationnel et $\neq -1$, cette fonction est égale à $\frac{b^{a+1} - a^{a+1}}{a+1}$, et est par suite uniformément continue sur l'intersection de $\mathbf{Q}$ et de tout intervalle de $\mathbf{R}$ ne contenant pas -1 ; on a donc $\int_a^b x^a dx = \frac{b^{a+1} - a^{a+1}}{a+1}$ pour tout a réel $\neq -1$; cela signifie encore que, pour tout a réel, la dérivée de x^a est ax^{a-1} (cf. chap. II, § 2).

Corollaire 2. Soit (f_n) une suite de fonctions règlées définies dans $I = [a,b]$, à valeurs dans E. Si la suite (f_n) converge uniformément dans I vers une fonction (règlée) f, on a

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt \qquad (3)$$

En particulier, si une série dont le terme général u_n est une fonction règlée à valeurs dans E, converge uniformément vers f, la série de terme général $\int_a^b u_n(t)dt$ est convergente et a pour somme $\int_a^b f(t)dt$ ("intégration terme à terme d'une série uniformément convergente").

Remarque. Le corollaire 2 est inexact lorsqu'on suppose seulement que la suite (f_n) converge simplement vers f dans I : la limite du premier membre de (3) peut alors ne pas exister, ou être distincte du second membre. On a un exemple du second de ces deux cas en prenant $f_n(0) = 0$, $f_n(x) = n$ pour $0 < x < 1/n$, $f_n(x) = 0$ pour $1/n \leqslant x \leqslant 1$; la suite (f_n) converge simplement en tout point de $[0,1]$ vers la fonction 0, mais on a $\int_0^1 f_n(t)dt = 1$ quel que soit n. On aurait un exemple où le premier membre de (3) ne tend vers aucune limite en remplaçant la suite (f_n) précédente par la suite $((-1)^n f_n)$, qui converge encore simplement vers 0.

Toutefois, la convergence uniforme de la suite (f_n) n'est nullement nécessaire pour la validité de la formule (3) ; nous généraliserons plus tard la formule (3), en même temps que la notion d'intégrale (cf. Livre VIII), et obtiendrons des conditions beaucoup moins restrictives.

3. Intégrale impropre d'une limite de fonctions. Soit I un intervalle quelconque dans $\mathbf{R}$, $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de fonctions vectorielles réglées dans I, à valeurs dans un espace normé complet E ; soit $\mathcal{F}$ un filtre sur l'ensemble d'indices A ; supposons que :

1° pour tout $\alpha \in A$, l'intégrale impropre $\int_I f_\alpha(t)dt$ existe ;

2° suivant le filtre $\mathcal{F}$, la famille (f_α) converge uniformément sur tout intervalle compact contenu dans I, vers une fonction g (nécessairement réglée dans I).

Dans ces conditions, la formule analogue à (1)

(4) $$\lim_{\mathcal{F}} \int_I f_\alpha(t)dt = \int_I g(t)dt$$

n'est pas nécessairement valable.

C'est ce que montre l'exemple de la suite de fonctions (f_n) définie ci-dessus, considérée dans l'intervalle ouvert $]0,1[$; dans cet intervalle, elle converge uniformément vers 0 sur tout intervalle compact.

Lorsque I est un intervalle infini, on peut même donner des exemples où la formule (4) n'a pas lieu, bien que la famille (f_α) converge uniformément dans I vers g (et non seulement uniformément sur tout intervalle compact contenu dans I) ; un tel exemple est fourni par la suite (g_n) définie dans l'intervalle $]0,+\infty[$ par les conditions $g_n(x)=1/n$ pour $n^2 \leqslant x \leqslant (n+1)^2$, $g_n(x)=0$ pour toute autre valeur de x ; la suite (g_n) converge uniformément vers 0, mais $\int_0^{+\infty} g_n(t)dt=(2n+1)/n$ tend vers 2 lorsque n croît indéfiniment.

Lorsque les deux membres de la relation (4) existent, le premier s'écrit $\lim_{\mathcal{F}}(\lim_{J \in \mathcal{K}(I)} \int_J f_\alpha(t)dt)$; le second s'écrit de même $\lim_{J \in \mathcal{K}(I)}(\lim_{\mathcal{F}} \int_J f_\alpha(t)dt)$, compte tenu de la prop.2 et de l'hypothèse sur les f_α ; la relation (4) est donc valable lorsqu'on peut intervertir les limites de la fonction $(J,\alpha) \to \int_J f_\alpha(t)dt$ suivant le filtre $\mathcal{F}$ et le filtre des sections Φ de l'ensemble filtrant $\mathcal{K}(I)$. Or, nous connaissons une condition suffisante pour que cette interversion soit licite, savoir l'existence de la limite de l'application $(J,\alpha) \to \int_J f_\alpha(t)dt$ suivant le filtre produit $\Phi \times \mathcal{F}$ (Top. gén., chap.I, §8, prop.8) ; en outre, comme $\lim_{\mathcal{F}} \int_J f_\alpha(t)dt$ existe par hypothèse pour tout intervalle compact $J \subset I$, et que E est complet, cette condition peut se transformer en une autre équivalente (Top.gén., chap.VIII, §1), que nous allons formuler en posant tout d'abord la définition suivante :

Définition 1. On dit que l'intégrale impropre $\int_I f_\alpha(t)dt$ est uniformément convergente pour $\alpha \in A$ (ou dans A) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle compact $J_0 \subset I$ tel que, pour tout intervalle compact $K \subset I$ ne rencontrant pas J_0, et tout $\alpha \in A$, on ait

(5) $$\left\| \int_K f_\alpha(t)dt \right\| \leqslant \varepsilon .$$

D'après la prop.8 du §2, si $\int_I f_\alpha(t)dt$ est uniformément convergente dans A, elle est convergente pour tout $\alpha \in A$.

Avec cette définition :

Proposition 3. Soit (f_α) une famille de fonctions réglées dans l'intervalle I, telles que : 1° suivant le filtre $\mathcal{F}$, la famille (f_α) converge uniformément vers une fonction g sur tout intervalle compact contenu dans I ; 2° l'intégrale impropre $\int_I f_\alpha(t)dt$ soit uniformément convergente dans A. Dans ces conditions, l'intégrale impropre $\int_I g(t)dt$ est convergente, et on a la relation (4).

L'hypothèse que $\int_I f_\alpha(t)dt$ est uniformément convergente pour $\alpha \in A$ est en réalité trop restrictive. Il suffit de supposer que, d'une part l'intégrale impropre $\int_I f_\alpha(t)dt$ est convergente pour tout $\alpha \in A$, et d'autre part que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle compact $J_0 \subset I$ et un ensemble $M \in \mathfrak{F}$ (dépendant de ε) tels que, pour tout intervalle compact $K \subset I$ ne rencontrant pas J_0, et tout $\alpha \in M$, on ait (5). Rappelons rapidement le raisonnement de "convergence uniforme locale" qui conduit à ce résultat (Top.gén., chap. VIII, § 1 prop.5). La relation (5) ayant lieu pour tout $\alpha \in M$, on a, pour tout intervalle K ne rencontrant pas J_0, en utilisant la prop.2, et passant à la limite suivant $\mathfrak{F}$, $\|\int_K g(t)dt\| \leqslant \varepsilon$ et cela entraîne la convergence de l'intégrale impropre $\int_I g(t)dt$ (§ 2, prop.8) ; en outre, pour tout intervalle compact H contenu dans I et contenant J_0, on a $\|\int_I g(t)dt - \int_H g(t)dt\| \leqslant 2\varepsilon$ et $\|\int_I f_\alpha(t)dt - \int_H f_\alpha(t)dt\| \leqslant 2\varepsilon$ pour tout $\alpha \in M$.

Or, pour un intervalle compact donné $H \supset J_0$, il existe un ensemble $N \in \mathfrak{F}$, contenu dans M et tel que, pour tout $\alpha \in N$ $\|\int_H g(t)dt - \int_H f_\alpha(t)dt\| \leqslant \varepsilon$, d'après la prop.2 ; on a par suite aussi, pour tout $\alpha \in N$, $\|\int_I g(t)dt - \int_I f_\alpha(t)dt\| \leqslant 5\varepsilon$, ce qui établit (4).

Comme pour la prop.2, deux corollaires de la prop.3 sont importants dans les applications :

Corollaire 1. Soit A une partie d'un espace topologique F, f une application de $A \times I$ dans un espace normé complet E, telle que, pour tout $\alpha \in A$, la fonction $x \to f(x,\alpha)$ soit réglée dans l'intervalle ouvert I. Si d'une part, les fonctions $f(x,\alpha)$ convergent uniformément, sur tout intervalle compact contenu dans I, vers une fonction $g(x)$ lorsque α

tend vers $a_0 \in \bar{A}$ en restant dans A ; si d'autre part, l'intégrale impropre $\int_I f(x,a)dx$ est uniformément convergente dans A , l'intégrale impropre $\int_I g(t)dt$ est convergente et on a

$$\lim_{a \to a_0, a \in A} \int_I f(x,a)dx = \int_I g(x)dx$$

En particulier, si A=F est compact, et si f est une application continue de $A \times I$ dans F , les $f(x,a)$ convergent uniformément vers $f(x,a_0)$ sur tout ensemble compact $\subset I$; par suite, si l'intégrale impropre $\int_I f(x,a)dx$ est uniformément convergente dans A , elle est fonction continue de a dans A ("continuité d'une intégrale impropre par rapport au paramètre").

Corollaire 2. Soit (f_n) une suite de fonctions règlées dans l'intervalle ouvert I , convergeant uniformément sur tout intervalle compact contenu dans I , vers une fonction g ; si l'intégrale impropre $\int_I f_n(t)dt$ est uniformément convergente, l'intégrale impropre $\int_I g(t)dt$ est convergente et on a

$$\lim_{n \to \infty} \int_I f_n(t)dt = \int_I g(t)dt \tag{7}$$

4. Intégrales normalement convergentes. Soit $(f_a)_{a \in A}$ une famille de fonctions règlées dans un intervalle ouvert I , à valeurs dans un espace normé complet E . Supposons qu'il existe une fonction scalaire règlée g telle que, pour tout $x \in I$ et tout $a \in A$ on ait $\|f_a(x)\| \leqslant g(x)$, et que l'intégrale impropre $\int_I g(t)dt$ soit convergente. Dans ces conditions, l'intégrale impropre $\int_I f_a(t)dt$ est uniformément convergente dans A , car pour tout intervalle compact K contenu dans I , on a

$$\left\| \int_K f_a(t)dt \right\| \leqslant \int_K g(t)dt$$

et la convergence de l'intégrale $\int_I g(t)dt$ entraîne que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle compact $J \subset I$ tel que, pour tout intervalle compact $K \subset I$ ne rencontrant pas J , on ait $\int_K g(t)dt \leqslant \varepsilon$.

Lorsqu'il existe une fonction scalaire g ayant les propriétés précédentes, on dit que l'intégrale $\int_I f_\alpha(t)dt$ est <u>normalement convergente</u> dans A.

2 Une intégrale impropre peut être uniformément convergente dans A sans être normalement convergente. C'est ce que montre par exemple la suite (f_n) de fonctions scalaires définies par les conditions $f_n(x)=1/x$ pour $n \leqslant x \leqslant n+1$, $f_n(x)=0$ pour les autres valeurs de x dans $]1,+\infty[$. Il est immédiat que l'intégrale $\int_1^\infty f_n(t)dt$ est uniformément convergente, mais elle n'est pas normalement convergente, car la relation $g(x) \geqslant f_n(x)$ pour tout x et tout n entraîne $g(x) \geqslant \frac{1}{x}$ et par suite l'intégrale impropre de g dans $]1,+\infty[$ n'est pas convergente.

En particulier, considérons une <u>série</u> dont le terme général u_n est une fonction règlée dans l'intervalle ouvert I, et supposons que la série de terme général $\|u_n(x)\|$ converge uniformément sur tout intervalle compact contenu dans I, vers une fonction scalaire g telle que l'intégrale impropre $\int_I g(t)dt$ soit convergente. Alors, si on pose $f_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$, l'intégrale impropre $\int_I f_n(t)dt$ est uniformément convergente, car pour tout intervalle compact K contenu dans I, on a $\left\| \int_K f_n(t)dt \right\| \leqslant \sum_{p=1}^{n} \int_K \|u_p(t)\| dt \leqslant \int_K g(t)dt$; par suite, si f est la somme de la série (u_n), f est une fonction règlée dans I telle que l'intégrale impropre $\int_I f(t)dt$ soit convergente, et on a

$$\int_I f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I u_n(t)dt$$

<u>5. Dérivée d'une intégrale dépendant d'un paramètre</u>. Soit A un voisinage compact d'un point a_0 dans le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$, $I=[a,b]$ un intervalle <u>compact</u> dans $\mathbb{R}$, f une application <u>continue</u> de $I \times A$ dans un espace normé complet E. On a vu ($n^o 2$) que dans ces conditions,

$g(a) = \int_a^b f(t,a)dt$ est une fonction continue dans A . Cherchons des conditions entraînent l'existence de la dérivée de g au point a_0. On a

$$\frac{g(a)-g(a_0)}{a-a_0} = \int_a^b \frac{f(t,a)-f(t,a_0)}{a-a_0}\,dt$$

donc (cor.1 de la prop.2), si les fonctions $\frac{f(x,a)-f(x,a_0)}{a-a_0}$ convergent uniformément dans I vers une fonction $h(x)$, lorsque a tend vers a_0 , g admet une dérivée égale à $\int_a^b h(t)dt$; d'ailleurs, pour chaque $x \in I$, $\frac{f(x,a)-f(x,a_0)}{a-a_0}$ tend vers $h(x)$, donc $h(x)$ est la dérivée au point a_0 de l'application $a \longrightarrow f(x,a)$; nous désignerons cette dérivée (dite dérivée partielle de f par rapport à a) par la notation $f'_a(x,a_0)$; les hypothèses faites entraînent donc que

$$g'(a_0) = \int_a^b f'_a(t,a_0)dt \qquad (8)$$

La proposition suivante donne une condition suffisante plus simple pour la validité de la formule (8) :

Proposition 4. Si la dérivée partielle $f'_a(x,a)$ existe pour tout $x \in I$, et tout a appartenant à un voisinage ouvert V de a_0 , et si l'application $(x,a) \longrightarrow f'_a(x,a)$ est continue dans $I \times V$, la fonction g admet au point a_0 une dérivée donnée par la formule (8).

En effet, si W est un voisinage compact de a_0 contenu dans V , l'application $(x,a) \longrightarrow f'_a(x,a)$ est uniformément continue dans l'ensemble compact $I \times W$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que $|a-a_0| \leqslant r$ entraîne $\|f'_a(x,a)-f'_a(x,a_0)\| \leqslant \varepsilon$ quel que soit $x \in I$. D'après la prop.10 du §1, on a donc pour $|a-a_0| \leqslant r$ et pour tout $x \in I$

$$\left\| \frac{f(x,a)-f(x,a_0)}{a-a_0} - f'_a(x,a_0) \right\| \leqslant \varepsilon$$

ce qui prouve la convergence uniforme de $\frac{f(x,a)-f(x,a_0)}{a-a_0}$ vers $f'_a(x,a_0)$ lorsque a tend vers a_0 .

