FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE
CHAPITRE 1
ENSEMBLES CONVEXES DANS LES $\mathbf{R}^n$
ETAT 2 BIS

Rédaction n° 004

Nombre de pages : 39
Nombre de feuilles : 39

Livre IV Fonctions d'une variable réelle

Chap. I. Convexes dans R^n

A 4 Livre V 2

LIVRE IV

FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE

Chapitre I

(Ancien CHAPITRE I) (Etat 2 bis)

ENSEMBLES CONVEXES DANS LES $\mathbf{R}^n$.

Sommaire

§1. Propriétés topologiques des ensembles convexes dans $\mathbf{R}^n$:

1. Définition d'un ensemble convexe. 2. Adhérence, intérieur, frontière d'un ensemble convexe. 3. Ensembles convexes compacts. 4. Hyperplans d'appui. 5. Dualité des ensembles convexes.

§2. Fonctions convexes : 1. Définition des fonctions convexes. 2. Familles de fonctions convexes. 3. Continuité d'une fonction convexe. 4. Critères de convexité. 5. Fonctions convexes positivement homogènes. 6. Fonctions d'appui.

Commentaires. On n'a voulu insérer dans ce chapitre que les propriétés les plus importantes des ensembles convexes de dimension finie, rejetant les autres, soit en exercices, soit au Livre V s'il s'agit de propriétés valables pour les convexes généraux. Dans cette dernière catégorie rentre la notion d'enveloppe convexe, dont il paraît inutile de parler ici ; de même, on n'a pas fait une étude détaillée (dans le texte) de la coque d'un ensemble convexe, réservant cette étude (avec la notion de point extrémal et d'ensemble strictement convexe) pour le Livre V, avec le th. de Krein-Milman ; le th. de Minkowski est amplement suffisant pour l'application essentielle qu'on en fait au Livre IV, savoir le th. des accroissements finis et ses cas limites. On n'a absolument pas parlé des polyèdres convexes, qui d'après Weil n'ont plus aucune importance pour la Topologie algébrique.

Les propositions du début du §1 ont été formulées de sorte qu'on puisse les transporter sans modification (ainsi ~~xxx~~ que leurs démonstrations) aux ensembles convexes généraux, au Livre V.

LIVRE IV

FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE

(Théorie élémentaire)

CHAPITRE I

ENSEMBLES CONVEXES DANS LES $\mathbb{R}^n$.

§ 1. Propriétés topologiques des ensembles convexes dans $\mathbb{R}^n$.

1. Définition d'un ensemble convexe.

DEFINITION 1.- On dit qu'une partie A d'un espace $E=\mathbb{R}^n$ est un ensemble convexe si, quels que soient les points x,y de A, le segment fermé d'extrémités x et y est contenu dans A.

Il revient au même de dire que, quels que soient les points x,y de A, le point $z = \lambda x+(1-\lambda)y$ appartient à A pour tout nombre réel λ tel que $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

On déduit de cette définition que si $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une famille finie de points de A, $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille de nombres réels > 0 tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, le point $z = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ appartient à A. La proposition résulte de ce qui précède pour $p=2$; démontrons-la par récurrence sur p. Si on pose $\mu = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i$ et $y = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i$ l'hypothèse de récurrence montre que $y \in A$. Comme $\lambda_p = 1-\mu$ et $z = \mu y+(1-\mu)x_p$, z appartient aussi à A.

Exemples.- 1) L'ensemble vide est convexe ; il en est de même de l'ensemble réduit à un point quelconque.

2) Toute variété linéaire affine (x) de E est convexe ; il en est de même de toute demi-droite et de tout segment.

3) Les seules parties convexes non vides de $\mathbb{R}$ sont les intervalles (Top.gén., chap.IV, § 2, prop.1).

4) Dans $\mathbb{R}^n$, toute <u>boule euclidienne</u> (<u>Top.gén.</u>, chap.VI, § 2, n°3) ouverte ou fermée est convexe, car si B est une boule de centre a, x et y deux points de cette boule, l'inégalité du triangle pour la norme euclidienne $\|x\|$ dans $\mathbb{R}^n$ donne, pour tout λ tel que $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y-a\| \leqslant \|\lambda(x-a)\|+\|(1-\lambda)(y-a)\|$$
$$= \lambda\|x-a\|+(1-\lambda)\|y-a\|$$

donc, si $\|x-a\| \leqslant r$ et $\|y-a\| \leqslant r$ (resp. $\|x-a\| < r$ et $\|y-a\| < r$) on a $\|\lambda x+(1-\lambda)y-a\| \leqslant r$ (resp. $\|\lambda x+(1-\lambda)y-a\| < r$).

Au Livre V, nous étendrons la définition et un certain nombre des propriétés des ensembles convexes dans un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, aux ensembles contenus dans un espace vectoriel quelconque sur $\mathbb{R}$

PROPOSITION 1.- <u>Soit f une application linéaire affine</u> (**) <u>de</u> $E = \mathbb{R}^n$ <u>dans</u> $F = \mathbb{R}^m$; <u>l'image par f de toute partie convexe de E est une partie convexe de F</u> ; <u>l'image réciproque par f de toute partie convexe de F est une partie convexe de E</u> .

(*) Rappelons que, dans $\mathbb{R}^n$, une <u>variété linéaire affine</u> non vide est un ensemble déduit par une translation d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$; une variété linéaire affine passant par 0 est encore appelée variété linéaire <u>homogène</u> ; la <u>dimension</u> d'une variété linéaire affine non vide est par définition la dimension du sous-espace vectoriel qui lui est parallèle. Par convention, on considère aussi l'ensemble vide comme une variété linéaire affine, de dimension -1 .

(**) Rappelons qu'une <u>application linéaire affine</u> de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est une application de la forme $x \to a+g(x)$, où g est une application linéaire <u>homogène</u> de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ (c'est-à-dire telle que $g(x+y) = g(x)+g(y)$ et $g(\lambda x) = g(x)$).

La première partie résulte de ce que l'image par f du segment fermé d'extrémités x,y est le segment fermé d'extrémités $f(x)$, $f(y)$. On déduit de là que l'image réciproque par f d'un segment fermé de F contient le segment fermé joignant deux quelconques de ses points, d'où la seconde partie de la prop. 1.

COROLLAIRE 1.- Tout demi-espace ouvert (resp. fermé) est convexe.

En effet, si $g(x)=0$ est l'équation d'un hyperplan H, g étant une application linéaire affine de E dans $\mathbb{R}$, les demi-espaces déterminés par H sont les images réciproques par g des demi-droites d'origine 0 dans $\mathbb{R}$.

COROLLAIRE 2.- Les parties convexes non vides d'une droite D contenue dans D sont la droite D elle-même, et les demi-droites et segments contenus dans D.

En effet, il existe une application linéaire affine biunivoque de $\mathbb{R}$ sur D, et toute partie convexe de D est transformée par cette application d'une partie convexe de $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 2.- L'intersection d'une famille quelconque d'ensembles convexes est un ensemble convexe.

La proposition est évidente à partir de la déf.1.

COROLLAIRE.- L'intersection d'un ensemble convexe et d'une variété linéaire affine est un ensemble convexe. Pour qu'un ensemble soit convexe, il faut et il suffit que son intersection avec toute droite de E soit, ou vide, ou la droite entière, ou une demi-droite, ou enfin un segment.

PROPOSITION 3.- Soit A (resp. B) une partie convexe de $E=\mathbb{R}^n$ (resp. de $F=\mathbb{R}^m$) ; le produit $A\times B$ est une partie convexe de $E\times F$.

En effet, les projections du segment fermé d'extrémités (x_1,x_2) et (y_1,y_2) sont les segments fermés d'extrémités x_1,y_1 et x_2,y_2 respectivement.

COROLLAIRE 1.- Tout pavé dans $\mathbb{R}^n$ (Top.gén., chap.VI, § 1, n°1) est un ensemble convexe.

COROLLAIRE 2.- Tout parallélotope dans $\mathbb{R}^n$ (Top.gén., chap.VI, § 1, n°3) est un ensemble convexe.

En effet, c'est l'image d'un pavé par une application linéaire affine.

COROLLAIRE 3.- Si A et B sont deux parties convexes de E , l'ensemble $\lambda A+\mu B$ (ensemble des $\lambda x+\mu y$, où $x\in A$ et $y\in B$) est convexe quels que soient les nombres réels λ et μ .

En effet, $\lambda A+\mu B$ est l'image de $A\times B$ par l'application linéaire $(x,y)\longrightarrow \lambda x+\mu y$ de $E\times E$ dans E .

PROPOSITION 4.- Soit A un ensemble convexe, x_0 un point quelconque de E . La réunion C des demi-droites fermées d'origine x_0 passant par les points de A distincts de x_0 est un ensemble convexe.

En effet, on peut, par une translation, se ramener au cas où $x_0=0$; l'ensemble C est alors l'ensemble des éléments λx , où x parcourt A et λ l'ensemble des nombres $\geqslant 0$. Or, si $x\in A$, $y\in A$, $\alpha>0$, $\beta>0$ et $0\leqslant\rho\leqslant 1$, on peut écrire $\rho\alpha x+(1-\rho)\beta y=\lambda(\sigma x+(1-\sigma)y))$ en prenant $\lambda=\rho\alpha+(1-\rho)\beta$, et $\frac{\sigma}{1-\sigma}=\frac{\rho\,\alpha}{(1-\rho)\beta}$ et cette dernière relation donne $\frac{1}{\sigma}-1=(\frac{1}{\rho}-1)\,\frac{\beta}{\alpha}>0$, donc on a bien $0<\sigma<1$, ce qui prouve que $\rho\alpha x+(1-\rho)\beta y$ est de la forme λz avec $\lambda>0$ et $z\in A$; on raisonne plus simplement encore lorsque l'un des nombres α,β est nul.

On dit qu'un ensemble convexe C est un cône convexe de sommet x_0 lorsque toute demi-droite fermée d'origine x_0 qui contient un point de C différent de x_0 est toute entière contenue dans C . La prop.4 montre que la réunion des demi-droites fermées d'origine x_0 passant par les points d'un ensemble convexe A distincts de x_0 est un cône convexe (qu'on dit engendré par A).

