COTE : BKI 05-1.3

PREMIERE PARTIE
LIVRE IV
ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

Rédaction n° 001

Nombre de pages : 200

Nombre de feuilles : 200

Université Henri Poincaré - Nancy I
INSTITUT ÉLIE CARTAN - UMR 7502
Bibliothèque de mathématiques
B.P. 239
54506 Vandoeuvre-Lès-Nancy

Livre IV E.V.T Etat 1

Chap I. Top. d'esp V.T. - Esp loc. convexes
Chap II Dualité faible
Chap III Espaces normés
Chap IV Espaces hilbertiens
Chap V. Equations dans les Esp. normés

1

2

~~7~~

Livre V

A 1

PREMIERE PARTIE

(Ancien LIVRE IV)

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

CHAPITRE I

TOPOLOGIES D'ESPACES VECTORIELS. ESPACES LOCALEMENT CONVEXES.

Etat 2

§ 1. Préliminaires. Ensembles étoilés et ensembles convexes.

Structures vectorielles réelle et complexe. Pour toutes les propriétés générales des espaces vectoriels dont nous aurons à faire usage dans ce Livre, le lecteur est prié de se reporter au § 2 du fascicule de résultats d'Algèbre, ou au ch. II du Livre II .

Il ne s'agira, dans ce Livre, que d'espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ; quand nous parlerons simplement d'espace vectoriel, il sera toujours sous-entendu qu'il s'agit d'un tel espace. Mais, sur un ensemble E support d'une telle structure d'espace vectoriel, nous aurons souvent à considérer une seconde structure d'espace vectoriel, déduite de la précédente en restreignant le domaine des opérateurs au sous-corps $\mathbb{R}$ de $\mathbb{C}$ (Alg. R, §2). On distinguera ces deux structures en les appelant respectivement structure vectorielle complexe et structure vectorielle réelle sur E; de même, on appellera complexes (resp. réelles) les variétés linéaires et les formes linéaires de la structure vectorielle complexe (resp. réelle) de E , ainsi que les applications linéaires de E ,

muni de sa structure vectorielle complexe (resp. réelle) dans un espace vectoriel F , muni également de sa structure vectorielle complexe (resp. réelle) ; une variété linéaire à n dimensions de la structure vectorielle complexe (resp. réelle) sera dite variété linéaire à n dimensions complexes (resp. réelles); on sait qu'une variété linéaire complexe est aussi une variété linéaire réelle ; une variété linéaire à n dimensions complexes est une variété à 2n dimensions réelles.

Tout sous-espace vectoriel à n dimensions complexes (resp. réelles) est isomorphe à $\mathbb{C}^n$ (resp. R^n).

Une variété linéaire à une dimension complexe (resp. réelle) est appelée droite complexe (resp. réelle).

Soit f une forme linéaire complexe dans E ; il est clair que les fonctions $g = \mathcal{R} f$, $h = \mathcal{J} f$ sont des formes linéaires réelles dans E ; en outre, la relation $f(ix)=if(x)$ entraîne l'identité $h(x) = -g(ix)$. Réciproquement, si g est une forme linéaire réelle, $f(x) = g(x)-ig(ix)$ est une forme linéaire complexe telle que $\mathcal{R} f = g$. Il en résulte que tout hyperplan complexe, d'équation $f(x)= \alpha + i\beta$, est l'intersection de deux hyperplans réels $g(x)=\alpha$, $g(ix)=-\beta$, et réciproquement.

Soit φ une application linéaire biunivoque de R dans E , ξ et η deux points quelconques de R tels que $\xi \leqslant \eta$, et soit $x = \varphi(\xi)$, $y = \varphi(\eta)$; l'image par φ d'un intervalle illimité ouvert (resp.fermé) d'origine ou extrémité ξ , est appelé demi-droite ouverte (resp. fermée) d'origine x ; l'image de l'intervalle $\left[\xi , \eta\right[$ (resp. $\left]\xi , \eta\right[$, $\left]\xi, \eta\right]$, $\left[\xi , \eta\right]$, en supposant $\xi < \eta$ dans ces trois derniers cas)

est appelé segment fermé d'extrémités x et y (resp. segment ouvert d'extrémités x,y , segment ouvert en x , fermé en y , segment ouvert en y , fermé en x).

Une demi-droite ouverte (resp. fermée) d'origine x et passant par $y \neq x$ peut encore être définie comme l'ensemble des points $(1-\rho)x+\rho y$, avec $\rho > 0$ (resp. $\rho \geqslant 0$) ; un segment fermé d'extrémités x et y (resp. un segment ouvert d'extrémités x et y, un segment ouvert en x , fermé en y , un segment ouvert en y , fermé en x) comme l'ensemble des points $(1-\rho)x + \rho y$, avec $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ (resp. $0<\rho<1$, $0<\rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \rho<1$) ; la droite réelle passant par x et y est dite le support des demi-droites d'origine x , passant par y , et des segments d'extrémités x et y . Sur une droite réelle D passant par x , il y a deux demi-droites fermées (resp. ouvertes) d'origine x et de support D ; si y est un point de D distinct de x , l'une d'elles est l'ensemble des points $(1-\rho)x+\rho y$ pour $\rho \geqslant 0$ (resp. $\rho > 0$) , l'autre l'ensemble des points $(1-\rho)x+\rho y$ pour $\rho \leqslant 0$ (resp. $\rho < 0$) ; ces deux demi-droites sont dites opposées. Deux demi-droites fermées parallèles sont dites de même sens si la translation qui amène l'origine de l'une sur celle de l'autre les fait coïncider ; sinon, elles sont dites de sens contraires (la translation précédente amenant l'une d'elles sur l'opposée de l'autre).

Toute application linéaire (réelle ou complexe) de E dans un espace vectoriel F transforme une demi-droite (ouverte ou fermée) en une demi-droite de même espèce, un segment en segment de même espèce.

Remarque. Dans l'étude des espaces vectoriels par rapport au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, et de leurs variétés linéaires (réelles ou complexes) est comprise celle des espaces vectoriels par rapport au corps R ; en effet, un tel espace E peut toujours être considéré comme sous-espace vectoriel réel d'un espace

vectoriel par rapport à $\mathbb{C}$. Il suffit de considérer, sur l'ensemble $E \times E$, la structure d'espace vectoriel par rapport à $\mathbb{C}$ définie par les relations $(\lambda x, \lambda y) = \lambda(x,y)$ si λ est réel, et $i(x,y) = (-y,x)$; E est isomorphe au sous-espace vectoriel réel de $E \times E$ formé des points $(x,0)$.

Ensembles étoilés ; ensembles cerclés ; indicatrices. Définition 1. Un ensemble A dans un espace vectoriel E est dit étoilé par rapport à un point $x_0 \in A$ si, quel que soit $x \in A$, le segment fermé d'extrémités x_0 et x est contenu dans A (ou encore si quel que soit $x \in A$, le point $(1-\rho)x_0 + \rho x$ appartient à A pour tout ρ tel que $0 \leqslant \rho \leqslant 1$).

Soit f une application linéaire (réelle ou complexe) d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F ; l'image directe par f d'une partie de E , étoilée par rapport à x_0 , est un ensemble étoilé par rapport à $f(x_0)$; l'image réciproque par f d'une partie de F étoilée par rapport à un point x'_0 , est un ensemble étoilé par rapport à tout point de $f^{-1}(x'_0)$.

En particulier, la translation $x \longrightarrow x - x_0$ transforme un ensemble étoilé par rapport à x_0 en un ensemble étoilé par rapport à 0 . On peut donc se borner à étudier ces derniers.

Soit donc A un ensemble étoilé par rapport à 0 , et $x \neq 0$ un point quelconque de E ; l'ensemble des valeurs positives de t telles que $tx \in A$ est un intervalle d'origine 0 , fermé en 0 , ouvert ou fermé suivant les cas à son extrémité ; soit t_x cette extrémité $(0 \leqslant t_x \leqslant +\infty)$. Posons $p_A(0) = 0$, $p_A(x) = 1/t_x$ si $x \neq 0$ (si $t_x = 0$, $p_A(x) = +\infty$); la fonction p_A , ainsi définie dans E , est appelée l'indicatrice de l'ensemble étoilé A . L'ensemble A contient l'ensemble $p_A^{-1}([0,1[)$ et est contenu dans l'ensemble $p_A^{-1}([0,1])$;

ces deux ensembles sont étoilés ; les points $x \neq 0$ de l'ensemble $p_A^{-1}([0,1[)$ sont dits points <u>internes</u> de A ; ils sont caractérisés par le fait qu'il existe $\lambda > 1$ tel que $\lambda x \in A$. On appelle <u>coque</u> de A l'ensemble $p_A^{-1}(1)$.

Il est clair que, pour $\lambda > 0$, $p_A(\lambda x) = \lambda p_A(x)$.

<u>Définition 2</u>. <u>Une fonction numérique</u> p <u>définie dans un espace vectoriel E est dite positivement homogène si elle satisfait aux conditions suivantes</u> : 1° $p(x) \geqslant 0$ <u>quel que soit</u> $x \in E$; 2° $p(0)=0$; 3° <u>quel que soit</u> $\lambda > 0$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$.

L'indicatrice d'un ensemble étoilé par rapport à 0 est donc positivement homogène. Réciproquement, soit p une fonction positivement homogène définie dans E ; tout ensemble contenant $p^{-1}([0,1[)$ et contenu dans $p^{-1}([0,1])$ est étoilé par rapport à 0 , et p est son indicatrice.

Un ensemble A étoilé par rapport à 0 est dit <u>équilibré</u> si son indicatrice est <u>finie</u> en tout point de E : cela revient à dire que l'intersection de toute droite réelle passant par 0 et de A contient un segment ouvert auquel appartient 0 .

Soit f une application vectorielle de E dans un espace vectoriel F , et soit A un sous-ensemble de E , étoilé par rapport à 0 .

Si y est un point quelconque de F , la borne supérieure des valeurs de $\lambda > 0$ telles que $\lambda y \in f(A)$ est la borne supérieure des valeurs de λ pour lesquelles il existe un x tel que $\lambda x \in A$ et $f(x) = y$. Autrement dit, l'indicatrice q de f(A) est donnée par la formule $q(y) = \inf_{x \in f^{-1}(y)} p(x)$. Il en résulte en particulier que, si x est point interne de A , f(x) est point interne de f(A) ; et réciproquement, si y est point interne de f(A) , il existe un point interne x de A tel que $f(x) = y$.

Inversement, si B est un sous-ensemble de F , étoilé par rapport à l'origine, et q son indicatrice, l'indicatrice de $f^{-1}(B)$ est la fonction composée $q \circ f$: car la relation $\lambda x \in f^{-1}(B)$ est équivalente à $\lambda f(x) \in B$.

Définition 3. Un ensemble A dans un espace vectoriel E est dit cerclé par rapport à un point x_0 si, quel que soit $x \in A$, le point $(1-\rho)x_0 + \rho x$ appartient à A quel que soit le nombre complexe ρ tel que $|\rho| \leqslant 1$.

Si f est une application linéaire complexe de E dans F , elle transforme tout ensemble cerclé par rapport à x_0 en un ensemble cerclé par rapport à $f(x_0)$. Inversement, si une partie de F est cerclée par rapport à x'_0 , son image réciproque par f est cerclée par rapport à tout point de $f^{-1}(x'_0)$.

On peut se borner à considérer les ensembles cerclés par rapport à 0 .

Un tel ensemble A est aussi étoilé par rapport à 0 ; son indicatrice p_A est ici homogène, c'est-à-dire que $p_A(\lambda x) = |\lambda| p_A(x)$, quel que soit λ complexe et $\neq 0$. Il suffit pour le voir de remarquer que, si $y = \varepsilon x$, où ε est un nombre complexe de module 1, la relation $tx \in A$ (t positif) entraîne, d'après la définition 2 , $t\varepsilon x \in A$ c'est-à-dire $ty \in A$, et réciproquement, donc $p_A(\varepsilon x) = p_A(x)$.

Inversement, si p est une fonction positive homogène définie dans E , les ensembles $p^{-1}([0,1[)$ et $p^{-1}([0,1])$ sont cerclés ; et tout ensemble cerclé contenant le premier de ces ensembles, et contenu dans le second, a pour indicatrice p .

La réunion et l'intersection d'une famille d'ensembles étoilés (resp. cerclés) par rapport à 0 sont encore des ensembles étoilés

(resp. cerclés) par rapport à 0. L'indicatrice de la réunion (resp. intersection) d'une famille d'ensembles étoilés par rapport à 0 est l'enveloppe inférieure (resp. supérieure) de la famille des indicatrices de ces ensembles.

Si (F_ι) est une famille d'espaces vectoriels et A_ι un ensemble étoilé (resp. cerclé) par rapport à 0 dans F_ι, $A = \prod_\iota A_\iota$ est étoilé (resp. cerclé) par rapport à 0 dans $\prod_\iota F_\iota$, comme intersection des ensembles étoilés (resp. cerclés) $\overline{pr}_\iota^{-1}(A_\iota)$; cette remarque montre en outre que, si p_ι est l'indicatrice de A_ι, l'indicatrice de A est l'enveloppe supérieure des fonctions composées $p_\iota \circ pr_\iota$. En particulier $x = (x_\iota)$ ne peut être point interne de A que si, pour tout ι, x_ι est point interne de A_ι.

On déduit de là que, si A et B sont deux ensembles étoilés par rapport à 0 dans un espace vectoriel E, $\lambda A + \mu B$ est aussi étoilé par rapport à 0, quels que soient les constantes réelles λ, μ ; en effet, $A \times B$ est étoilé dans $E \times E$, et $(x,y) \to \lambda x + \mu y$ est une application linéaire de $E \times E$ dans E. En outre, pour qu'un point $z \in \lambda A + \mu B$ soit point interne de cet ensemble, il est nécessaire qu'il existe un couple (x,y) de points $x \in A$, $y \in B$ tels que $z = \lambda x + \mu y$ et que x soit point interne de A, et y point interne de B.

Ensembles convexes. Définition 4. Un ensemble A dans un espace vectoriel E est dit convexe si, quels que soient les points x,y appartenant à A, le segment fermé d'extrémités x et y est contenu dans A.

Cette définition équivaut à la suivante : un ensemble est convexe s'il est étoilé par rapport à chacun de ses points.

Si f est une application linéaire (réelle ou complexe) de E dans F, l'image directe par f d'une partie convexe de E est une partie convexe de F ; l'image réciproque par f d'une partie convexe de F est une partie convexe de E .

L'ensemble vide est convexe ; il en est de même de l'ensemble réduit à un élément.

Toute variété linéaire, toute demi-droite, tout segment, est convexe ; en outre, d'après la caractérisation des intervalles sur la droite numérique (Top.géné.R, §), les seuls ensembles convexes non vides sur une droite réelle sont la droite tout entière, les demi-droites et les segments portés par cette droite.

Considérons un ensemble convexe A contenant l'origine 0 , et soit p_A l'indicatrice de A par rapport à 0 ; la fonction p_A satisfait à l'inégalité

$$(1) \qquad p_A(x+y) \leqslant p_A(x)+ p_A(y)$$

L'inégalité est évidente si l'un des nombres $p_A(x)$, $p_A(y)$ est infini ; sinon soient a, b deux nombres positifs tels que $a > p_A(x)$, $b > p_A(y)$; on a donc $x/a \in A$, $y/b \in A$, et, comme $a/(a+b) > 0$, $b/(a+b) > 0$, le point $(x+y)/(a+b)$ appartient au segment fermé d'extrémités x/a , y/b , donc à A par hypothèse ; par suite, on a $p_A(x+y) \leqslant a+b$, et comme a et b sont arbitrairement voisins de $p_A(x)$ et $p_A(y)$, on en déduit (1).

Définition 5. Une fonction positivement homogène p définie dans un espace vectoriel E est dite convexe si, quels que soient x et y dans E , on a $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$.

Nous venons de voir que l'indicatrice par rapport à 0 d'un ensemble convexe contenant 0 , est une fonction convexe. Réciproquement,

soit p une fonction convexe ; l'ensemble $p^{-1}([0,1[)$ et l'ensemble $p^{-1}([0,1])$ sont convexes, comme il résulte de l'inégalité $p(tx+(1-t)y) \leqslant tp(x)+(1-t)p(y)$, valable quels que soient x et y , et quel que soit t dans $]0,1[$.

En outre, l'ensemble $V = p^{-1}(0)$ (c'est-à-dire l'ensemble des droites réelles homogènes contenues dans $p^{-1}([0,1])$) est un sous-espace vectoriel réel de E , car, si $x \in V$, $\lambda x \in V$ quel que soit λ réel, et si x et y sont des points de V , $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)=0$, d'où $p(x+y)=0$, c'est-à-dire $x+y \in V$. Si en outre p est homogène, V est un sous-espace vectoriel complexe.

Si $x \in p^{-1}([0,1])$, on a $x+y \in p^{-1}([0,1])$ quel que soit $y \in V$, en vertu de la relation $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y) = p(x)$; il en résulte que, si W est l'intersection de l'ensemble $p^{-1}([0,1])$ et d'un sous-espace vectoriel supplémentaire de V , il existe une application vectorielle biunivoque du produit $V \times W$ sur $p^{-1}([0,1])$.

Exemple. La distance euclidienne $d(0,X)$ de l'origine au point X est une fonction convexe dans l'espace numérique R^n , considéré comme espace vectoriel réel ; toute boule ouverte ou fermée est donc un ensemble convexe dans R^n .

Remarques. 1) Sur la droite numérique, considérée comme espace vectoriel réel, les seules fonctions positivement homogènes sont de la forme suivante : $p(x) = a|x|$ pour $x \geqslant 0$, $p(x) = b|x|$ pour $x \leqslant 0$, a et b étant deux constantes positives distinctes ou non. On vérifie aisément que ces fonctions sont convexes.

2) Soit f une application vectorielle (réelle ou complexe) d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F , et soit p une fonction convexe définie dans F ; il est clair que la

fonction composée $p \circ f$ est convexe dans E . En particulier, d'après la remarque précédente, si f est une <u>forme linéaire</u> (réelle ou complexe) dans E , $|f|$ est une fonction convexe dans E (elle est en outre homogène quand f est une forme linéaire complexe).

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n points d'un ensemble convexe A ; le point $x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i$, où les t_i sont des nombres quelconques de l'intervalle $\left(0,1\right)$, tels que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, appartient encore à A . La proposition résulte de la définition 4 pour n=2 ; démontrons-la par récurrence : en supposant $t_n \neq 1$ (sans quoi la proposition est évidente), on peut écrire $x=(1-t_n)y+t_n x_n$, avec $y = \sum_{i=1}^{n-1} t_i x_i/(1-t_n)$, d'où la proposition, y appartenant à A par hypothèse.

Toute intersection d'ensembles convexes est convexe (ce qui équivaut à dire que l'<u>enveloppe supérieure</u> d'une famille de fonctions convexes est une fonction convexe) ; en particulier, l'intersection d'un ensemble convexe et d'une droite réelle est, soit l'ensemble vide, soit la droite tout entière, soit une demi-droite, soit enfin un segment.

Etant donnée une partie quelconque A de E , il existe donc un <u>plus petit ensemble convexe</u> contenant A ; on l'appelle <u>enveloppe convexe</u> de A , et on le note $\underline{K}(A)$; on dit encore que $\underline{K}(A)$ est <u>engendré</u> par A . Il est clair que $\underline{K}(A)$ est contenu dans la variété linéaire $\underline{V}(A)$ engendrée par A . Soit $\iota \longrightarrow x_\iota$ une représentation paramétrique de A au moyen d'un ensemble d'indices I ; $\underline{K}(A)$ est identique à l'ensemble des points $x = \sum_{\iota \in I} t_\iota x_\iota$, où les t_ι sont des nombres de l'intervalle $\left(0,1\right)$, nuls à l'exception d'un nombre <u>fini</u> d'entre eux,

et tels que $\sum_{\iota \in I} t_\iota = 1$, et les x_ι des points quelconques de A ; en effet, $\underline{K}(A)$ doit contenir l'ensemble de ces points, et d'autre part on voit immédiatement que cet ensemble est convexe.

Il en résulte en particulier que l'enveloppe convexe d'un ensemble cerclé par rapport à un point x_0 est encore un ensemble cerclé par rapport à x_0 .

Si (F_ι) est une famille d'espaces vectoriels, et A_ι un ensemble convexe dans F_ι , $\prod_\iota A_\iota$ est un ensemble convexe dans $\prod_\iota F_\iota$, comme il résulte de la propriété analogue pour les ensembles étoilés ; on voit de même que, si A et B sont convexes dans E , $\lambda A + \mu B$ est encore un ensemble convexe, quels que soient λ et μ réels.

2 Si A contient l'origine et est convexe, on remarquera que $A+A = 2A$; cette relation est inexacte lorsque A est un ensemble étoilé quelconque, on a seulement alors la relation $2A \subset A+A$; il peut même se faire qu'il n'existe aucun nombre $\lambda > 0$ tel que $A+A \subset \lambda A$; c'est le cas, par exemple, pour l'ensemble étoilé défini par la relation $|xy| \leqslant 1$ dans le plan numérique R^2 .

Si A est un ensemble convexe, l'ensemble B des demi-droites formées d'origine 0 , passant par tous les points de A , est convexe. En effet, les points de B sont de la forme λx , avec $\lambda \geqslant 0$, $x \in A$; soient λx , μy deux de ces points, et ρ un nombre quelconque de $[0,1]$; le point $\lambda\rho x+(1-\rho)\mu y$ peut s'écrire sous la forme $\alpha(\sigma x+(1-\sigma)y)$, avec $\alpha \geqslant 0$, $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$; il suffit de prendre $\alpha = \rho\lambda+(1-\rho)\mu$, et $\sigma = \rho\lambda/(\rho\lambda+(1-\rho)\mu)$.

Le théorème de Hahn-Banach. Soit H un hyperplan réel homogène dans un espace vectoriel E . L'espace quotient E/H est isomorphe à R (considéré comme espace vectoriel réel). Les images réciproques, par l'application

canonique de E sur E/H , des intervalles $[0,+\infty[$ et $]-\infty,0]$ sont appelés <u>demi-espaces fermés</u> déterminés par H ; les images réciproques des intervalles $]0,+\infty[$, $]-\infty,0[$ sont de même appelés <u>demi-espaces ouverts</u> déterminés par H . Si D est une droite réelle homogène supplémentaire de H (c'est-à-dire non contenue dans H), et $x_0 \neq 0$ un point quelconque de D , tout point $x \in E$ se met d'une manière et d'une seule sous la forme $y+tx_0$, avec $y \in H$, $t \in R$; si E_1 (resp. E_2, E'_1, E'_2) désigne l'ensemble des points x tels que $t \geqslant 0$ (resp. $t \leqslant 0$, $t > 0$, $t < 0$), E_1 et E_2 sont les demi-espaces fermés, E'_1 et E'_2 les demi-espaces ouverts, déterminés par H .

Une partie A de E est dite <u>tout entière d'un même côté</u> de H (resp. strictement d'un même côté) si elle est contenue dans un demi-espace fermé (resp. ouvert) déterminé par H . Deux parties A,B de E sont dites <u>d'un même côté</u> (resp. strictement d'un même coté) de H si $A \cup B$ est d'un même coté (resp. strictement d'un même coté) de H . Deux parties A,B de E sont dites <u>séparées</u> (resp. strictement séparées) par H , si elles sont contenues dans deux demi-espaces fermés (resp. ouverts) distincts, déterminés par H .