Les autres notations gardant la même signification, supposons maintenant que I soit un intervalle quelconque dans $\mathbf{R}$, f une application continue de $I \times A$ dans E. Dans ces conditions, si l'intégrale impropre $g(\alpha) = \int_I f(t,\alpha)dt$ existe pour tout $\alpha \in A$ et est fonction continue de α, la fonction g n'a pas nécessairement au point α_0 une dérivée égale à $\int_I f'_\alpha(t,\alpha_0)dt$, même si la dérivée partielle $f'_\alpha(x,\alpha)$ vérifie toutes les conditions de l'énoncé de la prop.4, et si l'intégrale impropre $\int_I f'_\alpha(t,\alpha_0)dt$ existe (cf.exerc. 3).

Une condition suffisante pour que la formule (8) se généralise dans ce cas est donnée par la proposition suivante :

Proposition 5. Soit I un intervalle dans $\mathbf{R}$, f une fonction continue dans $I \times A$. On suppose que :

1° la dérivée particlle $f'_\alpha(x,\alpha)$ existe pour tout $x \in I$ et tout α appartenant à un voisinage ouvert V de α_0, et l'application $(x,\alpha) \longrightarrow f'_\alpha(x,\alpha)$ est continue dans $I \times V$;

2° l'intégrale impropre $\int_I f'_\alpha(t,\alpha)dt$ est uniformément convergente dans V ;

3° l'intégrale impropre $\int_I f(t,\alpha_0)dt$ est convergente.

Dans ces conditions, l'intégrale impropre $g(\alpha) = \int_I f(t,\alpha)dt$ est uniformément convergente dans V, et la fonction g admet en tout point de V une dérivée donnée par la formule

$$g'(\alpha) = \int_I f'_\alpha(t,\alpha)dt \tag{9}$$

En effet, pour tout intervalle compact J contenu dans I, posons $u_J(\alpha) = \int_J f(t,\alpha)dt$; les hypothèses, et la prop.4, entraînent que, pour tout $\alpha \in V$, $u'_J(\alpha) = \int_J f'_\alpha(t,\alpha)dt$. La convergence uniforme dans V de l'intégrale $\int_I f'_\alpha(t,\alpha)dt$ signifie donc que u'_J converge uniformément dans V vers cette intégrale, suivant le filtre des sections Φ de l'ordonné filtrant $\mathcal{K}(I)$; comme d'autre part, $u_J(\alpha_0)$ a une

a une limite suivant Φ, on peut appliquer aux fonctions ω_j la prop.1 (le rôle de l'ensemble d'indices étant ici joué par $\mathfrak{K}(I)$, celui du filtre $\mathfrak{F}$ par le filtre des sections Φ de cet ensemble filtrant), d'où la proposition.

Remarque. A l'étude de l'intégrale $\int_a^b f(t,a)dt$ d'une fonction dépendant d'un paramètre, dans un intervalle fixe, on peut rattacher l'étude du cas plus général où les limites d'intégration dépendent aussi du paramètre a. Considérons en effet l'intégrale $\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(t,a)dt$, et supposons que $a(\alpha)$ et $b(\alpha)$ restent finis pour toutes les valeurs considérées du paramètre α. On a, par le changement de variable $t = a(a)(1-u)+b(a)u$

$$\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(t,a)dt = \int_0^1 f(a(a)(1-u)+b(a)u,a)(b(a)-a(a))du$$

et on est bien ramené au cas précédent (cf. exerc. 4,5 et 6).

6. Interversion des intégrations. Soient $I = (a,b)$ et $A = (c,d)$ deux intervalles compacts dans $\mathbf{R}$; soit f une fonction continue dans $I \times A$, à valeurs dans un espace normé complet E ; d'après le corollaire 1 de la prop.2, $\int_a^b f(x,a)dx$ est une fonction continue de a dans A ; son intégrale $\int_c^d (\int_a^b f(t,a)dt)da$ se note aussi pour simplifier $\int_c^d da \int_a^b f(t,a)dt$.

Proposition 6. Si f est continue dans $I \times A$, on a

$$\int_c^d da \int_a^b f(t,a)dt = \int_a^b dt \int_c^d f(t,a)da \tag{10}$$

(formule dite formule d'interversion des intégrations).

Nous allons montrer que, pour tout $\xi \in A$, on a

$$\int_c^\xi da \int_a^b f(t,a)dt = \int_a^b dt \int_c^\xi f(t,a)da \tag{11}$$

Comme les deux membres de cette relation sont des fonctions de ξ égales pour $\xi = c$, il suffira de prouver que leurs dérivées sont égales pour tout ξ tel que $c < \xi < d$. Si on pose $g(a) = \int_a^b f(t,a)dt$, $h(t,\xi) = \int_c^\xi f(t,a)da$ la relation (11) s'écrit

$$\int_c^{\xi} g(\alpha)d\alpha = \int_a^{\xi} h(t,\xi)dt$$

Or, la dérivée du premier membre est $g(\xi)$, celle du second est $\int_a^{\xi} h'_{\xi}(t,\xi)dt$ d'après la prop.4 puisque $h'_{\xi}(t,\xi) = f(t,\xi)$ est continue ; les deux expressions ainsi obtenues sont bien identiques.

Supposons maintenant que $A = [c,d]$ soit un intervalle <u>compact</u> dans $\mathbf{R}$ et I un intervalle <u>quelconque</u> dans $\mathbf{R}$; soit f une fonction continue dans $I \times A$, à valeurs dans E, telle que l'intégrale impropre $\int_I f(t,\alpha)dt$ soit convergente ; même si la fonction $g(\alpha) = \int_I f(t,\alpha)dt$ est continue dans A, on n'a pas nécessairement la formule analogue à (10)

$$\int_c^d d\alpha \int_I f(t,\alpha)dt = \int_I dt \int_c^d f(t,\alpha)d\alpha \qquad (12)$$

car l'intégrale impropre du second membre peut ne pas exister ou être distincte du premier membre (cf. exerc.8).

<u>Proposition 7</u>. <u>Si la fonction</u> f <u>est continue dans</u> $I \times A$ <u>et si l'intégrale impropre</u> $\int_I f(t,\alpha)dt$ <u>est uniformément convergente dans</u> A, <u>l'intégrale impropre</u> $\int_I dt \int_c^d f(t,\alpha)d\alpha$ <u>est convergente et on a la relation</u> (12).

Pour tout intervalle compact J contenu dans I, posons $u_J(\alpha) = \int_J f(t,\alpha)dt$. L'hypothèse entraîne que, suivant le filtre des sections Φ de l'ordonné filtrant $\mathfrak{K}(I)$, la fonction continue u_J converge uniformément dans A vers $\int_I f(t,\alpha)dt$; donc (prop.2), $\int_c^d d\alpha \int_J f(t,\alpha)dt$ a pour limite $\int_c^d d\alpha \int_I f(t,\alpha)dt$ suivant Φ ; mais d'après la prop.6, on a

$$\int_c^d d\alpha \int_J f(t,\alpha)dt = \int_J dt \int_c^d f(t,\alpha)d\alpha \qquad (13)$$

Le résultat précédent signifie donc que l'intégrale impropre $\int_I dt \int_c^d f(t,\alpha)d\alpha$ est convergente, et en passant à la limite dans la relation (13), on obtient la relation (12).

Exercices. 1) Soit (f_α) un ensemble de fonctions réelles définies dans un intervalle ouvert I , admettant chacune une primitive dans I , et formant un ensemble filtrant pour la relation $\leqslant$. Soit f l'enveloppe supérieure de cette famille. Si f admet une primitive dans I , et si g_α (resp. g) est la primitive de f_α (resp. f) qui s'annule en un point $x_0 \in I$, montrer que g est l'enveloppe supérieure de la famille (g_α). (Si u est l'enveloppe supérieure de la famille (g_α), montrer d'abord que $u(x+h)-u(x) \leqslant g(x+h)-g(x)$, puis que pour tout α , $u(x+h)-u(x) \geqslant g_\alpha(x+h)-g_\alpha(x)$ et conclure de cette dernière inégalité que $\lim_{h\to 0, h>0}\inf \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \geqslant f(x)$; en déduire la proposition).

2) Soit (f_α) un ensemble de fonctions réelles règlées dans un intervalle compact I , filtrant pour la relation $\geqslant$, et ayant 0 comme enveloppe inférieure ; montrer que le filtre des sections de cet ensemble filtrant converge uniformément vers 0 (raisonner comme pour le cas des fonctions continues (th. de Dini, cf. Top. gén., chap. VIII, § 4)).

3) Montrer que la fonction scalaire

$$g(\alpha) = \int_{-1}^{+1} f(x,\alpha)\,dx$$

où $f(x,\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$, est continue pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, mais n'admet pas de dérivée pour $\alpha=1$; montrer que $f'_\alpha(x,\alpha)$ existe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $x \in]-1,+1[= I$, et est continue dans $I \in \mathbb{R}$, que l'intégrale $\int_{-1}^{+1} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$ existe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, mais vérifier que cette intégrale n'est pas uniformément convergente dans un voisinage du point $\alpha=1$.

4) Soit I un intervalle compact dans $\mathbb{R}$, A un voisinage d'un point a_0 dans le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$, f une application continue de $I \times A$ dans un espace normé complet E, telle que $f'_a(x,a)$ existe et soit continue dans $I \times A$. Soient $a(a)$, $b(a)$ deux fonctions définies dans A, à valeurs dans I. Montrer que, si $a'(a_0)$ et $b'(a_0)$ existent, la fonction $g(a) = \int_{a(a)}^{b(a)} f(t,a)dt$ admet au point a_0 une dérivée égale à $\int_{a(a_0)}^{b(a_0)} f'_a(t,a_0)dt + b'(a_0) f(b(a_0),a_0) - a'(a_0) f(a(a_0),a_0)$

5) Les hypothèses sur I, A et f étant les mêmes que dans l'exerc. 4, on suppose que $a(a)$ et $b(a)$ sont continues dans un voisinage de a_0, mais n'ont pas nécessairement de dérivée en ce point. Montrer que si on a identiquement $f(a(a),a)=0$ et $f(b(a),a)=0$, la fonction $g(a) = \int_{a(a)}^{b(a)} f(t,a)dt$ admet encore au point a_0 une dérivée égale à

$$\int_{a(a_0)}^{b(a_0)} f'_a(t,a_0)dt$$

(si M est la borne supérieure de $f'_a(t,a)$ dans $I \times A$, remarquer à l'aide du th. de Bolzano que, pour tout point x de l'intervalle d'extrémités $b(a_0)$ et $b(a)$, on a $\|f(x,a)\| \leqslant M|a-a_0|$).

6) Soit f une fonction vectorielle continue dans l'intervalle compact $I=[0,a]$. Montrer que si, au point $a_0 \in I$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\frac{f(x)-f(a_0)}{|x-a_0|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$ reste borné lorsque x tend vers a_0, la fonction $g(a) = \int_0^a \frac{f(x)dx}{\sqrt{a-x}}$ a au point a_0 une dérivée égale à $\frac{1}{\sqrt{a_0}} f(a_0) - \frac{1}{2} \int_0^{a_0} \frac{f(x)-f(a_0)}{(a_0-x)^{3/2}} dx$

Lorsque f est la fonction scalaire $x^{1/4}$, montrer que la fonction g correspondante a une dérivée infinie au point $a=0$.

7) Soient $I=[a,b]$, $A=[c,d]$ deux intervalles compacts dans $\mathbb{R}$; soit f une fonction définie dans $I \times A$, à valeurs dans un espace normé complet E, et telle que l'ensemble D des points de discontinuité de f dans $I \times A$ soit rencontré en un nombre <u>fini</u> de points par toute droite $x=x_0$ et toute droite $a=a_0$ ($x_0 \in I$, $a_0 \in A$).

a) Montrer que la fonction $g(\alpha) = \int_a^b f(t,\alpha)dt$ est continue dans A (étant donnés $\alpha_0 \in A$ et $\varepsilon > 0$), montrer qu'il existe un voisinage V de α_0 et un nombre fini d'intervalles J_k contenus dans I et dont la somme des longueurs est $< \varepsilon$, tels que, si J désigne le complémentaire de $\bigcup_k J_k$ par rapport à I, g soit continue dans $V \times J$).

b) Montrer que la formule d'interversion des intégrations (formule (10)) est encore valable (raisonner comme dans a)).

8) Soit f une fonction scalaire définie, continue et dérivable dans l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$, et telle que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f'(at)dt$ est définie et continue dans tout intervalle compact $[0,a]$; montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} dt \int_0^a f'(at)da$ peut ne pas exister ou être distincte de $\int_0^a da \int_0^{+\infty} f'(at)dt$.

9) Soient I et J deux intervalles ouverts dans $\mathbb{R}$, f une fonction vectorielle définie et continue dans $I \times J$, à valeurs dans un espace normé complet E. On suppose que :

1° l'intégrale impropre $\int_I f(x,y)dx$ est uniformément convergente lorsque y décrit un intervalle compact quelconque contenu dans J ;

2° l'intégrale impropre $\int_J f(x,y)dy$ est uniformément convergente lorsque x décrit un intervalle compact quelconque contenu dans I ;

3° si on pose, pour tout intervalle compact H contenu dans I, $u_H(y) = \int_H f(x,y)dx$, l'intégrale impropre $\int_J u_H(y)dy$ est uniformément convergente pour $H \in \mathcal{K}(I)$.

Dans ces conditions, les intégrales impropres $\int_I dx \int_J f(x,y)dy$ et $\int_J dy \int_I f(x,y)dx$ existent et sont égales.

10) Déduire de l'exerc.9 que les intégrales impropres $\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-yx^2} \sin y\, dy$ et $\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} e^{-yx^2} \sin y\, dx$ existent et sont égales.

(Ancien CHAPITRE II (Etat 3))

FONCTIONS CONVEXES. FONCTIONS ELEMENTAIRES.

§1. Fonctions convexes d'une variable réelle.

Il nous sera commode, dans ce paragraphe, de faire usage d'un langage géométrique pour l'énoncé et la démonstration de propositions concernant des fonctions numériques finies d'une variable réelle.

Etant donnés deux points distincts A,B du plan $\mathbf{R}^2$, on désignera par AB le segment (fermé) qui les joint ; la pente de AB, désignée par p(AB) est par définition la pente de la droite contenant ce segment (Top. gén., chap.VI, §); si A=(x,y), B=(x',y'), et si $x \neq x'$, on a $p(AB) = \frac{y'-y}{x'-x}$.

Etant donnée une fonction numérique finie f définie dans un intervalle $I \subset \mathbf{R}$, et sa courbe représentative C dans $\mathbf{R}^2$, pour tout $x \in I$, on désignera par M_x le point (x,f(x)) de C. On dira qu'un point A=(a,b) tel que $a \in I$ est au-dessus (resp. strictement au-dessus, au-dessous, strictement au-dessous) de la courbe C si on a $b \geqslant f(a)$ (resp. $b > f(a)$, $b \leqslant f(a)$, $b < f(a)$).

Soient A=(x,y), B(x',y') deux points du plan tels que $x < x'$; si M est au-dessus (resp. au-dessous) du segment AB (considéré comme courbe représentative d'une fonction linéaire), et si son abscisse est distincte de x et x', on a $p(AM) \geqslant p(AB) \geqslant p(MB)$ (resp. $p(AM) \leqslant p(AB) \leqslant p(MB)$). Si M est strictement au-dessus (resp. strictement au-dessous) de AB, il faut remplacer dans ces inégalités les signes $\geqslant$ (resp. $\leqslant$) par $>$ (resp. $<$).