Soit A un ensemble convexe quelconque dans $E = \mathbb{R}^n$; considérons, dans l'espace $F = E \times \mathbb{R}$, l'ensemble convexe $A_1 = A \times \{1\}$, et le **cône convexe** C engendré par A_1, c'est-à-dire l'ensemble des points $(\lambda x, \lambda)$ de F, où x parcourt A et λ l'ensemble des nombres $\geqslant 0$; il est clair que A_1 est l'intersection de C et de l'hyperplan $\xi = 1$ dans F. Tout ensemble convexe dans E peut donc être considéré comme la projection sur E de l'intersection d'un cône convexe de sommet 0 dans F et de l'hyperplan $\xi = 1$.

2. Adhérence, intérieur, frontière d'un ensemble convexe.

PROPOSITION 5.- *L'adhérence $\bar{A}$ dans E d'une partie convexe A de E est convexe.*

En effet, pour tout $\lambda \in [0,1]$, $(x,y) \to \lambda x + (1-\lambda)y$ est une application continue de $A \times A$ dans A ; elle applique donc $\bar{A} \times \bar{A}$ dans $\bar{A}$ (*Top.gén.*, chap.I, §4, prop.1), ce qui prouve que $\bar{A}$ est convexe.

DEFINITION 2.- *On appelle dimension d'une partie convexe A de $E = \mathbb{R}^n$, la dimension de la variété linéaire affine engendrée par A* (autrement dit (*Alg.*, chap.IX) le *rang affine* de A).

Pour toute variété linéaire affine à p dimensions de $\mathbb{R}^n$ $(p > 0)$, il existe un déplacement transformant cette variété en une variété coordonnée à p dimensions de $\mathbb{R}^n$, identifiée à $\mathbb{R}^p$; tout ensemble convexe de dimension $p < n$ contenu dans $\mathbb{R}^n$ est donc transformé par un tel déplacement en un ensemble convexe de dimension p contenu dans $\mathbb{R}^p$. Nous allons donc commencer par considérer les ensembles convexes *de dimension n* contenus dans $\mathbb{R}^n$.

PROPOSITION 6.- *Pour qu'une partie convexe A de $\mathbb{R}^n$ ait un point intérieur, il faut et il suffit que A soit de dimension n.*

La condition est <u>nécessaire</u>, car la variété linéaire affine engendrée par une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ est identique à $\mathbb{R}^n$. Elle est <u>suffisante</u> : en effet, si A est de dimension n , il existe n+1 points de A formant un système affinement libre ; par une transformation linéaire affine de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même, on peut supposer que ces points sont l'origine et les n vecteurs e_i $(1 \leq i \leq n)$ de la base canonique de $\mathbb{R}^n$; A contient alors tous les points $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ où $0 \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \leq 1$ (un tel point s'écrivant $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k + (1 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k) 0$); par suite, il contient aussi le cube ouvert formé des points tels que $0 \leq \lambda_k < \frac{1}{n}$ $(1 \leq k \leq n)$.

PROPOSITION 7.- <u>Soit A un ensemble convexe dans</u> $E = \mathbb{R}^n$.

<u>1° Si x_o est un point intérieur de A , x un point quelconque de $\bar{A}$, tout point du segment ouvert d'extrémités x_o et x est intérieur à A</u> .

<u>2° Pour qu'un point x soit intérieur à A , il faut et il suffit que, sur toute droite passant par x , il existe un segment ouvert contenu dans A et auquel x appartient</u> ;

1° Soit en effet λ un nombre quelconque tel que $0 < \lambda < 1$, et supposons que la boule de centre x_o et de rayon $r > 0$ soit contenue dans A . Montrons que le point $z = \lambda x + (1-\lambda) x_o$ est intérieur à A . Comme x est adhérent à A , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $y \in A$ tel que $\| x-y \| \leq \varepsilon$. Pour tout u tel que $\| x_o - u \| < r$, le point $\lambda y + (1-\lambda) u$ appartient à A ; donc la boule ouverte B de centre $z_o = \lambda y + (1-\lambda) x_o$ et de rayon $(1-\lambda) r$ est contenue dans A (fig.1) ; mais on a $z - z_o = \lambda (y-x)$, donc $\| z - z_o \| \leq \lambda \varepsilon$ et si ε est assez petit, on a $\| z - z_o \| < (1-\lambda) r$, ce qui montre que $z \in B$ et par suite que z est intérieur à A .

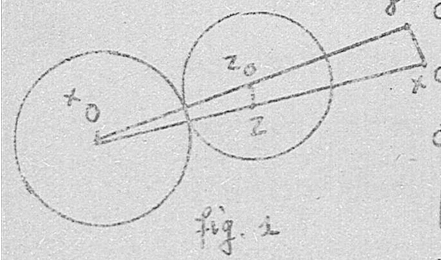

fig. 1

2° La condition de l'énoncé est évidemment nécessaire pour que x soit intérieur à A . Réciproquement, si cette condition est remplie, il existe n points $y_i \in A$ tels que les n vecteurs $y_i - x$ soient linéairement indépendants, donc A est de dimension n ; si x_0 est intérieur à A , x appartient à un segment ouvert joignant x_0 à un point de A , donc est intérieur à A d'après la première partie.

COROLLAIRE.- *Si A est un ensemble convexe de dimension n dans* $\mathbb{R}^n$, *l'intérieur* $\mathring{A}$ *de A est un ensemble convexe, identique à l'intérieur de* $\bar{A}$; *l'adhérence de A est identique à l'adhérence de* $\mathring{A}$.

Il résulte aussitôt de la première partie de la prop.7 que $\mathring{A}$ est convexe ; d'autre part, si x est intérieur à $\bar{A}$, et y intérieur à A , la droite joignant x et y contient un segment ouvert contenu dans $\bar{A}$ et auquel appartient x ; il résulte de la première partie de la prop.7 que x est intérieur à A . Enfin, la première partie de la prop.7 prouve que tout point adhérent à A est aussi adhérent à $\mathring{A}$.

PROPOSITION 8.- *Soit A un ensemble convexe de dimension n dans* $\mathbb{R}^n$.

1° *Si x est point frontière de A* , x_0 *point intérieur de A* , *l'intersection de A et de la droite joignant x et* x_0 *est un segment ou une demi-droite dont x est une extrémité*.

2° *Pour qu'un point x soit point frontière de A* , *il faut et il suffit qu'il existe une droite passant par x et dont l'intersection avec A est un segment ou une demi-droite dont x est une extrémité*.

1° En effet, l'intersection de la droite joignant x et x_0 et de A ne peut contenir de segment ouvert auquel appartienne x , car x serait alors intérieur à A d'après la première partie de la prop.7 ; d'autre part, cette même proposition prouve que tout point du segment ouvert d'extrémités x,y appartient à A .

2° La nécessité de la condition résulte de la première partie ; il est évident d'autre part que si elle est remplie, x est point frontière de A .

COROLLAIRE.- Si x_o est intérieur à A , toute demi-droite fermée D d'origine x_o non contenue dans A rencontre la frontière de A en un point (distinct de x_o) et un seul.

En effet, l'intersection de D avec $\bar{A}$ est un segment fermé S car si D était contenue dans $\bar{A}$, chacun de ses points serait intérieur à A d'après la prop.7, contrairement à l'hypothèse. Si x est l'extrémité de S distincte de x_o , x appartient à la frontière de A et tout point de S distinct de x est intérieur à A d'après la prop.7, d'où le corollaire.

PROPOSITION 9.- Soient A un ensemble convexe de dimension n dans R^n , f une application linéaire affine de R^n sur R^p ; l'image par f de l'intérieur de A est identique à l'intérieur de f(A) dans R^p .

Par une application linéaire affine de R^n sur lui-même, on peut se ramener au cas où f est la projection de R^n sur une variété coordonnée à p dimensions, identifiée à R^p ; alors l'image de l'intérieur de A est un ensemble ouvert dans R^p . Inversement, soit x_o un point intérieur à A , $z_o=f(x_o)$ sa projection ; si z est intérieur à f(A), il existe $\lambda > 1$ tel que $y=z_o+\lambda(z-z_o)$ appartienne à f(A) d'après la prop.7 ; si $x \in A$ est tel que $f(x)=y$, le point $u = \frac{1}{\lambda}x+(1-\frac{1}{\lambda})x_o$ est intérieur à A d'après la prop.7 , et on a $f(u)=z$.

Lorsque A est un ensemble convexe de dimension $p < n$, V la variété linéaire affine (de dimension p) engendrée par A , il résulte de la prop.7 et de la remarque qui suit la déf.2 que les points x de A qui sont intérieurs à A par rapport à V peuvent être caractérisés par la propriété suivante : sur toute droite passant par x et contenant un point de A distinct de x , il existe un segment ouvert contenu dans A et auquel appartient x ; on dit encore que ces points sont les points internes de A . De même, d'après la prop.8, les points x de V qui sont points frontières de A par rapport à V peuvent être caractérisés par la propriété suivante : il existe une droite passant par x et dont l'intersection avec A est un segment ou une demi-droite dont x est une extrémité ; on dit que l'ensemble de ces points est la coque de A .

3. Ensembles convexes compacts.

PROPOSITION 10.- Si A est un ensemble convexe compact de dimension n dans $\mathbb{R}^n$, il existe un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même qui transforme A en la boule fermée B_n .