Pour que deux points x,x' soient séparés (resp. strictement séparés) par H , il faut et il suffit que le segment fermé (resp. ouvert) d'extrémités x, x' rencontre H ; en effet tout point de ce segment est de la forme

$$z = (1-\rho)y+\rho y' +((1-\rho)t + \rho t')x_0$$

avec $\rho \in [0,1]$ (resp. $\rho \in]0,1[$) ; pour qu'on puisse avoir $(1-\rho)t+\rho t'=0$, il faut et il suffit que $tt' \leqslant 0$ (resp. $tt' < 0$).

Il en résulte que les demi-espaces (ouverts ou fermés) déterminés par H sont des ensembles convexes.

Ces définitions et propriétés s'étendent immédiatement aux hyperplans réels non homogènes, à l'aide d'une translation.

Si un ensemble A étoilé par rapport à un point x_0 est tout entier d'un même coté d'un hyperplan H ne passant pas par x_0 , H ne contient pas de points internes de A , et réciproquement ; en général si une variété linéaire V ne passe pas par x_0 et ne contient pas de points internes de A , on dira qu'elle ne pénètre pas dans A ; cela équivaut à dire que, dans la variété linéaire W engendrée par V et x_0 , l'ensemble étoilé $A \cap W$ est d'un même coté de l'hyperplan V .

Théorème 1 (Hahn-Banach). Soit A un ensemble convexe équilibré par rapport à un de ses points a , et soit V une variété linéaire réelle ne pénétrant pas dans A ; il existe un hyperplan réel H contenant V et tel que A soit tout entier d'un même coté de H .

Dans cet énoncé, il faut entendre que A est considéré comme ensemble étoilé par rapport à a ; l'hypothèse que A est équilibré entraîne que V ne passe pas par a , et par ailleurs que la variété linéaire engendrée par A est l'espace E tout entier.

On peut évidemment toujours supposer, à l'aide d'une translation, que V est homogène.

La démonstration procède en deux étapes.

1) Cas où E est un espace vectoriel à deux dimensions réelles.

Les hyperplans sont ici les droites réelles : il n'y a de démonstration à faire que lorsque V est réduit à l'origine, ce point n'étant pas point interne de A par rapport à $a \neq 0$, par l'hypothèse.

Soit B l'ensemble convexe formé des demi-droites joignant O aux points de A ; cet ensemble est équilibré par rapport à a , et O n'en est pas point interne ; il en résulte que B est distinct du plan E tout entier, et par suite ne peut contenir deux droites concourantes.

Lemme. Si B contient une droite homogène D et un point c non situé sur D , B est identique au demi-plan fermé déterminé par D et contenant c .

En effet, si $b \neq 0$ est un point de D , B contient tous les points $\beta b + \gamma c$, avec $\gamma \geqslant 0$, d'après sa définition ; si en outre B contenait un point $\beta b + \gamma c$ avec $\gamma < 0$, il contiendrait la droite D' joignant ce point à l'origine, donc deux droites concourantes, contrairement à l'hypothèse.

Soit alors G une droite passant par a , mais non par O ; son intersection avec B contient un segment ouvert auquel appartient a ; nous distinguerons deux cas.

a) $G \subset B$. Soit G' la parallèle à G menée par O , $b \neq 0$ un point de G'. B est contenu dans le demi-plan fermé déterminé par G' et contenant a . Sinon, il existerait un point $\alpha a + \beta b \in B$, avec $\alpha < 0$; la droite D joignant O à ce point coupe G au point $a + \frac{\beta}{\alpha} b$, qui appartient donc à B ; par suite, les deux droites concourantes D et G seraient contenues dans B , contrairement à l'hypothèse.

b) $G \cap B$ est un segment, ou une demi-droite. Soit $b \neq a$ une de ses extrémités (si c'est un segment) ou son origine (si c'est une demi-droite). Soit G' la droite joignant O à b ; B est contenu dans le demi-plan fermé déterminé par G' et contenant a .

En effet, désignons par c la seconde extrémité du segment $G \cap B$, lorsque cette intersection est un segment, par c la différence a-b ,

lorsque $G \cap B$ est une demi-droite. Il est immédiat que B contient tout point $\beta b+\gamma c$, pour $\beta > 0$, $\gamma > 0$, et ne contient aucun point $\beta b + \gamma c$, avec $\beta > 0$, $\gamma < 0$.

En effet, si $G \cap B$ est une demi-droite, $G \cap B$ contient par définition tous les points $b+\lambda c$ avec $\lambda > 0$, donc B contient les points $\mu(b+\lambda c)$ avec $\mu \geqslant 0$; $G \cap B$ ne contient aucun point $b+\lambda c$ avec $\lambda < 0$, donc B ne peut contenir aucun point $\mu(b+\lambda c)$ avec $\lambda < 0$, $\mu > 0$.

Si $G \cap B$ est un segment, il contient tous les points $\rho b+(1-\rho)c$, avec $0 < \rho < 1$, donc $\mathcal{B}$ contient tous les points $\lambda(\rho b+(1-\rho)c)$ avec $\lambda > 0$, $0 < \rho < 1$; or, quels que soient $\beta > 0$, $\gamma > 0$, il existe $\lambda > 0$, et ρ tel que $0 < \rho < 1$ vérifiant $\beta = \lambda\rho$, $\gamma = \lambda(1-\rho)$. On voit de même que B ne peut contenir de points $\beta b+\gamma c$ avec $\beta > 0$, $\gamma < 0$, parce que $G \cap B$ ne peut contenir de points $\rho b+(1-\rho)c$ avec $\rho > 1$.

Pour démontrer notre proposition, il suffit de voir que B ne peut contenir aucun point de la forme $\beta b + \gamma c$, avec $\beta < 0$, $\gamma < 0$. Comme B contient le point $d = -(\beta b+\gamma c)$, il contiendrait la droite D joignant ce point à l'origine ; mais B contient aussi des points strictement séparés par D (par exemple, les points $d + \frac{\gamma}{2} c$, $d - \frac{\gamma}{2} c$); d'après le lemme, B serait le plan entier, contrairement à l'hypothèse.

2) Cas général. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des variétés linéaires homogènes réelles contenant V et ne pénétrant pas dans A ; ordonnons $\mathcal{M}$ par inclusion. Il est clair que la réunion des variétés linéaires appartenant à une partie totalement ordonnée de $\mathcal{M}$, est encore une variété linéaire appartenant à $\mathcal{M}$; autrement dit, $\mathcal{M}$ est inductif (Ens. R, § 6). Le théorème de Zorn montre par suite que $\mathcal{M}$ possède

un élément maximal H ; le théorème sera établi si nous prouvons que H est un hyperplan réel.

Supposons le contraire ; comme A est équilibré par rapport à a , aucun ensemble de $\mathcal{M}$ ne contient a ; soit K le sous-espace vectoriel engendré par a et H . Dans cet espace, H est un hyperplan, la droite D joignant 0 et a un sous-espace vectoriel supplémentaire de H . Comme K n'est pas l'espace E entier, il existe une droite D' passant par 0 et non contenue dans K ; soit K' le sous-espace vectoriel engendré par K et D' , et A' l'ensemble convexe intersection de A et K'. Dans l'espace K', le plan P engendré par D et D' est supplémentaire de H ; autrement dit, tout $x \in K'$ se met, d'une manière et d'une seule, sous la forme $f(x)+g(x)$, avec $f(x) \in P$, $g(x) \in H$. La fonction f est linéaire, donc $B = f(A')$ est convexe dans P , et équilibré par rapport à a ; en outre $0 = f(H)$ n'est pas point interne de B . Il existe donc dans P une droite D" passant par 0 , et ne pénètrant pas dans B ; la variété linéaire H' engendrée par H et D" n'est pas identique à H et ne pénètre pas dans A' , ni a fortiori dans A ; H ne serait donc pas un élément maximal de $\mathcal{M}$, contrairement à l'hypothèse.

C.Q.F.D.

Remarque. Si un ensemble convexe A est équilibré par rapport à un de ses points a , et si c n'est pas un point interne de A par rapport à un quelconque de ses points b , c ne peut être point interne de A par rapport à a . En effet, on peut supposer a=0 ; par hypothèse, il existe $\lambda > 0$ tel que $-\lambda b \in A$; si c était point interne de A par rapport à 0 , il existerait $\mu > 1$ tel que $\mu c \in A$; le point $d = \rho \mu c - \lambda(1-\rho)b$ appartiendrait aussi à A quel que soit $\rho \in \left]0,1\right[$; or, si on prend

$\rho=(1+\lambda)/(\mu+\lambda)$, on a bien $0<\rho<1$, et $d = b+\sigma(c-b)$ avec $\sigma = (\mu+\lambda\mu)/(\mu+\lambda)>1$, contrairement à l'hypothèse.

Si en outre c est un point de la coque de A par rapport à b , c'est aussi un point de la coque de A par rapport à a .

En effet, pour ρ et σ dans $[0,1]$, le point

$$d = \rho(\sigma b+(1-\sigma)c)-\lambda(1-\rho)b$$

appartient à A ; prenons $\rho = \lambda/(\lambda+\sigma)$; on aura $d = ac$, avec $a = (\lambda-\lambda\sigma)/(\lambda+\sigma)$, et pour σ suffisamment voisin de 0 , a est aussi voisin de 1 qu'on veut.

On voit donc que, lorsque A est équilibré par rapport à un de ses points a , et qu'une variété linéaire ne contient aucun point interne de A relativement à un point b de A , elle ne contient pas non plus de point interne relativement à A ; lorsqu'on dit qu'elle "ne pénètre pas" dans A , il est donc inutile de préciser par rapport à quel point et le théorème de Hahn-Banach lui est applicable.

On appelle hyperplan d'appui d'un ensemble convexe A équilibré par rapport à un de ses points a , un hyperplan contenant au moins un point de la coque de A par rapport à a , et ne pénètrant pas dans A (donc tel que A soit tout entier d'un même coté de l'hyperplan) ; le théorème de Hahn-Banach a en particulier pour conséquence que, par toute variété linéaire réelle ne pénétrant pas dans A et contenant un point de la coque de A , passe un hyperplan d'appui de A . Il peut naturellement passer plusieurs hyperplans d'appui, et même une infinité, par un point de la coque d'un ensemble convexe équilibré A ; lorsqu'il ne passe par un tel point x_o qu'un seul hyperplan d'appui, on dit que A est strictement convexe au point x_o ; A est dit

strictement convexe s'il est strictement convexe en tous les points de sa coque.

Corollaire 1. *Soient* p *une fonction convexe finie définie dans un espace vectoriel* E , G *un sous-espace vectoriel réel de* E , f *une forme linéaire réelle définie dans* G *et telle que* $f(x) \leqslant p(x)$ *en tout point de* G . *Il existe une forme linéaire réelle* $\overline{f}$ *définie dans* E , *prolongeant* f , *et telle que* $\overline{f}(x) \leqslant p(x)$ *en tout point de* E .

En effet, on peut supposer que f n'est pas identiquement nulle (sans quoi la proposition est triviale). Soit V la variété linéaire définie, dans G , par la relation $f(x)=1$; on a donc $p(x) \geqslant 1$ en tout point de V ; autrement dit, si A est l'ensemble convexe $p^{-1}([0,1])$, V ne pénètre pas dans A . Comme A est équilibré par rapport à 0, on peut appliquer le théorème de Hahn-Banach : il existe un hyperplan réel H passant par V et tel que A soit tout entier du même coté de H . Soit $\overline{f}$ la forme linéaire réelle définie dans E , et telle que $\overline{f}(x)=1$ sur H ; comme, dans le sous-espace G , V est un hyperplan sur lequel la restriction de $\overline{f}$ et f sont égales, on a $\overline{f}(x)=f(x)$ en tout point de G ; enfin, comme le point 0 appartient au demi-espace fermé $\overline{f}(x) \leqslant 1$, ce demi-espace contient A , autrement dit $\overline{f}(x) \geqslant 1$ entraîne $p(x) \geqslant 1$; en particulier, $\overline{f}(x)=1$ entraîne $p(x) \geqslant 1$, d'où, en vertu de l'homogénéité de $\overline{f}$ et de p , $\overline{f}(x) \leqslant p(x)$ en tout point où $\overline{f}(x) > 0$; et comme aux autres points de E , on a $\overline{f}(x) \leqslant 0 \leqslant p(x)$, la proposition est démontrée.

Remarque. Le théorème de Hahn-Banach s'applique en particulier lorsque la variété V ne rencontre pas l'ensemble convexe A ; mais cette hypothèse supplémentaire ne permet pas d'affirmer qu'il existe un hyperplan passant par V et ne rencontrant pas A

(analytiquement, l'inégalité stricte $f(x)<p(x)$ en tout point de G n'implique pas l'existence d'un prolongement linéaire $\overline{f}$ de f à E tel que $\overline{f}(x) < p(x)$ en tout point de E). Si on considère, par exemple, dans l'espace R^3, l'ensemble convexe A formé des demi-droites fermées joignant le point (0,0,1) aux points de l'ensemble convexe défini par les relations $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $xy \geqslant 1$, $z=0$, la droite $y=0$, $z=0$ ne rencontre pas A, mais le seul plan passant par cette droite et ne pénètrant pas dans A est le plan $y=0$, qui rencontre A au point (0,0,1).

Corollaire 2. Tout ensemble convexe A équilibré par rapport à un de ses points a et contenant sa coque par rapport à a, est identique à l'intersection des demi-espaces fermés le contenant.

Il suffit de voir que tout point x de cette intersection appartient à A ; or, dans le cas contraire (en supposant, pour simplifier, a=0), il existerait $\lambda < 1$ tel que le point λx appartienne à la coque de A ; par le point λx passerait donc un hyperplan réel H ne contenant pas 0, et tel que A soit contenu dans le demi-espace fermé déterminé par H et contenant 0 ; or, ce demi-espace ne contient pas x, contrairement à l'hypothèse.

Proposition 1. Soient p une fonction convexe homogène finie, définie dans un espace vectoriel E, G un sous-espace vectoriel complexe de E, f une forme linéaire complexe définie dans G et telle que $|f(x)| \leqslant p(x)$ en tout point de G. Il existe une forme linéaire complexe $\overline{f}$ définie dans E, prolongeant f, et telle que $|\overline{f}(x)| \leqslant p(x)$ en tout point de E.

En effet, soit $g = \mathcal{R}f$; g est une forme linéaire réelle dans G, et on a $g(x) \leqslant p(x)$ en tout point de G ; d'après le corollaire 1 du th.1, il existe donc une forme linéaire réelle $\overline{g}$, prolongeant de g à E,

telle que $\overline{g}(x) \leqslant p(x)$ en tout point de E . Posons $\overline{f}(x)=\overline{g}(x)-i\overline{g}(ix)$; $\overline{f}$ est une forme linéaire complexe, qui prolonge f à E , et on a $\mathcal{R}\overline{f}(x) \leqslant p(x)$ quel que soit x ; d'après l'homogénéité de p , on en déduit, pour tout ε tel que $|\varepsilon| = 1$, $\mathcal{R}(\varepsilon\overline{f}(x))=\mathcal{R}\overline{f}(\varepsilon x)\leqslant p(\varepsilon x)=p(x)$; d'où $|\overline{f}(x)| \leqslant p(x)$.

Cette proposition correspond, dans le cas complexe, au corollaire 1 du théorème de Hahn-Banach ; la proposition qui correspond au théorème de Hahn-Banach lui-même est la suivante : si A est un ensemble convexe équilibré par rapport à un de ses points, et V une variété linéaire complexe ne pénètrant pas dans A , il existe un hyperplan complexe H contenant V et ne pénètrant pas dans A .

En effet, supposons V homogène ; il existe un hyperplan réel H' contenant V et ne pénètrant pas dans A ; soit $f(x)=0$ son équation, et H" l'hyperplan réel d'équation $f(ix)=0$. $H = H' \cap H''$ est un hyperplan complexe contenant V et ne pénètrant pas dans A .

Proposition 2. Soient A et B deux ensembles convexes, tels que A soit équilibré par rapport à un de ses points a , et qu'aucun point interne de A n'appartienne à B . Dans ces conditions, il existe un hyperplan réel H séparant A et B .

En effet, considérons l'ensemble $C = A-B$, qui est convexe. Si b est un point quelconque de B , C est équilibré par rapport à a-b ; d'autre part, l'origine 0 n'est pas un point interne de C . Il existe donc un hyperplan réel H' , d'équation $f(x)=0$, et tel que C soit tout entier d'un même coté de H' ; on peut supposer par exemple que $f(x) \geqslant 0$ en tout point de C . Il en résulte que, pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$, $f(x) \geqslant f(y)$. Posons $\alpha = \inf_{x \in A} f(x)$; α est fini ;

en tout point $x \in A$, $f(x) \geqslant a$, et en tout point $y \in B$, $f(y) \leqslant a$; l'hyperplan d'équation $f(x) = a$ sépare donc A et B .

Exercices. 1) Soit A un ensemble convexe, B un ensemble quelconque contenant A . Parmi les ensembles convexes contenant A et contenus dans B , il existe au moins un ensemble maximal.

2) Soit A un ensemble convexe, et soit A' la réunion de A et des coques de A relatives à tous les points de A . Montrer que A' est convexe.

Montrer que l'on peut avoir $(A')' \neq A'$ sur l'exemple suivant : E est un espace vectoriel ayant une base dénombrable (e_n) $(n=0,1,\ldots)$; pour chaque $n > 0$, on appelle C_n l'ensemble des points $\lambda e_n + (1-1/n)\mu e_0$, où λ et μ prennent toutes les valeurs réelles telles que $\lambda > 0$, $\mu \geqslant 0$, $\lambda + \mu \leqslant 1$.
A est l'ensemble convexe engendré par la réunion des C_n .
On fera voir que $e_0 \notin A'$, mais $e_0 \in (A')'$.

3) Soit A un ensemble étoilé par rapport à 0 , ne contenant aucun point de sa coque. Montrer que si $A+A=2A$, A est convexe (on montrera, par récurrence sur n , que si $x \in A$, $y \in A$, A contient, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 2^n$, les points $\lambda x + \mu y$, pour toutes les valeurs de λ et μ satisfaisant aux inégalités

$$0 \leqslant \lambda \leqslant k/2^n \quad , \qquad 0 \leqslant \mu \leqslant 1-k/2^n \quad)$$

4) Soit A une partie quelconque d'un espace vectoriel à n dimensions réelles. Montrer que l'enveloppe convexe de A est identique à l'ensemble des points $\sum_{i=0}^{n} t_i x_i$, où chacun des (n+1) points x_i parcourt A , et où $t = (t_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ parcourt la partie de R^{n+1} définie par les relations $t_i \geqslant 0$, $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$

(On établira d'abord le lemme suivant : si les $(n+1)$ points x_i forment un système libre, et si $x = \sum_{i=0}^{n} t_i x_i$, avec $t_i \geqslant 0$, $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$, il existe un indice k et n nombres u_i $(i \neq k)$ tels que $u_i \geqslant 0$, $\sum_{i \neq k} u_i \leqslant 1$, et $x = \sum_{i \neq k} u_i x_i$).

§ 2. Espaces vectoriels topologiques.

Définition 1. Une topologie sur un espace vectoriel E est dite compatible avec la structure vectorielle complexe (resp. réelle) de cet espace, si elle est compatible avec sa structure de groupe additif, et si en outre elle vérifie l'axiome suivant : (L) L'application $(\lambda, x) \to \lambda x$ de $\mathbb{C} \times E$ (resp. de $\mathbb{R} \times E$) dans E est continue.

Une structure complexe (resp. réelle) d'espace vectoriel et une topologie compatible avec cette structure définissent sur E une structure d'espace vectoriel topologique complexe (resp. réel) ; E , muni de cette structure, est appelé espace vectoriel topologique complexe (resp. réel).

Exemples. La topologie de $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$) satisfait à l'axiome (L), ainsi que nous l'avons vu en Topologie générale (ch. , §) ; elle est donc compatible avec la structure vectorielle complexe (resp. réelle) de cet espace ; nous verrons d'ailleurs au § 3 que c'est la seule topologie séparée qui possède cette propriété.

Il est clair qu'une topologie compatible avec la structure vectorielle complexe de E est aussi compatible avec sa structure réelle . Dans tout ce Livre, nous étudierons les propriétés des structures d'espace vectoriel topologique complexe ; les résultats correspondants pour les structures d'espace vectoriel topologique réel s'en déduisent,

ou s'obtiennent par des raisonnements tout à fait analogues ; nous laisserons souvent au lecteur le soin de les énoncer, sauf lorsqu'il s'agira de propriétés spéciales aux structures réelles.

Par un abus de langage, et pour abréger les énoncés, nous dirons souvent par la suite "espace vectoriel" au lieu d'"espace vectoriel topologique complexe", chaque fois que cette manière de s'exprimer ne prêtera pas à confusion.

Une topologie compatible avec la structure vectorielle (complexe ou réelle) de E, étant une topologie de groupe abélien sur E, y définit une structure uniforme (ch.III, § 2) ; lorsque nous parlerons de la structure uniforme d'un espace vectoriel topologique E, c'est toujours de cette structure qu'il sera question.

L'axiome (L) entraîne que, pour tout $x_0 \in E$, λx_0 est fonction uniformément continue de λ dans $\mathbb{C}$, d'après la relation $(\lambda - \lambda')x_0 = \lambda x_0 - \lambda' x_0$. De même, pour tout $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, l'homothétie $x \to \lambda_0 x$ est uniformément continue dans E, en vertu de $\lambda_0 x - \lambda_0 x' = \lambda_0(x-x')$. Il en résulte que toute homothétie de rapport $\neq 0$ est un isomorphisme de la structure d'espace vectoriel topologique de E sur elle-même (et aussi un isomorphisme de la structure uniforme de E sur elle-même). En particulier, si A est un ensemble ouvert (resp. fermé) dans E, λA est aussi un ensemble ouvert (resp. fermé) pour tout $\lambda \neq 0$.

Voisinages de l'origine dans un espace vectoriel topologique. Nous allons chercher à caractériser le filtre $\mathfrak{V}$ des voisinages de l'origine dans un espace vectoriel topologique E. Remarquons d'abord que, quels que soient $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $x_0 \in E$, on peut écrire

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = (\lambda - \lambda_0)(x - x_0) + \lambda_0(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0$$

et comme la topologie de E est une topologie de groupe, l'axiome (L) est équivalent au système des trois axiomes suivants :

(L'_I) Quel que soit $x_0 \in E$, λx_0 est fonction continue de λ au point $\lambda = 0$.

(L'_{II}) Quel que soit $\lambda_0 \in \mathcal{C}$, $\lambda_0 x$ est fonction continue de x au point $x = 0$.

(L'_{III}) λx est continue au point $(0,0)$ de $\mathcal{C} \times E$.

La définition des fonctions continues (Top. gén., ch.I, § 4) permet de remplacer les trois conditions précédentes par les conditions équivalentes :

(L''_I) Quel que soit $x_0 \in E$, et quel que soit $V \in \mathfrak{V}$, il existe $a > 0$ tel que $\lambda x_0 \in V$ pour tout $\lambda \in \mathcal{C}$ tel que $|\lambda| \leqslant a$.

(L''_{II}) Quel que soit $\lambda_0 \in \mathcal{C}$, et quel que soit $V \in \mathfrak{V}$, il existe $W \in \mathfrak{V}$ tel que $\lambda_0 W \subset V$.