1. Définition des fonctions convexes. **Définition 1.** *On dit qu'une fonction numérique finie f, définie dans un intervalle $I \subset \mathbf{R}$, est convexe dans I si, quels que soient les points distincts x,x' de I, tout point du segment $M_x M_{x'}$ est au-dessus de la courbe représentative de f.*

Cette condition est équivalente à la suivante : quels que soient x,x' dans I et t tel que $0 \leqslant t \leqslant 1$, on a

(1) $$f(tx+(1-t)x') \leqslant tf(x)+(1-t)f(x')$$

Par récurrence sur n , on déduit de cette relation que, si x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont n points de I , t_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ n nombres réels tels que $t_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, on a

(2) $$f\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$$

En effet, supposons la propriété démontrée pour n-1 points de I , et posons $x = \Big(\sum_{i=1}^{n-1} t_i x_i\Big)\Big/\Big(\sum_{i=1}^{n-1} t_i\Big)$ (en supposant que les t_i d'indice $\leqslant n-1$ ne sont pas tous nuls, sans quoi la relation (2) est évidente) ; on a $x \in I$, car $\mathrm{Min}(x_i) \leqslant x \leqslant \mathrm{Max}(x_i)$; si on pose $t = \sum_{i=1}^{n-1} t_i$, on a $t > 0$, et $t_n = 1-t$, donc, d'après (1) $f(tx+(1-t)x_n) \leqslant tf(x)+(1-t)f(x_n)$; d'autre part, la propriété étant vraie pour n-1 points, on a $f(x) \leqslant \dfrac{\sum_{i=1}^{n-1} t_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n-1} t_i}$, c'est-à-dire $tf(x) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} t_i f(x_i)$; combinant cette inégalité avec la précédente, on en tire (2).

Soit f une fonction convexe dans I , x,x' deux points de I tels que $x < x'$; si $z \in I$ est <u>extérieur</u> à $[x,x']$, M_z est <u>au-dessus</u> de la droite D joignant M_x et $M_{x'}$; en effet, supposons par exemple $z > x'$; si M_z était strictement au-dessous de D , $M_{x'}$ serait strictement au-dessus du segment $M_x M_z$, ce qui contredit l'hypothèse.

On en conclut que, si z est un point tel que $x \leqslant z < x'$, et que M_z soit <u>sur</u> le segment $M_x M_{x'}$, pour <u>tout</u> z' tel que $x < z' < x'$, $M_{z'}$ est sur $M_x M_{x'}$, car $M_{z'}$ doit être à la fois au-dessus et au-dessous de ce segment, d'après ce qui précède ; en d'autres termes, f est alors égale à une fonction <u>linéaire</u> dans $[x,x']$.

<u>Définition 2</u>. <u>On dit qu'une fonction numérique finie f , définie dans un intervalle</u> $I \subset \mathbf{R}$, <u>est strictement convexe dans</u> I , <u>si elle est convexe dans</u> I , <u>et n'est égale à une fonction linéaire dans aucun intervalle ouvert contenu dans</u> I .

Avec cette définition, le résultat précédent s'exprime de la manière suivante : quels que soient les points x, x', x'' de I tels que $x<x'<x''$, le point $M_{x'}$ est <u>strictement au-dessous</u> du segment $M_x M_{x''}$; il revient au même de dire que, quels que soient x, x' distincts dans I et t tel que $0<t<1$, on doit avoir

$$f(tx+(1-t)x') < tf(x)+(1-t)f(x') \tag{3}$$

On en déduit comme ci-dessus que, si f est strictement convexe, si les x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont n points distincts de I, et les t_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ n nombres réels tels que $0 \leqslant t_i \leqslant 1$, $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) < \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) \tag{4}$$

<u>Exemples</u>. La fonction x^2 est strictement convexe dans $\mathbb{R}$, la fonction $1/x$ strictement convexe dans $]0,+\infty[$; on constate en effet que, dans les deux cas, l'inégalité (3) est équivalente à $t(1-t)(x^2+x'^2-2xx') > 0$.

2. <u>Familles de fonctions convexes</u>. Soient f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ n fonctions convexes dans un intervalle I ; si les c_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont n nombres <u>positifs</u> quelconques, $f = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$ est convexe dans I, comme il résulte de (1). Si une des fonctions f_i est strictement convexe, et si le nombre c_i correspondant est >0, f est strictement convexe.

Soit (f_α) une famille de fonctions convexes dans un intervalle I ; si l'enveloppe supérieure $g(x)=\sup_\alpha f_\alpha(x)$ de cette famille est <u>finie</u> en tout point de I, c'est une fonction convexe dans I ; en effet, des relations $f_\alpha(tx+(1-t)x') \leqslant tf_\alpha(x)+(1-t)f_\alpha(x')$, on déduit (<u>Top. gén.</u>, chap. IV, §5, formules (5) et (17))

$$\sup_\alpha f_\alpha(tx+(1-t)x') \leqslant t.\sup_x f_\alpha(x) + (1-t).\sup_\alpha f_\alpha(x')$$

<u>Remarque</u>. La même inégalité montre que, si $g(x)$ et $g(x')$ sont finis, $g(z)$ est fini pour tout z tel que $x \leqslant z \leqslant x'$, et g est donc convexe dans l'intervalle $[x,x']$.

Avec les mêmes notations, si les fonctions f_α convergent simplement dans I vers une fonction f finie, suivant un filtre sur l'ensemble des indices, f est convexe dans I (principe de prolongement des inégalités).

3. Continuité d'une fonction convexe. Proposition 1. Une fonction convexe dans un intervalle I est continue en tout point intérieur à I .

Soit x un point intérieur à I , x', x'' deux points de I tels que $x' < x < x''$. Pour tout z tel que $x < z < x''$, M_z est au-dessous de $M_x M_{x''}$ et au-dessus de la droite joignant $M_{x'}$ et M_x ; par suite $p(M_{x'}M_x) \leqslant p(M_x M_z) \leqslant p(M_x M_{x''})$, autrement dit, en posant $\alpha = p(M_{x'}M_x)$ $\beta = p(M_x M_{x''})$,

$$\alpha(z-x) \leqslant f(z)-f(x) \leqslant \beta(z-x)$$

ce qui entraîne la continuité à droite de f au point x ; on établit de même sa continuité à gauche.

Remarques. 1) Une fonction convexe dans un intervalle I n'est pas nécessairement continue aux extrémités de I . Par exemple, dans l'intervalle $(-1,+1)$, la fonction égale à x^2 pour $-1 < x < 1$, à 2 pour $x=1$ et $x=-1$, est convexe.

2) Si une fonction f est continue dans un intervalle I , et convexe dans l'intérieur de I , elle est convexe dans I ; en effet, dans l'inégalité (1), il suffit de laisser t et x fixes, et de faire tendre x' vers une extrémité de I (où f est définie) pour démontrer la proposition.

Proposition 2. Pour qu'une fonction continue f soit convexe (resp. strictement convexe) dans un intervalle I , il suffit que pour tout couple de points x,x' de I $(x < x')$, il existe un point z tel que $x < z < x'$ et que M_z soit au-dessous (resp. strictement au-dessous) du segment $M_x M_{x'}$.

Raisonnons par l'absurde en supposant f non convexe dans I ; il existerait deux points a,b de I (a<b) tels que le segment $M_a M_b$ ne soit pas au-dessus de la courbe représentative C de f ; nous allons montrer que cela est incompatible avec l'hypothèse, en prouvant qu'il existerait deux points x,x' tels que $a \leqslant x < x' \leqslant b$ et que $M_x M_{x'}$ soit tout entier au-dessous de C (fig.1). En effet, soit $g(x)=f(x)-f(a)-p(M_a M_b)(x-a)$; par hypothèse, g est continue et l'intersection de $]a,b[$ et de $g^{-1}(]0,+\infty[)$ n'est pas vide ; cette intersection est donc un ensemble ouvert non vide dans $\mathbb{R}$; soit $]x,x'[$ une de ses composantes connexes (Top.gén., chap.IV, § 2, prop.2) ; on a $g(x) \leqslant 0$, mais g(x) est limite de $g(z) \geqslant 0$, z tendant vers x en restant $> x$, donc $g(x)=0$, et de même $g(x')=0$; comme $g(z)>0$ pour $x<z<x'$, M_z serait au-dessus de $M_x M_{x'}$ pour $x<z<x'$, et nous obtenons la contradiction annoncée.

Corollaire. Pour qu'une fonction continue f soit convexe (resp. strictement convexe) dans I, il suffit que, pour tout couple de points distincts x,x' de I, on ait $f(\frac{x+x'}{2}) \leqslant \frac{1}{2}(f(x)+f(x'))$ (resp. $f(\frac{x+x'}{2}) < \frac{1}{2}(f(x)+f(x'))$).

4. Dérivabilité d'une fonction convexe. Proposition 3. Si une fonction f est convexe dans un intervalle I, elle admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche finies en tout point x intérieur à I, et on a $f'_s(x) \leqslant f'_d(x)$.

Si $x<z<z'$, on a $p(M_x M_z) \leqslant p(M_x M_{z'})$, autrement dit, $p(M_x M_z)$ est fonction croissante de z pour $z>x$; d'autre part, si $x'<x$, on a $p(M_{x'} M_x) \leqslant p(M_x M_z)$, ce qui prouve que la fonction $p(M_x M_z)$ est minorée pour $x<z$; elle a donc au point x une limite à droite finie $f'_d(x)$, et on a $p(M_{x'} M_x) \leqslant f'_d(x)$ pour tout $x'<x$. On démontre de même l'existence de $f'_s(x)$, et l'inégalité $f'_s(x) \leqslant p(M_x M_{x''})$ pour tout $x''>x$.

en faisant tendre x' ou x'' vers x dans ces inégalités, il vient $f'_s(x) \leqslant f'_d(x)$.

On a montré en outre que, si x' et x'' sont deux points intérieurs à I tels que $x' < x''$, on a

$$f'_d(x') \leqslant p(M_{x'}M_{x''}) \leqslant f'_s(x'') \tag{5}$$

Si f est <u>strictement convexe</u> dans I , on a même

$$f'_d(x') < p(M_{x'}M_{x''}) < f'_s(x'') \tag{6}$$

En effet, si $x' < x < x''$, M_x est strictement au-dessous de $M_{x'}M_{x''}$ donc, d'après (5)

$$f'_d(x') \leqslant p(M_{x'}M_x) < p(M_{x'}M_{x''}) < p(M_xM_{x''}) \leqslant f'_s(x'') .$$

<u>Proposition 4. Pour qu'une fonction f soit convexe</u> (resp. <u>strictement convexe</u>) <u>dans un intervalle ouvert</u> I , <u>il faut et il suffit qu'elle soit continue dans</u> I , <u>admette en tout point de</u> I <u>une dérivée à droite finie, et que cette dérivée soit croissante</u> (resp. <u>strictement croissante</u>) <u>dans</u> I.

La condition est nécessaire, car il résulte de la prop.3 et des inégalités (5) et (6) que, si f est convexe (resp. strictement convexe) et $x' < x''$, on a $f'_d(x') \leqslant f'_d(x'')$ (resp. $f'_d(x') < f'_d(x'')$). Réciproquement, supposons f'_d croissante dans I ; si f n'était pas convexe, il existerait trois points a,b,c de I $(a<c<b)$ tels que M_c soit strictement au-dessous de M_aM_b , ce qui entraîne $p(M_aM_c) > p(M_cM_b)$; mais, d'après le théorème des accroissements finis (chap.I, §1,th.1), on a $p(M_aM_c) \leqslant \sup_{a<x<c} f'_d(x)$, et $p(M_cM_b) \geqslant \inf_{c<x<b} f'_d(x)$. On aurait donc $\sup_{a<x<c} f'_d(x) > \inf_{c<x<b} f'_d(x)$ contrairement à l'hypothèse que f'_d est croissante dans I .

Si maintenant f'_d est supposée strictement croissante dans I , f est convexe et ne peut être égale à une fonction linéaire dans aucun intervalle ouvert contenu dans I , car dans cet intervalle, f'_d serait constante

Comme f'_d a en tout point une limite à droite et une limite à gauche, elle est continue à droite dans I (chap.I, § 1, prop.8), et en tout point x, sa limite à gauche est $f'_s(x)$ (chap.I, § 1, prop.9). En outre, on a $f'_d(x)=f'_s(x)$ sauf aux points d'un ensemble dénombrable (chap.I, § 2, cor.1 du th.2); autrement dit, sauf aux points d'un ensemble dénombrable, f est dérivable.

On peut encore exprimer la prop.4 en disant que les fonctions convexes dans un intervalle sont identiques aux primitives des fonctions croissantes dans cet intervalle.

Corollaire. Soit f une fonction continue et admettant une dérivée seconde dans un intervalle ouvert I ; pour que f soit convexe dans I, il faut et il suffit (une) $f''(x)\geqslant 0$ pour tout $x\in I$; pour que f soit strictement convexe dans I, il faut et il suffit que $f''(x)\geqslant 0$ pour tout $x\in I$, pour que f soit strictement convexe dans I, il faut et il suffit que $f''(x)\geqslant 0$ pour tout $x\in I$, et que dans tout intervalle ouvert contenu dans I, il existe un point x tel que $f''(x)>0$.

C'est une conséquence de la proposition précédente et de la prop.4 du chap.I, § 1.

Exemple. Dans l'intervalle $]0,+\infty[$, la fonction x^r a une dérivée seconde égale à $r(r-1)x^{r-2}$; donc, si $r>1$ ou $r<0$, x^r est strictement convexe ; au contraire, si $0<r<1$, $-x^r$ est strictement convexe.

5. Droites d'appui. Soit f une fonction convexe dans un intervalle ouvert I; en un point $x\in I$, soit a un nombre quelconque tel que $f'_s(x)\leqslant a\leqslant f'_d(x)$. Pour tout $x'<x$, on a $p(M_{x'},M_x)\leqslant a$, et pour tout $x''>x$, $p(M_xM_{x''})\geqslant a$; par suite, la courbe représentative C de f est tout entière au-dessus de la droite passant par M_x et de pente a ; inversement, si une droite passant par M_x et de pente β a cette propriété, on a

$p(M_{x'}M_x) \leqslant \beta \leqslant p(M_x M_{x''})$ pour $x' < x < x''$ d'où, en faisant tendre x' et x'' vers x, $f'_s(x) \leqslant \beta \leqslant f'_d(x)$. Les droites passant par M_x et dont la pente est comprise entre $f'_s(x)$ et $f'_d(x)$ sont appelées les <u>droites d'appui</u> de l'ensemble des points situés au-dessus de la courbe C. On notera que, si f est strictement convexe, toute droite d'appui n'a qu'un seul point commun avec C. Lorsque f est dérivable au point x, la seule droite d'appui passant par M_x est la <u>tangente</u> à C en ce point.

<u>6. Variation des fonctions convexes</u>. Considérons d'abord une fonction f strictement convexe dans un intervalle ouvert I. Comme f'_d est alors strictement croissante, on voit, en considérant les points de I où $f'_d(x) > 0$ et ceux où $f'_d(x) \leqslant 0$ ~~et ceux où $f'_d(x) < 0$~~, que trois cas seulement sont possibles :

1° f est strictement croissante dans I ;

2° f est strictement décroissante dans I ;

3° il existe $a \in I$ tel que, pour $x \leqslant a$, f soit strictement décroissante, et pour $x \geqslant a$, strictement croissante.