On peut toujours supposer que 0 est point intérieur de A (prop.6). Soit C la frontière de A , qui est compacte ; comme 0 n'appartient pas à C , l'application $x \to \frac{x}{\|x\|}$ de C dans S_{n-1} est continue dans C ; elle est biunivoque d'après le cor. de la prop.8 ; enfin, elle applique C sur S_{n-1} , puisque toute demi-droite d'origine 0 contient des points internes de A et des points n'appartenant pas à A , donc un point (et un seul) de C . Par suite (Top.gén.,chap.I, § 10, th.1) l'application $x \to \frac{x}{\|x\|}$, restreinte à C , est un homéomorphisme de C sur S_{n-1} ; nous la désignerons par f . Soit g l'application réciproque de f ; pour tout $x \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$, $g(\frac{x}{\|x\|})$ est le point où la demi-droite fermée d'origine 0 passant par x rencontre C , et on peut écrire $x = \lambda g(\frac{x}{\|x\|})$, avec $\lambda = \|x\| / \|g(\frac{x}{\|x\|})\|$; nous prolongerons l'application f en une application biunivoque de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même (notée encore f) en posant $f(0)=0$ et, pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \frac{x}{\|g(\frac{x}{\|x\|})\|}$. En notant encore g l'application réciproque de f, on a $g(0)=0$ et pour tout $x \neq 0$, $g(x) = \|x\| \, g\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$. Ces formules montrent aussitôt que f et g sont continues en tout point $x \neq 0$. D'autre part, si a et b sont la borne inférieure et la borne supérieure de $\|x\|$ dans C, on a $0 < a \leqslant b$, donc $\|f(x)\| \leqslant \frac{\|x\|}{a}$ et $\|g(x)\| \leqslant b\|x\|$, ce qui montre que f et g sont continues au point 0 ; ce sont donc deux <u>homéomorphismes</u> réciproques de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même, et comme $f(A) = \mathcal{B}_n$, la proposition est démontrée.

On dit qu'une partie <u>convexe</u>, <u>compacte</u> et de <u>dimension n</u> de l'espace $\mathbb{R}^n$ est un <u>corps convexe</u> dans $\mathbb{R}^n$.

COROLLAIRE.- <u>Deux ensembles convexes compacts de même dimension sont homéomorphes</u>.

<u>4. Hyperplans d'appui</u>.

DEFINITION 3.- <u>Etant donné un ensemble convexe fermé</u> A <u>dans</u> $E = \mathbb{R}^n$, <u>on dit qu'un hyperplan</u> $H \subset E$ <u>est un hyperplan d'appui de</u> A <u>si</u> H <u>contient au moins un point de</u> A, <u>et si</u> A <u>est contenu dans un des demi-espaces fermés</u> (<u>Top.gén</u>., chap. VI, § 1, n°4) <u>déterminés par</u> H.

Si $g(x)=a$ est une équation de H (g forme linéaire), il revient au même de dire qu'on a $g(x) \geqslant a$ pour tout $x \in A$ (ou $g(x) \leqslant a$ pour tout $x \in A$) et $g(x)=a$ pour au moins un $x \in A$.

<u>Exemple</u>.- En tout point x de la sphère S_{n-1}, l'hyperplan passant par ce point et orthogonal au segment joignant 0 et x, c'est-à-dire l'hyperplan d'équation $\langle y,x \rangle = 1$ est un hyperplan d'appui de la boule $\mathcal{B}_n$, puisque $\langle x,x \rangle = 1$ et que, pour $\|y\| \leqslant 1$, on a $\langle y,x \rangle \leqslant \|y\| \cdot \|x\| = \|y\| \leqslant 1$.

Tout hyperplan d'appui d'un cône convexe C contient son sommet. En effet, supposons que 0 soit le sommet de C ; si $g(x)=a$ est l'équation d'un hyperplan d'appui de C, on a par exemple $g(x) \geqslant a$

pour tout $x \in C$ et $g(x_o)=a$ pour un $x_o \in C$ au moins ; si $x_o=0$, notre assertion est démontrée ; sinon, on a aussi $\lambda g(x_o)=g(\lambda x_o) \geqslant a$ pour tout $\lambda \geqslant 0$, c'est-à-dire $\lambda a \geqslant a$ pour tout $\lambda \geqslant 0$, ce qui n'est possible que si $a=0$.

PROPOSITION 11.- Soit $A \subset E$ un ensemble convexe compact. Pour tout hyperplan H passant par 0, il existe deux hyperplans d'appui distincts de A parallèles à H, sauf lorsque A est contenu dans un hyperplan parallèle à H.

En effet, soit $g(x)=0$ une équation de H (g forme linéaire) ; g étant continue dans A, atteint en un point $x_o \in A$ sa borne supérieure b dans A, et en un point $y_o \in A$ sa borne inférieure a dans A ; on a $a \leqslant b$, et pour tout $z \in A$, $a \leqslant g(z) \leqslant b$, ce qui montre que les hyperplans H_1, H_2 d'équations $g(z)=a$ et $g(z)=b$ sont des hyperplans d'appui pour A, parallèles à H ; si $g(z)=c$ est un autre hyperplan parallèle à H et contenant un point de A, on a $a \leqslant c \leqslant b$; si c est distinct de a et de b, on a $g(y_o)<c<g(x_o)$, donc $g(z)=c$ n'est pas un hyperplan d'appui de A.

On dit que l'ensemble des points $x \in E$ tels que $a \leqslant g(x) \leqslant b$ est une bande d'appui de A, limitée par les deux hyperplans d'appui H_1, H_2 (elle se réduit à un hyperplan lorsque $H_1=H_2$).

PROPOSITION 12.- Soit A un ensemble convexe fermé contenu dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout point x_o n'appartenant pas à A, il existe un hyperplan H tel que x_o appartienne à l'un des demi-espaces ouverts déterminés par H, et que A soit contenu dans l'autre (on dit que H sépare le point x_o et l'ensemble A).

En effet, soit u un point de A ; pour tout point de A n'appartenant pas à la boule fermée S de centre x_o et de rayon $\|u-x_o\|$, on a

$\| x-x_0 \| > \| u-x_0 \|$; comme $S \cap A$ est compact, la distance $\| x-x_0 \|$ de x_0 à un point x de A atteint sa borne inférieure $a > 0$ dans A en un point $y \in S \cap A$. Soit H' l'hyperplan orthogonal à la droite joi-

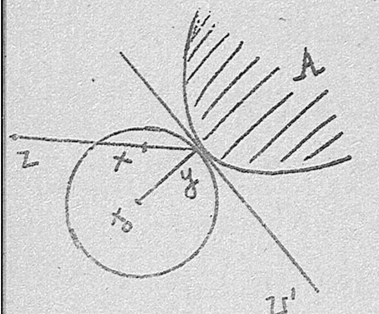

fig. 2

gnant x_0 et y, et passant par y (fig.2) ; montrons que H' est un <u>hyperplan d'appui</u> de A , et de façon précise, que A est dans le demi-espace fermé déterminé par H' et ne contenant pas x_0 . En effet, H' a pour équation $g(z) = \langle y-z, y-x_0 \rangle = 0$ et le demi-espace ouvert déterminé par H' et contenant x_0 est formé des points z tels que $g(z) > 0$. Si un point z de ce demi-espace appartenait à A , il en serait de même des points $x = y + \lambda(y-z)$ pour $0 < \lambda < 1$; or, on a $\| x-x_0 \|^2 = \| y-x_0 \|^2 - 2\lambda g(z) + \lambda^2 \| y-z \|^2$; pour $\lambda > 0$ assez petit, on aurait donc $\| x-x_0 \| < \| y-x_0 \|$, contrairement à la définition de y . Cela étant, il est clair que l'hyperplan H parallèle à H' et passant par le milieu du segment joignant x_0 et y satisfait aux conditions de l'énoncé.

COROLLAIRE 1.- <u>Un ensemble convexe fermé est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent</u>.

COROLLAIRE 2.- <u>Soit</u> A <u>un ensemble convexe compact</u>, V <u>une variété linéaire affine ne rencontrant pas</u> A . <u>Il existe alors un hyperplan séparant</u> V <u>et</u> A .

En effet, soit $p < n$ la dimension de V , et soit W une variété orthogonale à V , de dimension n-p ; projetons orthogonalement V et A sur W ; la projection de A est un ensemble convexe compact B , la projection de V est un point x_0 n'appartenant pas à B ; il existe donc dans W un hyperplan L (de dimension n-p-1) séparant x_0 et B ; l'hyperplan H parallèle à V passant par L sépare V et A .

<u>Remarque</u>.- Le corollaire n'est plus exact si on suppose seulement que A est un ensemble convexe <u>fermé</u> (exerc. 12).

<u>Théorème 1</u> (Minkowski).- <u>Soit A un ensemble convexe fermé dans $\mathbb{R}^n$; par tout point frontière x_0 de A , il passe un hyperplan d'appui de A</u> .

En effet, la borne inférieure de la distance de x_0 aux hyperplans d'appui de A est 0 , sans quoi x_0 serait point intérieur à l'intersection des demi-espaces fermés contenant A , contrairement à l'hypothèse (cor. 1 de la prop. 12). Pour tout entier $m > 0$, il existe donc un hyperplan d'appui H_m tel que, si a_m est la projection de x_0 sur H_m , on ait $\| x_0 - a_m \| \leqslant 1/m$; posons $b_m = (x_0 - a_m)/\| x_0 - a_m \|$ (en supposant $x_0 - a_m \neq 0$; dans le cas contraire le théorème serait démontré) ; b_m est un point de S_{n-1} , et comme S_{n-1} est compact, on peut (en extrayant au besoin une suite partielle) supposer que la suite (b_m) converge vers un point $b \in S_{n-1}$. Par hypothèse, on a $\langle x - a_m, b_m \rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in A$; à la limite, on a donc $\langle x - x_0, b \rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in A$, ce qui prouve que l'hyperplan d'équation $\langle x - x_0, b \rangle = 0$ est un hyperplan d'appui de A contenant x_0 .

COROLLAIRE.- <u>Soient</u> A <u>un ensemble convexe de dimension n fermé dans</u> $\mathbb{R}^n$, V <u>une variété linéaire affine de dimension</u> $p < n$, <u>ne rencontrant pas l'intérieur de</u> A ; <u>il existe alors un hyperplan contenant</u> V <u>et ne rencontrant pas l'intérieur de</u> A .

En effet, soit W une variété orthogonale à V de dimension n-p ; projetons orthogonalement V et A sur W ; la projection de A est un ensemble convexe B de dimension n-p , la projection de V un point x_0 non intérieur à B (prop.9) ; si, dans W , L est un hyperplan (de dimension n-p-1) passant par x_0 et ne rencontrant pas l'intérieur de B , l'hyperplan engendré par V et L est un hyperplan ne rencontrant pas l'intérieur de A . On est donc ramené au cas où V est réduit à un point x_0 .