(L''_{III}) Quel que soit $V \in \mathfrak{V}$, il existe $W \in \mathfrak{V}$ et $a > 0$ tels que $\lambda W \subset V$ pour tout $\lambda \in \mathcal{C}$ tel que $|\lambda| \leqslant a$.

Mais les deux dernières conditions peuvent s'exprimer autrement : (L''_{II}) signifie que, si $V \in \mathfrak{V}$, $\lambda V \in \mathfrak{V}$ quel que soit $\lambda \neq 0$, ou encore que $\mathfrak{V}$ est invariant par toute homothétie de rapport $\neq 0$; si maintenant, dans (L''_{III}), on pose $V' = \bigcup_{|\lambda| \leqslant \alpha} \lambda W$, on voit que V' est un voisinage cerclé contenu dans V ; et réciproquement, l'existence d'un tel voisinage contenu dans V entraîne (L''_{III}). Remarquons encore que lorsque V est cerclé (L''_I) signifie que V est équilibré par rapport à 0 ; enfin, en tenant compte des axiomes des voisinages de l'unité dans un groupe topologique (Top. gén., ch.III, § 1), nous arrivons au théorème suivant :

Théorème 1. Si E est un espace vectoriel topologique, il existe un système fondamental $\mathfrak{S}$ de voisinages de l'origine, invariant par toute homothétie de rapport $\neq 0$, formé d'ensembles cerclés et équilibrés par rapport à 0, et satisfaisant à la condition :

(LV) Quel que soit $V \in \mathfrak{S}$, il existe $W \in \mathfrak{S}$ tel que $W + W \subset V$.

Réciproquement, une base de filtre $\mathfrak{S}$ sur E satisfaisant à ces conditions définit sur E une topologie compatible avec la structure vectorielle complexe de E, et dans laquelle $\mathfrak{S}$ est un système fondamental de voisinages de l'origine.

Remarques. 1) Les mêmes raisonnements, pour une structure d'espace vectoriel topologique réelle, conduisent au résultat suivant : le théorème 1 subsiste, en y remplaçant les mots "ensembles cerclés et équilibrés par rapport à 0" par "ensembles étoilés, symétriques et équilibrés par rapport à 0".

2) On a déjà attiré l'attention sur le fait que, même dans un groupe séparé, un voisinage de l'origine peut être non borné (Top. gén., ch. III, § 1) ; nous rencontrerons par la suite des espaces vectoriels topologiques séparés où tout voisinage de l'origine contient un sous-espace vectoriel à une infinité de dimensions.

3) Soit $x \to \lambda(x)$ une application de E dans $\mathbb{C}$, telle que $|\lambda(x)| \leqslant k$ pour tout x dans un voisinage V de 0 ; la fonction $\lambda(x).x$ est continue au point $x=0$; en effet, si W est un voisinage quelconque de 0, contenu dans V, pour tout $x \in W/k$, on a $\lambda(x).x \in k.(W/k)=W$.

Définition d'une topologie d'espace vectoriel par une famille d'indicatrices. Si $\mathfrak{S}$ est un système fondamental de voisinages de 0 dans un espace vectoriel E, satisfaisant aux conditions du théorème 1, on peut toujours supposer que les ensembles de $\mathfrak{S}$ contiennent leur coque ; car, lorsque V parcourt $\mathfrak{S}$, les ensembles $p_V^{-1}([0,1])$ forment un système fondamental de voisinages équivalent à $\mathfrak{S}$ (puisqu'on a $V/2 \subset p_V^{-1}([0,1]) \subset 2V$), et possédant les mêmes propriétés que $\mathfrak{S}$.

On peut en outre toujours supposer que l'intersection de deux ensembles quelconques de $\mathfrak{S}$ (qui est encore un ensemble cerclé, équilibré et contenant sa coque) appartient à $\mathfrak{S}$.

La donnée de $\mathfrak{S}$ revient alors à celle de l'ensemble Φ des indicatrices des ensembles de $\mathfrak{S}$; cet ensemble est formé de fonctions homogènes et finies ; si $p \in \Phi$, $\lambda p \in \Phi$ quel que soit $\lambda > 0$; enfin, en exprimant que l'intersection de deux ensembles de $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}$, et que $\mathfrak{S}$ satisfait à (LV), on voit que Φ satisfait aux deux conditions suivantes :

(LI_I) L'enveloppe supérieure d'un nombre fini de fonctions de Φ appartient à Φ.

(LI_{II}) Quelle que soit $p \in \Phi$, il existe $\alpha > 0$ et $q \in \Phi$ tels que les relations $q(x) \leqslant \alpha$, $q(y) \leqslant \alpha$ entraînent $p(x+y) \leqslant 1$.

Réciproquement, considérons un ensemble Φ de fonctions homogènes et finies, satisfaisant aux conditions (LI_I) et (LI_{II}) ; il est immédiat que l'ensemble $\mathfrak{S}$ des ensembles $p^{-1}([0,\lambda])$, où p parcourt Φ et λ parcourt l'ensemble des nombres >0, est formé d'ensembles cerclés et équilibrés et satisfait aux conditions du th. 1,

autrement dit, est un système fondamental de voisinages de 0 dans une topologie d'espace vectoriel sur E .

Définition 2. Un ensemble Φ de fonctions homogènes et finies, satisfaisant aux conditions (LI_I) et (LI_{II}) est appelé un système fondamental d'indicatrices.

Toute topologie d'espace vectoriel peut donc être définie par un système fondamental d'indicatrices.

Considérons un ensemble Γ de fonctions homogènes et finies sur E satisfaisant uniquement à la condition :

(LI'_{II}) Quelle que soit $p \in \Gamma$, il existe $a > 0$ et des fonctions $q_1, q_2, \ldots, q_n$ de Γ telles que les conditions $q_i(x) \leqslant a$, $q_i(y) \leqslant a$ $(i=1,2,\ldots,n)$ entraînent $p(x+y) \leqslant 1$.

On en déduit un système fondamental d'indicatrices Φ en prenant l'ensemble des enveloppes supérieures d'un nombre fini de fonctions de Γ . On dit que Γ engendre le système fondamental Φ . Si en outre Γ ne contient aucun couple de fonctions proportionnelles, on dit que Γ est un système réduit d'indicatrices.

On définit de la même manière les systèmes fondamentaux et systèmes réduits d'indicatrices pour les structures d'espace vectoriel topologique réel ; il suffit de remplacer partout "homogène" par "positivement homogène et symétrique" .

Si Φ est un système fondamental d'indicatrices dans E , et si on désigne par $V_{p,a}$ la partie de $E \times E$ définie par $p(x-y) \leqslant a$ les ensembles $V_{p,a}$ forment un système fondamental d'entourages de la structure uniforme de E .

Proposition 1. Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ deux topologies sur un espace vectoriel E , compatibles avec la structure complexe de E ,

et définies respectivement par deux systèmes fondamentaux d'indicatrices Φ, Φ'. Pour que $\mathscr{C}'$ soit plus fine que $\mathscr{C}$, il faut et il suffit que, pour toute indicatrice $p \in \Phi$, il existe $q \in \Phi'$ et $a>0$ tels que $p(x) \leqslant a.q(x)$ quel que soit x.

En effet, si $\mathscr{C}'$ est plus fine que $\mathscr{C}$, pour tout $p \in \Phi$ et tout $\lambda>0$, il existe $q \in \Phi'$ et $\mu>0$ tels que $q^{-1}([0,\mu]) \subset p^{-1}([0,\lambda])$; par suite, pour tout x tel que $p(x) \geqslant \lambda$, on a $q(x) \geqslant \mu$; ceci entraîne $p(x) \leqslant \frac{\lambda}{\mu} q(x)$ en tout point où $p(x) \neq 0$, et l'inégalité est évidente aux autres points de E. La réciproque est immédiate.

Deux systèmes fondamentaux d'indicatrices sont dits équivalents s'ils définissent la même topologie sur E ; la proposition 1 permet d'exprimer la condition pour que Φ et Φ' sont équivalents, en écrivant que chacune des topologies $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ est plus fine que l'autre.

Proposition 2. Une topologie sur un espace vectoriel E, définie par un système fondamental d'indicatrices Φ, est la moins fine des topologies compatibles avec la structure vectorielle de E, et pour lesquelles les fonctions de Φ sont continues à l'origine.

En effet, il est clair que les fonctions de Φ sont continues au point 0. Réciproquement, si les fonctions de Φ sont continues à l'origine dans une topologie $\mathscr{C}$ compatible avec la structure vectorielle de E, pour tout $p \in \Phi$ et tout $\lambda>0$ $p^{-1}([0,\lambda])$ est un voisinage de 0 dans E, ce qui exprime que $\mathscr{C}$ est plus fine que la topologie définie par le système Φ.

Si la topologie de E est définie par un système fondamental d'indicatrices Φ, une condition nécessaire et suffisante pour que E soit séparé est que, pour tout $x \neq 0$, il existe une indicatrice $p \in \Phi$ telle que $p(x) \neq 0$; cela exprime en effet que l'intersection des voisinages $p^{-1}([0,\lambda])$ se réduit au point 0 (Top. gén., ch.III, § 2).

Remarquons enfin que l'intérieur d'un voisinage cerclé et équilibré de 0 est encore un ensemble cerclé et équilibré ; si on remplace les ensembles d'un système fondamental de voisinages $\mathfrak{S}$ satisfaisant aux conditions du th.1 , par les intérieurs de ces ensembles, on obtient donc un système équivalent $\mathfrak{S}'$ satisfaisant aux mêmes conditions, et formé d'ensembles ouverts. Il en résulte que les indicatrices des ensembles de $\mathfrak{S}'$ sont semi-continues supérieurement dans E ; autrement dit, on peut toujours définir une topologie d'espace vectoriel par un système fondamental d'indicatrices semi-continues supérieurement dans cette topologie.

Sous-espaces vectoriels. Soit G un sous-espace vectoriel (complexe ou réel) d'un espace vectoriel E ; l'axiome (L) montre immédiatement que toute topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel de E induit sur G une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel (réelle ou complexe) induite sur G par celle de E . G , muni de la structure d'espace vectoriel et de la topologie induites par les structures correspondantes de E , est dit sous-espace vectoriel topologique (réel ou complexe suivant les cas) de E (pour abréger, on dira souvent "sous-espace vectoriel" au lieu de "sous-espace vectoriel topologique" lorsqu'il n'en résultera pas de confusion).

Si la topologie de E est définie par un système fondamental d'indicatrices Φ , celle de G est définie par le système formé par les restrictions à G des fonctions de Φ .

Les translations dans E étant des homéomorphismes de E sur E , on voit que toute variété linéaire complexe (resp. réelle) (munie de la topologie induite par celle de E) est homéomorphe à un sous-espace vectoriel complexe (resp. réel).

Proposition 3. Dans un espace vectoriel séparé, toute droite homogène complexe (resp. réelle) D est un sous-espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$).

En effet, soit φ une application vectorielle biunivoque de $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) sur D. Les voisinages de 0 dans E étant équilibrés et cerclés, l'image réciproque par φ d'un tel voisinage contient un ensemble de la forme $|\xi| \leqslant a$ $(a > 0)$, ce qui montre que φ est continue. D'autre part, soit $\xi_0 \neq 0$ un point quelconque de $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$), et soit $x_0 = \varphi(\xi_0)$; comme E est séparé par hypothèse, il existe un voisinage cerclé V de 0 dans E ne contenant pas x_0 ; si U désigne, dans $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) l'ensemble des points ξ tels que $|\xi| \leqslant |\xi_0|$, $\varphi(U)$ contient la trace sur D du voisinage V, donc φ est bicontinue, ce qui établir la proposition.

Corollaire. Dans un espace vectoriel topologique, tout ensemble étoilé est connexe.

En effet, si x est un point d'un ensemble A étoilé par rapport à un point a, le segment fermé d'extrémités a et x est contenu dans A, et ce segment est connexe, comme image continue d'un ensemble connexe dans $\mathbb{R}$.

Remarque. L'hypothèse de la continuité de la fonction λx par rapport à l'ensemble des deux variables λ, x, intervient de façon essentielle (par l'intermédiaire du th.1) dans la proposition 3. On peut en effet donner des exemples de topologies de groupe sur $\mathbb{R}$, distinctes de la topologie de la droite numérique, et pour lesquelles le produit λx est continu par rapport à chacun des deux arguments, mais non par rapport à leur ensemble.(*)

Espace quotient par un sous-espace vectoriel. Soit G un sous-espace vectoriel complexe d'un espace vectoriel topologique E ; on sait (Top.gén., ch.III, § 3) que la topologie quotient de celle de E par la relation d'équivalence $x-y \in G$, est compatible avec la structure de groupe additif de l'espace vectoriel quotient E/G . Pour voir qu'elle est aussi compatible avec la structure d'espace vectoriel complexe de E/G , il suffit de montrer que l'application $(\lambda, \dot{x}) \to \lambda \dot{x}$ de $\mathbb{C} \times (E/G)$ dans E/G est continue. Or (Top.gén., ch.I, § 9, th.1), il suffit pour cela de voir que l'application $(\lambda, x) \to \lambda \dot{x}$ de $\mathbb{C} \times E$ dans E/G est continue ($x \to \dot{x}$ désignant l'application canonique de E sur E/G). Mais cette application est composée de l'application canonique de E sur E/G , et de l'application $(\lambda, x) \to \lambda x$ de $\mathbb{C} \times E$ dans E , qui sont toutes deux continues.

E/G , muni de sa structure d'espace vectoriel quotient de celle de E par G , et de la topologie quotient précédente, est dit espace vectoriel topologique quotient de E par G (pour abréger, on dira souvent simplement "espace vectoriel quotient", si aucune confusion n'en résulte).

Raisonnements et résultats analogues lorsque G est un sous-espace vectoriel réel ; si G n'est pas aussi un sous-espace vectoriel complexe, on ne définit ainsi sur E/G qu'une structure d'espace vectoriel topologique réel.

Remarque. On sait que E/G a une structure d'espace vectoriel isomorphe à celle d'un sous-espace vectoriel supplémentaire de G ; mais il se peut qu'il n'existe aucun sous-espace vectoriel supplémentaire de G , et dont la topologie soit isomorphe à celle de E/G .

Les voisinages de l'origine dans E/G sont les images par l'application canonique $x \to \dot{x}$ des voisinages de l'origine dans E . Donc, si Φ est un système fondamental d'indicatrices dans E , et si à tout $p \in \Phi$, on fait correspondre la fonction $\dot{p}$ définie dans E/G par la relation $\dot{p}(\dot{x}) = \inf_{x \in \dot{x}} p(x)$, on obtient dans E/G , un ensemble $\dot{\Phi}$ qui engendre un système fondamental définissant la topologie de E/G .

On sait que, pour que E/G soit <u>séparé</u>, il faut et il suffit que G soit <u>fermé</u> (Top. gén., ch.III, § 3,prop.4). Supposons en particulier que E ne soit pas séparé, et soit N l'adhérence de l'origine dans E (intersection des voisinages de 0) ; on sait que N est un sous-groupe du groupe additif de E ; il est clair en outre que N est invariant par toute homothétie ; donc N est un <u>sous-espace vectoriel fermé</u> de E . L'espace vectoriel quotient E/N , qui est séparé, est dit l'espace séparé <u>associé</u> à l'espace non séparé E .

<u>Fonctions linéaires continues</u>. Soient E et E' deux espaces vectoriels et f une application vectorielle de E dans E' ; si A' est cerclé et équilibré dans E' par rapport à l'origine, $f^{-1}(A')$ est cerclé et équilibré dans E par rapport à l'origine ; on en conclut que si E' est muni d'une topologie d'espace vectoriel, <u>l'image réciproque</u> de cette topologie par f est compatible avec la structure vectorielle de E .

Dans le cas où E est un sous-espace de E', et f l'application canonique de E dans E' , on retrouve ainsi que la topologie induite sur E est compatible avec la structure vectorielle induite sur E .

Si Φ' est un système fondamental d'indicatrices définissant la topologie de E', l'ensemble Φ des fonctions $q \circ f$, où q parcourt Φ', est un système fondamental d'indicatrices définissant la topologie image réciproque par f de celle de E'.

De cette remarque, et de la prop.1, on déduit aussitôt une condition pour qu'une application vectorielle d'un espace vectoriel topologique dans un autre soit continue :

Proposition 4. Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques dont les topologies sont définies respectivement par des systèmes fondamentaux d'indicatrices Φ et Ψ. Pour qu'une application vectorielle f de E dans F soit continue, il faut et il suffit que, pour toute indicatrice $q \in \Psi$, il existe $p \in \Phi$ et $a \geqslant 0$ tels que, pour tout $x \in E$,

(1) $$q(f(x)) \leqslant a.p(x)$$

Si f est une application vectorielle continue de E dans F, $G = f^{-1}(0)$ est un sous-espace vectoriel de E, qui est fermé si F est séparé. Par la décomposition canonique de f (Ens. R, § 5), on obtient une application vectorielle biunivoque et continue g de E/G sur f(E) ; on dit encore que f est un homomorphisme de E dans F si g est un isomorphisme de E/G sur f(E) ; il faut et il suffit pour cela que l'image par f de tout voisinage de 0 dans E, soit un voisinage de 0 dans F (cf. Top. gén., ch. III, § 3).

Toute application vectorielle continue d'un espace vectoriel topologique E dans un autre F, est en particulier une représentation continue du groupe additif de E dans celui de F, ou, comme on dit encore, une fonction additive continue. Mais, réciproquement, on a la propriété suivante :

Proposition 5. **Toute application additive et continue f d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est aussi une application vectorielle réelle de E dans F ; c'est une application vectorielle complexe de E dans F si elle satisfait en outre à l'identité** $f(ix) = if(x)$.

En effet, de l'identité $f(x+y)=f(x)+f(y)$, on déduit d'abord, par récurrence $f(nx)=nf(x)$ quel que soit l'entier n ; en remplaçant x par x/n dans cette identité, elle devient $f(x/n)= f(x)/n$, d'où, pour tout r rationnel, $f(rx)= rf(x)$; mais alors, si λ est un nombre réel quelconque et $\varepsilon > 0$ arbitraire, il existe $\eta > 0$ tel que, pour $|\mu - \lambda| \leqslant \eta$, $|f((\lambda - \mu)x)| = |f(\lambda x) - f(\mu x)| \leqslant \varepsilon$, et $|(\lambda - \mu)f(x)| \leqslant \varepsilon$; en prenant μ rationnel, on en déduit $|f(\lambda x) - \lambda f(x)| \leqslant 2\varepsilon$, et comme ε est arbitraire, $f(\lambda x)= \lambda f(x)$, d'où la proposition.

Produit d'espaces vectoriels topologiques. Soit (E_ι) une famille d'espaces vectoriels topologiques, E leur produit. On sait (Top.gén., ch.III, § 3) que la topologie produit de celles des E_ι est compatible avec la structure de groupe additif produit de celles des E_ι . Montrons en outre que cette topologie est compatible avec la structure vectorielle produit de celles des E_ι ; il suffira de voir que l'application $(\lambda, (x_\iota)) \to (\lambda x_\iota)$ de $\mathcal{C} \times E$ dans E est continue, ou encore (Top. gén., ch.I, § 8, th.1) que, pour chaque indice $\varkappa$, $(\lambda, (x_\iota)) \to \lambda x_\varkappa$ est une application continue de $\mathcal{C} \times E$ dans $E_\varkappa$; or, cette application est composée de $(\lambda, x_\varkappa) \to \lambda x_\varkappa$ et de $(\lambda, x) \to (\lambda, \mathrm{pr}_\varkappa x)$ qui sont toutes deux continues.

On dit que l'espace vectoriel $E = \prod_\iota E_\iota$, muni de la topologie produit des topologies des E_ι , est l'espace vectoriel topologique produit des espaces E_ι .

Si la topologie de E_ι est définie par un système fondamental d'indicatrices Φ_ι, les fonctions $p_\iota \circ pr_\iota$ engendrent un système fondamental d'indicatrices de la topologie de E (lorsque ι parcourt l'ensemble des indices, et que p_ι parcourt Φ_ι).

Remarque. On a vu au § 1 que tout espace vectoriel réel E peut être considéré comme sous-espace vectoriel réel de $E \times E$ muni d'une structure vectorielle complexe convenable. Si on suppose que E est muni en outre d'une topologie compatible avec sa structure vectorielle réelle, la topologie produit de celle de E par elle-même est compatible avec la structure vectorielle complexe de $E \times E$. Tout revient à montrer que l'application $(x,y) \to i(x,y)=(-y,x)$ de $E \times E$ dans lui-même est continue. Or, si V parcourt un système fondamental de voisinages symétriques de 0 dans E, $V \times V$ parcourt un système fondamental de voisinages de $(0,0)$ dans $E \times E$; et, comme l'application $(x,y) \longrightarrow (-y,x)$ applique $V \times V$ dans $V \times V$, elle est continue. On peut donc toujours considérer un espace vectoriel topologique réel comme sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel topologique complexe.

Espaces vectoriels topologiques fonctionnels. Si E est un espace vectoriel topologique, I un ensemble quelconque muni de la topologie discrète, l'espace vectoriel topologique produit E^I n'est autre que l'ensemble des applications continues de I dans E, muni de la structure uniforme de la convergence simple, et de la topologie qui s'en déduit (Top. gén., ch. VIII, § 1).

Plus généralement, considérons l'ensemble $\mathcal{C}(F,E)$ des applications continues d'un espace topologique F dans E. SI $\mathcal{K}$ est un ensemble de parties de F satisfaisant aux conditions (F'_I) et (F'_{II}),

(Top.gén., ch.VIII, § 1) on sait que la topologie déduite de la structure uniforme $\mathcal{U}_{\mathcal{K}}$ est compatible avec la structure de groupe additif de $\mathcal{C}(F,E)$; on obtient un système fondamental de voisinages de l'origine dans cette topologie en considérant, pour tout voisinage V de 0 dans E , et tout ensemble $A \in \mathcal{K}$, l'ensemble U(V,A) des fonctions $u \in \mathcal{C}(F,E)$ telles que $u(A) \subset V$.

Or, $\mathcal{C}(F,E)$ est aussi muni d'une structure vectorielle complexe; cherchons à quelle condition la topologie précédente est <u>compatible</u> avec cette structure vectorielle. On peut se contenter de considérer les ensembles U(V,A) correspondant aux ensembles V d'un système fondamental $\mathcal{G}$ de voisinages de 0 dans E , satisfaisant aux conditions du th.1 . Il est clair alors que les U(V,A) sont <u>cerclés</u> et que l'ensemble $\mathcal{G}'$ des U(V,A) est invariant par homothétie et satisfait à la condition (LV) ; tout revient à voir si U(V,A) est un ensemble <u>équilibré</u>, ce qui équivaut à la condition suivante :

(LF) <u>Quels que soient</u> $u \in \mathcal{C}(F,E)$, $A \in \mathcal{K}$, <u>et</u> $V \in \mathcal{G}$, <u>il existe</u> $\lambda > 0$ <u>tel que</u> $u(A) \subset \lambda V$.

Cela implique en particulier que u(A) est <u>borné</u> (Top. gén., ch.III, § 1), mais cette condition n'est pas équivalente à la précédente (voir exerc.).

Si p est l'indicatrice de V , celle de U(V,A) n'est autre que la fonction q définie par la relation $q(u) = \sup_{x \in A} p(u(x))$. Si la condition (LF) est remplie, les fonctions q engendrent un système fondamental d'indicatrices de la topologie de $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(F,E)$, lorsque A parcourt $\mathcal{K}$ et p un système fondamental d'indicatrices de E.