Lorsque f est convexe, mais non strictement convexe, f peut être constante dans un intervalle contenu dans I ; soit $J =]a,b[$ le plus grand intervalle ouvert où f est constante (c'est-à-dire l'intérieur de l'intervalle où $f'_d(x) = 0$) ; f est alors strictement décroissante dans l'intervalle formé des points de I qui sont $< a$ (s'il en existe), strictement croissante dans l'intervalle formé des points de I qui sont $> b$ (s'il en existe).

Dans tous les cas, on voit que f possède une <u>limite à droite</u> à l'origine de I, une <u>limite à gauche</u> à l'extrémité de I ; ces limites peuvent être finies ou infinies (cf. exerc. 14, 15 et 16).

Exercices. 1) Soit f une fonction numérique finie définie dans un intervalle I. Pour que f soit convexe dans I , il faut et il suffit que, pour tout couple de nombres a,b de I ($a<b$) et pour tout nombre réel t , la fonction $f(x)+tx$ atteigne sa borne supérieure dans $[a,b]$ en a ou b .

2) Soit f une fonction numérique finie, semi-continue supérieurement dans un intervalle I . Pour que f soit convexe dans I , il faut et il suffit que, pour tout x intérieur à I , on ait $\limsup_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} \geqslant 0$ (On montrera, à l'aide de l'exerc.1, que pour tout $\varepsilon>0$, la fonction $f(x)+\varepsilon x^2$ est convexe dans I).

3) Soit f une fonction numérique finie, semi-continue supérieurement dans un intervalle I . Si, pour tout x intérieur à I , il existe une droite D_x passant par M_x et telle que, dans un voisinage de x , la courbe représentative de f soit au-dessus de D_x , f est convexe dans I (exerc.2).

4) Soit f une fonction numérique finie définie dans un intervalle I et telle que $f(\frac{x+y}{2}) \leqslant \frac{1}{2}(f(x)+f(y))$ quels que soient x et y dans I . Montrer que, si f est bornée supérieurement dans un intervalle $[a,b]$ contenu dans I , f est convexe dans I (on montrera d'abord que f est bornée supérieurement dans tout intervalle compact contenu dans I , puis que f est continue en tout point intérieur à I).

5) Soit f une fonction numérique finie et continue dans un intervalle ouvert I . Pour que f soit convexe dans I , il faut et il suffit que, pour tout x intérieur à I , on ait $\limsup_{h\to 0} (\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt - f(x)) \geqslant 0$ (même méthode que dans l'exerc.2).

6) a) Soit H un ensemble de fonctions convexes dans un intervalle I , dont les valeurs en quatre points a,b,c,d de I ($a<b<c<d$) sont bornées. Montrer que, dans l'intervalle $[b,c]$, l'ensemble H est équicontinu.

b) Soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur l'ensemble des fonctions convexes dans I, qui converge simplement vers une fonction g finie dans I ; montrer que $\mathfrak{F}$ converge uniformément vers g sur tout ensemble compact contenu dans I. (Utiliser a)).

7) Soit f une fonction convexe dans un intervalle I, h un nombre >0, et I_h l'intersection de I et des intervalles I+h et I-h ; si I_h n'est pas vide, les fonctions

$$f_h(x) = \frac{f(x+h)+f(x-h)}{2} \qquad g_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$$

sont convexes dans I_h. Montrer que $g_h(x) \leqslant f_h(x)$, et que, si $h<k$, $f_h(x) \leqslant f_k(x)$ et $g_h(x) \leqslant g_k(x)$.

8) Toute fonction convexe dans un intervalle compact I est limite d'une suite décroissante uniformément convergente de fonctions convexes dans I admettant une dérivée seconde en tout point intérieur à I (utiliser l'exerc.7, ou approcher la fonction d'abord par une fonction convexe dont la courbe représentative est une ligne brisée).

8 bis) Soit f une fonction convexe et strictement monotone dans un intervalle I ; soit g la fonction réciproque de f (définie dans l'intervalle f(I)). Montrer que, si f est décroissante dans I, g est convexe dans f(I) ; si f est croissante dans I, -g est convexe dans f(I).

9) Soit f une fonction convexe dans un intervalle I, g une fonction convexe et croissante dans un intervalle contenant f(I) ; montrer que $g \circ f$ est convexe dans I.

10) Soient f et g deux fonctions positives convexes dans un intervalle $I=[a,b]$, telles qu'il existe un nombre $c \in I$ de sorte que dans chacun des intervalles $[a,c]$ et $[c,b]$, f et g varient dans le même sens. Montrer que le produit fg est convexe dans I.

11) Soit I un intervalle contenu dans $]0,+\infty[$; si $f(1/x)$ est convexe dans I , il en est de même de $xf(x)$, et réciproquement.

12) Soit f une fonction positive convexe dans $]0,+\infty[$, a et b deux nombres réels quelconques. Montrer que la fonction $x^a f(x^{-b})$ est convexe dans les cas suivants :

1° $a=(b+1)/2$, $|b| \geqslant 1$;

2° $x^a f(x^{-b})$ croissante, $a(b-a) \geqslant 0$, $a \geqslant (b+1)/2$;

3° $x^a f(x^{-b})$ décroissante, $a(b-a) \geqslant 0$, $a \leqslant (b+1)/2$.

(Utiliser l'exerc.8).

* Dans les mêmes hypothèses, montrer que $e^{\frac{x}{2}} f(e^{-x})$ est convexe (même méthode). *

13) Montrer qu'une fonction non constante et convexe dans R ne peut être bornée.

14) Soit f une fonction convexe dans l'intervalle ouvert $]a,+\infty[$; s'il existe un point c tel que, dans $]c,+\infty[$, f soit strictement croissante, on a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

15) Soit f une fonction convexe dans un intervalle $]a,+\infty[$; montrer que $f(x)/x$ a une limite (finie ou infinie) lorsque x tend vers $+\infty$, et que cette limite est aussi celle de f'_s et f'_d ; cette limite est >0 si $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$

16) Soit f une fonction convexe dans un intervalle $]a,+\infty[$ $(a>0)$; montrer que, dans cet intervalle, la fonction $f(x)-xf'_d(x)$ (ordonnée à l'origine de la demi-tangente à droite) est décroissante (strictement décroissante si f est strictement convexe). En déduire que, dans $]a,+\infty[$, ou bien $f(x)/x$ est croissante, ou bien $\frac{f(x)}{x}$ est décroissante, ou bien il existe $c>a$ tel que, dans $]a,c[$, $f(x)/x$ soit décroissante, et dans $]c,+\infty[$, croissante.

Montrer que si $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-xf'_d(x))$ est finie, il en est de même de $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x$, que la courbe représentative de f a une asymptote pour x tendant vers $+\infty$, et est située au-dessus de cette asymptote (strictement au-dessus si f est strictement convexe).

17) Soit f une fonction convexe dans un intervalle ouvert I. Montrer que, lorsque y et z tendent vers un point $x\in I$, en restant $>x$ et distincts, $(f(y)-f(z))/(y-z)$ tend vers $f'_d(x)$.

18) Soit f une fonction continue dans un intervalle ouvert I et admettant en tout point de I une dérivée à droite finie. Si, pour tout $x\in I$ et tout $y>x$, le point I_y est au-dessus de la demi-tangente à droite au point M_x, la fonction f est convexe dans I (montrer que f'_d est croissante dans I, en prouvant que $f'_d(y)\geqslant p(M_xM_y)$ pour $x\leqslant y$).

19) Soit f une fonction bornée dans un intervalle ouvert I, et telle que, pour un point donné $x_0\in I$, et pour tout couple de nombres non nuls h_1,h_2, tels que les points x_0+h_1, x_0+h_2, $x_0+h_1+h_2$ appartiennent à I, on ait

$$\frac{f(x_0+h_1+h_2)-f(x_0+h_1)-f(x_0+h_2)+f(x_0)}{h_1h_2}\geqslant 0$$

a) Montrer que, pour $h>0$, la fonction $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ est minorée; si a est un minorant de cette fonction, en déduire que, pour $x\geqslant x_0$, la fonction $f(x)-a(x-x_0)$ est croissante.

b) Montrer que f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche au point x_0 (remarquer que, pour $h>0$ et n entier tels que $x_0+nh\in I$, on a

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leqslant\frac{f(x_0+nh)-f(x_0)}{nh}$$

En déduire que, si $b=\lim\inf_{h\to0,h>0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, pour tout $\varepsilon>0$, on a $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leqslant b+\varepsilon$ si $h>0$ est assez petit, en utilisant le fait que f est continue dans I sauf en une infinité dénombrable de points, d'après a)).

20) a) Soient (a_i) , (b_i) deux suites de n nombres $\geqslant 0$, k un nombre tel que $0<k<1$; démontrer l'inégalité

(1) $$\sum_{i=1}^{n} a_i^k b_i^{1-k} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^k \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{1-k}$$

l'égalité n'ayant lieu que si on a, soit $\sum_{i=1}^{n} a_i=0$, soit $\sum_{i=1}^{n} b_i=0$, soit $\frac{a_i}{\sum a_i} = \frac{b_i}{\sum b_i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ (appliquer l'inégalité (3) à la fonction strictement convexe $-x^t$, et changer convenablement les notations).

b) Soient $(a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$, p suites de n nombres $\geqslant 0$, k_j p nombres >0 tels que $\sum_{j=1}^{p} k_j=1$. Démontrer l'inégalité

(2) $$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^{k_1} a_{i2}^{k_2} \ldots a_{ip}^{k_p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\right)^{k_1} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i2}\right)^{k_2} \ldots \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ip}\right)^{k_p}$$

(dite <u>inégalité de Hölder</u>) dont l'inégalité (2) est un cas particulier (déduire (2) de (1) par récurrence sur p).

L'égalité n'a lieu dans (2) que si $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=0$ pour un indice j au moins, ou si

$$\frac{a_{i1}}{\sum_i a_{i1}} = \frac{a_{i2}}{\sum_i a_{i2}} = \ldots = \frac{a_{ip}}{\sum_i a_{ip}}$$

pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

21) a) Soient (a_i) , (b_i) deux suites de n nombres $\geqslant 0$, k un nombre >1 ; démontrer l'inégalité

(3) $$\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^k + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^k\right)^{1/k} \leqslant \sum_{i=1}^{n} (a_i^k + b_i^k)^{1/k}$$

l'égalité n'ayant lieu que si $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \ldots = \frac{b_n}{a_n}$

(appliquer l'inégalité (3) du texte à la fonction $(1+x^k)^{1/k}$ strictement convexe pour $x>0$).

b) Soient $(a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$ p suites de n nombres $\geqslant 0$, k un nombre >1 ; démontrer l'inégalité

(4) $$\left(\sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)^k\right)^{1/k} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}^k\right)^{1/k}$$

(dite <u>inégalité de Minkowski</u>), dont (3) est un cas particulier (déduire (4) de (3) par récurrence sur p). L'égalité n'a lieu dans (4) que si, pour tout indice $j>1$, les n rapports a_{ij}/a_{i1} $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont égaux.

§ 2. Dérivées des fonctions exponentielles et circulaires.

1. Convexité de la fonction a^x. Etant donné un nombre $a>0$, on a défini en Topologie générale (Top.gén., chap. VI, §) la fonction a^x ; on sait que $x \to a^x$ est une représentation continue du groupe topologique (additif) $\mathbf{R}$ des nombres réels, dans le groupe topologique (multiplicatif) $\mathbf{R}_+^*$ des nombres réels >0 ; c'est un isomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$ si $a \neq 1$. On a donc, quels que soient $a>0$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$,

$$a^{x+y}=a^x a^y \quad , \quad a^{-x}=1/a^x \quad , \quad a^0=1 \quad , \quad a^1=a$$

Si $a>1$, a^x est strictement croissante, et on a

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

Enfin, la fonction 1^x est constante et égale à 1.

Rappelons encore que, pour $a \neq 1$, l'isomorphisme de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$, réciproque de $x \to a^x$, est appelé *logarithme de base a*, et que sa valeur pour $x>0$ se note $\log_a x$; on a

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y \quad , \quad \log_a(1/x)=-\log_a x \quad , \quad \log_a 1=0 \quad , \quad \log_a a=1$$

ainsi que la formule du *changement de base*

$$\log_a x = \log_a b . \log_b x \tag{1}$$

Proposition 1. *Si a est >0 et $\neq 1$, la fonction a^x est strictement convexe dans* .

Comme a^x est continue, il suffit (§ 1, cor. de la prop. 2) de démontrer l'inégalité

$$a^{\frac{x+y}{2}} < \frac{1}{2}(a^x+a^y)$$

pour $x \neq y$; si on pose $\alpha=a^x$, $\beta=a^y$, cette inégalité s'écrit

$$\sqrt{\alpha\beta} < \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \tag{2}$$

et est équivalente à $(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2 > 0$, d'où la proposition.

Corollaire. *Quels que soient les nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et les nombres positifs $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, on a*

(3) $$a^{p_1x_1+p_2x_2+\dots+p_nx_n} \leqslant p_1a^{x_1}+p_2a^{x_2}+\dots+p_na^{x_n}$$

Cette inégalité n'est autre en effet que l'inégalité (2) du § 1, appliquée à la fonction convexe a^x ; en outre, les deux membres de (3) ne sont égaux que si tous les x_i correspondant aux indices tels que $p_i \neq 0$, sont égaux (§ 1, n° 1). Si on pose $z_i = a^{x_i}$, l'inégalité (3) s'écrit aussi

(4) $$z_1^{p_1}z_2^{p_2}\dots z_n^{p_n} \leqslant p_1z_1+p_2z_2+\dots+p_nz_n$$

les z_i étant cette fois des nombres >0 , et l'égalité n'ayant lieu que si les z_i correspondant aux indices tels que $p_i \neq 0$, sont tous égaux. On dit que le premier membre (resp. le second membre) de (4) est la <u>moyenne géométrique pondérée</u> (resp. la <u>moyenne arithmétique pondérée</u>) des n nombres z_i , relative aux poids $p_1, \dots, p_n$. Pour $p_i = 1/n$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ on dit que les moyennes arithmétique et géométrique correspondantes sont les moyennes arithmétique et géométrique <u>ordinaires</u>. L'inégalité (4) s'écrit alors

(5) $$(z_1z_2\dots z_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}(z_1+z_2+\dots+z_n)$$

On notera que l'inégalité (2) n'est autre que le cas particulier de (5) correspondant à $n=2$.

2. <u>Dérivée de</u> a^x ; <u>nombre e</u>. <u>Théorème 1</u>. <u>Si</u> a <u>est un nombre</u> >0 <u>et</u> $\neq 1$, <u>la fonction</u> a^x <u>admet en tout point une dérivée égale à</u> $\log_e a.a^x$, <u>où e est un nombre</u> >1 (indépendant de x et de a).

Comme a^x est convexe (prop. 1), elle admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche (1, prop. 3). Montrons d'abord que pour $x=0$, ces deux dérivées sont égales ; on a en effet, pour $h>0$, $\frac{a^{-h}-1}{-h} = a^{-h} \cdot \frac{a^h-1}{h}$ et comme a^{-h} tend vers 1 lorsque h tend vers 0 , $\frac{a^{-h}-1}{-h}$ et $\frac{a^h-1}{h}$ ont même limite. La fonction a^x a donc au point $x=0$ une dérivée, que nous noterons provisoirement par $\varphi(a)$. On en déduit tout d'abord que a^x a en tout point une dérivée

égale à $\varphi(a).a^x$, en vertu de la relation $\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x . \frac{a^h-1}{h}$; comme a^x est strictement monotone pour $a \neq 1$, $\varphi(a)$ est fini, et $\neq 0$.