Soit alors C le cône convexe de sommet x_0 engendré par A ; x_0 ne peut être point intérieur de C , sans quoi toute demi-droite ouverte d'origine x_0 contiendrait un point de A , donc toute droite passant par x_0 contiendrait un segment ouvert contenant x_0, et contenu dans A , autrement dit (prop.7) x_0 serait intérieur à A , contrairement à l'hypothèse. Cela étant, tout hyperplan d'appui de $\overline{C}$ passant par x_0 est évidemment un hyperplan ne rencontrant pas l'intérieur de A , d'où le corollaire.

<u>Remarque</u>.- Si V ne rencontre pas A , il n'est pas toujours possible de trouver un hyperplan d'appui de A contenant V (exerc. 13).

<u>5. Dualité des ensembles convexes</u>.

Soit A un ensemble convexe dans $E = R^n$, contenant le point 0 . Considérons l'ensemble A^* des <u>formes linéaires</u> x' sur E telles que $\langle x,x'\rangle \leq 1$ pour <u>tout</u> $x \in A$. L'ensemble A^* est une partie <u>convexe</u> de l'espace vectoriel E' <u>dual</u> de E ; car si on a $\langle x,x'\rangle \leq 1$ et $\langle x,y'\rangle \leq 1$ pour tout $x \in A$, on a aussi $\langle x,\lambda x'+(1-\lambda)y'\rangle \leq 1$ pour $0 \leq \lambda \leq 1$; le point 0 appartient évidemment à A^* ; enfin A^* est <u>fermé</u>, étant dans E' l'intersection des demi-espaces fermés $\langle x,x'\rangle \leq 1$ lorsque x parcourt A . On dit que A^* est l'ensemble convexe <u>conjugué</u> de A dans E' . On a $(\overline{A})^* = A^*$ en vertu de la continuité des formes linéaires dans E .

PROPOSITION 13.- <u>Soit</u> A <u>un ensemble convexe dans</u> E , <u>contenant le point</u> 0 . <u>L'ensemble conjugué de</u> A^* <u>est identique à</u> $\overline{A}$.

Il est évident que $\overline{A}$ est contenu dans l'ensemble A^{**} conjugué de A^* . D'autre part, si $x_0 \notin \overline{A}$, il existe un hyperplan H séparant x_0 et $\overline{A}$ (prop.12), dont on peut écrire une équation $\langle x,x'_0\rangle = 1$, en supposant qu'on a $\langle x_0,x'_0\rangle > 1$; on a donc $\langle x,x'_0\rangle \leq 1$ pour tout $x \in A$, ce qui montre que $x'_0 \in A^*$ et que $x_0 \notin A^{**}$, d'où la proposition.

On notera que si A est un <u>cône convexe</u> de sommet 0, son conjugué A^* est un <u>cône convexe fermé</u> ; en effet, si $\langle x,x'\rangle \leq 1$ pour tout $x\in A$, on a aussi $\langle x,\lambda x'\rangle = \langle \lambda x,x'\rangle \leq 1$ pour tout $x\in A$, et tout $\lambda > 0$, puisque $\lambda x \in A$ pour tout $\lambda > 0$; comme $\langle \lambda x,x'\rangle = \lambda\langle x,x'\rangle$, on voit que pour tout $x'\in A^*$, on a $\langle x,x'\rangle \leq 1/\lambda$ pour tout $x\in A$ et tout $\lambda > 0$, c'est-à-dire $\langle x,x'\rangle \leq 0$ pour tout $x\in A$, et réciproquement cette condition entraîne évidemment $x'\in A^*$; elle définit donc le cône convexe A^*.

Plus particulièrement, si A est un <u>sous-espace vectoriel</u> de E, l'ensemble convexe conjugué A^* n'est autre que le sous-espace vectoriel de E' <u>orthogonal</u> (<u>Alg.</u>, chap. II, § 4) à A, car pour tout $x\in A$, tout $x'\in A^*$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on a $\langle \lambda x,x'\rangle = \langle x,\lambda x'\rangle = \lambda\langle x,x'\rangle \leq 1$ ce qui est équivalent à $\langle x,x'\rangle = 0$ pour tout $x\in A$.

<u>Remarque</u>.- Soit A un ensemble convexe dans $E=\mathbb{R}^n$, contenant le point 0. Considérons, dans l'espace $F=E\times\mathbb{R}$, le cône convexe C de sommet 0 engendré par l'ensemble convexe $A_1=A\times\{1\}$, c'est-à-dire l'ensemble des points $(\alpha x,\alpha)$, où x parcourt A et α l'ensemble des nombres >0. Toute forme linéaire y' sur F peut s'écrire d'une manière et d'une seule $(x,\lambda)\to x'(x)-\mu\lambda$, où $x'\in E'$ et $\mu\in\mathbb{R}$; si $y'\in C^*$, on a $x'(x)-\mu\leq 0$ pour tout $x\in A$ et réciproquement ; si on identifie y' au point (x',μ) de $E'\times\mathbb{R}$, on voit donc que C^* n'est autre que le cône convexe de sommet 0 engendré par l'ensemble convexe $A^*\times\{1\}$ dans $F'=E'\times\mathbb{R}$.

<u>Exercices</u>.- 1) Montrer que, dans $\mathbb{R}^n$, tout ensemble convexe ouvert non vide est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ (utiliser l'exerc. 12 de <u>Top. gén.</u>, chap. VI, § 2).

2) a) Soit A un ensemble convexe fermé non borné dans $\mathbb{R}^n$. S'il existe une droite contenue tout entière dans A, pour chaque point $x \in A$ l'ensemble des droites passant par x et contenues dans A est une variété linéaire $V(x)$, et pour deux points quelconques x, y de A, $V(x)$ et $V(y)$ se déduisent l'une de l'autre par une translation.

b) Déduire de a) que, si $V(x)$ est de dimension p, il existe une application linéaire affine de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même qui transforme A en un ensemble de la forme $\mathbb{R}^p \times C$, où C est un ensemble convexe fermé contenu dans $\mathbb{R}^{n-p}$.

3) Soit A un ensemble convexe fermé non borné dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout point $x \in A$, il existe au moins une demi-droite fermée d'origine x, contenue dans A. L'ensemble $C(x)$ des demi-droites fermées d'origine x, contenues dans A, est un cône convexe. Pour deux points quelconques x, y de A, les cônes convexes $C(x), C(y)$ se déduisent l'un de l'autre par une translation.

4) Soit C un cône convexe fermé dans $\mathbb{R}^n$, de sommet 0, ne contenant aucune variété linéaire de dimension > 0. Montrer que le complémentaire par rapport à la sphère S_{n-1} de l'ensemble $C \cap S_{n-1}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$ (faire une projection stéréographique d'un point de $C \cap S_{n-1}$, et utiliser l'exerc. 12 de Top.Gén., chap.VI, §2). Si C possède un point intérieur montrer $C \cap S_{n-1}$ est homéomorphe à la boule fermée B_{n-1} (même méthode).

5) Soit A un ensemble convexe fermé non borné dans $\mathbb{R}^n$, de dimension n, ne contenant aucune variété linéaire de dimension > 0. Montrer que la frontière de A est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$ (utiliser les exerc. 3 et 4).

6) Soit A un ensemble convexe dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ dont la distance à A est $< \alpha$ (resp. $\leq \alpha$) est un ensemble convexe pour tout nombre $\alpha > 0$.

7) Soit A un ensemble convexe de dimension n dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que, si un hyperplan H est tel que chacun des demi-espaces ouverts déterminés par H contient un point de A, H contient un point intérieur de A (remarquer que $\bar{A}$ est l'adhérence de l'intérieur de A). L'intersection de H et de la frontière de A est alors un ensemble <u>rare</u> (Top.gén., chap.IX, § 5) par rapport à cette frontière (se ramener au cas où n=2).

8) a) Soient A_i $(1 \leq i \leq r)$ $r > n+1$ ensembles convexes dans $\mathbb{R}^n$; on suppose que r-1 quelconques des A_i ont une intersection non vide ; montrer que les r ensembles A_i ont une intersection non vide (soit x_i un point de l'intersection des A_j d'indice $j \neq i$; il existe r nombres λ_i non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i = 0$; grouper dans ces équations les termes correspondant aux $\lambda_i \geq 0$ et ceux correspondant aux $\lambda_i < 0$).

b) Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble d'ensembles convexes compacts dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que, pour que l'intersection des ensembles $A \in \mathfrak{G}$ ne soit pas vide, il suffit que l'intersection de n+1 quelconques d'entre eux ne soit pas vide.

9) Montrer que si f est une application biunivoque de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même, qui transforme tout ensemble convexe en un ensemble convexe, f est une application linéaire affine (remarquer qu'un segment fermé est l'intersection des ensembles convexes qui contiennent ses extrémités).

10) On considère l'ensemble $\mathfrak{F}(E)$ des parties fermées de $\mathbb{R}^n$, muni de la structure uniforme déduite de la structure uniforme

additive de $\mathbf{R}^n$, par le procédé de l'exerc.7 de <u>Top.gén.</u>, chap.II, §2. Montrer que, dans cet espace, l'ensemble $\mathfrak{L}(E)$ des parties convexes fermées de E est un ensemble fermé. En déduire que si K est un ensemble compact dans $\mathbf{R}^n$, l'ensemble des parties convexes fermées de $\mathbf{R}^n$ contenues dans K est un ensemble compact dans $\mathfrak{F}(E)$ (cf. <u>Top.gén.</u>, chap.II, §4, exerc.6).

11) Soient A_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ un nombre fini d'ensembles convexes dans $\mathbf{R}^n$, W_i le sous-espace vectoriel parallèle à la variété linéaire affine engendrée par A_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$. Si W est le sous-espace $\sum_{i=1}^{p} W_i$, montrer que la variété linéaire engendrée par l'ensemble convexe $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_i$ (où les λ_i sont tous $\neq 0$) est parallèle à W.

12) a) Soit A un ensemble convexe fermé dans $\mathbf{R}^n$, x_0 un point n'appartenant pas à A ; montrer qu'il existe un hyperplan contenant x_0 et ne rencontrant pas A.

b) On considère le cône convexe fermé C dans $\mathbf{R}^3$ défini par les inégalités $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $z^2 \leqslant xy$; montrer que par la droite D d'équations $x=0$, $z=1$, qui ne rencontre pas C, il ne passe aucun hyperplan ne rencontrant pas C.