Considérons plus particulièrement le cas où F est lui-même un <u>espace vectoriel topologique</u>, et soit $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}(F,E)$ la partie de $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(F,E)$ formée des <u>applications vectorielles continues de F dans E</u>;

si la condition (LF) est vérifiée, $\mathcal{L}_{\mathfrak{H}}(F,E)$ est un sous-espace vectoriel topologique de $\mathcal{C}_{\mathfrak{H}}(F,E)$. On sait en outre (Top. géné., ch.VIII, § 1) que, si la condition (K) est vérifiée par l'ensemble $\mathfrak{H}$, et si E est séparé et complet, $\mathcal{C}_{\mathfrak{H}}(F,E)$ est aussi séparé et complet, et que l'ensemble des représentations continues du groupe additif de F dans celui de E est fermé dans $\mathcal{C}_{\mathfrak{H}}(F,E)$; mais le raisonnement qui sert à démontrer cette proposition s'étend aussitôt aux applications vectorielles continues de F dans E, et montre donc que $\mathcal{L}_{\mathfrak{H}}(F,E)$ est fermé dans $\mathcal{C}_{\mathfrak{H}}(F,E)$, et par suite complet.

La condition (K) ne peut être remplie que si l'ensemble $\mathfrak{H}$ contient au moins un voisinage de 0 dans F. Mais inversement, si on considère un ensemble quelconque $\mathfrak{G}$ de voisinages de 0 dans F, l'ensemble $\mathfrak{H}$ des homothétiques des ensembles de $\mathfrak{G}$ satisfait à la condition (K) ; en outre, on peut se borner à ne considérer, dans $\mathcal{L}_{\mathfrak{H}}(F,E)$ que les voisinages $U(V,A)$ où $A \in \mathfrak{G}$; car les relations $u(\lambda A) \subset V$, et $u(A) \subset V/\lambda$ étant équivalentes, on a $U(\lambda A, V) = U(A, V/\lambda)$.

Il faut remarquer à ce propos qu'il se présente des cas où aucun voisinage de 0 dans F ne peut satisfaire à la condition (LF) ; nous en rencontrerons des exemples par la suite.

Si $\mathfrak{H}$ est l'ensemble des parties finies de F, la condition (LF) est toujours remplie, comme on l'a vu plus haut, mais la condition (K) ne l'est pas ; et en général, l'espace correspondant $\mathcal{L}_c(F,E)$ (espace des applications vectorielles continues de F dans E, muni de la structure de la convergence simple) n'est pas complet, même lorsque E est séparé et complet. Toutefois, dans ce cas, toute partie fermée S de $\mathcal{L}_c(F,E)$, formée de fonctions également continues, est un sous-espace complet de $\mathcal{L}_c(F,E)$ (Top. gén., ch.VIII § 2, prop. 2).

La condition d'égale continuité des fonctions de S s'exprime facilement si on s'est donné les structures de E et F par des systèmes fondamentaux d'indicatrices Φ et Ψ respectivement : pour toute indicatrice $q \in \Phi$, il existe une indicatrice $p_q \in \Psi$ et un nombre $a_q > 0$ tels que, pour tout $x \in F$ et tout $u \in S$, $q(u(x)) \leqslant a_q . p_q(x)$. En effet, cette condition exprime l'égale continuité à l'origine ; mais inversement, si elle est remplie, et si x_0 est un point quelconque de F , on aura $q(u(x)-u(x_0)) \leqslant a_q . p_q(x-x_0)$ pour tout $u \in S$, ce qui montre l'égale continuité au point x_0 .

Complétion d'un espace vectoriel topologique. Soit E un espace vectoriel topologique séparé, $\hat{E}$ son complété. On sait (Top.gén., ch.III, § 4) que la structure de groupe additif de E se prolonge à $\hat{E}$; montrons de même qu'on peut prolonger à $\hat{E}$ la structure vectorielle topologique de E . Il suffira d'établir qu'on peut prolonger par continuité à $\mathbb{C} \times \hat{E}$ la fonction λx définie dans $\mathbb{C} \times E$; cela va résulter de la proposition générale suivante :

Proposition 6. Soient E,F,G trois groupes abéliens séparés et complets ; A un sous-groupe partout dense de E ; B un sous-groupe partout dense de F ; soit enfin f une application bilinéaire continue de $A \times B$ dans G ; f peut être prolongée par continuité dans $E \times F$.

En effet, soit (x_0,y_0) un point quelconque de $E \times F$, $\mathfrak{U}_A$, $\mathfrak{V}_B$ les traces sur A et B respectivement, des filtres de voisinages de x_0 et y_0 ; il suffit de montrer que $f(\mathfrak{U}_A \times \mathfrak{V}_B)$ est une base de filtre de Cauchy dans G (Top.gén., ch.II, § 3, prop.7). Soit donc W un voisinage quelconque de 0 dans G ; il existe un voisinage U de 0 dans E , et un voisinage V de 0 dans F , tels que $f((U+U) \cap A , (V+V) \cap B) \subset W$. Choisissons $x_1 \in (U+x_0) \cap A$, $y_1 \in (V+y_0) \cap B$

(ce qui est possible, puisque A et B sont partout denses dans E et F respectivement). On peut écrire

$$f(x',y')-f(x,y) = f(x'-x,y_1)+f(x'-x,y'-y_1)+f(x_1,y'-y)$$
$$+f(x-x_1,y'-y)$$

Si les points x,x' sont quelconques dans $(U+x_0) \cap A$, les points y,y' quelconques dans $(V+y_0) \cap B$, on a donc $f(x'-x,y'-y_1)+f(x-x_1,y'-y) \in W + W$. D'autre part, l'application partielle $x \longrightarrow f(x,y_1)$ est continue dans A ; il existe donc un voisinage U' de 0 dans E tel que $f((U'+U') \cap A, y_1) \subset W$; on voit de même qu'il existe un voisinage V' de 0 dans F tel que $f(x_1,(V'+V') \cap B) \subset W$. Si on pose $U_1 = ((U \cap U')+x_0) \cap A$, $V_1=((V \cap V')+y_0) \cap B$, on a donc $U_1 \in \mathfrak{U}_A$, $V_1 \in \mathfrak{V}_B$, et, si (x,y) et (x',y') sont deux points quelconques de $U_1 \times V_1$, on a $f(x',y')-f(x,y) \in W+W+W+W$, d'après ce qui précède, d'où la proposition.

Exercices. 1) Pour que l'application (λ, x) de $\mathbb{C} \times E$ dans E (E espace vectoriel topologique) soit uniformément continue dans un voisinage de l'origine de l'espace $\mathbb{C} \times E$, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage V_0 de 0 dans E, tel que les ensembles λV_0 forment un système fondamental de voisinages de 0 dans E (ce qui entraîne entre autres que la structure uniforme de E est métrisable).

2) Soit E l'espace vectoriel formé de toutes les fonctions complexes bornées définies sur l'intervalle $[0,1[$. Pour tout couple (δ, ε) de nombres >0, on désigne par $V_{\delta,\varepsilon}$ l'ensemble des $x \in E$ tels que $|x(t)| \leqslant \delta$ sauf sur un ensemble formé d'un nombre fini d'intervalles non empiétants, de longueur totale $\leqslant \varepsilon$. Montrer que les $V_{\delta,\varepsilon}$ forment une base de filtre

satisfaisant aux conditions du th.1, et définissent par suite une topologie sur E compatible avec sa structure d'espace vectoriel ; cette topologie n'est pas séparée. Quels que soient δ et ε , il existe un entier $n > 0$ tel que $n(V_{\delta,\varepsilon}) = E$, mais aucun $\lambda > 0$ tel que $E = \lambda V_{\delta,\varepsilon}$ si $\varepsilon < 1$.

3) Soit E un espace vectoriel à une infinité de dimensions. Montrer que l'ensemble $\mathfrak{T}$ de tous les ensembles cerclés et équilibrés par rapport à l'origine ne satisfait pas à l'axiome (LV). (Etant donnée une base vectorielle (x_ι) de E , soit (x_n) une suite infinie extraite de cette base ; pour chaque n , on désigne par A_n l'ensemble des points $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i$, où les nombres complexes t_i décrivent l'ensemble défini par les conditions : $|t_i| \leqslant 1/n$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $t_n \neq 0$; soit A la réunion des A_n , B un sous-espace vectoriel supplémentaire du sous-espace vectoriel engendré par A , C l'ensemble $A+B$; montrer qu'il n'existe aucun ensemble M , cerclé et équilibré par rapport à 0 , et tel que $M + M \subset C$.)

§ 3. Ensembles convexes, variétés linéaires et formes linéaires continues dans un espace vectoriel topologique.

Proposition 1. Dans un espace vectoriel topologique, l'adhérence d'un ensemble convexe est un ensemble convexe ; l'adhérence d'une variété linéaire réelle (resp. complexe) est une variété linéaire réelle (resp. complexe).

En effet, soit A un ensemble convexe (resp. une variété linéaire réelle, une variété linéaire complexe) ; pour tout $t \in [0,1]$ (resp. $t \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{C}$), $(x,y) \longrightarrow tx+(1-t)y$ est une application continue

de $A \times A$ dans A, donc elle applique $\bar{A} \times \bar{A}$ dans $\bar{A}$ (Top. gén., ch.I, § 4, prop.1), ce qui prouve que $\bar{A}$ est convexe (resp. une variété linéaire réelle, une variété linéaire complexe).

Définition 1. Dans un espace vectoriel topologique E, on appelle variété linéaire complexe (resp. réelle) fermée engendrée par une partie A de E, l'adhérence de la variété linéaire complexe (resp. réelle) engendrée par A.

On peut encore dire que la variété linéaire fermée engendrée par A est la plus petite variété linéaire fermée contenant A.

Remarque. On a vu au § 2 que la variété linéaire engendrée par un voisinage quelconque de 0 est l'espace E tout entier ; il en résulte que, si V est une variété linéaire distincte de E, elle ne peut contenir de point intérieur ; en particulier, une variété linéaire fermée et distincte de E est un ensemble épars dans E (Top.gén., ch.VII, § 2).

Corps convexes. Proposition 2. Si un ensemble convexe A contient un point intérieur x_0, l'intérieur de A est identique à l'ensemble des points internes de A par rapport à x_0 ; la frontière de A est identique à sa coque par rapport à x_0.

En effet, on peut supposer $x_0 = 0$; soit $x \neq 0$ un point quelconque de A ; quels que soient $z \in A$ et $t \in [0,1[$, A contient le point $tx+(1-t)z$; autrement dit, on a $tx \in tx+(1-t)A \subset A$, et comme $1-t \neq 0$, tx est point intérieur de $(1-t)A+tx$, et par suite de A.

Si x est un point de la coque de A, et V un voisinage quelconque de 0, il existe $t \in]0,1]$ tel que $tx \in V$; donc $(1-t)x \in (V+x) \cap A$, $(1+t)x \in (V+x) \cap (\complement A)$, ce qui montre que x est point frontière de l'ensemble A (ceci s'applique même si A est simplement étoilé

par rapport à l'origine). Enfin, soit x un point n'appartenant pas à A ni à sa coque ; il existe donc $t < 1$ tel que, pour $0 \leqslant t' < t$, $t'x \in A$, et pour $t'' > t$, $t''x \in \complement A$; il en résulte que, pour y intérieur à A, le point $x+(1-1/t)y$ n'appartient pas à A, sans quoi, comme $tx = t(x+(1-1/t)y)+(1-t)y$, tx serait intérieur à A, ce qui est absurde, tx étant un point de la coque de A ; l'ensemble $x+(1-1/t)\overset{o}{A}$ est donc un voisinage de x ne rencontrant pas A, autrement dit, x est extérieur à A, ce qui achève de démontrer la proposition.

Définition 2. Dans un espace vectoriel topologique, on appelle corps convexe un ensemble convexe fermé et contenant un point intérieur.

On voit donc que si un ensemble convexe A contient un point intérieur, son adhérence est un corps convexe ; l'intérieur de A est identique à l'intérieur de $\bar{A}$, l'adhérence de A à l'adhérence de $\overset{o}{A}$.

On retrouve ainsi le fait que, dans R^n, l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et même rayon, l'intérieur d'une boule fermée la boule ouverte de même centre et même rayon, la frontière d'une boule (ouverte ou fermée) la sphère de même centre et même rayon. D'une façon générale, la structure des ensembles convexes dans R^n est particulièrement simple : pour qu'un ensemble convexe A dans R^n ait un point intérieur, il faut et il suffit que la variété linéaire engendrée par A soit identique à R^n.

La condition est évidemment nécessaire ; pour voir qu'elle est suffisante, remarquons que, si elle est remplie,

A contient un système libre de n+1 points ; par une transformation linéaire biunivoque, on peut transformer ces n+1 points en l'origine et les n vecteurs unitaires e_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; le transformé de A , qui est convexe, contient alors le pavé $\prod_{i=1}^{n} \left(0, 1/n\right)$, donc contient un point intérieur, d'où la proposition. On en déduit que, si un ensemble convexe dans R^n engendre une variété linéaire à p dimensions $(p \leqslant n)$ il possède un point intérieur par rapport à cette variété?

La proposition précédente montre aussi que, pour qu'un point x_0 d'un ensemble convexe $A \subset R^n$ soit intérieur à A , il faut et il suffit que A soit équilibré par rapport à x_0. Cette proposition est inexacte pour les espaces vectoriels topologiques à une infinité de dimensions : on peut donner des exemples d'ensembles convexes équilibrés par rapport à chacun de leurs points, mais ne contenant aucun point intérieur (voir ch.III, § exerc.).

Hyperplans fermés et formes linéaires continues. Proposition 3. Pour qu'un hyperplan complexe (resp. réel) soit fermé, il faut et il suffit que son complémentaire ait un point intérieur.

La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, si un hyperplan H (réel ou complexe) n'est pas fermé, son adhérence est une variété linéaire distincte de H et contenant H , donc nécessairement l'espace tout entier ; autrement dit, H est partout dense dans E , d'où la proposition.

Théorème 1. Pour qu'un hyperplan homogène complexe (resp. réel) soit fermé, il faut et il suffit que le premier membre de son équation soit une forme linéaire complexe (resp. réelle) continue.

La condition est évidemment suffisante (Top.gén., ch.I, §4, th.2).

Réciproquement, soit H un hyperplan homogène complexe (resp. réel) fermé, x_0 un point de $\complement H$; tout point $x \in E$ se met d'une manière et d'une seule sous la forme $x = t(x).x_0 + y(x)$, où $t(x) \in \mathbb{C}$ (resp. $t(x) \in R$) et $y(x) \in H$; nous allons voir que t est une forme linéaire complexe (resp. réelle) continue dans E . Il suffit de montrer qu'elle est continue au point x=0. Supposons le contraire : il existerait un nombre $a > 0$ tel que, dans tout voisinage cerclé V de 0 dans E , il existe un point z tel que $|t(z)| \geqslant a$, et par suite aussi un point z' tel que $t(z')=a$. Autrement dit, si H' désigne l'hyperplan d'équation $t(x)=a$, on aurait $H' \cap V \neq \emptyset$, ce qui signifie que le point 0 est adhérent à H' ; or H', qui se déduit de H par translation, est fermé par hypothèse, et ne contient pas l'origine, d'où contradiction, ce qui prouve le théorème.

Corollaire. Si H est un hyperplan réel fermé, les demi-espaces fermés (resp. ouverts) déterminés par H sont des ensembles fermés (resp. ouverts).

En effet, si H a pour équation $f(x)=a$, f est continue, et les demi-espaces fermés (resp. ouverts) déterminés par H sont les ensembles $f^{-1}([a,+\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty,a])$ (resp. $f^{-1}([a,+\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty,a[)$) ; d'où la proposition.

Proposition 4. Pour qu'une forme linéaire f (réelle ou complexe) soit continue dans E , il faut et il suffit qu'il existe un voisinage de l'origine V tel que, si $p_{K(V)}$ désigne l'indicatrice de l'enveloppe convexe de V , on ait, pour tout $x \in E$,

$$|f(x)| \leqslant p_{K(V)}(x)$$

La condition est évidemment suffisante (§ 2, prop. 4) .

Réciproquement, soit f une forme linéaire complexe continue, et H l'hyperplan d'équation $f(x)=1$. H est contenu dans l'hyperplan réel K d'équation $\mathcal{R}f(x)=1$, qui est fermé, puisque $\mathcal{R}f$ est continue. L'origine 0 est contenue dans le demi-espace ouvert $\mathcal{R}f(x) < 1$, donc il existe un voisinage V cerclé de 0 contenu dans ce demi-espace ; comme ce demi-espace est convexe, $\underline{K}(V)$ y est contenu ; on a donc, quel que soit $x \in E$, $\mathcal{R}f(x) \leqslant p_{\underline{K}(V)}(x)$, d'où, pour $|\varepsilon| = 1$, $\mathcal{R}(\varepsilon f(x)) = \mathcal{R}\, f(\varepsilon x) \leqslant p_{\underline{K}(V)}(\varepsilon x) = p_{\underline{K}(V)}(x)$, c'est-à-dire $|f(x)| \leqslant p_{\underline{K}(V)}(x)$. Démonstration analogue pour les formes linéaires réelles.

<u>Corollaire. Pour qu'il existe une forme linéaire continue non identiquement nulle dans E, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage de l'origine dont l'enveloppe convexe ne soit pas identique à l'espace E tout entier</u>.

C'est évidemment <u>nécessaire</u> d'après la prop.1. Inversement, supposons qu'il existe un voisinage cerclé convexe V de l'origine, non identique à E. Si $x_0 \notin V$, et si D est la droite complexe joignant x_0 à l'origine, tout point de D est de la forme $x = tx_0$, $t \in \mathbb{C}$; la fonction $f(x)=t$ est une forme linéaire définie sur D, et on a $|f(x)| \leqslant p_V(x)$ en tout point de D. D'après la prop.1 du § 1, il existe donc une forme linéaire complexe $\overline{f}$ qui prolonge f à E, et est telle que $|\overline{f}(x)| \leqslant p_V(x)$ dans E ; $\overline{f}$ est donc continue et non identiquement nulle, d'où la proposition.

On peut donner des exemples d'espaces <u>séparés</u> où la condition précédente n'est pas remplie, et où il n'existe donc aucune forme linéaire non identiquement nulle (voir exerc. 1). Dans un tel espace, tout hyperplan est donc <u>partout dense</u>.

Sous-espaces vectoriels à n dimensions. Proposition 5. Dans un espace vectoriel séparé, tout sous-espace vectoriel à n dimensions complexes (resp. réelles) est isomorphes à $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$).

La proposition étant vraie pour n=1 (§ 2, prop.3), nous la démontrerons par récurrence sur n. Remarquons d'abord, avec les notations du th.1, que l'application $x \longrightarrow (t(x), y(x))$ de E sur l'espace produit $\mathbb{C} \times H$, est un isomorphisme ; car $t(x)$ est continue donc aussi $y(x)=x-t(x).x_0$; et réciproquement, l'application $(t,y) \longrightarrow tx_0+y$ de $\mathbb{C} \times H$ dans E est continue. Considérons alors un sous-espace vectoriel G de E, à n dimensions complexes ; soit K un sous-espace vectoriel de G à n-1 dimensions complexes ; K est aussi un sous-espace de E, donc est isomorphe à $\mathbb{C}^{n-1}$, d'après l'hypothèse ; il est donc complet, et par suite fermé dans G. Mais, dans G, K est un hyperplan fermé ; G est donc isomorphe à $\mathbb{C} \times K$, d'après la remarque précédente, et par suite à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$, c'est-à-dire à $\mathbb{C}^n$. Démonstration analogue pour les sous-espaces vectoriels réels à un nombre fini de dimensions.

Corollaire. Dans un espace vectoriel séparé, tout sous-espace vectoriel à un nombre fini de dimensions (complexes ou réelles) est fermé.

En effet, c'est un sous-espace complet, d'après la prop. 4.

Proposition 6. Si un sous-espace vectoriel complexe (resp. réel) fermé G d'un espace vectoriel séparé E a pour supplémentaire un sous-espace vectoriel à n dimensions complexes (resp. réelles) K, E est isomorphe à l'espace produit $G \times K$.

Nous venons de le voir pour n=1 ; démontrons-le par récurrence sur n. Soit K' un sous-espace vectoriel de K, à n-1 dimensions

complexes (resp. réelles), K'' une droite homogène complexe (resp. réelle), supplémentaire de K' par rapport à K ; K'' est aussi supplémentaire de $G+K'$, qui est un hyperplan H de E . Or, G est fermé dans le sous-espace H , et K' est supplémentaire de G dans H ; H est donc isomorphe à $G \times K'$. D'autre part H est <u>fermé</u> dans E ; car, dans l'espace quotient E/G , qui est séparé et à n dimensions complexes (resp. réelles), l'image canonique de H est un sous-espace à $n-1$ dimensions, qui est fermé dans E/G , d'après la prop.4 . E est donc isomorphe à $H \times K''$, donc à $(G \times K') \times K''$, et par suite à $G \times (K' \times K'')$; comme $K' \times K''$ est isomorphe à K , d'après la prop.4, la proposition est démontrée.

<u>Exercices</u>. 1) Montrer que, dans l'espace E défini dans l'exerc.2 du § 2, ainsi que dans l'espace séparé E' associé à E , il n'existe aucune forme linéaire continue non identiquement nulle (si f est une forme linéaire continue, bornée sur un $V_{\delta,\varepsilon}$, montrer que $f(x)=0$ pour toute fonction $x \in V_{\delta,\varepsilon}$, nulle dans $[0,1[$ sauf sur un ensemble formé d'un nombre fini d'intervalles non empiétants, de longueur totale $\leqslant \varepsilon$).

2) Soit (E_ι) une famille d'espaces vectoriels topologiques E leur produit. A toute forme linéaire continue f_ι sur E_ι , on fait correspondre la forme linéaire continue sur E , $f'_\iota = f_\iota \circ pr_\iota$. Montrer que toute forme linéaire continue sur E est une combinaison linéaire d'un nombre <u>fini</u> de formes f'_ι .

3) Dans un espace vectoriel topologique, l'enveloppe convexe d'un ensemble ouvert est un ensemble ouvert. Donner un exemple d'une partie <u>fermée</u> de R^2 dont l'enveloppe convexe <u>n'est pas un ensemble fermé</u>.

4) Dans un espace vectoriel topologique à un nombre fini de dimensions réelles, l'enveloppe convexe d'un ensemble compact est un ensemble compact (utiliser l'exerc. 4 du § 1).

Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^I$, où I est un ensemble infini quelconque, on désigne par e_ι ($\iota \in I$) le point dont toutes les coordonnées sont 0, à l'exception de celle d'indice ι ("vecteurs unitaires"). Si A est la partie de $\mathbf{R}^I$ formée de l'origine et des points e_ι ($\iota \in I$), montrer que A est compact, mais que son enveloppe convexe n'est pas fermée dans $\mathbf{R}^I$.

§ 4. Espaces localement convexes.

Définition 1. On dit qu'un espace vectoriel topologique E est localement convexe lorsqu'il existe un système fondamental de voisinages de l'origine formé d'ensembles convexes.

On peut encore exprimer cette définition de la manière équivalente suivante : un espace vectoriel topologique E est localement convexe si les enveloppes convexes des voisinages de l'origine forment un système fondamental de voisinages.