Soit maintenant b un autre nombre quelconque >0 et $\neq 1$; la fonction b^x a une dérivée égale à $\varphi(b).b^x$, d'après ce qui précède ; d'autre part, on a $b^x = a^{x.\log_a b}$, donc, d'après le théorème de dérivation des fonctions composées (chap.I, § 1, prop.4), la dérivée de b^x est égale à $\log_a b.\varphi(a)a^{x.\log_a b}$; par comparaison des deux expressions trouvées on en tire

$$\varphi(b) = \varphi(a).\log_a b \tag{6}$$

Nous allons en déduire qu'il existe un nombre b et un seul tel que $\varphi(b)=1$; en effet, cette relation équivaut, d'après (6), à $b=a^{1/\varphi(a)}$. Nous désignerons par e le nombre ainsi déterminé ; d'après la formule (1), on a

$$\varphi(a)=1/\log_a e = \log_e a$$

D'autre part, on a par définition

$$D(e^x) = e^x \tag{7}$$

ce qui montre que e^x est strictement croissante, et par suite $e > 1$.

Nous verrons au § 3 comment on peut calculer des valeurs aussi approchées qu'on veut du nombre e .

Définition 1. Les logarithmes de base e sont appelés logarithmes népériens.

On convient d'ordinaire d'omettre la base dans la notation d'un logarithme népérien.

~~On convient d'ordinaire d'omettre l~~ Sauf mention expresse du contraire, la notation $\log x$ $(x>0)$ désignera donc toujours le logarithme népérien de x . Avec cette convention, le th.1 s'exprime par la relation

$$D(a^x) = \log a.\, a^x \tag{8}$$

valable pour a quelconque >0 (puisque pour $a=1$, $\log a=0$).

3. Dérivée de $\log_a x$. Comme a^x est strictement monotone pour $a \neq 1$, l'application du théorème de dérivation des fonctions réciproques (chap.I, § 1, prop.5), donne, pour $x > 0$

$$(9) \qquad D(\log_a x) = \frac{1}{x \log a}$$

et en particulier

$$(10) \qquad D(\log x) = 1/x$$

Si u est une fonction admettant une dérivée à droite (resp.à gauche) au point x_0 , et telle que $u(x_0) > 0$, la fonction log u admet au point x_0 une dérivée à droite (resp. à gauche) égale à $u'_d(x_0)/u(x_0)$ (resp. $u'_g(x_0)/u(x_0)$). En particulier, on a $D(\log|x|) = 1/|x| = 1/x$ si $x > 0$, $D(\log|x|) = -1/|x| = 1/x$ si $x < 0$; autrement dit on a $D(\log|x|) = 1/x$ pour tout $x \neq 0$. On en conclut que, si, dans un intervalle ouvert I , la fonction numérique u n'est pas nulle et admet une dérivée finie, $\log|u(x)|$ admet dans I une dérivée égale à u'/u ; cette dérivée est dite dérivée logarithmique de u . Il est clair que la dérivée logarithmique de $|u|^a$ est $a\,u'/u$, et que la dérivée logarithmique d'un produit est égale à la somme des dérivées logarithmiques des facteurs ; l'application de ces règles permet souvent de calculer plus rapidement la dérivée d'une fonction. Elles redonnent en particulier la formule

$$(11) \qquad D(x^a) = ax^{a-1} \qquad (a \text{ réel quelconque}, \ x > 0)$$

déjà démontrée par une autre voie au chap.I (§ 4, n°2)

Exemple. Si u est une fonction $\neq 0$, v une fonction numérique quelconque, on a $\log(|u|^v) = v.\log|u|$, donc

$$\frac{1}{|u|^v} D(|u|^v) = v'\log|u| + vu'/u$$

4. Dérivées des fonctions circulaires ; nombre π . On a défini, en Topologie générale (Top.gén., chap.VI, §) l'homomorphisme $x \longrightarrow e(x)$ du groupe topologique (additif) $\mathbb{R}$ des nombres réels, sur le groupe topologique multiplicatif) U des nombres complexes de valeur absolue 1 ; la fonction $e(x)$ est donc continue dans $\mathbb{R}$ et satisfait aux relations

$$|e(x)| = 1 , \quad e(x+y) = e(x)\,e(y) , \quad e(0)=1 , \quad e(\tfrac{1}{4})=i , \quad e(\tfrac{1}{2})=-1 ,$$
$$e(\tfrac{3}{4})=-i , \qquad e(1)=1 .$$

Elle est périodique et admet 1 pour période principale.

On a aussi défini (loc.cit.) les fonctions circulaires principales relatives à une base $a > 0$, par les relations

$$\cos_a x = \mathcal{R}(e(\tfrac{x}{a})) , \quad \sin_a x = \mathcal{I}(e(\tfrac{x}{a})) , \quad \operatorname{tg}_a x = \frac{\sin_a x}{\cos_a x}$$

Les fonctions $\cos_a x$ et $\sin_a x$ sont des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $(-1,+1)$ et admettent a pour période principale ; on a, $\sin_a(x+\frac{a}{4}) = \cos_a x$. En outre, on a $\cos_a x \geqslant 0$ pour $-\frac{a}{4} \leqslant x \leqslant \frac{a}{4}$, $\sin_a x \geqslant 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}$.

Proposition 2. La fonction $-\sin_a x$ est convexe dans l'intervalle $(0,\frac{a}{2})$.

Comme $\sin_a x$ est continue, il suffit (§1, cor. de la prop.2) de démontrer l'inégalité

$$\sin_a x + \sin_a y \leqslant 2 \sin_a \frac{x+y}{2} \tag{12}$$

pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{a}{2}$. Or, on a

$$\sin_a x + \sin_a y = 2 \sin_a \frac{x+y}{2} \cos_a \frac{x-y}{2}$$

et comme $-\frac{a}{4} \leqslant \frac{x-y}{2} \leqslant \frac{a}{4}$, on a $0 \leqslant \cos_a \frac{x-y}{2} \leqslant 1$, ce qui démontre (12).

Théorème 2. La fonction $e(x)$ admet en tout point une dérivée égale à $2\pi i\, e(x)$, où π est un nombre >0 (indépendant de x).

En effet, comme $-\sin_a x$ est convexe dans $]0, \frac{a}{2}[$ (prop.2), elle admet en tout point de cet intervalle une dérivée à droite et une dérivée à gauche finies ; on en déduit que $\cos_a x = \sin_a(x+\frac{a}{4})$ admet une dérivée

à droite et une dérivée à gauche finies en tout point de $\left]-\frac{a}{4}, +\frac{a}{4}\right[$; donc $e(\frac{x}{a}) = \cos_a x + i \sin_a x$ admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche finies en tout point de $\left]0, \frac{a}{4}\right[$. Mais comme

(13) $$\frac{e(x+h)-e(x)}{h} = e(x-x_0)\,\frac{e(x_0+h)-e(x_0)}{h}$$, on en déduit que $e(x)$ admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche finies en tout point de $\mathbb{R}$. D'autre part, pour $h>0$, $\frac{e(-h)-1}{-h} = e(-h).\frac{e(h)-1}{h}$ et comme $e(h)$ tend vers 1 lorsque h tend vers 0 , la dérivée à droite et la dérivée à gauche de $e(x)$ sont égales au point $x=0$; elles sont donc égales [illegible] la relation (13), et on a

(14) $$D(e(x)) = e(0).e(x)$$

Les fonctions $\cos_a x$ et $\sin_a x$ sont donc dérivables dans $\mathbb{R}$; comme au point $x=0$, $\cos_a x$ admet un maximum relatif, sa dérivée est nulle en ce point ; celle de $\sin_a x$ est $\geqslant 0$, puisque $\sin_a x$ est croissante dans $\left[0, \frac{a}{4}\right]$; comme $D(e(\frac{x}{a})) = D(\cos_a x) + i\, D(\sin_a x)$ on voit que $e'(0)$ est de la forme ai , où $a \geqslant 0$; comme $e(x)$ n'est pas constante, il résulte de (14) que $a>0$; le nombre a ainsi défini se note 2π .

Nous montrerons au §3 comment on peut calculer des valeurs aussi approchées qu'on veut du nombre π .

On a donc la formule

(15) $$D(e(\frac{x}{a})) = \frac{2\pi i}{a}\, e(\frac{x}{a})$$

et par suite

(16) $$D(\cos_a x) = -\frac{2\pi}{a}\sin_a x\,, \qquad D(\sin_a x) = \frac{2\pi}{a}\cos_a x$$

On voit que ces dernières formules se simplifient lorsque $a=2\pi$; c'est pourquoi on utilise exclusivement en Analyse les fonctions circulaires relatives à la base 2π ; on convient d'omettre la base dans la notation de ces fonctions ; sauf mention expresse du contraire, les notations $\cos x$, $\sin x$ et $\operatorname{tg} x$ désigneront donc respectivement $\cos_{2\pi} x$, $\sin_{2\pi} x$ et $\operatorname{tg}_{2\pi} x$.

Avec ces conventions, on a donc

(17) $D(\cos x)=-\sin x$, $D(\sin x)=\cos x$, $D(\operatorname{tg} x)=1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

A côté des trois fonctions circulaires cos x , sin x et tg x on emploie encore, dans la pratique du calcul numérique, les trois fonctions auxiliaires : <u>cotangente</u>, <u>sécante</u> et <u>cosécante</u>, définies par les formules

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \quad , \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad , \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \quad .$$

<u>5. Fonctions circulaires réciproques</u>. La restriction de la fonction sin x à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} , +\frac{\pi}{2}\right]$ est strictement croissante : on désigne par Arc sin x sa fonction réciproque, qui est donc une application strictement croissante et continue de l'intervalle $[-1,+1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$.

Le théorème de dérivation des fonctions réciproques donne la dérivée de cette fonction :

$$D(\text{Arc sin } x) = \frac{1}{\cos(\text{Arc sin } x)}$$

Comme $-\frac{\pi}{2} \leqslant \text{Arc sin } x \leqslant \frac{\pi}{2}$, on a $\cos(\text{Arc sin } x) \geqslant 0$, et comme $\sin(\text{Arc sin } x)=x$, $\cos(\text{Arc sin } x) = \sqrt{1-x^2}$, d'où

(18) $$D(\text{Arc sin } x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

De même, la restriction de cos x à l'intervalle $[0,\pi]$, est strictement décroissante ; on désigne par Arc cos x sa fonction réciproque, qui est une application strictement décroissante de $[-1,+1]$ sur $[0,\pi]$.

On a d'ailleurs

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arc cos } x\right) = \cos(\text{Arc cos } x) = x$$

et comme $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - \text{Arc cos } x \leqslant \frac{\pi}{2}$, on a

(19) $$\text{Arc cos } x = \frac{\pi}{2} - \text{Arc sin } x$$

d'où résulte en particulier

(20) $$D(\text{Arc cos } x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Enfin, la restriction de tg x à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ est strictement croissante ; on désigne par Arc tg x sa fonction réciproque qui est une application strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$; on a

$$\lim_{x\to-\infty} \text{Arc tg } x = -\frac{\pi}{2} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \text{Arc tg } x = \frac{\pi}{2}$$

et, par application du théorème de dérivation des fonctions réciproques, et de la dernière formule (17)

$$D(\text{Arc tg } x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{21}$$

6. L'exponentielle complexe. On a déterminé (Top.gén., chap. VI, § , n°) tous les homomorphismes du groupe topologique (additif) $\mathbb{C}$ des nombres complexes sur le groupe topologique (multiplicatif) $\mathbb{C}^*$ des nombres complexes $\neq 0$; ce sont les applications

$$x+iy \to e^{\alpha x+\beta y}\, e(\gamma x+\delta y) \tag{22}$$

où $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ sont quatre nombres réels assujettis à la seule condition $\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$. Si f désigne l'application (22), l'application partielle $x \to f(x+iy)$ est dérivable quels que soient x et y, et a pour dérivée $(\alpha+2\pi i\gamma)f(x+iy)$ d'après les formules (7) et (15). De même, l'application partielle $y \to f(x+iy)$ est dérivable quels que soient x et y, et a pour dérivée $(\beta+2\pi i\delta)f(x+iy)$.

Cherchons si on peut déterminer les nombres $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ de sorte que l'application $z \to f(z)$ ait une dérivée (par rapport à la variable complexe z) dans $\mathbb{C}$; s'il en est ainsi, et si on désigne par g cette dérivée, l'application partielle $x \to f(x+iy)$ aura pour dérivée $g(x+iy)$, l'application partielle $y \to f(x+iy)$ aura pour dérivée $ig(x+iy)$. Une condition nécessaire pour que le problème soit possible est donc, d'après ce qui précède, que $\beta=-2\pi\gamma$ et $\alpha=2\pi\delta$; on a alors $\alpha\delta-\beta\gamma = 2\pi(\gamma^2+\delta^2)$, donc il faut en outre $\gamma^2+\delta^2 \neq 0$.

Si on prend en particulier $\alpha=1$, $\gamma=0$, on obtient l'homomorphisme $x+iy \longrightarrow e^x \epsilon(\frac{y}{2\pi})$, que nous noterons pour le moment f_0 ; pour tout autre système de nombres $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ satisfaisant aux conditions précédentes, on a, en posant $a=\alpha+2\pi i\gamma$, $\alpha x+\beta y = \mathcal{R}(az)$, et $\gamma x+\delta y = \mathcal{I}(\frac{az}{2\pi})$; l'homomorphisme correspondant n'est donc autre que $z \longrightarrow f_0(az)$.

Nous allons voir que les conditions trouvées sont <u>suffisantes</u> ; d'après le théorème de dérivation des fonctions composées, il suffira de montrer que $f_0(z)$ a une dérivée en tout point de $\mathbb{C}$. D'ailleurs, comme f_0 est un homomorphisme de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$, on a

$$(23) \qquad \frac{f_0(z+h)-f_0(z)}{h} = f_0(z).\ \frac{f_0(h)-1}{h}$$

et tout revient à montrer que f_0 est dérivable au point $z=0$; sa dérivée en ce point (si elle existe) est nécessairement égale à 1 , puisque c'est la dérivée de la restriction e^x de f_0 à l'axe réel ; nous sommes donc ramenés à montrer que

$$(24) \qquad \lim_{z\to 0} \frac{f_0(z)-1-z}{z} = 0$$

Mettons z sous forme trigonométrique $z=t(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ $(t>0)$, et posons (pour α fixe quelconque)

$$g(t)=f_0(t(\cos\alpha+i\sin\alpha))-1-t(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$
$$= e^{t\cos\alpha}\epsilon(\frac{t\sin\alpha}{2\pi})-1-t(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

on a
$$g'(t)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(e^{t\cos\alpha}\,\epsilon(\frac{t\sin\alpha}{2\pi})-1)$$
$$g''(t)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2 e^{t\cos\alpha}\,\epsilon(\frac{t\sin\alpha}{2\pi})$$

On a donc $|g''(t)| \leqslant e^t$, et $g'(0)=g(0)=0$. Supposons $t\leqslant 1$, et appliquons deux fois le th. des accroissements finis aux fonctions g' et g dans l'intervalle $[0,t]$; comme $|g''(t)| \leqslant e$ dans cet intervalle il vient

$$|g(t)| \leqslant e\,t^2$$

et comme $t=|z|$, cela démontre a fortiori la relation (24).

La formule (23) montre alors que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

(25) $$D(f_0(z)) = f_0(z)$$

Cette propriété rapproche encore f_0 de la fonction e^x , qui est d'ailleurs sa restriction à l'axe réel ; pour cette raison, on pose la définition suivante :

Définition 2. On appelle exponentielle complexe l'homomorphisme $x+iy \to e^x e(\frac{y}{2\pi})$ de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$; sa valeur pour un nombre complexe quelconque z se note e^z ou exp z .