13) a) Soient A un corps convexe, V une variété linéaire affine ne contenant aucun point intérieur de A ; montrer qu'il existe un hyperplan d'appui de A contenant V (se ramener au cas où V est un point, et utiliser le corps convexe conjugué de A).

b) Soit A l'ensemble convexe fermé dans $\mathbf{R}^2$ formé des points tels que $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $xy \geqslant 1$; montrer que par aucun point tel que $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$ il ne passe de droite d'appui de A.

14) Montrer que la distance maxima de deux hyperplans d'appui parallèles d'un ensemble convexe compact A est égale au diamètre de A.

21

15) Soient A et B deux ensembles convexes compacts, de dimension n, sans point intérieur commun ; si O est point frontière commun de A et de B , montrer qu'il existe un hyperplan d'appui H commun à A et B passant par O , tel que A et B soient respectivement contenus dans chacun des deux demi-espaces fermés déterminés par H (appliquer le th.1 à l'ensemble convexe compact A-B).

16) a) Soit A un ensemble convexe compact de dimension n ; pour tout $x \in S_{n-1}$, on désigne par $\lambda(x)$ la plus grande longueur des segments contenus dans A et parallèles au vecteur x . Soient u,v deux points de A tels que le segment d'extrémités u,v soit parallèle au vecteur x et ait pour longueur $\lambda(x)$; montrer qu'il existe deux hyperplans d'appui parallèles passant respectivement par u et v (appliquer l'exerc.15 en considérant l'ensemble $A+\lambda(x)x$) .

b) Soit δ la distance minima de deux hyperplans d'appui parallèles de A ; montrer qu'il existe deux points a,b de la frontière de A , tels que $\|a-b\| = \delta$, et que les hyperplans passant respectivement par a et b et perpendiculaires au segment d'extrémités a,b soient des hyperplans d'appui de A (utiliser a)).

17) Soit A un ensemble compact dans $\mathbb{R}^n$, ayant des points intérieurs. Montrer que si par tout point frontière de A il passe au moins un hyperplan d'appui de A , A est convexe (raisonner par l'absurde en montrant que, si a et b sont deux points de A tels que le segment d'extrémités a,b ne soit pas contenu dans A , et si c est un point intérieur de A non situé sur le segment d'extrémités a,b , il existe un point frontière de A , distinct de a et b , dans le triangle de sommets a,b,c).

18) Etant donné un ensemble convexe fermé A dans $\mathbb{R}^n$, on dit qu'une variété linéaire affine V de dimension $< n$ est <u>variété d'appui</u> de A si V rencontre A et si, pour tout $x \in V \cap A$, tout segment ouvert contenu dans A et contenant x est contenu dans V .

a) Montrer que tout hyperplan d'appui de A est une variété d'appui de A .

b) Soit x un point frontière de A , F_x la réunion des segments ouverts contenus dans A et contenant x (ou l'ensemble réduit à x lorsqu'il n'y a aucun segment ouvert ayant la propriété précédente). Montrer que F_x est un ensemble convexe n'ayant que des points internes, et que la variété linéaire V_x engendrée par F_x est la plus petite variété d'appui de A contenant x ; on a $V_x \cap A = \overline{F}_x$. On dit que V_x est la <u>variété d'appui de A en x</u> , et $\overline{F}_x$ la <u>facette</u> de x dans l'ensemble convexe A .

c) Montrer que si y est un point de la <u>coque</u> de F_x , la variété d'appui de A en y a une dimension <u>strictement inférieure</u> à celle de V_x .

d) Si V est une variété d'appui quelconque de A , F son intersection avec A , W la variété linéaire engendrée par F , montrer que W est variété d'appui de chacun des points internes de F , et que F est la facette de chacun de ces points .

19) a) Soit A un ensemble convexe fermé contenant 0 . Soit x_0 un point frontière de A ; montrer que l'ensemble des points x'_0 du conjugué A^* de A tels que $\langle x_0, x'_0 \rangle = 1$, et que x'_0 soit point frontière de A^* , est une facette de A^* , dite <u>facette duale</u> du point x_0 .

b) On appelle <u>ordre</u> de x_0 la dimension de sa facette, <u>classe</u> de x_0 la dimension de sa facette duale ; si p et q sont l'ordre et la classe de x_0 , montrer que $p+q \leq n-1$. Montrer que tout point interne de la facette de x_0 a même facette duale (et par suite même ordre et même classe) que x_0 ; on dit encore que la facette duale F' d'un quelconque de ces points est la facette duale de la facette F de x_0 ; la facette duale de F' n'est autre que F (on dit encore que F et F' sont deux <u>facettes duales</u>).

c) Un point de A de classe n-1 (et par suite d'ordre 0) est appelé <u>sommet</u> de A . Montrer que l'ensemble des sommets de A est dénombrable (considèrer les facettes duales des sommets de A et utiliser la prop.10).

d) On dit qu'une facette F de A , d'ordre p et de classe q , est <u>règulière</u> si $p+q=n-1$. Si une variété linéaire W de dimension n-p rencontre F en un seul point interne de F , montrer que ce point est un sommet de l'ensemble convexe $W \cap A$. En déduire que l'ensemble des facettes régulières d'ordre p de A est dénombrable (considèrer la projection de A sur chacune des variétés coordonnées V à p dimensions ; si l'ensemble des facettes régulières d'ordre p dont la projection sur V est de dimension p n'était pas dénombrable, montrer qu'il existerait un point de V appartenant à une infinité non dénombrable de ces projections, en considérant les points de V à coordonnées rationnelles ; utiliser ensuite c)). Donner un exemple d'ensembles convexe ayant une infinité non dénombrable de facettes non régulières.

e) Si tous les points frontière de A sont de classe 0 , montrer que l'application qui, à tout x appartenant à la frontière G de A , fait correspondre l'unique point de sa facette duale, est une application continue de G sur la frontière de A^* (utiliser la prop.1 de <u>Top.Gén.</u>, chap.I, § 10).

§ 2. Fonctions convexes.

Soit A une partie de $E = \mathbb{R}^n$, f une fonction numérique finie définie dans A , G le <u>graphe</u> ou ensemble représentatif de la fonction f dans l'espace produit $E \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$, c'est-à-dire l'ensemble des points $M_x = (x, f(x))$ où x parcourt A . Nous conviendrons de dire qu'un point (a,b) de $E \times \mathbb{R}^n$ tel que $a \in A$, est <u>au-dessus</u> (resp. <u>strictement au-dessus</u>, <u>au-dessous</u>, <u>strictement au-dessous</u> de G , si on a $b \geqslant f(a)$ (resp. $b > f(a)$, $b \leqslant f(a)$, $b < f(a)$). Si P et Q sont deux points de $E \times \mathbb{R}^n$, nous désignerons par PQ le segment fermé d'extrémités P et Q .

1. Définition des fonctions convexes.

DEFINITION 1.- <u>Etant donnée une partie convexe D de $E = \mathbb{R}^n$, on dit qu'une fonction numérique finie f , définie dans D , est convexe dans D si l'ensemble des points de $E \times \mathbb{R}$ situés au-dessus du graphe de f</u> (autrement, l'ensemble des points (x,y) tels que $y \geqslant f(x)$) <u>est convexe</u>)

Cette définition est équivalente à la suivante : <u>quels que soient les points distincts x,x' de D , tout point du segment $M_x M_{x'}$ est au-dessus du graphe G de f</u> . En effet, cette condition est évidemment nécessaire pour que f soit convexe dans D ; elle est aussi suffisante, car elle équivaut à l'inégalité suivante :

(1) $$f(\lambda x + (1-\lambda)x') \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x')$$

pour tout couple (x,x') de points de D et tout $\lambda \in [0,1]$. Si (x,y) et (x',y') sont deux points situés au-dessus de G , on a

$$y \geqslant f(x) \ , \quad y' \geqslant f(x') \ , \text{ d'où } \lambda y + (1-\lambda) y' \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x') \geqslant$$
$$\geqslant f(\lambda x + (1-\lambda) x')$$ pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, ce qui montre que tout point du segment d'extrémités (x,y) et (x',y') est au-dessus de G .

<u>Exemples</u>. - 1) Toute fonction linéaire affine (numérique) est convexe dans $\mathbb{R}^n$.

2) La fonction x^2 est convexe dans $\mathbb{R}$, car on a

$$\lambda x^2+(1-\lambda)x'^2-(\lambda x+(1-\lambda)x')^2=\lambda(1-\lambda)(x-x')^2 \geqslant 0 ,$$

pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

3) La fonction $|x+y|$ est convexe dans $\mathbb{R}^2$, car on a

$$|\lambda x+(1-\lambda)x'+\lambda y+(1-\lambda)y'| \leqslant \lambda\, |x+y|+(1-\lambda)\, |x'+y'|$$

pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

L'inégalité (1) se généralise de la façon suivante :

PROPOSITION 1.- <u>Si</u> $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ <u>est une famille finie de p points de</u> D, $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ <u>une famille de p nombres réels tels que</u> $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ <u>et</u> $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, <u>on a</u>

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i) \tag{2}$$

En effet, les points $(x_i,f(x_i))$ appartiennent à l'ensemble convexe des points situés au-dessus du graphe de f, donc aussi le point $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i(x_i,f(x_i))$.

La condition de convexité (1) peut encore s'interprèter de la façon suivante : pour que f soit convexe dans D, il faut et il suffit que pour toute droite Δ rencontrant D, la <u>restriction</u> de f à $D \cap \Delta$ soit <u>convexe</u> dans cet ensemble. Autrement dit, si $t \to a+tb$ est une représentation paramétrique de Δ, et si l'intersection $D \cap \Delta$ est l'image d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ par cette représentation, la fonction $f(a+tb)$ de la variable réelle t doit être convexe dans l'intervalle I.

Soit f une fonction convexe dans D, x,x' deux points distincts de D, z un point de D situé sur la droite passant par x et x', mais non sur le segment d'extrémités x,x' ; alors le point $M_z=(z,f(z))$ est <u>au-dessus</u> de la droite Δ joignant M_x et $M_{x'}$. En effet, d'après la remarque précédente, on peut se ramener au cas où $n=1$, D étant un intervalle dans $\mathbb{R}$; si par exemple $x<x'<z$ et si M_z était strictement au-dessous de Δ , $M_{x'}$ serait strictement au-dessus du segment M_xM_z , contrairement à la déf.1 .