Les voisinages convexes de l'origine dans un espace localement convexe sont des ensembles cerclés, équilibrés ; leur ensemble $\mathfrak{F}$ est invariant par homothétie et vérifie (LV) ; mais, en raison de la relation $V+V=2V$, valable pour les ensembles convexes, la condition (LV) est ici une conséquence de l'invariance de $\mathfrak{F}$ par homothétie. Autrement dit, dans un espace vectoriel E, toute base de filtre $\mathfrak{F}$ formée d'ensembles convexes, cerclés et équilibrés par rapport à l'origine et invariante par homothétie, est un système fondamental de voisinages d'une topologie compatible avec la structure vectorielle de E.

Exemples. 1) L'ensemble $\mathfrak{K}_0$ de tous les ensembles convexes cerclés et équilibrés par rapport à 0 définit sur E une topologie d'espace localement convexe ; c'est évidemment la plus fine de toutes. Dans cette topologie, tout hyperplan complexe est fermé, car si H est un hyperplan complexe ne passant pas par 0 , il est l'intersection de deux hyperplans réels K,K' ne passant pas par 0 ; si V,V' sont les demi-espaces ouverts contenant 0 déterminés par K et K' respectivement $W = V \cap V'$ est un ensemble convexe contenant 0 , équilibré par rapport à 0 et ne rencontrant pas H . Soit W' l'intersection des ensembles εW , lorsque ε parcourt le cercle unité $|\varepsilon| = 1$; W' est convexe et cerclé par rapport à 0 , et ne rencontre pas H ; il suffit de voir que W' est équilibré par rapport à 0 . Or, soit D une droite complexe homogène ; $D \cap W$ est un ensemble convexe A contenu dans un espace vectoriel à deux dimensions réelles ; soit x un point de D tel que x et ix soient des points de A/2 (il en existe, puisque A est équilibré par rapport à 0) ; tout point εx , avec $|\varepsilon| \leqslant 1$, appartient alors à A , donc à W' ; leur ensemble est équilibré par rapport à 0 , d'où la proposition. Dans la topologie définie par $\mathfrak{K}_0$, toute forme linéaire complexe sur E est donc continue.

2) Etant donnée une topologie $\mathfrak{C}$ d'espace vectoriel sur E , l'ensemble des enveloppes convexes des voisinages de 0 dans E est un système fondamental de voisinages dans la topologie localement convexe la plus fine de toutes celles qui sont moins fines que $\mathfrak{C}$; cette topologie est appelée la topologie localement convexe adjointe à la topologie $\mathfrak{C}$. D'après la prop.3 du § 3, les formes linéaires continues sont les mêmes pour la topologie $\mathfrak{C}$ et pour son adjointe.

Comme tout voisinage convexe V de l'origine satisfait à la relation $\overset{n}{+} V = nV$, quel que soit l'entier $n > 0$, la définition d'un ensemble <u>borné</u> dans un espace localement convexe (Top.gén., ch.III, § 1) équivaut à la suivante : <u>un ensemble A est borné si, quel que soit le voisinage V de 0 , il existe un nombre réel $\lambda > 0$ tel que</u> $A \subset \lambda V$.

<u>Semi-normes</u>. Si $\mathfrak{S}$ est un système fondamental de voisinages convexes cerclés de l'origine, dans un espace localement convexe E , les indicatrices des ensembles de $\mathfrak{S}$ forment un système fondamental d'indicatrices <u>convexes</u> définissant la topologie de E .

Réciproquement, <u>tout</u> ensemble Γ de fonctions <u>convexes</u>, <u>homogènes</u> et <u>finies</u> sur un espace vectoriel E <u>engendre</u> un système fondamental d'indicatrices définissant une topologie localement convexe $\mathscr{E}$ sur E ; en effet, en vertu de la relation de convexité $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$, il est immédiat que Γ satisfait à (LI'_{II}).

On dit que Γ est un système de <u>semi-normes</u> définissant la topologie $\mathscr{E}$; le système fondamental d'indicatrices <u>engendré</u> par Γ est encore un système de semi-normes définissant $\mathscr{E}$.

En vertu de l'inégalité $|p(x)-p(y)| \leqslant p(x-y)$, on voit en outre que les semi-normes d'un système Γ définissant la topologie $\mathscr{E}$ sont <u>uniformément continues</u> dans E , au sens de la structure uniforme correspondant à $\mathscr{E}$; les fonctions $p(x-y)$ $(p \in \Gamma)$ forment un système d'<u>écarts</u> définissant cette structure uniforme (Top.gén., ch.VII, § 1).

Sous-espaces vectoriels, espaces quotients et espaces produits d'espaces localement convexes. Il est clair que tout sous-espace vectoriel d'un espace localement convexe est un espace localement convexe ; il en est de même de tout espace quotient d'un espace localement convexe, l'image d'un ensemble convexe par une application linéaire étant convexe (voir § 2). Enfin, comme tout produit d'ensembles convexes est convexe, le produit d'une famille d'espaces localement convexes est localement convexe. Plus généralement, si un espace vectoriel E est localement convexe, l'espace $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(F,E)$ (où $\mathcal{K}$ satisfait à la condition (LF)) est un espace localement convexe, d'après la définition d'un système fondamental d'indicatrices de la topologie de cet espace (§ 2).

Complétion d'un espace localement convexe. Si Γ est un système fondamental de semi-normes définissant la topologie d'un espace localement convexe séparé E, les fonctions de Γ, qui sont uniformément continues dans E, se prolongent par continuité dans le complété $\hat{E}$ de E ; soit $\overline{\Gamma}$ l'ensemble de ces fonctions prolongées. D'après le principe de prolongement des inégalités (Top.gén., ch.IV, § 5), les fonctions de $\overline{\Gamma}$ sont convexes dans $\hat{E}$, et évidemment homogènes. En outre, si $\overline{p}$ désigne le prolongement à $\hat{E}$ de la fonction $p \in \Gamma$, les fonctions $\overline{p}(x-y)$ forment un système d'écarts définissant la structure uniforme de $\hat{E}$ (Top.gén., ch.VII, § 1) ; les fonctions $\overline{p}$ forment donc un système fondamental d'indicatrices de $\hat{E}$, d'où résulte que $\hat{E}$ est localement convexe, et que les semi-normes définissant la topologie de E se prolongent en semi-normes définissant la topologie de $\hat{E}$.

Notons encore que, dans un espace localement convexe complet E, dont la topologie est définie par un système de semi-normes Φ,

une condition <u>suffisante</u> pour qu'une famille (x_ι) de points de E soit <u>sommable</u> (Top.gén.,ch.III, §2) est que, pour toute semi-norme $p \in \Phi$, $\sum_\iota p(x_\iota)$ soit <u>finie</u>. En effet, pour toute partie finie H de l'ensemble d'indices I , posons $s_H = \sum_{\iota \in H} x_\iota$; si $\sum_\iota p(x_\iota)$ est finie, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie H_0 de I telle que, pour toute partie finie H de I ne rencontrant pas H_0 , on ait $\sum_{\iota \in H} p(x_\iota) \leqslant \varepsilon$; comme p est convexe, on en déduit $p(s_H) = p(\sum_{\iota \in H} x_\iota) \leqslant \sum_{\iota \in H} p(x_\iota) \leqslant \varepsilon$; comme cela s'applique à toute semi-norme de Φ par hypothèse, l'image par l'application $H \longrightarrow s_H$ du filtre des sections sur l'ordonné filtrant des parties finies de I , est une base de filtre de Cauchy sur E , donc converge dans E .

Cette condition suffisante n'est pas nécessaire en général (voir).

<u>Formes linéaires continues et variétés linéaires fermées</u>. <u>Proposition 1</u>. <u>Soient E un espace vectoriel topologique, A un corps convexe dans E , G une variété linéaire complexe</u> (resp. <u>réelle</u>) , <u>ne pénétrant pas dans A . Il existe un hyperplan complexe</u> (resp. <u>réel</u>) <u>fermé contenant G et ne pénétrant pas dans A</u> .

Considérons d'abord le cas où G est une variété linéaire réelle ; d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe un hyperplan réel H contenant G et ne pénétrant pas dans A ; comme $\int H$ contient l'intérieur de A , donc au moins un point intérieur, H est <u>fermé</u>.

Si G est une variété linéaire complexe, qu'on peut supposer homogène, il existe un hyperplan réel H fermé d'équation $f(x)=0$, <u>réel</u> contenant G et ne pénétrant pas dans A ; f étant continue, l'hyperplan H' d'équation $f(ix)=0$ est fermé, donc l'hyperplan complexe $H \cap H'$, qui contient G et ne pénètre pas dans A , est fermé.

En particulier, tout hyperplan d'appui d'un corps convexe est fermé, et on sait que, par tout point frontière du corps convexe, il passe au moins un hyperplan d'appui.

Corollaire 1. Dans un espace localement convexe, si G est une variété linéaire fermée et x_0 un point de $\complement G$, il existe un hyperplan fermé contenant G et ne contenant pas x_0.

En effet, x_0 étant intérieur à $\complement G$, il existe un ensemble ouvert convexe A contenant x_0 et ne rencontrant pas G ; l'application du th.1 montre qu'il existe un hyperplan fermé contenant G et ne rencontrant pas A.

Corollaire 2. Dans un espace localement convexe, la variété linéaire fermée engendrée par une partie A est l'intersection des hyperplans fermés contenant A.

En effet, cette intersection contient la variété linéaire fermée G engendrée par A ; et si $x_0 \in \complement G$, il existe un hyperplan fermé contenant G et ne contenant pas x_0.

Corollaire 3. Dans un espace localement convexe séparé, si V est un sous-espace vectoriel à n dimensions, il existe un sous-espace vectoriel fermé supplémentaire de V.

La proposition est une conséquence du corollaire 1 si n=1 ; il suffit de l'appliquer à un point $x_0 \neq 0$ de V, et à la variété linéaire G réduite au point 0, qui est fermée. Si maintenant V est à n dimensions ($n > 1$), soit $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base vectorielle de V ; il existe un hyperplan fermé H_i supplémentaire de la droite homogène passant par a_i ; l'intersection des H_i est un sous-espace vectoriel supplémentaire de V, et il est fermé.

Théorème 1. *Soit E un espace localement convexe, G un sous-espace vectoriel de E , f une forme linéaire continue définie dans G ; il existe une forme linéaire continue $\bar{f}$ qui est un prolongement de f à E .*

En effet, si la structure de E est définie par une famille Φ de semi-normes il existe $a > 0$ et $p \in \Phi$ tels que $|f(x)| \leqslant a.p(x)$ en tout point de G . D'après la prop.1 du § 1 , il existe donc une forme linéaire $\bar{f}$ qui prolonge f à E et est telle que $|\bar{f}(x)| \leqslant a.p(x)$ quel que soit $x \in E$, ce qui montre que $\bar{f}$ est continue.

Corollaire. *Soient E un espace localement convexe, $x_0 \neq 0$ un point de E, p une semi-norme telle que $p(x_0) \neq 0$; il existe une forme linéaire continue f telle que $f(x_0) = p(x_0)$ et $|f(x)| \leqslant p(x)$ quel que soit $x \in E$.*

On peut le déduire du th.1, en remarquant que si, pour tout point $x = tx_0$ on pose $g(x) = t$, g est une forme linéaire continue sur la droite homogène passant par x_0 , telle que $|g(x)| = p(x)$. On peut aussi remarquer que la proposition exprime simplement que, par le point x_0 de la frontière du corps convexe $p(x) \leqslant p(x_0)$ passe un hyperplan d'appui fermé.

Proposition 2. *Dans un espace vectoriel topologique E , soit A un corps convexe, et B un ensemble convexe ne contenant aucun point intérieur de A ; il existe un hyperplan réel fermé séparant A et B .*

En effet, il existe un hyperplan réel H séparant A et B (§ 1 , prop. 2) et comme H ne pénètre pas dans A , $\complement$H contient un point intérieur, donc H est fermé.

Corollaire. *Dans un espace localement convexe, tout ensemble convexe fermé est une intersection de demi-espaces fermés déterminés par des hyperplans fermés.*

En effet, soit A un ensemble convexe fermé dans un espace localement convexe E . Si $x_0 \in \complement A$, il existe un voisinage convexe ouvert V de x_0 , ne rencontrant pas A ; il existe donc un hyperplan fermé H séparant A et V , et x_0 n'est pas dans le demi-espace fermé déterminé par H et contenant A .

Ensembles précompacts dans un espace localement convexe. Soit A un ensemble précompact dans un espace vectoriel topologique séparé E ; quel que soit le voisinage V de l'origine, il existe un nombre fini de points a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ tels que A soit contenu dans la réunion des voisinages $V+a_i$; en particulier, si G est le sous-espace vectoriel engendré par les points a_i (et dont le nombre de dimensions est $\leqslant n$), A est contenu dans $V+G$.

Proposition 3. Tout espace localement convexe localement précompact a un nombre fini de dimensions.

En effet, supposons qu'il existe une semi-norme p dans E telle que le voisinage $V = p^{-1}([0,1])$ de l'origine soit précompact ; ce voisinage est donc borné, autrement dit, quel que soit le voisinage W de 0, il existe λ tel que $V \subset \lambda W$, ou encore $V/\lambda \subset W$; mais cela exprime que les ensembles λV , où λ parcourt l'ensemble des nombres >0 , forment un système fondamental de voisinages de l'origine, ou encore que la structure de E est définie par la seule semi-norme p ; E étant séparé, on a d'ailleurs $p(x) \neq 0$ pour $x \neq 0$ (nous étudierons de manière détaillée les espaces de cette nature au ch.III).

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace vectoriel G à un nombre fini de dimensions, tel que $V \subset G + \varepsilon V$. Si E a une infinité de dimensions, il existe un point $x \in \complement G$; d'après ce qui précède,

comme G est fermé, $p(y-x)$ a une borne inférieure $d > 0$ lorsque y parcourt G ; prenons $y \in G$ tel que $d \leqslant p(y-x) \leqslant d/(1-\varepsilon)$, puis posons $x_0=(x-y)/p(x-y)$. On a évidemment $p(x_0)=1$; d'autre part, quel que soit $z \in G$, le point $y+p(x-y)z$ appartient à G ; donc

$$p(x_0-z) = p(x-(y+p(x-y)z))/p(x-y) \geqslant 1-\varepsilon$$

Mais $x_0 \in V$, et par hypothèse, il existe $z \in G$ tel que $p(x_0-z) \leqslant \varepsilon$; on a donc une contradiction, puisque ε est arbitrairement petit.

Exercices. 1) Soit E un espace vectoriel à une infinité de dimensions, (e_ι) une base vectorielle de E. Pour tout $x = \sum_{\iota \in H} x_\iota e_\iota$ (H fini), on pose $p(x) = (\sum_{\iota \in H} \sqrt{|x_\iota|})^2$; montrer que l'ensemble réduit à la seule fonction p est un système fondamental d'indicatrices d'une structure d'espace vectoriel topologique sur E, qui n'est pas localement convexe ; montrer qu'il existe des formes linéaires continues non identiquement nulles dans E.

2) Dans un espace localement convexe, l'enveloppe convexe d'un ensemble précompact est un ensemble précompact.

3) Montrer que l'espace séparé associé à l'espace E défini dans l'exerc. 2 du § 2 n'est pas localement précompact.

LIVRE IV

CHAPITRE II

LA DUALITÉ FAIBLE DANS LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES.

§ 1. Structures faibles.

Considérons deux espaces vectoriels E,E' (sur le corps $\mathcal{C}$, d'après nos conventions générales) ; on ne les suppose pas nécessairement munis de topologies compatibles avec leurs structures vectorielles. Supposons donnée une application bilinéaire $(x,x') \to B(x,x')$ de $E \times E'$ dans $\mathcal{C}$; nous supposerons en outre que B satisfait aux conditions :

(D_I) La relation "quel que soit $x \in E$, $B(x,x')=0$" entraîne $x'=0$.

(D_{II}) La relation "quel que soit $x' \in E'$, $B(x,x')=0$" entraîne $x=0$.

On désignera par $B_{x'}$ la forme linéaire $x \to B(x,x')$ définie dans E, par B'_x la forme linéaire $x' \to B(x,x')$ définie dans E'.

Définition 1. On appelle topologie faible définie sur E par E' (resp. topologie faible définie sur E' par E), et on désigne par $\sigma(E,E')$ (resp. $\sigma(E',E)$) la topologie de groupe la moins fine sur E (resp. E') rendant continues toutes les formes linéaires $B_{x'}$ (resp. toutes les formes linéaires B'_x).

Les fonctions $|B_{x'}|$ sont des semi-normes sur E ; d'après la définition précédente, $\sigma(E,E')$ est une structure d'espace localement convexe, définie par le système de semi-normes $|B_{x'}|$, où x' parcourt E'. Cette structure est séparée, en vertu de (D_{II}) ; on obtient un système fondamental de voisinages de l'origine de la manière suivante : prenons arbitrairement un nombre fini de points $x'_i \in E'$ $(i=1,2,\ldots,n)$, et considérons l'ensemble V $(x'_1,x'_2,\ldots,x'_n)$ formé des points $x \in E$

tels que $\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |B(x,x'_i)| \leqslant 1$; lorsque n et les x'_i varient arbitrairement, l'ensemble $\mathfrak{S}$ des $V(x'_1,x'_2,\ldots,x'_n)$ est un système fondamental de voisinages cerclés et convexes, invariant par homothétie.

Résultats analogues pour la structure $\sigma(E',E)$; ces deux structures, et les espaces localement convexes E , E' qu'elles définissent, sont dits en dualité faible ; en raison de la symétrie qu'elles présentent, on se contentera en général par la suite, d'énoncer les résultats relatifs à l'une d'elles.

Dual faible d'un espace localement convexe. Considérons un espace localement convexe séparé E ; soit $\mathfrak{T}$ sa topologie, et soit E' l'ensemble des formes linéaires continues sur E (au sens de la topologie $\mathfrak{T}$) ; E' (en tant qu'espace vectoriel non topologique) est appelé le dual topologique de E (il est distinct en général du dual algèbrique (Alg., ch.II, § 2) de E). Si, pour tout $x' \in E'$, et tout $x \in E$ on pose $B(x,x')=x'(x)$, B est une application bilinéaire de $E \times E'$ dans $\mathbb{C}$; la condition (D_I) est vérifiée en vertu de la définition de la relation $x'=0$; quant à la condition (D_{II}) elle résulte de l'hypothèse que E est séparé : pour tout $x \neq 0$ il existe en effet une semi-norme p définissant E et telle que $p(x) \neq 0$, et par suite aussi une forme linéaire continue x' telle que $x'(x) \neq 0$ (ch.I, § 4, cor. du th.1). On peut donc appliquer ce qui précède, et définir sur E (resp. E') la structure faible $\sigma(E,E')$ (resp. $\sigma(E',E)$). On dit que ces structures faibles sont associées à $\mathfrak{T}$. La topologie $\sigma(E,E')$ est moins fine que $\mathfrak{T}$; on aura souvent, par la suite, à distinguer les propriétés des parties de E (ou des applications de E dans un autre espace), relatives à ces deux topologies ; on fera cette distinction en accolant le qualificatif "faible" ou l'adverbe "faiblement"

aux notions relatives à la topologie $\sigma(E,E')$. On dira par exemple : ensemble <u>faiblement fermé</u> pour "fermé dans la topologie $\sigma(E,E')$" , forme linéaire <u>faiblement continue</u> pour "continue pour la topologie $\sigma(E,E')$". L'absence de ces qualificatifs signifiera qu'il s'agit de notions relatives à la topologie $\mathcal{C}$.

<u>Proposition 1</u>. <u>Dans un espace localement convexe séparé E , tout ensemble convexe fermé est aussi faiblement fermé</u>.

En effet, soit A un ensemble convexe fermé, x_0 un point extérieur à A ; on peut toujours supposer $x_0=0$. Il existe un voisinage convexe V de 0 ne rencontrant pas A ; donc (ch.I, 4,prop.2), il existe un hyperplan réel fermé $f(x)=1$ séparant A et V . La forme linéaire réelle continue f est la partie réelle d'une forme linéaire complexe continue g ; on a donc $\mathcal{R}g(x) \geqslant 1$ en tout point de A , et a fortiori $|g(x)| \geqslant 1$; mais cela signifie que le voisinage faible $|g(x)| < 1$ de l'origine ne rencontre pas A , d'où la proposition.

Le dual topologique E' , <u>muni de la topologie</u> $\sigma(E',E)$, est dit <u>dual faible de E</u> . Si A est un sous-espace vectoriel <u>partout dense</u> dans E , toute forme linéaire continue sur A se prolonge d'une manière unique en une forme linéaire continue sur E , et réciproquement toute forme linéaire continue sur E donne, par restriction, une forme linéaire continue sur A . Il y a donc <u>isomorphie</u> des <u>structures vectorielles</u> des duals topologiques de A et de E ; aussi les identifie-t-on d'ordinaire, en tant qu'<u>espaces vectoriels</u> (non topologiques) ; mais, si $A \neq E$, les structures $\sigma(E',E)$ et $\sigma(E',A)$ sont <u>distinctes</u>, comme nous le verrons ci-dessous (corollaire du th.1).

Appliquée à un sous-espace vectoriel quelconque A de E , cette remarque montre que les duals topologiques de A et de son adhérence $\overline{A}$ peuvent être <u>identifiés</u> (en tant qu'<u>ensembles</u>).

Remarque. Si on munit un espace vectoriel E de la topologie localement convexe la plus fine (ch.I, § 4), son dual topologique coïncide avec son dual algèbrique E^*, puisque toute forme linéaire sur E est alors continue. L'application à ce cas de tous les résultats de ce chapitre redonne bien entendu la théorie de la dualité algèbrique (Algèbre, ch. II, § 3 ; cette théorie est d'ailleurs à la base de la théorie actuelle, comme le montre la démonstration du théorème 1 qui suit). On observera que la théorie topologique fait disparaître la dissymétrie qui se manifestait en Algèbre, entre les propriétés de E et de son dual E^*, lorsque E a une infinité de dimensions : cela tient à ce que la topologie $\sigma(E^*,E)$ n'est pas alors la topologie localement convexe la plus fine sur E^*, car le dual algèbrique E^{**} de E^* n'est pas identique à E . Pour le cas où E a un nombre fini de dimensions, la topologie précédente étant la seule sur E (ch.I, § 3, prop.5), la théorie topologique n'ajoute rien de nouveau à l'étude algèbrique.

Formes linéaires faiblement continues. Reprenons les espaces vectorids non topologiques E,E' du début de ce paragraphe ; une fois E muni de la structure $\sigma(E,E')$, on peut (puisque c'est un espace localement convexe séparé) former son dual topologique, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues au sens de la topologie $\sigma(E,E')$; mais nous allons voir qu'on retrouve ainsi l'espace E' lui-même ; autrement dit :

Théorème 1. Les seules formes linéaires sur E , continues au sens de la topologie $\sigma(E,E')$, sont les formes $B_{x'}$.

En effet, soit u une forme linéaire continue dans E ; il existe donc des points x'_i en nombre fini tels que, pour tout $x \in E$,

$$|u(x)| \leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |B(x,x'_i)|$$

(ch.I, § 2, prop.4). En particulier, en tout point où $B(x,x'_i)=0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $u(x)=0$; cela signifie que l'hyperplan H d'équation $u(x)=0$ contient le sous-espace vectoriel V défini par les n équations $B_{x'_i}(x)=0$; comme E/V est un espace à n dimensions au plus, il en résulte (Alg., ch.II, § 5, prop.9) que $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_{x'_i} = B_{y'}$, où $y' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x'_i$, d'où la proposition.