Avec cette notation, la formule (25) s'écrit

(26) $$D(e^z) = e^z$$

d'où, pour tout nombre complexe a

(27) $$D(e^{az}) = ae^{az}$$

Remarque. Si, dans la formule (27), on restreint la fonction e^{az} à l'axe réel, on obtient encore, pour x réel

(27 bis) $$D(e^{ax}) = ae^{ax}$$

Cette formule permet de calculer une primitive de chacune des fonctions $e^{ax}\cos \beta x$, $e^{ax}\sin \beta x$ (a et β réels) ; en effet, on a $e^{(a+i\beta)x} = e^{ax}\cos \beta x + ie^{ax}\sin \beta x$, donc, d'après (27 bis),

$$D\left(\Re\left(\frac{1}{a+i\beta}\, e^{(a+i\beta)x}\right)\right) = e^{ax}\cos \beta x$$

$$D\left(\Im\left(\frac{1}{a+i\beta}\, e^{(a+i\beta)x}\right)\right) = e^{ax}\sin \beta x$$

De la même manière, on ramène le calcul d'une primitive de $x^n e^{ax}\cos \beta x$, ou de $x^n e^{ax}\sin \beta x$ (n entier $\geqslant 0$), à celui d'une primitive de $x^n e^{(a+i\beta)x}$; or, la formule d'intégration par parties d'ordre n+1 (chap. I, § 3, formule (6)) montre qu'une primitive de cette dernière fonction est

$$e^{(\alpha+i\beta)x}\left[\frac{x^n}{\alpha+i\beta} - \frac{nx^{n-1}}{(\alpha+i\beta)^2} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{(\alpha+i\beta)^3} - \ldots + (-1)^n \frac{n!}{(\alpha+i\beta)^{n+1}}\right]$$

7. Propriétés de la fonction e^z. D'après la définition de e^z, on a, pour x réel

$$e(x) = e^{2\pi i x} \tag{28}$$

ce qui permet d'écrire les formules qui définissent $\cos x$ et $\sin x$ sous la forme

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}) \tag{29}$$

(formules d'Euler).

En vertu des formules d'Euler, on peut exprimer toute puissance entière de $\cos x$ ou de $\sin x$ à l'aide d'exponentielles e^{ipx} (p entier positif ou négatif). D'après la formule (27 bis), on pourra donc trouver une primitive de tout polynome à un nombre quelconque d'indéterminées, remplacées, l'une par x, les autres par des exponentielles $e^{\lambda x}$ ou des fonctions circulaires $\cos \beta x$ ou $\sin \beta x$ (α et β réels).

Exemple. On a

$$\sin^{2n} x = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}(e^{ix}-e^{-ix})^{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\left[e^{2nix} - \binom{2n}{1}e^{(2n-2)ix} + \ldots + e^{-2nix}\right]$$

d'où

$$\int_0^x \sin^{2n} t\, dt = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\left[\frac{1}{n}\sin 2nx - \binom{2n}{1}\sin(2n-2)x + \ldots + (-1)^n\binom{2n}{n}x\right]$$

et en particulier

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\, dt = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}\frac{\pi}{2} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{\pi}{2}$$

Pour tout $z=x+iy$, on a

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{30}$$

et comme $e^x > 0$, on voit que e^z a pour valeur absolue e^x, pour amplitude y (mod. 2π).

Le fait que $z \to e^z$ est une représentation de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$ se traduit par les identités

(31) $e^{z+z'}=e^z e^{z'}$ $\qquad e^0=1$, $\qquad e^{-z}=1/e^z$

Comme 2π est période principale de $e(x)$, $2\pi i$ est une <u>période</u> de e^z et le groupe des périodes de e^z est l'ensemble des nombres $2n\pi i$ où n parcourt $\mathbb{Z}$.

On déduit de là que, si B désigne la "bande" formée des points $z=x+iy$ tels que $-\pi \leqslant y < \pi$, e^z prend chacune de ses valeurs une fois et une seule dans B ; autrement dit, $z \to e^z$ est une application <u>biunivoque</u> et continue de B sur $\mathbb{C}^*$; l'image par cette application du segment (semi-ouvert) $x=x_0$, $-\pi \leqslant y < \pi$ est le cercle $|z| = e^{x_0}$; l'image de la droite $y=y_0$ est la demi-droite (ouverte) $\mathrm{Am}(z) \equiv y_0 \pmod{2\pi}$.

3. <u>Le logarithme complexe</u>. Il résulte de ce qui précède que l'image par $z \to e^z$ de l'<u>intérieur</u> $\overset{\circ}{B}$ de la bande B , c'est-à-dire de l'ensemble des z tels que $|\mathcal{I}(z)| < \pi$, est le complémentaire F du demi-axe réel négatif (fermé) dans $\mathbb{C}$; si on convient de désigner par $\mathrm{Am}(z)$ la mesure de l'amplitude de z qui appartient à $]-\pi,+\pi[$, l'ensemble F peut encore être défini comme le <u>secteur angulaire</u> (ouvert) $-\pi < \mathrm{Am}(z) < \pi$. Comme $z \to e^z$ est un <u>homomorphisme</u> de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$, l'image par cette application de tout ensemble ouvert dans $\overset{\circ}{B}$ (donc dans $\mathbb{C}$) est un ensemble ouvert dans $\mathbb{C}^*$ (donc dans F) ; autrement dit, la restriction de $z \to e^z$ à $\overset{\circ}{B}$ est un <u>homéomorphisme</u> de $\overset{\circ}{B}$ sur F . On désigne par $z \to \mathrm{Log}\, z$ l'homéomorphisme de F sur $\overset{\circ}{B}$, réciproque du précédent ; pour un nombre complexe $z \in F$, $\mathrm{Log}\, z$ est appelé la <u>détermination principale du logarithme de z</u> . Si $z=x+iy$, $\mathrm{Log}\, z=u+iv$, on a $x+iy=e^{u+iv}$, donc

(32) $$\begin{cases} e^u = |z| , & u=\log|z| = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) \\ v = \mathrm{Am}(z) \end{cases}$$

On a d'ailleurs $\mathrm{tg}\left(v+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{x}{y}$ si $y \neq 0$; on en déduit

(32 bis)
$$\begin{cases} v = \frac{\pi}{2} - \text{Arc tg } \frac{x}{y} & \text{si } y > 0 \\ v = -\frac{\pi}{2} - \text{Arc tg } \frac{x}{y} & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Il est clair que Log z est un prolongement à F de la fonction log x définie sur le demi-axe réel positif (ouvert) $\mathbf{R}_+^*$. Si z,z' sont deux points de F tels que zz' ne soit pas réel négatif, on a $\text{Log}(zz') = \text{Log } z + \text{Log } z' + 2\varepsilon\pi i$, où $\varepsilon = +1, 0$ ou -1 suivant les valeurs de Am(z) et Am(z').

On notera qu'aux points du demi-axe réel négatif, la fonction Log z n'a pas de limite ; de façon précise, si x tend vers $x_0 < 0$, et si y tend vers 0 en restant positif (resp. négatif), Log z tend vers $\log|x_0| + \pi i$ (resp. $\log|x_0| - \pi i$) ; lorsque z tend vers 0, $|\text{Log } z|$ croît indéfiniment.

Nous verrons dans le Livre consacré aux fonctions analytiques, comment on peut prolonger la fonction Log z, et définir le logarithme complexe dans toute sa généralité.

Comme Log z est un homéomorphisme réciproque de e^z, le théorème des dérivations des fonctions réciproques montre qu'en tout point de F, Log z est dérivable, et que

(33) $$D(\text{Log } z) = 1/e^{\text{Log } z} = 1/z$$

formule qui prolonge la formule (10).

9. Primitives des fonctions rationnelles. La formule (33) permet de calculer la primitive d'une fonction rationnelle quelconque r(x) de la variable réelle x, à coefficients réels ou complexes. En effet, on sait (Alg., chap.V, §) qu'une telle fonction peut s'écrire d'une seule manière sous la forme d'une somme d'un nombre fini de termes, qui sont :

a) soit des monomes ax^p (p entier $\geqslant 0$, a nombre complexe) ;

b) soit des fonctions de la forme $a/(x-b)^m$ (m entier > 0, a et b nombres complexes).

Or, il est facile d'obtenir une primitive de chacun de ces termes :

a) une primitive de ax^p est $a\frac{x^{p+1}}{p+1}$;

b) si $m>1$, une primitive de $\frac{a}{(x-b)^m}$ est $\frac{a}{(1-m)(x-b)^{m-1}}$;

c) enfin, d'après les formules (10) et (33) une primitive de $\frac{a}{x-b}$ est :

$a.\log|x-b|$ si b est réel ;

$a.\mathrm{Log}(x-b)$ si b est complexe.

Dans ce dernier cas, si $b=p+iq$, on a d'ailleurs (formules (32 bis))

$$\mathrm{Log}(x-b)=\log\sqrt{(x-p)^2+q^2}+i\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{x-p}{q}\pm\frac{i\pi}{2}$$

Nous renvoyons à la partie de cet ouvrage, consacrée au Calcul numérique, l'examen des méthodes les plus pratiques pour la détermination explicite d'une primitive d'une fonction rationnelle donnée explicitement.

On peut ramener au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle :

1° le calcul d'une primitive d'une fonction de la forme $r(e^{ax})$, r étant une fonction rationnelle ; en effet, par le changement de variable $u=e^{ax}$, on est ramené à trouver une primitive de $r(u)/u$

2° le calcul d'une primitive d'une fonction de la forme $f(\sin ax\ ,\ \cos ax)$, f étant une fonction rationnelle de deux variables; par le changement de variable $u=\mathrm{tg}\,\frac{ax}{2}$, on est ramené à trouver une primitive de

$$\frac{2}{1+u^2}\,f\left(\frac{2u}{1+u^2}\ ,\ \frac{1-u^2}{1+u^2}\right).$$

10. Fonctions circulaires complexes ; fonctions hyperboliques. Les formules d'Euler (29), et la définition de e^z pour tout z complexe, permettent de prolonger à $\mathbb{C}$ les fonctions cos x et sin x définies dans $\mathbb{R}$, en posant, pour tout $z\in\mathbb{C}$

(34) $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$, $\sin z = \frac{1}{2}(e^{iz}-e^{-iz})$. (cf. exerc.15)

Avec cette définition, toute <u>identité algèbrique</u> entre cosinus et sinus d'un nombre fini d'arguments de la forme $p_1x_1+\ldots+p_nx_n$, où les p_i sont entiers, les x_i réels, est encore valable lorsqu'on y remplace les x_i par des variables complexes quelconques z_i. En effet, une telle identité revient, par les formules d'Euler, à une identité de la forme $f(e^{ix_1}, e^{ix_2},\ldots,e^{ix_n})=0$, où f est un polynome de n indéterminées ; comme, lorsque x_k décrit $\mathbb{R}$, e^{ix_k} prend une infinité de valeurs, le polynome $f(u_1,..,u_n)$ est identiquement nul ; on a donc aussi $f(e^{iz_1},\ldots,e^{iz_n})=0$ quels que soient les nombres complexes z_k, c'est-à-dire, en vertu de (34) l'identité algèbrique donnée où on a remplacé les x_k par les z_k.

En particulier, on a

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

$$\cos(z+z')=\cos z \cos z'-\sin z \sin z'$$

$$\sin(z+z')=\sin z \cos z'+\sin z'\cos z$$

D'autre part, la formule (26) montre que cos z et sin z sont dérivables dans $\mathbb{C}$, et que l'on a

$$D(\cos z) = -\sin z$$

$$D(\sin z) = \cos z$$

Pour $z=ix$ (x réel), les formules (34) donnent

$$\cos ix = \tfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}) \quad , \qquad \sin ix = \tfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$$

Il est commode de désigner par une notation particulière les fonctions réelles qui s'introduisent ainsi ; on pose

(35)
$$\begin{cases} \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}) & (\underline{\text{cosinus hyperbolique}} \text{ de } x) \\ \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x}) & (\underline{\text{sinus hyperbolique}} \text{ de } x) \\ \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} & (\underline{\text{tangente hyperbolique}} \text{ de } x) \end{cases}$$

On a donc, pour tout x réel

(36) $\cos ix = \operatorname{ch} x$, $\sin ix = i \operatorname{sh} x$

De toute identité algébrique entre cosinus et sinus d'un nombre fini d'arguments de la forme $p_1x_1+\dots+p_nx_n$ (p_k entiers, x_k réels) on déduit donc une identité entre cosinus et sinus hyperboliques des mêmes arguments, en remplaçant dans l'identité donnée, chaque variable x_k par ix_k , puis en utilisant les formules (36) ; en particulier, on a

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x = 1$$

$$\operatorname{ch}(x+x')=\operatorname{ch} x \operatorname{ch} x' + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} x'$$

$$\operatorname{sh}(x+x')=\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x' + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x'$$

Ces fonctions permettent en outre d'exprimer les parties réelle et imaginaire de $\cos z$ et $\sin z$ pour $z=x+iy$, car

$$\cos(x+iy)=\cos x \cos iy-\sin x \sin iy$$

$$= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$$

$$\sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$$

$$= \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$$

Enfin, on a

$$D(\operatorname{ch} x)=\operatorname{sh} x \quad , \quad D(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x$$

$$D(\operatorname{th} x) = 1-\operatorname{th}^2 x = 1/\operatorname{ch}^2 x$$

Comme $\operatorname{ch} x > 0$ pour tout x , on déduit de là que $\operatorname{sh} x$ est strictement croissante dans $\mathbb{R}$; comme $\operatorname{sh} 0=0$, $\operatorname{sh} x$ a donc le signe de x . Par suite, $\operatorname{ch} x$ est strictement décroissante pour $x \leqslant 0$, strictement croissante pour $x \geqslant 0$. Enfin, $\operatorname{th} x$ est strictement croissante dans $\mathbb{R}$. On a en outre

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{sh} x = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{ch} x = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{th} x = -1 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = +1 .$$

On désigne parfois par Arg sh x la fonction réciproque de sh x , qui est une application strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Cette fonction s'exprime d'ailleurs à l'aide du logarithme, car de la relation $x = \text{sh } y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$, on tire $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$, et comme $e^y > 0$ $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$, c'est-à-dire

$$\text{Arg sh } x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$$

De même, on désigne parfois par Arg ch x la fonction réciproque de la restriction de ch x à $[0, +\infty[$; c'est une application strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$; on montre comme ci-dessus que

$$\text{Arg ch } x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$$

Enfin, on désigne par Arg th x la fonction réciproque de th x , qui est une application strictement croissante de $]-1, +1[$ sur $\mathbb{R}$; on a d'ailleurs

$$\text{Arg th } x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

Exercices. 1) Démontrer que, pour $x > 0$, $(1 + \frac{1}{x})^x$ est strictement croissante, $(1 + \frac{1}{x})^{x+1}$ strictement décroissante, et que ces deux fonctions tendent vers e lorsque x tend vers $+\infty$. Montrer de même que, pour $x > 1$, $(1 - \frac{1}{x})^x$ est strictement croissante, $(1 - \frac{1}{x})^{x-1}$ strictement décroissante, et que ces deux fonctions tendent vers 1/e lorsque x tend vers $+\infty$.