On en déduit que si z est <u>un</u> point du segment S d'extrémités x,x' tel que M_z soit <u>sur</u> le segment $M_xM_{x'}$, pour <u>tout autre point</u> z' de S , $M_{z'}$ est aussi <u>sur</u> le segment $M_xM_{x'}$: en effet, il résulte de ce qui précède que $M_{z'}$ doit être à la fois au-dessous et au-dessus de ce segment.

DEFINITION 2.- <u>Etant donnée une partie convexe</u> D <u>de</u> $\mathbb{R}^n$, <u>on dit qu'une fonction numérique finie</u> f , <u>définie dans</u> D , <u>est strictement convexe dans</u> D <u>si, quels que soient les points</u> x,x' <u>de</u> D , <u>tout point du segment</u> $M_xM_{x'}$ <u>distinct des extrémités, est strictement au-dessus du graphe de</u> f .

Il revient au même de dire que, pour tout couple (x,x') de points distincts de D et tout nombre réel λ tel que $0<\lambda<1$, on a

$$f(\lambda x+(1-\lambda)x')<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(x') \tag{3}$$

La proposition suivante est l'analogue de la prop.1 pour les fonctions strictement convexes :

PROPOSITION 2.- <u>Si</u> f <u>est strictement convexe dans</u> D , <u>pour toute famille</u> $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ <u>de</u> $p\geqslant 2$ <u>points distincts de</u> D , <u>et toute famille</u> $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ <u>de</u> p <u>nombres réels tels que</u> $0<\lambda_i<1$ <u>et</u> $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i=1$, <u>on a</u>

$$f\Big(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i\Big)<\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f(x_i) \tag{4}$$

Il suffit de raisonner par récurrence sur $p>2$. Le nombre $\mu=\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i$ est >0 ; le point $x=\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i x_i=\big(\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i x_i\big)/\big(\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i\big)$ appartient à D , et l'hypothèse de récurrence entraîne $\mu f(x)<\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i f(x_i)$; d'autre part on a, d'après (1)

$$f\Big(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i\Big)=f(\mu x+(1-\mu)x_p)\leqslant \mu f(x)+(1-\mu)f(x_p)<\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f(x_i).$$

Des exemples donnés ci-dessus, le premier et le troisième ne sont pas des fonctions strictement convexes ; par contre on voit que x^2 est une fonction strictement convexe dans $\mathbb{R}$; un calcul analogue montre que $1/x$ est strictement convexe dans $]0,+\infty[$.

On dit que f est <u>concave</u> (resp. <u>strictement concave</u>) dans D si -f est convexe (resp. strictement convexe) dans D . Il revient au même de dire que, pour tout couple (x,x') de points distincts de D et tout $\lambda \in]0,1[$, on a $f(\lambda x+(1-\lambda)x') \geqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(x')$ (resp. $f(\lambda x+(1-\lambda)x') > \lambda f(x)+(1-\lambda)f(x')$).

<u>Remarque</u>.- Soit A un corps convexe contenu dans $\mathbb{R}^n$, D sa projection sur $\mathbb{R}^{n-1}$ (identifié à la variété coordonnée $\xi_n=0$) D est un corps convexe dans $\mathbb{R}^{n-1}$. Pour tout point $u_0 \in D$, l'ensemble des points $(u,z) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ qui appartiennent à la droite $u=u_0$ est un segment fermé ; désignons par $f_1(u)$ et $f_2(u)$ les projections de ses extrémités sur $\mathbb{R}$ (avec $f_1(u) \leqslant f_2(u)$). La fonction f_1 est <u>convexe</u> dans D , car le segment d'extrémités $(u,f_1(u)),(v,f_1(v))$ est contenu dans D donc par définition au-dessus du graphe de f_1 ; on voit de même que f_2 est <u>concave</u> dans D . Le corps convexe A est donc l'ensemble des points $(u,z) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ tels que $u \in D$ et $f_1(u) \leqslant z \leqslant f_2(u)$.

<u>2. Familles de fonctions convexes.</u>

PROPOSITION 3.- <u>Soient</u> $f_i (1 \leqslant i \leqslant p)$ p <u>fonctions convexes dans un ensemble convexe</u> $D \subset \mathbb{R}^n$, c_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ p <u>nombres positifs quelconques; la fonction</u> $f = \sum_{i=1}^{p} c_i f_i$ <u>est convexe dans</u> D . <u>En outre, si pour un indice</u> j <u>au moins</u>, f_j <u>est strictement convexe dans</u> D <u>et</u> $c_j > 0$, f <u>est strictement convexe dans</u> D .

Cela résulte aussitôt de l'inégalité (1) (resp. (3)) appliquée à chacune des f_i , en multipliant les deux membres de l'inégalité relative à f_i par c_i , et ajoutant membre à membre.

PROPOSITION 4.- <u>Soit</u> (f_α) <u>une famille de fonctions convexes dans un ensemble convexe</u> $D \subset R^n$; <u>si l'enveloppe supérieure</u> g <u>de cette famille est finie en tout point de</u> D , <u>elle est convexe dans</u> D .

En effet, l'ensemble des points (x,y) tels que $x \in D$ et $y \geqslant g(x)$ est identique à l'intersection des ensembles convexes formés respectivement des points situés au-dessus du graphe de chacune des fonctions f_α.

PROPOSITION 5.- <u>Soit</u> H <u>un ensemble de fonctions convexes dans un ensemble convexe</u> $D \subset R^n$; <u>si</u> $\mathfrak{F}$ <u>est un filtre sur</u> H <u>qui converge simplement dans</u> D <u>vers une fonction numérique finie</u> f_0 , <u>cette fonction est convexe dans</u> D .

Il suffit pour le voir de passer à la limite suivant $\mathfrak{F}$ dans l'inégalité (1).

<u>3. Continuité d'une fonction convexe</u>.

Pour étudier les propriétés des fonctions convexes dans un ensemble convexe $D \subset E = R^n$, on peut se limiter au cas où D est de dimension n; dans le cas contraire, on est ramené (par une application linéaire affine) à une fonction définie dans un ensemble convexe de dimension $p < n$ contenu dans R^p . Supposons donc que D soit de dimension n , et soit f une fonction convexe dans D ; soit S l'ensemble convexe des points $(x,y) \in E \times R$ tels que $x \in D$ et $y \geqslant f(x)$. Montrons que l'<u>intérieur</u> $\overset{\circ}{S}$ de cet ensemble n'est autre que l'ensemble des (x,y) tels que $x \in \overset{\circ}{D}$ et $y > f(x)$. Il est clair en premier lieu que S est de dimension $n+1$, donc $\overset{\circ}{S}$ n'est pas vide (§ 1,prop.6) ; en outre, comme D est la projection de S sur E , $\overset{\circ}{D}$ est la projection de $\overset{\circ}{S}$ sur E (prop.9). Pour tout $x \in \overset{\circ}{D}$, il existe donc un point (x,y) de S

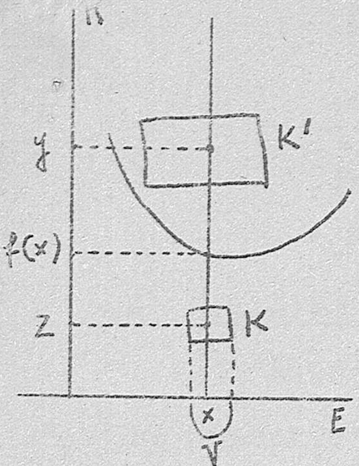

fig.3

intérieur à S ; on en déduit (§ 1,prop.7) que les points (x,z) tels que $z > f(x)$ (resp. $z < f(x)$) sont <u>intérieurs</u> (resp. <u>extérieurs</u>) à S . Si $z < f(x) < y$, il existe donc un cube fermé K de centre (x,z) extérieur à S et un cube fermé K' de centre (x,y) intérieur à S (fig.3) ; si V est le cube fermé de centre x dans E , intersection des projections de K et K' sur E , V est contenu dans $\mathring{D}$ et d'après ce qui précède, f est <u>bornée</u> dans V ; en outre, l'intersection $H = G \cap (V \times R)$ de $V \times R$ et du graphe G de f est identique à l'ensemble des points frontières de S contenus dans l'ensemble fermé $V \times R$ c'est donc un ensemble <u>compact</u>. Cela étant, la restriction à H de la projection de $E \times R$ sur E est continue et biunivoque et elle applique H sur V ; son application réciproque est donc continue dans V . Mais comme cette application réciproque n'est autre que f (restreinte à V) on voit que :

PROPOSITION 6.- <u>Soit</u> D <u>un ensemble convexe de dimension n dans</u> $E = R^n$. <u>Toute fonction convexe dans</u> D <u>est continue en tout point intérieur à</u> D .

<u>Remarques</u>.- 1) Une fonction convexe dans D n'est pas nécessairement continue en un point frontière de D . Par exemple, dans l'intervalle $I = [0,1]$ de R , la fonction f égale à 0 pour $0 \leq x < 1$, à 1 pour $x=1$, est convexe.

2) Si f est continue dans un ensemble convexe D de dimension n , et convexe dans l'<u>intérieur</u> de D , elle est convexe dans D ; en effet, en faisant tendre x (ou x') vers un point frontière de D dans l'inégalité (1), cette inégalité est encore vraie à la limite.

3) Si f est convexe dans l'intérieur d'un ensemble convexe D de dimension $n > 1$, elle n'a pas nécessairement de limite en un point frontière de D (exerc. 4).

4. Critères de convexité.

~~Nous~~ avons vu au n°1 que pour prouver qu'une fonction f définie dans un ensemble convexe $D \subset \mathbb{R}^n$ est convexe, on ~~est ramené~~ à montrer que la restriction de f à $D \cap \Delta$ est convexe pour toute droite Δ . Nous nous bornerons donc dans ce qui suit à donner des critères de convexité pour les fonctions numériques d'une seule variable réelle.

PROPOSITION 7.- *Soit* f *une fonction numérique finie définie dans un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$. *Pour que* f *soit convexe dans* I , *il faut et il suffit que, pour tout couple de nombres* a, b *de* I *tels que* $a \quad b$ *et tout nombre réel* μ , *la fonction* $f(x)+\mu x$ *atteigne sa borne supérieure dans* $[a,b]$ *en l'un des points* a *ou* b .