Corollaire. Soit F' une partie de E', telle que la restriction de B à $E \times F'$ satisfasse à (D_{II}) ; si F' est distinct de E' , la structure $\sigma(E,F')$ est strictement moins fine que $\sigma(E,E')$.

En effet, il est évident que $\sigma(E,F')$ est moins fine que $\sigma(E,E')$ si ces deux structures étaient identiques, toute forme linéaire continue pour la structure $\sigma(E,E')$ serait de la forme $B_{y'}$, avec $y' \in F'$; si x' est un point de E' n'appartenant pas à F' , il existerait donc $y' \in F'$ tel que $B_{x'}=B_{y'}$, ou encore $B(x,y'-x')=0$ quel que soit $x \in E$, ce qui entraîne $y'-x'=0$ d'après (D_I), d'où contradiction.

On remarquera que, sur E', considéré comme sous-ensemble de l'ensemble des fonctions complexes continues dans E (muni de $\sigma(E,E')$), la topologie $\sigma(E',E)$ n'est autre que la topologie de la convergence simple (Top.gén., ch.VIII, § 1).

Considérons un espace localement convexe séparé E de topologie $\mathcal{T}$; le théorème 1 montre qu'il y a identité entre les formes linéaires continues et les formes linéaires faiblement continues sur E , d'après la définition du dual topologique de E . Ceci entraîne que, si A est un sous-espace vectoriel de E , le dual topologique du sous-espace A

(resp. de l'espace quotient E/A lorsque A est fermé) est le même, que l'on considère E comme muni de la topologie $\mathcal{T}$ ou de la topologie faible $\sigma(E,E')$, A (resp. E/A) étant naturellement muni de la topologie induite par la topologie choisie sur E (resp. du quotient de cette topologie par la relation $x-y \in A$) ; en effet, toute forme linéaire continue sur A est la restriction à A d'une forme linéaire continue sur E pour la topologie choisie (ch.I, § 4, th.1) ; et si φ est l'application canonique de E sur E/A toute forme linéaire continue u sur E/A est définie par la condition que $u \circ \varphi$ soit continue sur E pour la topologie choisie.

Orthogonalité. Définition 2. On dit qu'un élément $x \in E$ et un élément $x' \in E'$ sont orthogonaux si $B(x,x')=0$.

Cherchons l'ensemble des éléments $x' \in E'$ orthogonaux à tous les éléments d'une partie $M \subset E$ ensemble que nous désignerons par $M^{\perp}$; si on remarque que l'ensemble des éléments de E' orthogonaux à un élément $x \in E$ est l'hyperplan fermé de E' , d'équation $B'_x(x')=0$, on voit que l'ensemble $M^{\perp}$ est le sous-espace vectoriel fermé, intersection de ces hyperplans, lorsque x parcourt M .

Définition 3. Le sous-espace vectoriel fermé $M^{\perp}$, formé des éléments de E' orthogonaux à tous les éléments d'une partie M de E , est appelé le sous-espace vectoriel orthogonal à M .

Il est clair que, si A et B sont deux parties de E telles que $A \subset B$, on a $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.

On définit de même le sous-espace vectoriel $M'^{\perp} \subset E$ orthogonal à une partie M' de E' .

Proposition 2. Si M est une partie de E , l'ensemble $M^{\perp\perp}$ est le sous-espace vectoriel fermé de E , engendré par M ; en outre, on a $M^{\perp\perp\perp} = M^{\perp}$.

En effet, $M^{\top\top}$ est un sous-espace vectoriel fermé contenant M, donc contenant le sous-espace vectoriel fermé V engendré par M ; réciproquement, soit x_0 un point de $\complement V$; il existe un hyperplan fermé contenant V et ne passant pas par x_0 (ch.I, § 4, cor. de la prop.1) ; si $B(x,x'_0)=0$ est son équation, $x'_0 \in M^{\top}$ et on a $B(x_0,x'_0)\neq 0$, donc $x_0 \notin M^{\top\top}$, ce qui démontre la première partie de la proposition ; la seconde en est une conséquence immédiate, puisque $M^{\top}$ est un sous-espace vectoriel fermé dans E'.

Sous-espaces et espaces quotients. Soit A un sous-espace vectoriel de E, muni de la structure induite par $\sigma(E,E')$; A est un espace localement convexe séparé ; soit A' son dual topologique.

Proposition 3. La structure $\sigma(A,A')$ est identique à la structure induite sur A par $\sigma(E,E')$.

En effet, d'après le théorème de prolongement des formes linéaires continues dans un espace localement convexe (ch.I, § 4, th.1), toute forme linéaire continue sur A est la restriction à A d'une forme linéaire continue sur E ; d'où la proposition, d'après la définition des voisinages de 0 dans la structure $\sigma(A,A')$, et le th. 1 .

D'après une remarque antérieure, on identifie l'ensemble des formes linéaires continues sur $\bar{A}$ avec A' ; on a en outre la proposition suivante :

Proposition 4. L'espace vectoriel A', muni de la structure faible $\sigma(A',\bar{A})$, est isomorphe à l'espace quotient $E'/\bar{A}^{\top}$ (où E' est muni de la topologie $\sigma(E',E)$).

Remarquons tout d'abord que A' et $E'/\bar{A}^{\top}$ sont en correspondance biunivoque ; en effet, si $u' \in A'$, il existe $x' \in E'$ tel que u' soit la restriction à A de $B_{x'}$; et, si x' et y' sont deux points

de E' ayant cette propriété, on a $B(x,x')=B(x,y')$ quel que soit $x \in A$, autrement dit $y'-x'$ est orthogonal à A , donc appartient à $A^{\perp}$. Réciproquement, si $\dot{x}'$ est une classe (mod. $A^{\perp}$) dans E' , deux points quelconques x',y' appartenant à $\dot{x}'$ sont tels que les restrictions à A des formes linéaires $B_{x'}$, $B_{y'}$ coïncident dans A .

Considérons maintenant la topologie de $E'/A^{\perp}$; tout voisinage de l'origine dans cet espace contient un voisinage obtenu de la manière suivante : on considère un nombre fini de points x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de E , et pour chaque indice i , l'ensemble $W(x_i)$ des classes d'équivalence $\dot{x}'$ (mod. $A^{\perp}$) telles que, pour <u>un</u> $x' \in \dot{x}'$, on ait $|B(x_i,x')| \leqslant 1$, puis on prend l'intersection des $W(x_i)$. Or, si $x_i \notin \overline{A}$, on a $W(x_i)=E'/A^{\perp}$; en effet, soit x' un point quelconque de E' , et posons $B(x_i,x')=\lambda$; il existe, dans E , un hyperplan fermé contenant A et ne contenant pas x_i (ch.I, § 4, cor.1 de la prop.1) ; donc, il existe $y' \in A^{\perp}$ tel que $B(x_i,y')=\mu \neq 0$; le point $x' - \frac{\lambda}{\mu} y'$ appartient à $\dot{x}'$, et on a $B(x_i,x'-\frac{\lambda}{\mu} y')=0$. On peut donc se borner aux voisinages définis à l'aide de points $x_i \in \overline{A}$; mais alors, la valeur de $B(x_i,x')$ est <u>la même</u> pour <u>tous</u> les points x' d'une même classe d'équivalence (mod.$A^{\perp}$), et elle est égale à $u'(x_i)$, si u' est la forme linéaire continue sur $\overline{A}$ qui correspond à cette classe d'équivalence ; d'où l'isomorphisme annoncé.

<u>Corollaire</u>. <u>Si A est un sous-espace vectoriel fermé de E , le dual faible F' de l'espace quotient</u> $F = E/A$, <u>est isomorphe au sous-espace</u> $A^{\perp}$ <u>de E'</u> , <u>et la topologie quotient sur F est identique à</u> $\sigma(F,F')$.

En effet, le dual faible de l'espace vectoriel A' (muni de $\sigma(A',A)$) est A ; d'après la prop.4, et comme A est <u>fermé</u>, $E'/A^{\perp}$ est isomorphe à A' , donc sa topologie quotient est identique à sa topologie faible,

et son dual faible est isomorphe à A . Le corollaire en résulte en intervertissant les rôles de E et E' , et en utilisant la relation $\overline{A}^{\pi} = A$.

Dual faible d'un produit. Cherchons le dual topologique E' d'un espace E , produit d'une famille $(E_\iota)_{\iota \in I}$ d'espaces localement convexes séparés. Si x' est une forme linéaire continue sur E , il existe un voisinage V de l'origine tel que $|x'(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in V$. Or, il existe une partie finie J de I telle que V contienne le produit $H = \prod_{\iota \in \complement J} E_\iota$ (Top.gén., ch.I, § 8) ; si $x \neq 0$ appartient à H , on a nécessairement $x'(x)=0$; sans quoi, comme $\lambda x \in H$ quel que soit λ , $x'(\lambda x)=\lambda x'(x)$ pourrait prendre des valeurs arbitrairement grandes, contrairement à l'hypothèse. Tout $x \in E$ peut se mettre d'une seule manière sous la forme $x=y+z$, avec $y \in H$, et $z \in H' = \sum_{\iota \in J} E_\iota$; on a donc $x'(x)=x'(z)= \sum_{\iota \in J} x'(\mathrm{pr}_\iota(x))$ (on identifie, pour simplifier, E_ι avec le sous-espace composant de E , d'indice ι , qui lui est isomorphe), ce qu'on peut écrire aussi $\sum_{\iota \in I} x'(\mathrm{pr}_\iota(x))$, les termes de cette somme étant nuls pour $\iota \in \complement J$. La fonction $x'_\iota = x' \circ \mathrm{pr}_\iota$ est une forme linéaire continue sur E_ι ; on a $x'_\iota = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices, et $x' = \sum_\iota x'_\iota$; autrement dit, E' est isomorphe à la somme directe des duals E'_ι des E . Mais il faut observer que la structure faible $\sigma(E',E)$ est strictement plus fine que la somme directe des structures faibles $\sigma(E'_\iota , E_\iota)$.

En effet, si $a=(a_\iota)$ est un point de E tel que $a_\iota \neq 0$ pour tout ι , la trace sur E'_ι du voisinage de l'origine formé des x' tels que $|x'(a)| \leqslant 1$, est l'ensemble des x'_ι tels que $|x'_\iota(a_\iota)| \leqslant 1$; il ne peut donc être identique à E'_ι tout entier.

Ensembles précompacts. **Proposition 5.** **Dans l'espace E , muni de la structure faible** $\sigma(E,E')$, **tout ensemble borné est précompact.**

Considérons en effet un voisinage U de l'origine, formé des points $x \in E$ tels que $\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \left|B(x,x'_i)\right| \leqslant 1$ et soit U' l'entourage correspondant ; si A est borné dans E , il existe un $\lambda > 0$ tel que $A \subset \lambda\, U$, autrement dit, pour tout indice i , on a $\left|B(x,x'_i)\right| \leqslant \lambda$ quel que soit $x \in A$. Dans le plan de Gauss $\mathcal{C}$, le disque $\left|\xi\right| \leqslant \lambda$ est compact ; on peut donc trouver un nombre fini de points $\xi_k (1 \leqslant k \leqslant m)$ de ce disque tel que, pour tout point ξ du disque, il existe un indice k tel que $\left|\xi - \xi_k\right| \leqslant 1/2$. Soit $A_{i,k}$ l'ensemble des $x \in E$ tels que $\left|B(x,x'_i) - \xi_k\right| \leqslant \frac{1}{2}$; A est contenu dans la réunion $\bigcup_{k=1}^{m} A_{i,k}$. Pour toute application α de l'intervalle $\left[1,n\right]$ dans l'intervalle $\left[1,m\right]$, considérons l'ensemble $B_\alpha = \bigcap_{i=1}^{n} A_{i,\alpha(i)}$; les α , donc les B_α , sont en nombre fini ; ce sont des ensembles petits d'ordre U' , et ils forment un recouvrement de A , d'où la proposition.

Ceci montre en particulier que, pour la structure $\sigma(E,E')$, aucun voisinage de l'origine n'est borné (ch.I, § 4, prop.3) si E a une infinité de dimensions.

Complétion d'une structure faible. Nous supposons dans ce qui suit que E (donc aussi E') a une infinité de dimensions. Soit E^* le dual algèbrique de E (ensemble de toutes les formes linéaires sur E); comme deux points distincts de E' correspondent, d'après (D_I), à deux formes linéaires $B_{x'}$ distinctes, E' peut être considéré comme un sous-ensemble de E^* . L'application bilinéaire $(x,u) \longrightarrow u(x)$ de $E \times E^*$ dans $\mathcal{C}$ satisfaisant évidemment à (D_I) et (D_{II}), munissons E^* de la structure $\sigma(E^*,E)$; alors E' est

partout dense dans cet espace. En effet, soit (x_i) une suite finie quelconque de points de E $(1 \leqslant i \leqslant n)$; quel que soit $u \in E^*$, il existe $x' \in E'$ tel que $B(x_i,x')=u(x_i)$ pour toutes les valeurs de l'indice i ; a fortiori, x' appartient au voisinage de u formé des points $u' \in E^*$ tels que $|u'(x_i)-u(x_i)| \leqslant 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$.

La structure induite par $\sigma(E^*,E)$ sur E' est donc identique à $\sigma(E',E)$; il en résulte que E^* est (à une isomorphie près) le complété de E' , muni de la structure $\sigma(E',E)$.

Le même raisonnement, appliqué à E , muni de la structure $\sigma(E,E^*)$ montre que le complété de cet espace est le dual algèbrique E^{**} de E^*, muni de la structure $\sigma(E^{**}, E^*)$.

Exercices. 1) Tout ensemble de formes linéaires également continues sur un espace E , muni de la structure $\sigma(E,E')$, est contenu dans un sous-espace vectoriel à un nombre fini de dimensions de E'.

2) Soient A et B deux ensembles convexes fermés sans point commun dans un espace localement convexe E . Montrer que, si B est faiblement compact, il existe un hyperplan réel fermé séparant A et B (se ramener au cas où A est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés, déterminés par des hyperplans réels fermés de E).

3) Montrer que, si on munit E et E' des structures faibles $\sigma(E,E')$, $\sigma(E',E)$, et si ces espaces ont une infinité de dimensions, l'application $(x,x') \to B(x,x')$ de $E \times E'$ dans $\mathbb{C}$ n'est pas continue.

4) Pour qu'un ultrafiltre converge faiblement vers un point x_0, il faut et il suffit que x_0 appartienne à l'intersection des ensembles convexes faiblement fermés appartenant à l'ultrafiltre

(montrer que, si x_0 est un point de cette intersection non adhérent à l'ultrafiltre, il existe un demi-espace fermé appartenant à l'ultrafiltre et ne contenant pas x_0 , d'où contradiction; on utilisera la prop.5 du § 5 du ch.I de Top.gén., et la remarque suivante : au lieu de prendre comme système fondamental de voisinages faibles de l'origine les ensembles $V(x'_1,x'_2,\dots,x'_n)$ du texte, on peut prendre les ensembles $W(x'_1,x'_2,\dots,x'_n)$, l'ensemble désigné par cette notation étant formé des points $x \in E$ tels que, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $\left|\mathcal{R}\,B(x,x'_i)\right| \leqslant 1$ et $\left|\mathcal{I}\,B(x,x'_i)\right| \leqslant 1$).

Déduire de ce résultat que, pour qu'une suite (x_n) converge faiblement vers un point a , il faut et il suffit que a appartienne à tous les ensembles fermés convexes engendrés par les ensembles formés d'une infinité de points de la suite (utiliser l'exerc. 8 du § 5 du ch.I de Top. gén.).

§ 2. Fonctions linéaires faiblement continues.

Considérons deux couples d'espaces vectoriels, E,E' et F,F' ; supposons donnée une application bilinéaire $(x,x') \to B(x,x')$ de $E \times E'$ dans $\mathcal{C}$, et une application bilinéaire $(y,y') \to C(y,y')$ de $F \times F'$ dans $\mathcal{C}$, de sorte que ces deux applications satisfassent à (D_I) et (D_{II}). Munissons E et E' (resp. F et F') des structures faibles $\sigma(E,E')$ et $\sigma(E',E)$ (resp. $\sigma(F,F')$ et $\sigma(F',F)$). Etant donnée une application vectorielle u de E dans F , proposons-nous de chercher à quelle condition elle est continue au sens des structures $\sigma(E,E')$ et $\sigma(F,F')$; pour distinguer cette notion de continuité des autres, lorsque E et F sont éventuellement munies d'autres topologies, nous dirons que u est faiblement continue.

Proposition 1. *Pour que u soit faiblement continue, il faut et il suffit que, pour tout* y' *fixe dans* F' , $x \to C(u(x),y')$ *soit une forme linéaire continue dans* E .

La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, supposons-la vérifiée, et considérons une suite finie (y'_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de points de F' , définissant un voisinage de 0 dans F par la condition $\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \left|C(y,y'_i)\right| \leqslant 1$. Comme $x \to C(u(x),y'_i)$ est une forme linéaire continue dans E , la définition des voisinages de 0 dans E , et le th.1 du § 1 montrent que la partie de E définie par la relation $\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \left|C(u(x),y'_i)\right| \leqslant 1$ est un voisinage de 0 dans E , d'où la continuité de u .

D'après le th.1 du § 1 , à tout $y' \in F'$ correspond ainsi un élément x' de E' et un seul tel que $C(u(x),y')=B(x,x')$ quel que soit $x \in E$; la donnée de l'application u définit donc une *application de* F' *dans* E', que nous désignerons par u' , et que nous appellerons la *transposée* de u ; il est immédiat que u' est *vectorielle*, et qu'elle satisfait à l'identité fondamentale

$$(1) \qquad B(x,u'(y')) = C(u(x),y')$$

quels que soient $x \in E$, $y' \in F'$. En outre :

Proposition 2. *La transposée* u' *d'une application vectorielle continue* u *de* E *dans* F , *est une application continue de* F' *dans* E' .

En effet, soit (x_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$ une suite finie de points de E , définissant un voisinage de 0 dans E' par la condition $\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \left|B(x_i,x')\right| \leqslant 1$; d'après (1), l'image réciproque par u' de ce voisinage est l'ensemble des $y' \in F'$ tels que $\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \left|C(u(x_i),y')\right| \leqslant 1$; c'est donc un voisinage de 0 dans F' , d'où la proposition.

La transposée de u' est u ; autrement dit, la relation entre u et u' est symétrique. En effet, si v est la transposée de u' , on a, quels que soient $x \in E$, $y' \in F$, $C(u(x),y')=C(v(x),y')$ donc, d'après (D_{II}), $u(x)=v(x)$ quel que soit $x \in E$, c'est-à-dire $u = v$.

Lorsque $E'=E^*$, $F'=F^*$, et $B(x,x')=x'(x)$, $C(y,y')=y'(y)$, toute application vectorielle u de E dans F est faiblement continue ; la transposée de u coïncide avec l'application de F^* dans E^* désignée sous ce nom en Algèbre (ch.II, § 2) ; mais il faut observer que, si E et F ont une infinité de dimensions, u est la transposée de u', au sens topologique, mais non au sens algèbrique.

Soient encore G,G' deux espaces vectoriels, $D(z,z')$ une forme bilinéaire définie sur $G \times G'$ et satisfaisant à (D_I) et (D_{II}) . Si v est une application vectorielle continue de F (muni de la topologie $\sigma(F,F')$) dans G (muni de $\sigma(G,G')$), la fonction composée $v \circ u$ est une application vectorielle continue de E dans G . Si v' est la transposée de v , on a en outre, quels que soient $x \in E$ et $z' \in G'$,

$$B(x,u'(v'(z'))) = C(u(x),v'(z')) = D(v(u(x)),z')$$

ce qui montre que la transposée de l'application composée $v \circ u$ est l'application composés $u' \circ v'$.

Homomorphismes faibles. Soit toujours u une application vectorielle continue de E (muni de $\sigma(E,E')$) dans F (muni de $\sigma(F,F')$). L'identité (1) montre que, si $C(u(x),y')=0$ quel que soit $x \in E$, on a $B(x,u'(y'))=0$ quel que soit $x \in E$, et réciproquement ; d'après (D_I), cela signifie que $u'(y')=0$. Donc :

Proposition 3. Le sous-espace de F' orthogonal au sous-espace $u(E)$, est identique à $G' = {}^{-1}u'(0)$.

Il en résulte que $\overline{u(E)} = G^{\perp}$ (§ 1, prop. 2).

L'application u' de F' dans E' peut, d'après sa décomposition canonique, être considérée comme composée d'une application biunivoque et continue v' de l'espace quotient F'/G' sur le sous-espace u'(F') de E', et de l'application canonique de F' sur F'/G' (Top.gén., ch.III, § 2) ; cherchons à quelle condition v' est bicontinue, c'est-à-dire à quelle condition u' est un homomorphisme de F' dans E'.

Or, un voisinage V' de l'origine dans le sous-espace u'(F') de E' est défini en prenant un nombre fini de points $x_i \in E$, et en considérant l'ensemble des $x' \in u'(F')$ tels que $\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |B(x_i,x')| \leqslant 1$; comme $x'=v'(\dot{y}')$ avec $\dot{y} \in F'/G'$, l'image réciproque de V' par v' est l'ensemble des $\dot{y}'$ tels que $\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |B(x_i,v'(\dot{y}'))| \leqslant 1$; or, d'après (1) et la définition de v' on a $B(x_i,v'(\dot{y}'))=B(x_i,u'(y'))=C(u(x_i),y')$, pour tout $y' \in \dot{y}'$; on sait (§ 1) que l'ensemble K des formes linéaires continues sur F'/G' est en correspondance biunivoque avec $G^{\perp} = \overline{u(E)}$; ce qui précède montre que l'image réciproque, par v', de la topologie de u'(F'), est la structure $\sigma(F'/G',K_1)$, où K_1 est la partie de K correspondant à u(E) ; pour qu'elle soit identique à la topologie quotient sur F'/G', qui n'est autre que $\sigma(F'/G',K)$, il faut et il suffit que $K_1=K$ (§ 1, cor. du th.1) ; d'où :

Théorème 1. Pour que la transposée u' d'une application vectorielle continue u de E dans F, soit un homomorphisme de F' dans E', il faut et il suffit que u(E) soit fermé dans F.

Corollaire. Pour que u' soit un isomorphisme de F' sur u'(F'), il faut et il suffit que u(E)=F.

En effet, la condition pour que u' soit une application biunivoque de F' dans E' est que $G' = {}^{-1}u'(0)$ se réduise à l'origine ; comme $G'^{\urcorner} = \overline{u(E)}$, cela équivaut à la condition $\overline{u(E)}=F$; en appliquant le th.1 , on en déduit aussitôt le corollaire.

En permutant les rôles de E et E' (resp. F et F'), on voit que pour que u soit un homomorphisme (resp. isomorphisme) de E dans F , il faut et il suffit que u'(F') soit fermé dans E' (resp. que u'(F')=E').

Critères de résolution des équations linéaires. Soit y_o un point quelconque de F ; cherchons à quelles conditions l'équation $y_o=u(x)$ admet une solution $x \in E$, c'est-à-dire à quelle condition $y_o \in u(E)$. Tout d'abord, si $y_o \in u(E) \subset G'^{\urcorner}$, y_o est orthogonal à G' ; donc la forme linéaire $C(y_o,y')$ a la même valeur pour deux points y' appartenant à la même classe (mod. G') ; or, ces classes ne sont autres que les ensembles ${}^{-1}u'(x')$, où x' parcourt u'(F') ; si on désigne par $H_{y_o}(x')$ l'élément unique dont se compose l'ensemble $C(y_o, {}^{-1}u'(x'))$, l'application $x' \to H_{y_o}(x')$ est une forme linéaire définie dans u'(F').