2) Pour $x > 0$, y réel quelconque, on a

$$xy \leqslant x.\log x + e^{y-1}$$

(voir chap.I, § 2, exerc. 17) ; dans quel cas les deux membres sont-ils égaux ?

3) Soient $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ des nombres > 0 , A_n et G_n les moyennes arithmétique et géométrique ordinaires de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ A_{n+1} et G_{n+1} celles de $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Démontrer que

$$n(A_n - G_n) \leqslant (n+1)(A_{n+1} - G_{n+1})$$

l'égalité n'ayant lieu que lorsque $a_{n+1} = G_n$ (poser $a_{n+1} = x^{n+1}$, $G_n = y^{n+1}$).

4) Soient A et G les moyennes arithmétique et géométrique ordinaires des nombres strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Montrer que, si on pose $x_i = a_i/A$, la relation $G \geqslant (1-\alpha)A$, où $0 \leqslant \alpha < 1$, entraîne pour $1 \leqslant i \leqslant n$

$$x_i \left(1 - \frac{x_i - 1}{n-1}\right)^{n-1} \geqslant (1-\alpha)^n$$

En déduire qu'on a, pour tout indice i, $1+x' \leqslant x_i \leqslant 1+x''$, où x' est la racine négative, x'' la racine positive, de l'équation $(1+x)e^{-x} = (1-\alpha)^n$ (cf. exerc. 1).

5) Si x, y, a, b sont > 0, montrer que

$$x \log \frac{x}{a} + y \log \frac{y}{b} > (x+y) \log \frac{x+y}{a+b}$$

l'égalité n'ayant lieu que si $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

6) Soient a_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n)$ des nombres $\geqslant 0$ tels que, pour tout indice i, on ait $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$, et pour tout indice j, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$. Soient x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ des nombres > 0 ; on pose

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

Montrer que $y_1 y_2 \ldots y_n \geqslant x_1 x_2 \ldots x_n$

(minorer $\log y_i$ pour chaque indice i).

7) On dit qu'une fonction f à valeurs > 0, définie dans un intervalle I, est <u>logarithmiquement convexe</u> dans I, si $\log f$ est convexe dans I. Montrer que, si f et g sont logarithmiquement convexes dans I, il en est de même de $f+g$ (utiliser l'inégalité de Hölder, § 1, exerc. 20).

8) a) Soit $\sum_{i,j} c_{ij} x_i \bar{x}_j$, où $c_{ji} = \bar{c}_{ij}$ $(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n)$, une forme hermitienne définie positive, Δ son déterminant ;

montrer que $\Delta \leqslant c_{11}c_{22}\dots c_{nn}$ (exprimer Δ et les c_{ii} à l'aide des valeurs propres de la forme).

b) En déduire que, si (a_{ij}) est une matrice carrée d'ordre n à éléments complexes quelconques, Δ son déterminant on a

$$|\Delta|^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}|a_{1j}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{2j}|^2\right)\dots\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{nj}|^2\right)$$

l'égalité n'ayant lieu que si un des facteurs du second membre s'annule, ou si on a, quels que soient les indices distincts h, k

$$a_{h1}\bar{a}_{k1}+a_{h2}\bar{a}_{k2}+\dots+a_{hn}\bar{a}_{kn} = 0$$

9) Soient $\sum_{i,j} c_{ij}x_i\bar{x}_j$, $\sum_{i,j} d_{ij}x_i\bar{x}_j$ deux formes hermitiennes définies positives et n variables ; démontrer l'inégalité

$$\boxed{c_{ij}}^{\frac{1}{n}} + \boxed{d_{ij}}^{\frac{1}{n}} \leqslant \boxed{c_{ij}+d_{ij}}^{\frac{1}{n}}$$

(ramener simultanément les deux formes à ne contenir que des termes carrés).

10) Déduire l'inégalité de Hölder (§ 1, exerc. 20) de l'inégalité (4) (majorer à l'aide de l'inégalité (4), chacun des termes

$$\left(\frac{a_{i1}}{\sum_i a_{i1}}\right)^{k_1}\left(\frac{a_{i2}}{\sum_i a_{i2}}\right)^{k_2}\dots\left(\frac{a_{ip}}{\sum_i a_{ip}}\right)^{k_p}\Bigg).$$

11) Montrer que $\operatorname{tg} x \geqslant x$ pour $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$.

12) Soit a un nombre réel tel que $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Montrer que la fonction

$$\frac{\frac{\operatorname{tg} x}{x} - \frac{\operatorname{tg} a}{a}}{x\operatorname{tg} x - a\operatorname{tg} a}$$

est strictement croissante dans l'intervalle $\left]a, \frac{\pi}{2}\right[$ (voir chap. I, § 1, exerc. 12).

13) Soit f une fonction définie dans un intervalle ouvert I, telle que, pour tout système de trois points x_1, x_2, x_3 de I satisfaisant à $x_1 < x_2 < x_3 < x_1 + \pi$, on ait

(1) $f(x_1)\sin(x_3-x_2)+f(x_2)\sin(x_1-x_3)+f(x_3)\sin(x_2-x_1) \geqslant 0$

Montrer que :

a) f est continue en tout point de I , et y admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche finies ; on a en outre

(2) $$f(x)\cos(x-y)-f'_d(x)\sin(x-y) \leqslant f(y)$$

pour tout couple de points x,y de I tels que $|x-y| \leqslant \pi$; on a aussi l'inégalité analogue à (2) où on remplace f'_d par f'_s ; enfin, on a $f'_s(x) \leqslant f'_d(x)$ quel que soit $x \in I$. (Pour démontrer (2), faire tendre, dans (1), x_2 vers x_1 en laissant fixe x_3 , et obtenir ainsi une majoration de $\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$; puis faire tendre x_3 vers x_1 dans l'inégalité trouvée ; en déduire l'existence de $f'_d(x)$, et l'inégalité (2) pour $y>x$; procédés analogues pour les autres questions).

b) Réciproquement, si (2) a lieu pour tout couple de points x,y de I tels que $|x-y| \leqslant \pi$, f vérifie (1) dans I (considérer la différence $\frac{f(x_2)}{\sin(x_3-x_2)} - \frac{f(x_1)}{\sin(x_3-x_1)}$).

c) Si f admet une dérivée seconde dans I , (1) est équivalente à la condition

(3) $$f(x)+f''(x) \geqslant 0$$

pour tout $x \in I$.

Interpréter ces résultats en considérant la courbe plane définie par $x = \frac{1}{f(t)} \cos t$, $y = \frac{1}{f(t)} \sin t$ (convexité par rapport à l'origine).

14) Soient $a_1, a_2, .., a_n$, n nombres complexes distincts. Montrer que, si n polynomes $p_i(z)$ (à coefficients complexes) vérifient l'identité

$$p_1(z)e^{a_1 z} + p_2(z)e^{a_2 z} + \ldots + p_n(z)e^{a_n z} = 0$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ (ou seulement pour tout z réel), ils sont identiquement nuls (procéder par récurrence sur n et dérivations successives).

15) On sait (Alg., chap. IX) que, dans le plan complexe $\mathbb{C}^2$, le groupe des angles A est isomorphe au groupe orthogonal $O_2(\mathbb{C})$, l'isomorphie canonique entre ces deux groupes faisant correspondre à l'angle θ la rotation d'angle θ ; on transporte au groupe A la topologie de $O_2(\mathbb{C})$ par cette isomorphie ; ce qui fait de A un groupe topologique localement compact ; en outre l'application $\theta \to \cos\theta + i \sin\theta$ est un isomorphisme du groupe topologique A sur le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ des nombres complexes $\neq 0$, l'isomorphisme réciproque étant défini par les formules $\cos\theta = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, $\sin\theta = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$. Déduire de ces relations que tout homomorphisme $z \to \varphi(z)$ du groupe additif $\mathbb{C}$ sur A, tel que les fonctions complexes $\cos\varphi(z)$, $\sin\varphi(z)$ soient dérivables dans $\mathbb{C}$, est défini par les relations $\cos\varphi(z) = \cos az$, $\sin\varphi(z) = \sin az$.

16) Soit D la partie de $\mathbb{C}$ réunion de l'ensemble défini par $-\pi < \mathcal{R}(z) \leqslant +\pi$, $\mathcal{I}(z) > 0$, et du segment $\mathcal{I}(z) = 0$, $0 \leqslant \mathcal{R}(z) \leqslant \pi$. Montrer que la restriction de la fonction cos z à D applique biunivoquement D sur $\mathbb{C}$; la restriction de cos z à l'intérieur de D est un homéomorphisme de cet ensemble ouvert sur le complémentaire, dans $\mathbb{C}$, de la demi-droite $y = 0$, $x \leqslant 1$.

17) Soient f et g deux polynomes premiers entre eux, le degré de f étant strictement inférieur à celui de g. Soit p le p.g.c.d. de g et de sa dérivée g', q le quotient de g par p ; montrer qu'il existe deux polynomes u, v uniquement déterminés, de degrés respectifs strictement inférieurs à ceux de p et de q, tels que

$$\frac{f}{g} = \left(\frac{u}{p}\right)' + \frac{v}{q}$$

En déduire que les coefficients de u et v appartiennent au plus petit corps (sur $\mathbb{Q}$) contenant les coefficients de f et g et contenu dans $\mathbb{C}$.

18) Soient f et g deux polynomes premiers entre eux, f étant de degré strictement inférieur à celui de g . Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$ contenant les coefficients de f et g , et tel que g soit irréductible sur K . Pour qu'il existe une primitive de f/g de la forme $\sum_i a_i \log u_i$, où les a_i sont des constantes appartenant à K , les u_i des polynomes irréductibles sur K , il faut et il suffit que l'on ait $f=cg'$, c constante appartenant à K .

19) Montrer qu'on peut ramener le calcul d'une primitive de $(a+bx)^p x^q$ (p et q nombres réels quelconques) au calcul de la primitive d'une fonction rationnelle lorsque l'un des nombres $p, q, p+q$ est entier (positif ou négatif).

20) Si $f(x,y)$ est un polynome quelconque en x,y, montrer que le calcul d'une primitive de $f(x, \log x)$ et de $f(x, \text{Arc sin } x)$ se ramène au calcul de primitives de fonctions rationnelles.

21) a) Si m et n sont deux entiers tels que $0<m<n$, démontrer la formule

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$$

b) Montrer que, pour $0<a<1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}$ est uniformément convergente pour a variant dans un intervalle compact, et déduire de a) que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

22) Si $I_{m,n}$ est une primitive de $\sin^m x \cos^n x$, montrer que si $m+n+2 \neq 0$ (m et n nombres réels quelconques)

$$I_{m+2,n} = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+n+2} + \frac{m+1}{m+n+2} I_{m,n}$$

est une primitive de $\sin^{m+2} x \cos^n x$.

Retrouver à l'aide de cette formule la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx = \frac{1.3.5..(2n-1)}{2.4.6..2n} \frac{\pi}{2} \qquad (n \text{ entier} > 0)$$

et démontrer la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2}{1} \frac{4.6...2n}{3.5...(2n+1)} \qquad (n \text{ entier} \geqslant 0)$$

23) Démontrer la <u>formule de Wallis</u>

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2.4.6...2n}{1.3.5...(2n-1)} = \sqrt{\pi}$$

en utilisant l'exerc.22 et l'inégalité $\sin^{n+1} x < \sin^n x$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

24) a) Calculer les intégrales

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

à l'aide de l'exerc.22.

b) Montrer que l'on a

$$1-x^2 \leqslant e^{-x^2} \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{pour} \quad x \geqslant 0$$

c) Déduire de a) et b) et de la formule de Wallis que

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

25) a) Montrer que, pour $a > 0$, la dérivée de $I(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} \sin x}{x} dx$ est égale à $-\int_0^\infty e^{-ax} \sin x \, dx$.

b) En déduire que

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

26) Déduire de l'exerc.23 ci-dessus, et de l'exerc.10 du chap.I, § 4, que

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

27) Calculer, par dérivation par rapport au paramètre, et utilisation de l'exerc.23, les intégrales

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax^2}}{x^2} dx \qquad \int_0^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx$$

28) Soit f une fonction vectorielle règlée pour $x \geqslant 0$, continue au point $x=0$, et telle que l'intégrale $\int_a^\infty f(x)\frac{dx}{x}$ soit convergente pour $a>0$. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx$$

est convergente et égale à $f(0)\log\frac{b}{a}$.

§ 3. Développements des fonctions exponentielles et circulaires, et des fonctions qui s'y rattachent.

1. Développement de l'exponentielle réelle. La formule $D(e^x)=e^x$ donne, par récurrence, $D^n(e^x)=e^x$; on en déduit le développement de Taylor d'ordre n de e^x, relative au point $x=0$:

$$(1)\qquad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,e^t dt$$

Le reste de cette formule est >0 pour $x>0$, du signe de $(-1)^{n+1}$ pour $x<0$; en outre, d'après l'inégalité de la moyenne, on a

$$(2)\qquad \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,e^t dt < \frac{x^{n+1}e^x}{(n+1)!} \qquad \text{pour } x>0$$

$$(3)\qquad \frac{|x|^{n+1}e^x}{(n+1)!} < \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,e^t dt \right| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{pour } x<0$$

Or, on sait que la suite $\frac{(x^n)}{n!}$ a pour limite 0 pour tout nombre $x \geqslant 0$ (Top.gén., chap.IV, § 7) ; si donc on fait croître n indéfiniment dans (1), x restant fixe, on a

$$(4)\qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

et d'après (2) et (3), la série du second membre converge absolument et uniformément dans tout intervalle compact. En particulier, on a

$$(5)\qquad e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Cette formule permet de calculer des valeurs rationnelles aussi approchées que l'on veut du nombre e (cf. Calcul numérique) ; on obtient ainsi

$$e = 2{,}718281828\ldots$$

à $1/10^9$ près par défaut. La formule (5) prouve en outre que e est un nombre <u>irrationnel</u> (<u>Top.gén.</u>, chap.IV, § 8, n°3).

<u>Remarque</u>. Comme le reste de la formule (1) est >0 pour $x>0$, on a, pour $x\geqslant 0$

$$e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

et, a fortiori

$$e^x > \frac{x^n}{n!}$$

pour tout entier n ; on en déduit que $\frac{e^x}{x^n}$ <u>tend vers</u> $+\infty$ avec x pour tout entier n ; nous retrouverons ce résultat au chap.III, par une autre méthode.

2. Développements de l'exponentielle complexe et de cos x et sin x.

Soit z un nombre complexe quelconque, et considérons la fonction $\varphi(t)=e^{zt}$ de la variable réelle t ; on a $D^n\varphi(t)=z^n e^{zt}$, et $e^z=\varphi(1)$; l'expression de $\varphi(1)$ par la formule de Taylor d'ordre n donne donc

$$(6)\qquad e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + z^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\, e^{zt}\,dt$$

formule qui, lorsque z est réel, est équivalente à (1). Le reste $r_n(z) = z^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^{zt}\,dt$ de cette formule se majore encore, en valeur absolue, à l'aide de l'inégalité de la moyenne ; si $z=x+iy$, on a $|e^{zt}| = e^{xt}$, donc $|e^{zt}| \leqslant 1$ si $x \leqslant 0$, $|e^{zt}| \leqslant e^x$ si $x>0$; il vient donc

$$(7)\qquad |r_n(z)| \leqslant \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{si } x\leqslant 0$$

$$(8)\qquad |r_n(z)| \leqslant \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^x \qquad \text{si } x>0 .$$

Comme ci-dessus, on en conclut que

$$(9)\qquad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

la série convergeant <u>absolument et uniformément</u> dans toute partie compacte de $\mathbb{C}$.