La condition est *nécessaire* ; en effet, comme μx est convexe dans $\mathbb{R}$, il en est de même de $f(x)+\mu x$; on peut donc se borner au cas où $\mu = 0$. Or, pour $x = \lambda a+(1-\lambda)b$, on a

$$f(x) \leqslant \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b) \leqslant \operatorname{Max}(f(a),f(b)).$$

La condition est *suffisante*. Prenons en effet $\mu = -(f(b)-f(a))/(b-a)$, et soit $g(x)=f(x)+\mu x$; on a $g(a)=g(b)$, donc $g(x) \leqslant g(a)$ pour tout $x \in [a,b]$, et on vérifie aussitôt que cette inégalité équivaut à (1) où on a remplacé x par a et x' par b .

PROPOSITION 8.- *Soit* f *une fonction numérique finie, semi-continue supérieurement dans un intervalle ouvert* $I \subset \mathbb{R}$. *Pour que* f *soit convexe dans* I , *il faut et il suffit que, pour tout* $x \in I$ *on ait*

$$\limsup_{h \to 0,\, h \neq 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} \geqslant 0 .$$

La condition est évidemment nécessaire, puisque lorsque $x+h$ et $x-h$ sont dans I, on a $f(x) \leqslant \frac{1}{2}(f(x+h)+f(x-h))$ d'après (1). Réciproquement, supposons qu'elle soit satisfaite ; montrons d'abord que pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $g(x)=f(x)+\varepsilon x^2$ est convexe dans I. Appliquons pour cela le critère de la prop.7 ; soit λ un nombre réel quelconque et $\varphi(x)=g(x)+\lambda x$, et soit $[a,b]$ un intervalle compact quelconque contenu dans I $(a<b)$; φ est semi-continue supérieurement dans $[a,b]$, donc atteint sa borne supérieure dans $[a,b]$ en un point x_0 de cet intervalle (Top.gén., chap.IV, § 6,th.3). Montrons que x_0 ne peut être intérieur à $[a,b]$; l'hypothèse entraînerait en effet que, pour tout $\delta > 0$, il existerait des valeurs de $h > 0$ telles que $h < \delta$, que x_0-h et x_0+h appartiennent à $[a,b]$ et que

$$\varphi(x_0+h)+\varphi(x_0-h)-2\varphi(x_0)=g(x_0+h)+g(x_0-h)-2g(x_0) \geqslant 2\varepsilon h^2$$

ce qui est contradictoire avec la définition de x_0, puisque $\varphi(x_0+h) \leqslant \varphi(x_0)$ et $\varphi(x_0-h) \leqslant \varphi(x_0)$. La prop.7 prouve donc que g est convexe ; cela étant, lorsque ε tend vers 0, g converge simplement vers f dans I, donc (prop.5) f est convexe dans I.

COROLLAIRE.- Pour qu'une fonction numérique finie f, définie dans un ensemble convexe ouvert $D \subset R^n$, et semi-continue supérieurement dans D, soit convexe dans D, il faut et il suffit que pour tout couple de points x,x' de D, on ait $f(\frac{x+x'}{2}) \leqslant \frac{1}{2}(f(x)+f(x'))$.

On notera que si on a en outre $f(\frac{x+x'}{2}) < \frac{1}{2}(f(x)+f(x'))$ pour tout couple de points distincts x,x' de D, f est strictement convexe ; en effet, dans le cas contraire, il existe un segment S d'extrémités distinctes x,x' dans D, tel que tout point du segment $M_xM_{x'}$ appartienne au graphe de f (n°1) ; on a donc en particulier $f(\frac{x+x'}{2}) = \frac{1}{2}(f(x)+f(x'))$, contrairement à l'hypothèse

5. Fonctions convexes positivement homogènes.

DEFINITION 3.- On dit qu'une fonction numérique finie p définie dans $\mathbb{R}^n$ est positivement homogène si, pour tout $\lambda \geqslant 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ (ce qui entraîne $p(0)=0$).

Soit p une fonction convexe et positivement homogène dans $E = \mathbb{R}^n$; l'ensemble C des points de $F = E \times \mathbb{R}$ qui sont au-dessus du graphe de p est un cône convexe fermé de sommet 0, car il est convexe et fermé (p étant continue), et si $y \geqslant p(x)$, on a $\lambda y \geqslant \lambda p(x) = p(\lambda x)$ pour tout $\lambda \geqslant 0$; en outre, le point $(0,1)$ est point intérieur de C. Inversement, soit C un cône convexe fermé de sommet 0 dans F, non identique à F et tel que $(0,1)$ soit intérieur à C ; il n'existe pas de droite $x = x_0$ contenue dans C, car alors le point $(\lambda x_0, -1)$ appartiendrait à C pour tout $\lambda > 0$, et par suite aussi le point $(0,-1)$, d'où résulterait (§ 1, prop. 7) que 0 est intérieur à C, et par suite $C = F$ contrairement à l'hypothèse. D'autre part, pour tout $x \in E$, l'ensemble des $y \in \mathbb{R}$ tels que $(x,y) \in C$ est un intervalle $[y_0, +\infty[$; en effet, nous venons de voir qu'il est borné inférieurement, et il contient sa borne inférieure y_0, puisque C est fermé ; en outre, C contient les points $\lambda(0,1) + \mu(x,y_0) = (\mu x, \lambda + \mu y_0)$ pour $\lambda \geqslant 0$ et $\mu \geqslant 0$, en particulier tout point $(x, y_0 + \lambda)$ où $\lambda \geqslant 0$. Si on pose $y_0 = p(x)$, p est donc, par définition une fonction convexe dans $\mathbb{R}^n$; en outre, comme C est un cône, la relation $\lambda y \geqslant p(\lambda x)$ est équivalente à $y \geqslant p(x)$ pour tout $\lambda \geqslant 0$, donc $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, p est positivement homogène.

L'intersection A_1 du cône C et de l'hyperplan $y=1$ dans F est un ensemble convexe fermé ; si C_1 est le cône convexe de sommet 0 engendré par A_1, on a $\overline{C}_1 = C \cap M$, où M est le demi-espace fermé $y \geqslant 0$.

En effet, il est clair que $C_1 \subset C \cap M$, d'où $\overline{C}_1 \subset C \cap M$ puisque C est fermé ; inversement, si $(x,y) \in C \cap M$, on a $(x,y)=y(\frac{1}{y}x,1)$ si $y > 0$, donc $(x,y) \in C_1$ dans ce cas ; d'autre part, si $(x,0) \in C$, on a $(x,y) \in C$ et par suite $(x,y) \in C_1$ pour tout $y > 0$, donc $(x,0) \in \overline{C}_1$. Il est immédiat que $\overline{C}_1$ n'est autre que l'ensemble des points situés au-dessus du graphe de la fonction convexe p^+.

Considérons donc désormais les fonctions positives, convexes et positivement homogènes dans $E = \mathbb{R}^n$. Pour une telle fonction p, soit C le cône convexe défini par $y \geqslant p(x)$ dans F, A_1 l'intersection de C et de l'hyperplan $y=1$, A la projection de A_1 sur E ; A est un ensemble convexe fermé dans E, contenant 0 comme point intérieur, et identique à l'ensemble des $x \in E$ tels que $p(x) \leqslant 1$; nous dirons que A est l'ensemble convexe indicateur de la frontière p. Réciproquement, si A est un ensemble convexe fermé dans E, auquel 0 est intérieur, et C_1 le cône convexe de sommet 0 dans F engendré par $A_1 = A \times \{1\}$, $\overline{C}_1$ est identique à l'ensemble des (x,y) tels que $y \geqslant p(x)$, où p est une fonction positive, positivement homogène et convexe, dont A est l'indicateur. On dit que la fonction p est la jauge de l'ensemble A par rapport à 0 ; on peut définit $p(x)$ pour tout $x \in E$ comme la borne inférieure des nombres $\lambda \geqslant 0$ tels que $\frac{1}{\lambda} x \in A$.

On notera que si p est la jauge de A par rapport à 0, les points x tels que $p(x) < 1$ sont les points intérieurs de A, les points x tels que $p(x)=1$ sont les points frontières de A.

Si A est borné, il existe un nombre $a > 0$ tel que $\|x\| = a$ entraîne $p(x) \geqslant 1$; donc on a $p(y) \geqslant \frac{1}{a}$ pour tout $y \in S_{n-1}$; le même raisonnement prouve qu'inversement, si la borne inférieure de $p(y)$ sur S_{n-1} est > 0, A est borné.

On voit en particulier que si p est une <u>norme</u> dans $\mathbb{R}^n$ (<u>Top. gén.</u>, chap. IX, § 3, n°3) les "boules" ouvertes ou fermées, pour la topologie définie sur $\mathbb{R}^n$ par p sont des ensembles convexes de dimension n , dont 0 est point intérieur, et qui sont symétriques (invariants par la symétrie $x \to -x$) .

6. Fonctions d'appui.

Soit A un ensemble convexe <u>compact</u> contenu dans $E = \mathbb{R}^n$; pour toute forme linéaire x' sur E (élément du dual E' de E), posons

$$h(x') = \sup_{x \in A} \langle x, x' \rangle \tag{5}$$

Nous dirons que la fonction h ainsi définie dans E' est la <u>fonction d'appui</u> de l'ensemble convexe compact A . On a évidemment $h(0)=0$; pour $x' \neq 0$, si on convient de dire qu'un point $y \in E$ est <u>du côté négatif</u> de l'hyperplan $\langle x, x' \rangle = 0$ lorsque $\langle y, x' \rangle \leq 0$, on peut encore dire que $h(x')$ est la plus petite valeur de a telle que A soit tout entier du côté négatif de l'hyperplan $\langle x, x' \rangle = a$.

Comme A est compact, pour tout $x' \in E'$ il existe un $x \in A$ au moins tel que $\langle x, x' \rangle = h(x')$; l'hyperplan d'équation $\langle y, x' \rangle = h(x')$ est un <u>hyperplan d'appui</u> de A au point x (d'où le nom de "fonction d'appui") $\dfrac{h(x')}{\|x'\|}$ est la <u>distance</u> de 0 à cet hyperplan.