Proposition 4. Pour que l'équation $y_o=u(x)$ admette une solution, il faut et il suffit que y_o soit orthogonal à $G' = {}^{-1}u'(0)$, et que la forme linéaire H_{y_o} , définie dans u'(F'), soit continue dans ce sous-espace.

La condition est nécessaire : en effet, si $y_o=u(x_o)$, on a , pour tout $y' \in F'$ tel que $u'(y') = x'$,

$$H_{y_o}(x') = C(y_o,y') = C(u(x_o),y') = B(x_o,u'(y')) = B(x_o,x')$$

donc H_{y_o} est la restriction à u'(F') de la forme linéaire continue B'_{x_o}.

Réciproquement, la condition est suffisante : car alors(d'après le th.1 du § 1) il existe $x_0 \in E$ tel que H_{y_0} soit la restriction à $u'(F')$ de la forme linéaire B'_{x_0} ; on a donc, pour tout $y' \in F'$

$$C(y_0,y') = H_{y_0}(u'(y')) = B(x_0,u'(y')) = C(u(x_0),y')$$

d'où, en vertu de (D_{II}) , $y_0 = u(x_0)$.

Proposition 5. Si $u(E)$ est fermé dans F (ou, ce qui revient au même, si u' est un homomorphisme de F' dans E'), pour que l'équation $y_0=u(x)$ admette une solution, il faut et il suffit que y_0 soit orthogonal à $G' = {}^{-1}u'(0)$.

C'est immédiat, puisque $G'^{\perp} = \overline{u(E)} = u(E)$.

Proposition 6. Pour que l'équation $y_0=u(x)$ ait une solution quel que soit $y_0 \in F$, il faut et il suffit que u' soit un isomorphisme de F' dans E' ; pour que cette solution soit unique, il faut et il suffit qu'on ait en outre $\overline{u'(F')} = E'$.

En effet, la première partie de la proposition n'est autre que le corollaire du th.1 ; d'autre part, pour que u soit biunivoque, il faut et il suffit que $G = {}^{-1}u(0)$ se réduise à l'origine ; mais, comme $G^{\perp} = \overline{u'(F')}$, cette condition, qui est équivalente à $G^{\perp} = E'$, donne la seconde partie de la proposition.

On aura en général à appliquer ces critères lorsque la fonction u est une application vectorielle d'un espace localement convexe E , dans un espace localement convexe F ; et il s'agira de savoir à quelle condition u est faiblement continue, ou est un homomorphisme faible (E' et F' étant dans ce cas les duals faibles de E et F respectivement); de telles conditions suffisantes sont données par la proposition suivante :

Proposition 7. Si u est continue pour les topologies données sur E et F, u est faiblement continue ; si u est un homomorphisme de E dans F, pour les ~~données~~ topologies données sur ces espaces, u est un homomorphisme faible.

La première partie est une conséquence de la prop.1 ; désignons par $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{U}$) la topologie donnée sur E (resp. sur F). Pour tout $y' \in F'$, $C(y,y')=y'(y)$ est continue dans F, muni de la topologie $\mathcal{U}$, donc $y'(u(x))$ est continue dans E, muni de la topologie $\mathcal{C}$, et à fortiori, est une forme linéaire faiblement continue dans E.

Pour démontrer la seconde partie, considérons d'abord le cas où u est un isomorphisme de E sur le sous-espace u(E) de F ; les duals faibles de E (muni de la topologie $\mathcal{C}$) et u(E)=G (muni de la topologie induite par $\mathcal{U}$) sont donc isomorphes, et il en résulte que u est un isomorphisme de la structure $\sigma(E,E')$ sur la structure $\sigma(G,G')$; mais cette dernière n'est autre que la structure induite sur G par $\sigma(F,F')$ (voir § 1, remarques suivant le th.1, et prop.3), d'où la proposition dans ce cas.

En second lieu, prenons le cas où u est l'application canonique de E sur un espace quotient $F = E/A$ de E (muni de la topologie $\mathcal{C}$) par un sous-espace vectoriel fermé A. Le dual faible F' de F est identique à celui qu'on obtiendrait en munissant $F = E/A$ de la topologie quotient, par la relation $x-y \in A$, de la topologie $\sigma(E,E')$ (remarques suivant le th.1 du §1) ; mais, d'après le corollaire de la prop.4 du §1, cette topologie quotient n'est autre que $\sigma(F,F')$; u est donc bien un homomorphisme faible de E sur F dans ce cas.

Le cas général se ramenant à ces deux cas particuliers, par définition (Top. gén., ch.III, § 2), la proposition est démontrée.

§ 3. Familles biorthogonales.

Considérons deux espaces vectoriels E, E', en dualité faible par une fonction bilinéaire $B(x,x')$.

Définition 1. On dit qu'une famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$ de points de E et une famille $(x'_\iota)_{\iota \in I}$ de points de E' correspondant au même ensemble d'indices I sont biorthogonales si, pour tout couple d'indices $(\iota, \varkappa)$ distincts, $B(x_\iota, x'_\varkappa)=0$, et si $B(x_\iota, x'_\iota)\neq 0$ quel que soit $\iota \in I$.

Définition 2. On dit qu'une famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$ de points de E est hétérogonale s'il existe une famille $(x'_\iota)_{\iota \in I}$ de points de E' telle que (x_ι) et (x'_ι) soient deux familles biorthogonales.

Proposition 1. Pour qu'une famille (x_ι) de points de E soit hétérogonale, il faut et il suffit que, pour tout indice $\varkappa$, $x_\varkappa$ n'appartienne pas au sous-espace vectoriel fermé engendré par les x_ι correspondant aux indices $\iota \neq \varkappa$.

La condition est nécessaire ; en effet, si (x_ι) et (x'_ι) sont biorthogonales, l'hyperplan fermé $B(x,x'_\varkappa)=0$ contient tous les x_ι pour $\iota \neq \varkappa$, et ne contient pas $x_\varkappa$. Montrons que la condition est suffisante : si elle est remplie, soit G le sous-espace vectoriel fermé engendré par les x_ι d'indice $\iota \neq \varkappa$; il existe un hyperplan homogène fermé contenant la variété G et ne contenant pas $x_\varkappa$ (ch.I, § 4, cor.1 de la prop.1) ; d'après le th.1 du § 1, cet hyperplan a une équation de la forme $B(x,x'_\varkappa)=0$, avec $x'_\varkappa \neq 0$; si on détermine ainsi $x'_\varkappa$ pour chaque indice $\varkappa$, les familles (x_ι) et (x'_ι) sont biorthogonales.

Cette proposition entraîne en particulier que toute famille hétérogonale est libre.

S'il existe deux familles (x'_ι), (y'_ι), formant chacune avec (x_ι) deux familles biorthogonales, il existe une famille (λ_ι) de nombres complexes telle que tout élément $x'_\iota - \lambda_\iota y'_\iota$ soit orthogonal au sous-espace vectoriel fermé H déterminé par tous les x_ι ; il suffit pour le voir de prendre $\lambda_\iota = B(x_\iota, x'_\iota)/B(x_\iota, y'_\iota)$. En particulier, si H est l'espace E tout entier, on a $x'_\iota = \lambda_\iota y'_\iota$.

Développement d'un élément au moyen de deux familles biorthogonales. Soient (x_ι), (x'_ι) deux familles biorthogonales. A tout point $z \in E$, faisons correspondre la famille des points $y_\iota(z) = (B(z,x'_\iota)/B(x_\iota,x'_\iota))\, x_\iota$. Cette famille n'est pas nécessairement sommable dans E ; mais si, à toute partie finie K de l'ensemble I des indices, on fait correspondre la "somme partielle" $s_K = \sum_{\iota \in K} y_\iota(z) = \sum_{\iota \in K} (B(z,x'_\iota)/B(x_\iota,x'_\iota)).x_\iota$, on a la proposition suivante :

Proposition 2. Soit $\mathcal{F}$ le filtre des sections à droite sur l'ensemble des parties finies de I , ordonné par inclusion. Si un point $z_1 \in E$ est valeur d'adhérence, suivant $\mathcal{F}$, de l'application $K \to s_K$, $z_1 - z$ est orthogonal au sous-espace vectoriel fermé de E', engendré par la famille (x'_ι).

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ tout $y' \in E'$ et toute partie finie K_0 de I , il existe par hypothèse une partie finie K de I contenant K_0 et telle que $|B(z_1 - s_K, y')| \leqslant \varepsilon$. Prenons en particulier $y' = x'_\iota$, et K_0 contenant x_ι ; on a alors, d'après les relations d'orthogonalité entre les x_ι et les x'_ι , $B(s_K, x'_\iota) = B(x_\iota, x'_\iota).B(z,x'_\iota)/B(x_\iota,x'_\iota) = B(z,x'_\iota)$, d'où $|B(z_1 - z, x'_\iota)| \leqslant \varepsilon$, et comme ε est arbitraire, $B(z_1 - z, x'_\iota) = 0$; comme cette relation a lieu quel que soit ι , on en déduit la proposition.

Corollaire. Si le sous-espace vectoriel fermé engendré par la famille (x'_ι) est identique à E', l'application $K \to s_K$ admet au plus une valeur d'adhérence suivant le filtre $\mathcal{F}$; si elle admet une valeur d'adhérence, cette valeur est égale à z .

La famille des sommes partielles $s_K = \sum_{\iota \in K} y_\iota(z)$ est appelée le développement de z au moyen des familles biorthogonales (x_ι) et (x'_ι). Si la famille (x'_ι) engendre un sous-espace vectoriel fermé G' de E' identique à E' , il y a correspondance biunivoque entre E et l'ensemble des développements des points de E au moyen de (x_ι) et (x'_ι) : car la relation $B(z,x'_\iota)=0$ quel que soit ι , entraîne que z est orthogonal à G' , c'est-à-dire $z=0$ d'après (D_{II}). Les nombres $a_\iota(z)=B(z,x'_\iota)$ sont dits les coefficients du développement de z ; le raisonnement de la prop.2 montre que si les nombres t_ι sont donnés de sorte que, si on pose $s'_K = \sum_{\iota \in K}(t_\iota / B(x_\iota,x'_\iota)).x_\iota$, l'application $K \to s'_K$ ait une valeur d'adhérence z suivant le filtre $\mathcal{F}$, les t_ι sont les coefficients du développement de z .

On reconnaît dans ces notions la généralisation du "développement" d'un élément d'un espace vectoriel par rapport à une base vectorielle de cet espace, c'est-à-dire la formule qui donne l'élément connaissant ses composantes par rapport à cette base.

Familles biorthogonales maximales. Biorthogonalisation. La donnée de deux familles biorthogonales (x_ι), (x'_ι) revient à celle d'une application $x \to x'(x)$ biunivoque d'un système libre de points de E , dans E' , telle que $B(x,x'(y))=0$ si $y \neq x$. Si on ordonne l'ensemble de ces applications par prolongement, il est immédiat qu'on obtient un ensemble inductif (Ens.R, § 6) ; donc, d'après le théorème de Zorn, tout élément de cet ensemble admet un élément maximal qui lui est supérieur ;

un tel élément maximal définit ce qu'on appellera deux familles biorthogonales maximales.

Soit G le sous-espace vectoriel fermé engendré par la famille (x_ι) G' le sous-espace vectoriel fermé engendré par la famille (x'_ι) ; pour que (x_ι) et (x'_ι) soient deux familles maximales, il faut et il suffit que $G'^{\perp} \subset G$ (ce qui entraîne $G^{\perp} \subset G'$). En effet, cela revient à dire que pour qu'il existe deux éléments $z \in E$, $z' \in E'$, tels que la famille formée des x_ι et de z , et celle formée des x'_ι et de z' , soient biorthogonales, il faut et il suffit que $G'^{\perp} \not\subset G$. Or, cette condition est évidemment nécessaire, car $z \in G'^{\perp}$ et, d'après la prop.1, $z \notin G$; réciproquement, s'il existe $z \in G'^{\perp}$ tel que $z \notin G$, il existe un hyperplan fermé contenant G et ne contenant pas z ; si $B(x,z')=0$ est son équation, on a bien $B(z,x'_\iota)=0$ et $B(x_\iota,z')=0$ quel que soit ι , ainsi que $B(z,z')\neq 0$, d'où la proposition.

Deux familles biorthogonales telles que $G=E$ ou $G'=E'$ (il faut remarquer que l'une de ces relations n'entraîne pas nécessairement l'autre) sont évidemment maximales ; mais, dans le cas général, on ignore si, inversement, il existe des familles biorthogonales remplissant cette condition. On a toutefois la proposition suivante :

Proposition 3. S'il existe un sous-espace vectoriel A partout dense dans E , et engendré par une base vectorielle infinie dénombrable, il existe deux familles biorthogonales dénombrables (x_n), (x'_n) telles que le sous-espace vectoriel fermé engendré par la famille (x_n) soit identique à E .

Soit (a_n) la base vectorielle de A , et désignons par A_n le sous-espace vectoriel à n dimensions (donc fermé) de E , engendré par les n points a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. On va définir par récurrence les deux suites (x_n), (x'_n), de sorte que A_n soit engendré par les n points $x_i (1 \leqslant i \leqslant n)$.

On va définir par récurrence les deux suites (x_n), (x'_n), de sorte que A_n soit engendré par les n points x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. On prendra $x_1 = a_1$, et x'_1 tel que $B(x_1, x'_1) \neq 0$ (il existe de tels points d'après (D_{II}), puisque $a_1 \neq 0$). Les x_i et x'_i étant définis pour $1 \leqslant i \leqslant n$, de sorte que A_n soit engendré par la suite finie (x_i), et que les suites finies (x_i) et (x'_i) soient biorthogonales, désignons par A'_n le sous-espace vectoriel à n dimensions de E' engendré par la suite finie (x'_i). Comme E et E' ont une infinité de dimensions, le sous-espace $A'^{\perp}_n$ de E n'est pas contenu dans A_n, et son intersection avec A_n se réduit à l'origine, car les conditions $B(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, x'_k) = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ donnent $\lambda_k = 0$ quel que soit k. A_n et $A'^{\perp}_n$ sont donc deux sous-espaces vectoriels fermés <u>supplémentaires</u> dans E ; par suite, on peut écrire $a_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1}$, avec $x_{n+1} \in A'^{\perp}_n$, et $y_{n+1} \in A_n$; d'ailleurs $a_{n+1} \notin A_n$ par hypothèse, donc x_{n+1} n'appartient pas non plus à A_n, et par suite les points x_i, pour $1 \leqslant i \leqslant n+1$, engendrent A_{n+1}. En outre, comme $x_{n+1} \notin A_n$, il existe un hyperplan fermé contenant A_n et ne contenant pas x_{n+1}, autrement dit, il existe $x'_{n+1} \in A'^{\perp}_n$ tel que $B(x_{n+1}, x'_{n+1}) \neq 0$. La récurrence peut donc se poursuivre ; le sous-espace vectoriel fermé engendré par la suite (x_n) contient A_n quel que soit n, donc contient A, ce qui montre qu'il est identique à E.

Le processus qui précède est connu sous le nom de <u>biorthogonalisation</u> de la suite (a_n).

<u>Application aux équations linéaires</u>. Soit u une application linéaire continue de E dans E, u' sa transposée (application de E' dans E'). On a défini (Alg., ch. , §) les <u>valeurs propres</u> de u (resp. u') comme étant les nombres complexes λ tels que l'équation $u(x) - \lambda x = 0$ (resp. $u'(x') - \lambda x' = 0$) ait au moins une solution non nulle ; les solutions x (resp. x') non nulles de cette équation étant appelées

éléments propres correspondant à u (resp. u') et à la valeur propre λ considérée.

Proposition 4. Soient λ une valeur propre de u, x un élément propre correspondant, $\mu \neq \lambda$ une valeur propre de u', x' un élément propre correspondant ; x et x' sont orthogonaux.

En effet, d'après la formule (1) du § 2, on a $B(x,u'(x')) = B(u(x),x')$; mais, d'une part $B(x,u'(x')) = \mu B(x,x')$, et de l'autre $B(u(x),x') = \lambda B(x,x')$, d'où $(\mu - \lambda)B(x,x') = 0$, ce qui démontre la proposition.

Nous verrons plus tard que, moyennant des hypothèses convenables sur u, on peut trouver une famille d'éléments propres (x_ι) correspondant à u, une famille d'éléments propres (x'_ι) correspondant à u' et ayant le même ensemble d'indices, de sorte que ces deux familles soient biorthogonales, et que, pour tout indice ι, x_ι et x'_ι correspondent à la même valeur propre λ_ι (à la fois valeur propre de u et de u'). Dans ces conditions, si λ n'est pas valeur propre de u, et si l'équation $u(x) - \lambda x = y$ a une solution x (nécessairement unique), les coefficients du développement de x suivant les familles biorthogonales (x_ι), (x'_ι) sont déterminés par les coefficients du développement de y suivant ces familles. On a en effet

$$B(y,x'_\iota) = B(u(x),x'_\iota) - \lambda B(x,x'_\iota) = B(x,u'(x'_\iota)) - \lambda B(x,x'_\iota)$$
$$= (\lambda_\iota - \lambda)B(x,x'_\iota)$$

d'où la proposition, puisque $\lambda_\iota - \lambda \neq 0$ par hypothèse.

On peut ajouter que, si y est valeur d'adhérence de son développement, et si l'application $x \to u(x) - \lambda x$ est un isomorphisme de E dans E, x est aussi valeur d'adhérence de son développement.

En effet, si $s_K(x)$, $s_K(y)$ sont les sommes partielles des développements de x et y correspondant à la même partie finie K de l'ensemble d'indices, on vérifie aussitôt que $u(s_K(x))-\lambda s_K(x) = s_K(y)$; donc, si v_λ est l'application réciproque de l'application $x \to u(x)- \lambda x$, on a $s_K(x) = v_\lambda (s_K(y))$; la proposition résulte alors de l'hypothèse que v_λ est <u>continue</u> (Top. gén., ch.I, §6, prop.7).

<u>N-B</u>. Entre ce chapitre et le suivant devrait s'insérer (comme § ou chapitre ?) la théorie de la dualité "hypertopologique" de H. Cartan, où on munit E et E', non plus des topologies faibles $\sigma(E,E')$, $\sigma(E',E)$, mais d'"hypertopologies" (généralisation, à l'aide des filtres, des classes (L) de Fréchet), choisies de sorte que B(x,x') soit <u>continue</u> dans le produit $E \times E'$ (ce qui n'est jamais le cas pour les topologies faibles si les espaces ont une infinité de dimensions). Cartan a déjà obtenu toute une série de résultats intéressants dans cette direction ; toutefois, il manque encore le théorème qui correspondrait au "<u>théorème de prolongement</u>" des espaces localement convexes (ch.I, §4, th.1) et qui permettrait d'étendre toute la théorie de ces derniers au cas des espaces "hypertopologiques", qui en sont une généralisation.

LIVRE IV

CHAPITRE III

ESPACES NORMÉS.

§ 1. Espaces localement convexes métrisables.

D'après les résultats obtenus en Topologie générale (chap. VII, § 2), il est facile de trouver dans quelles conditions un espace localement convexe séparé a une structure uniforme métrisable :

Proposition 1. Pour que la structure uniforme d'un espace localement convexe séparé E soit métrisable, il faut et il suffit que la topologie de E soit définie par un système fondamental dénombrable de semi-normes.

La condition est en effet suffisante (Top.gén., ch.VII, § 2) ; inversement, si la structure uniforme de E est métrisable, l'origine a un système fondamental dénombrable de voisinages, qu'on peut toujours supposer cerclés, convexes et équilibrés ; les indicatrices de ces voisinages engendrent un système fondamental dénombrable de semi-normes définissant la topologie de E .

D'après les propriétés des groupes métrisables (Top.gén.,ch.VII, § 2) tout espace quotient d'un espace localement convexe métrisable par un sous-espace vectoriel fermé, est un espace localement convexe métrisable ; tout produit d'une famille dénombrable d'espaces localement convexes métrisables est un espace localement convexe métrisable.

Parmi les métriques définissant la structure uniforme d'un espace localement convexe métrisable, on sait qu'on peut en trouver qui sont invariantes par translation ; autrement dit, si d est une telle métrique, on a $d(x+z,y+z)=d(x,y)$ quels que soient x,y,z ; par contre, en général, il ne sera pas possible de trouver une métrique d telle que $d(\lambda x,\lambda y)=|\lambda|\, d(x,y)$, quels que soient x et y dans E , et $\lambda \in \mathbb{C}$ (voir § 2 , exerc. 1) .

Proposition 2. Soit f une application vectorielle d'un espace localement convexe métrisable E dans un espace vectoriel topologique F . Soit d une métrique invariante par translation définissant la topologie de E , et Φ un système fondamental d'indicatrices définissant la topologie de F . Pour que f soit continue dans E , il faut et il suffit que, pour toute indicatrice $q \in \Phi$, il existe un nombre $a_q > 0$ tel que la relation $d(0,x) \leqslant a_q$ entraîne $q(f(x)) \leqslant 1$.

En effet, si f est continue, il existe une semi-norme p appartenant à un système fondamental définissant la topologie de E , telle que $q(f(x)) \leqslant a.p(x)$ dans E ; le voisinage $p(x) \leqslant 1/a$ de l'origine dans E contient une boule $d(0,x) \leqslant a_q$, ce qui montre que la condition est nécessaire. Réciproquement, si elle est vérifiée, la boule $d(0,x) \leqslant a_q$ contient un voisinage de l'origine de la forme $p(x) \leqslant a$, où p est une semi-norme appartenant à un système fondamental définissant la topologie de E ; la relation $p(x) \leqslant a$ entraîne donc $q(f(x)) \leqslant 1$; on en déduit $q(f(x)) \leqslant (1/a).p(x)$ quel que soit $x \in E$, d'où la continuité de f .

espaces de Fréchet. Définition 1. On appelle espace de Fréchet un espace localement convexe métrisable et complet.

Les propriétés des ensembles inépuisables dans un espace métrique complet (Top.gén., ch.VII, § 2), entraînent des conséquences importantes pour les applications linéaires d'un espace de Fréchet dans un espace localement convexe.

Proposition 3. Soit f une application vectorielle d'un espace de Fréchet E dans un espace localement convexe F , dont la topologie est définie par un système fondamental Φ de semi-normes. Si, pour toute semi-norme $q \in \Phi$, $q(f(x))$ est semi-continue inférieurement dans E , f est continue dans E .

En effet, il existe dans E une boule ouverte S , dans laquelle $q(f(x))$ est bornée supérieurement par un nombre k (Top. gén., ch. VII, § 2, prop. 14) ; soit x_0 le centre de S , r son rayon; pour $d(0,x) < r$, on a donc $q(f(x_0+x)) \leqslant k$, d'où

$$q(f(x))=q(f(x_0+x)-f(x_0)) \leqslant q(f(x_0+x))+q(f(x_0)) \leqslant k+q(f(x_0))$$

d'où la proposition, d'après la prop. 2 .