De (6) on tire, en particulier, pour x réel

$$(10)\qquad e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \ldots + i^{n+1}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, e^{it}\, dt$$

d'où on déduit les développements de Taylor de cos x et sin x : en prenant la partie réelle de (10) pour l'ordre $2n+1$, on a

$$(11)\qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos t\, dt$$

avec la limitation du reste

$$(12)\qquad \left| \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos t\, dt \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

De même, en prenant la partie imaginaire de (10) pour l'ordre $2n$, il vient

$$(13)\qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\cos t\, dt$$

avec la limitation du reste

$$(14)\qquad \left| \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\cos t\, dt \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

En outre, en comparant les restes de (11) pour les ordres $2n+1$ et $2n+3$, on a

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+3}}{(2n+3)!}\cos t\, dt = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos t\, dt$$

et en tenant compte de (12), on voit que le reste de (11) est <u>du signe de</u> $(-1)^{n+1}$; de la même manière, on montre que le reste de (13) est <u>du signe de</u> $(-1)^n x$. En particulier, pour $n=0$ et $n=1$ dans (11), pour $n=1$ et $n=2$ dans (13), on obtient les inégalités

$$(15)\qquad 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 \qquad \text{pour tout } x$$

$$(16)\qquad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x \qquad \text{pour } x \geqslant 0 .$$

Enfin, en faisant $z=ix$ dans la formule (9), on a

$$(17)\qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$(18)\qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

les séries convergeant absolument et uniformément dans tout intervalle compact.

3. Le développement du binôme. Soit m un nombre réel quelconque. Pour $x>0$, on a $D^n(x^m)=m(m-1)..(m-n+1)x^{m-n}$; on appliquant à la fonction $(1+x)^m$ la formule de Taylor d'ordre n relative au point $x=0$, on obtient pour $x>-1$, la formule

$$(19)\quad (1+x)^m = 1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+..+\binom{m}{n}x^n+\frac{m(m-1)..(m-n)}{n!}\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{m-1}dt$$

où on a posé $\binom{m}{n}=\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}$. La formule (19) se réduit à la formule du binôme (Alg., chap.IV) lorsque m est entier >0 et $n\geqslant m$; par extension, on la nomme encore formule du binôme, et les coefficients $\binom{m}{n}$ sont dits coefficients binomiaux lorsque m est un nombre réel quelconque.

Le reste de (19) a le signe de $\binom{m}{n+1}$ si $x>0$, le signe de $(-1)^{n+1}\binom{m}{n+1}$ si $x<0$. Comme $\left|\frac{x-t}{1+t}\right|\leqslant|x|$ pour $t>-1$ appartenant à l'intervalle d'extrémités 0 et x, on a la limitation du reste

$$(20)\quad \left|\frac{m(m-1)...(m-n)}{n!}\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{m-1}dt\right| \leqslant \left|-\binom{m-1}{n}x^n\left[(1+x)^m-1\right]\right|$$

En outre, pour $x>0$ et $n\geqslant n-1$, on a $(1+t)^{n-m+1}\geqslant 1$ pour $0\leqslant t\leqslant x$ d'où la limitation

$$(21)\quad \left|\frac{m(m-1)...(m-n)}{n!}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n-m+1}}dt\right| \leqslant \left|\binom{m}{n+1}\right| x^{n+1}$$

Nous allons déduire de ces inégalités qu'on a, pour $|x|<1$

$$(22)\qquad (1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n$$

la série du second membre étant absolument convergente, et uniformément convergente dans tout intervalle compact contenu dans $]-1,+1[$.

En effet, on peut écrire

$$(23)\quad \binom{m}{n} = (-1)^n\left(1-\frac{m+1}{1}\right)\left(1-\frac{m+1}{2}\right)...\left(1-\frac{m+1}{n}\right)$$

d'où

$$\left|\binom{m}{n}\right| \leqslant \left(1+\frac{|m+1|}{1}\right)\left(1+\frac{|m+1|}{2}\right)...\left(1+\frac{|m+1|}{n}\right)$$

Si $|x|\leqslant r<1$, on peut trouver n_0 tel que $1+\frac{|m|}{n_0}<\frac{1}{r'}$, où $r<r'<1$, d'où, en posant $k=\left(1+\frac{|m|}{1}\right)...\left(1+\frac{|m|}{n_0}\right)$

$$\left|\binom{m-1}{n}x^n\right| \leqslant k|x|^{n_0}\left(\frac{x}{x'}\right)^{n-n_0}$$

ce qui démontre la proposition. Au contraire, pour $x>1$, le terme général de la série (23) croît indéfiniment avec n ; en effet, d'après (23), on a, pour $n>n_1\geqslant|m+1|$

$$\left|\binom{m}{n}\right| \geqslant \left|(1-\frac{m+1}{1})\ldots(1-\frac{m+1}{n_1})\right|.\ (1-\frac{|m+1|}{n_1+1})\ldots(1-\frac{|m+1|}{n})$$

Soit $n_0\geqslant n_1$ tel que, pour $n\geqslant n_0$, on ait $1-\frac{|m+1|}{n}>\frac{1}{x'}$, où $1<x'<x$; si on pose

$$k' = \left|(1-\frac{m+1}{1})\ldots(1-\frac{m+1}{n_1})\right|(1-\frac{|m+1|}{n_1+1})\ldots(1-\frac{|m+1|}{n_0})$$

on aura, pour $n>n_0$

$$\left|\binom{m}{n}x^n\right| \geqslant k'\,|x|^{n_0}\left(\frac{x}{x'}\right)^{n-n_0}$$

d'où la proposition.

La formule (23) montre que lorsque $m+1>0$, $\binom{m}{n}$ tend vers 0 lorsque n croît indéfiniment, car le produit infini de facteur général $1-\frac{m+1}{n}$ a ses termes <1 et ne converge pas dans R_+^* (Top.gén., chap.IV, §7, th.4) ; on déduit donc de la formule (21) que le reste de (19) tend vers 0 pour $x=1$ et $m>-1$; autrement dit, la série de terme général $\binom{m}{n}$ est convergente pour $m>-1$, et on a

$$2^m = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n} \tag{24}$$

Au contraire, pour $m+1\leqslant 0$, $\binom{m}{n}$ ne tend pas vers 0 lorsque n croît indéfiniment ; on a en effet $\left|\binom{-1}{n}\right|=1$ pour tout n ; pour $m+1<0$, le produit infini de facteur $1-\frac{m+1}{n}$ converge vers $+\infty$ (Top.gén., chap.IV, §7, th.4), donc $\left|\binom{m}{n}\right|$ tend vers $+\infty$.

La formule (19) n'a été établie que pour $x>-1$; lorsqu'on y fait tendre x vers -1, le premier membre tend vers $+\infty$ lorsque $m<0$,

vers 0 lorsque $m>0$; dans le premier cas, le reste tend donc vers $+\infty$, dans le second cas vers une limite finie r_n ; en outre, en passant à la limite dans (20), on a $|r_n| \leqslant \left|\binom{m-1}{n}\right|$, et comme $m-1 > -1$, il résulte de ce qui précède que r_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$; on a donc encore la formule

$$(25) \qquad 0 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{m}{n}$$

pour $m>0$. On remarquera que, dans cette série, tous les termes sont de même signe à partir d'une certaine valeur de n ; cela prouve donc que la série de terme général $\binom{m}{n}$ est alors <u>absolument convergente</u> ; par suite, la formule (22) est valable pour $|x| \leqslant 1$ lorsque $m > 0$, et la série du second membre est <u>uniformément convergente</u> (et même <u>normalement convergente</u>) dans cet intervalle compact.

Nous verrons au contraire au chap.III ($\S$) que la série de terme général $\binom{m}{n}$ n'est pas absolument convergente lorsque $-1<m<0$.

<u>Remarque</u>. La forme générale du reste de (19) se simplifie lorsque $m=-1$; on a alors en effet, d'après la formule de la division de $1-x^{n+1}$ par $1-x$

$$(26) \qquad \frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x} \qquad \text{(cf. exerc.6)}$$

En dérivant k fois cette formule, on a aussi une autre expression du développement de Taylor de $(1+x)^{-k}$:

$$(27) \qquad \frac{1}{(1+x)^k} = 1+\binom{-k}{1}x+\binom{-k}{2}x^2+\ldots+\binom{-k}{n}x^n+D^k\left[(-1)^{n+k+1}\frac{x^{n+k+1}}{1+x}\right]$$

4. <u>Développements de</u> $\log(1+x)$, <u>de</u> Arc tg x <u>et</u> Arc sin x . Intégrons les deux membres de (26) entre 0 et x ; on obtient le développement de Taylor d'ordre $n+1$ de $\log(1+x)$, valable pour $x \geqslant -1$

$$(28) \qquad \log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt$$

Le reste est du signe de $(-1)^{n+1}$ si $x>0$, et est <0 si $-1<x<0$; en outre, pour $x>0$, on a $1+t \geqslant 1$ pour $0 \leqslant t \leqslant x$ et pour $x<0$, $1+t > 1-|x|$ pour $x \leqslant t \leqslant 0$; donc on a les limitations

(29) $$\left| \int_0^x \frac{t^{n+1}dt}{1+t} \right| \leqslant \frac{x^{n+2}}{n+2} \qquad \text{pour } x \geqslant 0$$

(30) $$\left| \int_0^x \frac{t^{n+1}dt}{1+t} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)(1-|x|)} \qquad \text{pour } -1 < x \leqslant 0 .$$

De ces deux dernières formules, on déduit aussitôt que, pour $-1 < x \leqslant 1$, on a

(31) $$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

la série étant <u>uniformément convergente</u> dans tout intervalle compact contenu dans $]-1,+1]$, <u>absolument convergente</u> $|x| < 1$.

Au contraire, pour $|x| > 1$, le terme général de la série (31) croît indéfiniment en valeur absolue ($n^0 2$). Pour $x=-1$, la série se réduit à la série harmonique, qui a pour somme $+\infty$.

De même, remplaçons dans (26) x par x^2, et intégrons les deux membres entre 0 et x ; il vient le développement de Taylor d'ordre $2n+1$ de Arc tg x , valable pour tout x réel

(32) $$\text{Arc tg } x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}dt}{1+t^2}$$

Le reste est du signe de $(-1)^{n+1} x$, et comme $1+t^2 \geqslant 1$, on a la limitation

(33) $$\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}dt}{1+t^2} \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

d'où on tire que, pour $|x| \leqslant 1$

(34) $$\text{Arc tg } x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

la série étant <u>uniformément convergente</u> dans cet intervalle, et <u>absolument convergente</u> pour $|x| < 1$.

En particulier, pour $x=1$, on obtient la formule

(34 bis) $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots$$

Pour $|x| > 1$, le terme général de la série (34) croît indéfiniment en valeur absolue avec n .

Enfin, pour obtenir les développements de Taylor de Arc sin x , partons du développement de sa dérivée $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$; ce dernier s'obtient en remplaçant x par $-x^2$ dans le développement de $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ suivant la formule du binôme, ce qui donne pour $|x|<1$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}x^{2n}+R_n(x)$$

avec les inégalités

$$0\leqslant R_n(x)\leqslant \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots 2n}x^{2n}\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right]$$

D'où, en prenant la primitive

$$(35)\quad \text{Arc sin } x = x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+S_n(x)$$

où $S_n(x)$ est du signe de x et satisfait à l'inégalité

$$(36)\quad |S_n(x)|\leqslant \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots 2n}\int_0^{|x|}\frac{t^{2n}}{\sqrt{1-t^2}}\leqslant \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{|x|^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}$$

On voit donc que pour un x tel que $|x|<1$, $S_n(x)$ tend vers 0 lorsque n croît indéfiniment, ce qui permet d'écrire

$$(37)\qquad \text{Arc sin } x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

la série convergeant <u>uniformément</u> dans tout intervalle compact contenu dans $]-1,+1[$.

Au chap.III, nous montrerons même que cette série converge uniformément et a pour somme Arc sin x pour $|x|\leqslant 1$ (cf.exerc.6). Au contraire, on montre, comme pour le développement du binôme, que le terme général de la série (37) croît indéfiniment avec n en valeur absolue lorsque $|x|>1$.

En faisant par exemple $x=\frac{1}{2}$ dans (37), on obtient une nouvelle expression du nombre π :

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}$$

qui permet (mieux que la série (34 bis) de calculer des valeurs aussi approchées qu'on veut du nombre π ; on obtient ainsi (cf. <u>Calcul numérique</u>)

$= 3,141592653...$

à $1/10^9$ près par défaut.

Exercices. 1) Soit f une fonction n fois dérivable dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}_+$. Démontrer la formule

$$D^n f(e^x) = \sum_{m=1}^{n} \frac{a_m}{m!} e^{mx} f^{(m)}(e^x)$$

en tout point x tel que $e^x \in I$, le coefficient a_m étant donné par

$$a_m = \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} (m-p+1)^n$$

(méthode de l'exerc.8 du chap.I, §3, en utilisant le développement de Taylor de e^x).

2) Soient f une fonction n fois dérivable au point x, g une fonction n fois dérivable au point f(x). Si on pose $D^n(g(f(x))) = \sum_{k=1}^{n} g^{(k)}(f(x)) u_k(x)$, u_k ne dépend que de la fonction f; en déduire que $u_k(x)$ est le coefficient de a^k dans $e^{-af(x)} D^n(e^{af(x)})$.

3) Pour que la fonction $(1 + \frac{1}{x})^{x+p}$ soit décroissante pour $x>0$ il faut et il suffit que $p \geqslant \frac{1}{2}$.

4) Pour que la fonction $(1 + \frac{1}{x})^x (1 + \frac{p}{x})$ soit décroissante pour $x>0$, il faut et il suffit que $p \geqslant \frac{1}{2}$.

5) Pour que la fonction $(1 + \frac{p}{x})^{x+1}$ soit décroissante pour $x>0$, il faut et il suffit que $0 < p \leqslant 2$.

6) Montrer que le reste du développement du binôme (19) est égal à $\frac{m(m-1)..(m-n)}{n!} (1+x)^m \int_0^x \frac{u^n \, du}{(1+u)^{m+1}}$. En déduire que, si $-1<m<0$, ce reste est en valeur absolue, $\leqslant |x|^{n+1}(1+x)^m$ (remplacer u par zx dans l'intégrale). En conclure que la série (37) converge uniformément vers Arc sin x dans l'intervalle compact $[-1,+1]$.

7) Montrer que, dans l'intervalle $[-1,+1]$, la fonction $|x|$ est limite uniforme de polynomes, en remarquant que $|x| = (1-(1-x^2))^{\frac{1}{2}}$.

En déduire une nouvelle démonstration du théorème de Weierstrass (Top.gén., chap. VIII, § 4) (montrer que toute fonction continue dans un intervalle compact est limite uniforme de combinaisons linéaires de fonctions $a|x-b|+c$).

8) Lorsque n croît indéfiniment, montrer que le polynome $p_n(x) = \dfrac{\int_0^x (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt}$ tend uniformément vers -1 dans tout intervalle $[-1,-\varepsilon]$, et tend uniformément vers +1 dans tout intervalle $[\varepsilon,1]$ $(\varepsilon>0)$ (remarquer que $\int_0^1 (1-t^2)^n dt \geqslant \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-t^2)^n dt$). En déduire que le polynome $q_n(x) = \int_0^x p_n(t)dt$ tend uniformément vers $|x|$ dans $[-1,+1]$.