<u>Exemples</u>.- 1) La fonction d'appui de la boule B_n est $h(x') = \|x'\|$, car on a $\langle x, x' \rangle \leq \|x\| . \|x'\|$ pour tout $x \in B_n$ et si $x = x'/\|x'\|$, $\langle x, x' \rangle = \|x'\|$.

2) Si A est le segment fermé joignant les points a et -a de $\mathbb{R}^n$, on a $h(x') = |\langle a, x' \rangle|$.

3) Cherchons la fonction d'appui du cube fermé K : $|\xi_i| \leq 1$. Si $x = (\xi_i)$, $x' = (\xi'_i)$, on a $\langle x, x' \rangle = \sum_i \xi_i \xi'_i$, d'où dans K , $\langle x, x' \rangle \leq \sum_i |\xi'_i|$, le second membre étant atteint

lorsqu'on prend $\xi_i=+1$ pour $\xi'_i \geqslant 0$, $\xi_i=-1$ pour $\xi'_i < 0$. On a donc $h(x') = \sum_{i=1}^{n} |\xi'_i|$.

La fonction d'appui h d'un ensemble convexe compact A est positivement homogène et convexe ; la première de ces propriétés est immédiate, et la seconde résulte de la formule (5) et de la relation $\langle x,x'+y'\rangle = \langle x,x'\rangle + \langle x,y'\rangle$.

Supposons maintenant que le point 0 appartienne à A ; alors $h(x')$ est positive dans E' , et la définition du conjugué A^* de A montre que la relation $x' \in A^*$ est équivalente à $h(x') \leqslant 1$; autrement dit, h est la jauge du conjugué de A par rapport à 0 . Plus particulièrement, lorsque A est un corps convexe auquel 0 est intérieur, la distance de 0 aux hyperplans d'appui de A est bornée inférieurement par un nombre $a > 0$; on a donc $h(x') \geqslant a$ pour $\|x'\| =1$, ce qui montre que A^* est un corps convexe auquel 0 est intérieur ; d'après la prop.13 du § 1 , la jauge p de A par rapport à 0 est donc identique à la fonction d'appui du conjugué A^* de A .

On peut encore dire que si A et A^* sont deux corps convexes conjugués (auxquels 0 est intérieur), p et q leurs jauges respectives par rapport à 0 , on a l'identité

(6) $$p(x)q(x') \geqslant \langle x,x'\rangle$$

Lorsque les deux membres de (6) sont égaux, l'hyperplan $\langle y,x'\rangle = q(x')$ est l'hyperplan d'appui de A au point $x/p(x)$, l'hyperplan $\langle x,y'\rangle = p(x)$ hyperplan d'appui de A au point $x'/q(x')$ et réciproquement.

Exercices.- 1) a) Soit D un ensemble ouvert convexe dans $\mathbb{R}^n$, H un ensemble de fonctions numériques convexes dans D .

Soient K, K' deux ensembles ouverts convexes contenus dans D, tels que $\overline{K} \subset K'$ et $\overline{K'} \subset D$. On suppose que les fonctions de H sont uniformément majorées sur la frontière de K' et uniformément minorées sur la frontière de K ; montrer que l'ensemble H est <u>équicontinu</u> dans $\overline{K}$ (se ramener au cas où $n=1$).

b) Soit H un ensemble de fonctions convexes dans D, $\mathfrak{F}$ un filtre sur H qui converge simplement dans D vers une fonction finie f_0 ; montrer que $\mathfrak{F}$ converge uniformément vers f_0 sur tout ensemble compact contenu dans D (utiliser a), en remarquant que pour tout cube K contenu dans D, il existe un ensemble M du filtre $\mathfrak{F}$ tel que les fonctions appartenant à M soient uniformément bornées dans K).

2) a) Soit D un ensemble convexe de dimension n dans $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'une fonction convexe dans D et non constante ne peut atteindre sa borne supérieure dans D en un point intérieur de D (se ramener au cas $n=1$).

b) Montrer que l'ensemble des points de D où f atteint sa borne inférieure dans D est convexe.

c) Montrer que si D est relativement compact, f est minorée dans D (utiliser le fait que f est continue dans tout ensemble compact contenu dans D, et que pour deux points quelconques x, x' de D, les points de la droite joignant M_x et $M_{x'}$ qui ne sont pas sur le segment $M_x M_{x'}$ sont au-dessous du graphe de f).

d) Montrer que si D contient une variété linéaire de dimension $\geqslant 1$ et si f n'est pas constante, f ne peut être bornée dans D (se ramener au cas $n=1$).

3) a) Soit f une fonction convexe dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer que, ou bien f est monotone dans I , ou il existe un point c intérieur à I tel que f soit décroissante pour $x \leqslant c$ et croissante pour $x \geqslant c$ (utiliser la prop.7).

b) Soit D un ensemble convexe de dimension n dans $\mathbb{R}^n$. Si f est convexe dans D , montrer qu'en un point frontière x_0 de D , $\liminf_{x \to x_0, x \in D} f(x)$ est finie ou égale à $+\infty$ (utiliser l'exerc. 2c)). Si $x_0 \in D$, on a $f(x_0) \geqslant \liminf_{x \to x_0, x \in \overset{\circ}{D}} f(x)$; pour toute droite Δ passant par x_0 , $f(x_0)$ est au moins égal à la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0 en restant dans $\overset{\circ}{D} \cap \Delta$.

4) a) Soit D un ensemble convexe de dimension n dans $\mathbb{R}^n$, tel que 0 soit point frontière de D . Pour tout $x \neq 0$ on désigne par λ_x la borne supérieure des $\lambda \geqslant 0$ tels que $\lambda x \in D$, et on pose $p(0)=0$, $p(x)= 1/\lambda_x$ ($p(x)=+\infty$ si $\lambda_x=0$). Montrer que l'ensemble des points x où $p(x)$ est fini est un cône convexe C et que p est une fonction convexe dans C .

b) Déduire de a) un exemple de fonction convexe définie dans une partie convexe D de $\mathbb{R}^2$ et non continue en un point frontière de D.

5) Soit f une fonction numérique finie, semi-continue inférieurement dans un intervalle I . Pour que f soit convexe dans I , il suffit que, pour tout couple de points a,b de I tels que $a < b$, il existe <u>un</u> point z tel que $a < z < b$ et que M_z soit au-dessous du segment M_aM_b (raisonner par l'absurde, en remarquant que l'ensemble des points x tels que M_x soit strictement au-dessus de M_aM_b est ouvert).

6) Soit f une fonction numérique finie définie dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, telle que $f(\frac{x+y}{2}) \leqslant \frac{1}{2}(f(x)+f(y))$ quels que soient x,y dans I .

Montrer que, si f est bornée supérieurement dans <u>un</u> intervalle ouvert $]a,b[$ contenu dans I , f est convexe dans I (on montrera d'abord que f est bornée supérieurement dans <u>tout</u> intervalle compact contenu dans I , puisque f est continue en tout point intérieur à I). Généraliser aux fonctions définies dans un ensemble convexe de dimension n contenu dans $\mathbf{R}^n$.

7) Soit f une fonction numérique convexe et strictement monotone dans un intervalle ouvert $I \subset \mathbf{R}$; soit g la fonction réciproque de f (définie dans l'intervalle f(I)). Montrer que si f est décroissante (resp. croissante) dans I ,g est convexe (resp. concave) dans f(I).

8) Soit f une fonction convexe dans un intervalle $I \subset \mathbf{R}$, g une fonction convexe et croissante dans un intervalle contenant f(I) ; montrer que $g \circ f$ est convexe dans I .

9) Montrer que dans $\mathbf{R}^n$, toute norme p est <u>équivalente</u> (<u>Top. gén.</u>,chap.IX, § 3,n°3) à la norme euclidienne (utiliser la prop.6 pour montrer que sur S_{n-1} , il existe deux nombres $a > 0$, $b > 0$ tels que $a \leq p(x) \leq b$) .

10) Pour tout corps convexe A ayant O comme point intérieur, soit p_A la jauge de A par rapport à O . Montrer que, si $\mathfrak{K}_o(E)$ désigne l'ensemble de ces corps convexes, muni de la structure uniforme définie dans l'exerc.10 du § 1, l'application $A \to p_A$ est un isomorphisme de $\mathfrak{K}_o(E)$ dans l'espace $\mathcal{C}_c(E, \mathbf{R})$ des applications continues de $E = \mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, muni de la structure uniforme de la convergence compacte (<u>Top.gén.</u>,chap.X, § 1).

11) a) Si h est la fonction d'appui d'un ensemble convexe compact A , montrer que la fonction d'appui de -A est $h(-x')$.

b) Soient A_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ p ensembles convexes compacts, h_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ la fonction d'appui de A_i, λ_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ p nombres $\geqslant 0$; montrer que la fonction d'appui de l'ensemble convexe $A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_i$ est $h = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i$.

c) Pour tout $x' \in \mathbb{R}^n$, soit C_i l'intersection de A_i et de l'hyperplan d'appui $\langle x,x' \rangle = h_i(x')$; montrer que l'intersection de A et de son hyperplan d'appui $\langle x,x' \rangle = h(x')$ est l'ensemble $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i$.

12) A tout ensemble convexe compact A dans $E = \mathbb{R}^n$, on fait correspondre sa fonction d'appui h_A qui appartient à l'ensemble $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ des applications continues de E dans $\mathbb{R}$. Si on munit l'ensemble $\mathfrak{K}(E)$ des ensembles convexes compacts dans E de la structure uniforme définie dans l'exerc.10 du § 1, et l'ensemble $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ de la structure uniforme de la convergence compacte (<u>Top.gén.</u>, chap.X, § 1), montrer que l'application $A \to h_A$ est un isomorphisme de $\mathfrak{K}(E)$ dans $\mathcal{C}_c(E, \mathbb{R})$.

En déduire que l'application $A \to A^*$ de l'ensemble $\mathfrak{K}_0(E)$ des corps convexes auxquels 0 est intérieur sur l'ensemble $\mathfrak{K}_0(E')$ est un isomorphisme (pour les structures uniformes de ces deux ensembles) (cf. exerc.10).