Proposition 4. Soit H un ensemble d'applications vectorielles continues d'un espace de Fréchet E dans un espace localement convexe F , dont la topologie est définie par un système fondamental Φ de semi-normes. Pour que les fonctions de H soient également continues, il faut et il suffit que, pour toute semi-norme $q \in \Phi$ et tout $x \in E$,

$$\sup_{u \in H} q(u(x)) < +\infty .$$

La condition d'égale continuité s'exprime en effet de la manière suivante (ch.I, § 2) : pour toute semi-norme $q \in \Phi$ il existe un voisinage V_q de l'origine dans E et un nombre $a_q > 0$ tels que pour tout $x \in V_q$ et tout $u \in H$, on ait $q(u(x)) \leqslant a_q$. Comme V_q est équilibré, on en déduit aussitôt que la condition de l'énoncé est nécessaire. Réciproquement, si elle est vérifiée, $f(x) = \sup_{u \in H} q(u(x))$ est finie et semi-continue inférieurement dans E , donc il existe dans E une boule ouverte S , dans laquelle f(x) est bornée supérieurement par un nombre k ; soit x_0 le centre de S , r son rayon ; f, qui est l'enveloppe supérieure de fonctions convexes, est convexe ; donc, pour $d(0,x) < r$, on a

$$f(x) \leqslant f(x_0+x)+f(x_0) \leqslant k+f(x_0)$$

d'où la proposition.

Par application des propriétés des fonctions également continues (Top.gén., ch.VIII, § 2, prop.2), on en déduit la proposition suivante :

Proposition 5. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur l'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ des applications vectorielles continues d'un espace de Fréchet E dans un espace localement convexe F . On suppose qu'il existe un ensemble $H \in \mathcal{F}$ tel que, pour toute semi-norme q d'un système fondamental définissant la topologie de F , et pour tout $x \in E$, $\sup_{u \in H} q(u(x)) < +\infty$. Dans ces conditions, si $\mathcal{F}$ converge simplement dans E vers une application u_o de E dans F , u_o est une application vectorielle continue. En outre, si F est complet, pour que $\mathcal{F}$ converge simplement dans E , il suffit que $\mathcal{F}$ converge simplement dans une partie A de E telle que la variété linéaire fermée engendrée par A soit identique à E .

En particulier, soit (u_n) une suite d'applications vectorielles continues d'un espace de Fréchet E dans un espace localement convexe F ; si elle converge simplement dans E , on a évidemment $\sup q(u_n(x)) < +\infty$, donc les u_n sont également continues et la limite u_o de la suite (u_n) est continue. Réciproquement, lorsque F est complet si les u_n sont également continues et si la suite $(u_n(x))$ converge en tous les points d'un ensemble $A \subset E$ tel que la variété linéaire fermée engendrée par A soit identique à E , la suite (u_n) converge simplement dans E vers une application vectorielle continue de E dans F .

Considérons maintenant le cas où $F = \mathcal{C}$; l'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$, muni de la structure de la convergence simple, n'est autre que le dual faible E' de l'espace de Fréchet E (ch.II, § 1) ; la condition de la prop.4 exprime alors que H est un ensemble (faiblement) borné dans E' ; on sait en outre (Top.gén., ch.VIII, § 2, prop.2) que l'adhérence $\overline{H}$ de H est encore formé de fonctions également continues, donc est borné dans E' , et (puisque $\mathcal{C}$ est complet) que $\overline{H}$ est un sous-espace complet de E' ; enfin, en tenant compte de la prop.5 du § 1 du ch.II, on voit que :

Proposition 6. Dans le dual faible E' d'un espace de Fréchet E , pour qu'un ensemble soit relativement compact, il faut et il suffit qu'il soit borné.

Théorème 1. Pour qu'une application vectorielle continue f d'un espace de Fréchet E sur un espace localement convexe métrisable F soit un homomorphisme, il faut et il suffit que F soit complet (autrement dit, soit un espace de Fréchet).

1°) La condition est suffisante. Soit V un voisinage cerclé convexe quelconque de l'origine dans E ; comme V est équilibré, E est la réunion des ensembles nV , où n parcourt l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ; par suite, F est la réunion des ensembles $f(nV)=nf(V)$. F étant complet par hypothèse, un au moins de ces ensembles est inépuisable, donc f(V) est inépuisable, et il en est de même de $f(V/2) = \frac{1}{2} f(V)$. Soit d une métrique invariante par translation, définissant la topologie de F ; il existe une boule ouverte S' dans laquelle f(V/2) est dense ; donc, si x_0 est un point de V/2 tel que $y_0=f(x_0) \in S'$, il existe une boule ouverte S" , de centre y_0 et de rayon $\alpha > 0$, dans laquelle f(V/2) est dense ; par suite, l'ensemble $f(V/2)-f(x_0)$, qui est contenu dans f(V), est dense dans la boule S , de centre l'origine et de rayon α . Nous allons voir que f(V) contient une boule S_0 de centre l'origine dans F , ce qui établira la proposition.

Pour cela, soit (V_n) un système fondamental dénombrable de voisinages convexes et cerclés de l'origine dans E , tel que $V_0=V/2$, et $2\overline{V}_{n+1} \subset V_n$ quel que soit n ; pour chaque $n \geqslant 0$, il existe, d'après ce qui précède, une boule S_n , de rayon l'origine et de rayon $\alpha_n \leqslant 2^{-n}$, telle que $f(V_n)$ soit dense par rapport à S_n . Soit y un point quelconque de S_0 ; nous allons définir par récurrence une suite (x_n) de points de E et une suite (y_n) de points de F , de la façon suivante :

On prendra $y_0=y$; comme $f(V_0)$ est dense dans S_0 , il existe $x_0 \in V_0$ tel que $f(x_0)$ appartienne à la boule y_0+S_1 . De façon générale, supposons définis les x_i et y_i jusqu'à l'indice n , de sorte que $x_i \in V_i$, $f(x_i) \in y_i+S_{i+1}$, et $y_{i+1}=y_i-f(x_i)$. On prendra $y_{n+1}=y_n-f(x_n)$; comme $y_{n+1} \in S_{n+1}$, et que $f(V_{n+1})$ est dense dans S_{n+1} , il existe $x_{n+1} \in V_{n+1}$ tel que $f(x_{n+1}) \in y_{n+1}+S_{n+2}$, et la définition peut se poursuivre. Soit $z_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$; on a $y = y_0=f(z_n)+y_{n+1}$; or, d'après la condition imposée à la suite (V_n), on a , par récurrence

$$V_{n+1}+V_{n+2}+\dots+V_{n+p} \subset V_n$$

quels que soient $n \geqslant 0$ et $p>0$; il en résulte aussitôt que (z_n) est une suite de Cauchy dans E , donc converge vers un point z ; f étant continue, $f(z_n)$ tend vers $f(z)$, et comme la suite (y_n) tend vers 0 d'après sa définition, on a, à la limite, $y = f(z)$. D'autre part, on a $z_n \in x_0+2V_1$ quel que soit n , donc $z \in x_0+2\bar{V}_1 \subset x_0+V_0 \subset 2V_0 = V$, d'où la proposition.

2°) La condition est nécessaire, car on sait (Top.gén., chap.VII, § 2, prop.) que tout groupe quotient d'un groupe métrique complet par un sous-groupe distingué fermé, est complet.

Comme conséquence du th.1, on notera que si on définit, sur un même espace vectoriel E , deux topologies d'espace de Fréchet $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, et si $\mathscr{C}_1$ est plus fine que $\mathscr{C}_2$, elle lui est nécessairement identique.

Corollaire 1. Soit f une application vectorielle continue d'un espace de Fréchet E dans un espace de Fréchet F . Pour que f soit un homomorphisme de E dans F , il faut et il suffit que $f(E)$ soit fermé dans F .

C'est en effet la condition nécessaire et suffisante pour que $f(E)$ soit un sous-espace complet de F .

Corollaire 2. Soient E et F deux espaces de Fréchet. Pour qu'une application vectorielle f de E dans F soit continue, il faut et il suffit que son ensemble représentatif, dans le produit $E \times F$, soit un ensemble fermé.

La nécessité de la condition est immédiate ; si on pose $z=(x,y)$ l'ensemble représentatif K de f est en effet défini par la relation $pr_2 z = f(pr_1 z)$ (Top.gén., ch.I, §8, cor. de la prop.6). Pour voir que la condition est suffisante, remarquons qu'elle entraîne que K, sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Fréchet $E \times F$, est un espace de Fréchet ; l'application pr_1 de K sur E est continue et biunivoque, donc elle est bicontinue d'après le th.1 ; comme son application réciproque n'est autre que $x \to (x,f(x))$, on en déduit la continuité de f.

Exercices. 1) Soient E,F,G trois groupes abéliens additifs métrisables, et f une application bilinéaire de $E \times F$ dans G. On suppose que, pour tout $x_0 \in E$, $f(x_0,y)$ est continue dans F et que, pour tout $y_0 \in F$, $f(x,y_0)$ est continue dans E. Montrer que, si un des deux groupes E,F au moins est complet, f est continue dans le produit $E \times F$ (E étant supposé complet, considérer, pour chaque $x_0 \in E$, la borne supérieure $g(x_0)$ des nombres $\alpha > 0$ tels que, pour tout $y \in F$ dont la distance à l'origine soit $\leqslant \alpha$, la distance à l'origine de $f(x_0,y)$ soit $\leqslant \varepsilon$; montrer qu'il existe, dans E, un ensemble ouvert non vide A dans lequel la borne inférieure de $g(x)$ soit > 0, et en déduire la proposition).

2) Soient E,F deux espaces de Fréchet, G un espace vectoriel topologique, u une application vectorielle de E dans F, (v_ι) une famille d'applications vectorielles continues de F dans G, telle que l'intersection des ensembles $v_\iota^{-1}(0)$ se réduise à

l'origine dans F . Montrer que si, pour tout indice ι, la fonction composée $v_\iota \circ u$ est continue, u est continue.

3) Soient A et B deux sous-espaces vectoriels fermés supplémentaires, dans un espace de Fréchet E ; montrer que E est isomorphe au produit $A \times B$ (utiliser le th. 1).

§ 2. Espaces normés.

Définition 1. Etant donné un espace vectoriel E , on dit qu'une semi-norme p définie dans E (autrement dit, une fonction finie, convexe et homogène définie dans E) est une norme si la relation $p(x)=0$ entraîne $x=0$.

On dit qu'une norme définie sur E , et la structure d'espace localement convexe définie sur E par cette norme, définissent sur E une structure d'espace normé. E, muni de cette structure, est appelé espace normé.

La valeur absolue $|x|$ est une norme dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}$; par analogie, on désigne souvent par $\|x\|$ la norme d'un point x dans un espace normé.

Si E est un espace normé, p sa norme, $p(x-y)$ est une métrique définissant la structure uniforme et la topologie de E (ch.I, § 4) ; lorsqu'on parlera de E comme d'un espace métrique, c'est toujours de la structure définie par cette métrique qu'il sera question, sauf mention expresse du contraire.

Un système fondamental de voisinages de l'origine dans E est formé par les ensembles $p^{-1}([0,\lambda[)$, où λ parcourt l'ensemble des nombres >0 ; ou simplement une suite de nombres >0 tendant vers 0 . Il en résulte que la condition pour qu'une partie A de E soit bornée (topologiquement) est que $\sup_{x \in A} p(x)$ soit fini : la notion d'ensemble topologiquement borné

se confond ici avec celle d'ensemble borné pour la métrique $p(x-y)$.

Définition 2. Une norme sur un espace vectoriel E est dite compatible avec une structure d'espace localement convexe sur E lorsque cette structure est identique à celle définie par la norme.

Une structure d'espace localement convexe sur E est dite normable (ainsi que l'espace localement convexe qu'elle définit) s'il existe une norme compatible avec cette structure.

Proposition 1. Pour qu'un espace localement convexe soit normable il faut et il suffit qu'il soit séparé et qu'il existe un voisinage borné de l'origine.

La condition est nécessaire, car, si p est une norme compatible avec la structure d'un espace localement convexe E , les ensembles $p^{-1}([0,\lambda[)$ forment un système fondamental de voisinages de l'origine, et sup $p(x)$ est fini dans chacun de ces ensembles.

Réciproquement, supposons qu'il existe dans E un voisinage borné U de l'origine, qu'on peut toujours supposer convexe et cerclé. Quel que soit le voisinage V de 0 , il existe $\lambda > 0$ tel que $U \subset \lambda V$, ou encore $U/\lambda \subset V$; autrement dit, lorsque a parcourt l'ensemble des nombres > 0 , l'ensemble des voisinages aU forme un système fondamental de voisinages ; si p est l'indicatrice de U , cela signifie encore que la topologie de E est définie par la seule semi-norme p ; comme cette topologie est séparée par l'hypothèse, on a $p(x) \neq 0$ si $x \neq 0$, donc p est une norme, ce qui établit la proposition.

Si deux topologies d'espace normé $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ sont définies sur un espace vectoriel E par les normes p,p' respectivement, pour que $\mathscr{E}'$ soit plus fine que $\mathscr{E}$, il faut et il suffit qu'il existe $a > 0$ tel que $p(x) \leqslant a.p'(x)$ quel que soit $x \in E$ (ch.I, § 2, prop. 1) ;

pour que p et p' soient des normes <u>équivalentes</u>, il faut et il suffit qu'il existe $a>0$ tel que $(1/a).p'(x) \leqslant p(x) \leqslant a.p(x)$ quel que soit $x \in E$.

<u>Exemples</u>. 1) Dans l'espace $\mathcal{C}^n$, les fonctions $\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, $\sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ du point $x=(x_i)$, sont des normes équivalentes, comme on le voit aisément (cf. Top.gén., ch. , §); cette équivalence résulte aussi d'ailleurs de la prop.5 du § 3 du ch.I .

Plus généralement, dans un espace vectoriel quelconque E, soit (e_ι) une <u>base</u> vectorielle ; si $x = \sum_\iota t_\iota e_\iota$ ($t_\iota \in \mathcal{C}$ et $t_\iota = 0$ sauf pour un nombre <u>fini</u> d'indices), les fonctions $\sup_\iota |t_\iota|$, $\sum_\iota |t_\iota|$, $(\sum_\iota |t_\iota|^2)^{\frac{1}{2}}$ du point x sont des normes sur E ; mais, si la base est infinie, ces normes <u>ne sont plus équivalentes</u>.

2) Si I est un ensemble infini, l'espace localement convexe $\mathcal{C}^I$ <u>n'est pas normable</u> (bien qu'il soit <u>métrisable</u> si I est dénombrable), car tout voisinage de l'origine contient un espace vectoriel à une infinité de dimensions, et n'est donc pas borné (ch.I, § 4). Mais on peut généraliser de la manière suivante les normes sur $\mathcal{C}^n$ définies dans l'exemple précédent : l'ensemble $\mathcal{B}(I, \mathcal{C})$ des points $x=(x_\iota)$ de $\mathcal{C}^I$ tels que $\sup_\iota |x_\iota| < +\infty$, est un sous-espace vectoriel sur lequel $\sup_\iota |x_\iota|$ est une norme; de même, l'ensemble $\mathcal{L}(I, \mathcal{C})$ (resp. $\mathcal{L}^2(I, \mathcal{C})$) des points tels que $\sum_\iota |x_\iota| < +\infty$ (resp. $\sum_\iota |x_\iota|^2 < +\infty$) est un sous-espace vectoriel sur lequel $\sum_\iota |x_\iota|$ (resp. $(\sum_\iota |x_\iota|^2)^{\frac{1}{2}}$) est une norme. Mais on voit aisément que les topologies d'espace normé

définies sur ces trois sous-espaces ne sont pas identiques à la topologie induite par la topologie produit sur $\mathcal{C}^I$; en outre, ces trois sous-espaces sont distincts, et sur l'intersection de deux quelconques d'entre eux, les normes correspondantes ne sont pas équivalentes.

 Il est immédiat, d'après le ch.I, § 4, que tout sous-espace vectoriel H d'un espace normable E est normable ; si p est une norme compatible avec la topologie de E , la restriction de p à H est une norme compatible avec la topologie de H . De même, tout espace quotient de E par un sous-espace vectoriel fermé H est normable, et on peut prendre comme norme compatible avec la topologie de E/H la fonction $\dot{p}(\dot{x}) = \inf_{x \in \dot{x}} p(x)$ (ch.I, § 2).

Il est immédiat que l'enveloppe supérieure d'un nombre fini de normes sur un espace vectoriel E est encore une norme sur E ; il en résulte que le produit d'une famille finie (E_i) d'espaces normables est un espace normable ; si p_i est une norme compatible avec la topologie de E_i , la fonction $\sup_i p_i(x_i)$ du point $x=(x_i)$ est une norme compatible avec la topologie de $\prod_i E_i$ (ch.I, § 2).

En vertu des inégalités

$$\sup_i p_i(x_i) \leqslant \Big(\sum_i (p_i(x_i))^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_i p_i(x_i) \leqslant n.\sup_i p_i(x_i)$$

on peut aussi bien prendre comme norme, sur le produit des E_i , $\sum_i p_i(x_i)$ ou $\Big(\sum_i (p_i(x_i))^2\Big)^{\frac{1}{2}}$.

On remarquera qu'un produit infini d'espaces normables n'est jamais normable, car tout voisinage de l'origine contient un espace vectoriel à une infinité de dimensions.

D'après la prop.2 du § 1, pour qu'une application linéaire u d'un espace normable E dans un espace normable F soit continue, il faut et il suffit qu'elle transforme tout ensemble borné en ensemble borné, ou encore, si p et q sont des normes dans E et F erespectivement, qu'il existe un nombre $a>0$ tel que $q(u(x)) \leqslant a.p(x)$ quel que soit $x \in E$.

L'image réciproque par u d'un ensemble borné de F n'est pas bornée en général dans E : en effet, $u^{-1}(0)$ est un sous-espace vectoriel, qui ne se réduit pas à 0 en général. Pour que $u^{-1}(A')$ soit borné quel que soit l'ensemble borné $A' \subset F$, il faut et il suffit que u soit un isomorphisme de E dans F. En effet, la condition est nécessaire d'après ce qui précède ; et elle est suffisante, car elle entraîne d'abord que $u^{-1}(0) = \{0\}$, donc que u est biunivoque, et ensuite, si v est l'application réciproque de l'application réduite (Ens.R, § 2) de u, que v est continue.

Espaces normés complets. D'après les résultats du ch.I, § 4, le complété $\hat{E}$ d'un espace normable E est encore un espace normable, et si p est une norme sur E compatible avec la topologie de E, le prolongement par continuité $\bar{p}$ de p à $\hat{E}$ est une norme compatible avec la topologie de $\hat{E}$.

Un espace normé complet est encore appelé espace de Banach ; un tel espace est un cas particulier d'espace de Fréchet, et toutes les propositions relatives aux espaces de Fréchet s'appliquent aux espaces de Banach.

D'après le ch.I, § 4, étant donnée une famille (x_ι) de points d'un espace normé E complet (de norme p), la condition $\sum_\iota p(x_\iota) < +\infty$ entraîne que la famille (x_ι) est sommable.

Réciproquement, si, pour toute famille (x_ι), la condition $\sum_\iota p(x_\iota) < +\infty$ entraîne que (x_ι) est sommable, E est complet.

En effet, soit (y_n) une suite de Cauchy quelconque dans E ; on peut en extraire une suite (y_{n_k}) telle que $p(y_{n_{k+1}} - y_{n_k}) \leqslant 2^{-k}$ $(k=1,2,..)$

Si on pose $x_k = y_{n_{k+1}} - y_{n_k}$, la suite (x_k) est donc sommable ; comme $\sum_{k=1}^{p} x_k = y_{n_{p+1}} - y_{n_1}$, cela signifie que la suite (y_{n_k}) converge, donc (y_n) a une valeur d'adhérence, et comme c'est une suite de Cauchy, elle est convergente, ce qui suffit à établir la proposition, puisque E est un espace métrique.

Isomorphismes d'espaces normés. Soient E, F deux espaces normés, p la norme dans E , q la norme dans F . Conformément aux définitions générales (Ens. R, § 8), une application f de E dans F est un isomorphisme de l'espace normé E sur l'espace normé F si :

1° f est une application vectorielle biunivoque de E sur F ;

2° quel que soit $x \in E$, $q(f(x)) = p(x)$.

La condition 2° entraîne évidemment que f est bicontinue ; en outre, on en tire que, quels que soient x et y dans E

$$q(f(x)-f(y)) = p(x-y) \tag{1}$$

autrement dit, f est une application isométrique de E sur F .

Il est remarquable que cette dernière propriété entraîne à elle seule la plus grande partie de la condition 1° ; on a en effet la proposition suivante :

Proposition 2. (Mazur-Ulam) Toute application isométrique f de l'espace normé E sur l'espace normé F , telle que $f(0)=0$ est une application additive biunivoque de E sur F .

En effet, f est évidemment biunivoque et bicontinue si elle est isométrique ; on va montrer que, quels que soient x et y dans E on a

$$f(\tfrac{1}{2}(x+y)) = \tfrac{1}{2}(f(x)+f(y)) \tag{2}$$

En vertu de cette relation et de l'hypothèse $f(0)=0$, il vient, pour $y=0$, $f(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}f(x)$, et par suite $f(2x)=2f(x)$; donc, pour x et y quelconques,

$$f(x+y) = f(\tfrac{1}{2}(2x+2y)) = \tfrac{1}{2}(f(2x)+f(2y)) = f(x)+f(y)$$

ce qui établira la proposition.

Pour démontrer (2), on va établir que le point $\frac{1}{2}(x+y)$ peut se définir, dans l'espace normé E , d'une façon ne faisant intervenir que la structure d'espace métrique de E définie par la métrique $d(x,y)=p(x-y)$; la proposition en résultera immédiatement.

Désignons par A_1 l'ensemble des points z tels que

$$d(x,z) = d(y,z) = \frac{1}{2}\, d(x,y)$$

puis définissons par récurrence, pour $n>1$, l'ensemble A_n comme formé des points $z \in A_{n-1}$ tels que, pour tout $u \in A_{n-1}$

$$d(z,u) \leqslant \frac{1}{2}\, \delta(A_{n-1})$$

où $\delta(K)$ désigne le diamètre (relatif à la métrique d) d'une partie K de E .

La suite des ensembles (A_n) est décroissante ; on va montrer que son intersection se réduit au point $\frac{1}{2}(x+y)$, ce qui donne bien une définition de ce point ne dépendant que de la structure métrique.

La métrique d étant invariante par translation, on peut toujours supposer que $y=-x$, donc $\frac{1}{2}(x+y)=0$. Il est immédiat que A_1 est symétrique et contient le point 0 ; comme $d(-z,u)=d(z,-u)$, on en déduit aussitôt par récurrence que, si A_n n'est pas vide, il est encore symétrique. Nous allons voir par récurrence que, pour tout n , A_n contient 0 et que $\delta(A_n) \leqslant \frac{1}{2}\delta(A_{n-1})$; comme cela entraîne $\lim_{n\to\infty} \delta(A_n)=0$, la proposition sera démontrée.

Si $0 \in A_{n-1}$, pour tout $u \in A_{n-1}$, on a $-u \in A_{n-1}$, donc $d(0,u) = \frac{1}{2}d(u,-u) \leqslant \frac{1}{2}\,\delta(A_{n-1})$, ce qui prouve que $0 \in A_n$. D'autre part, si z et z' sont deux points quelconques de A_n , on a, comme $z' \in A_{n-1}$, $d(z,z') \leqslant \frac{1}{2}\,\delta(A_{n-1})$, donc $\delta(A_n) \leqslant \frac{1}{2}\,\delta(A_{n-1})$.

C.Q.F.D.

Corollaire. Toute application isomètrique f de E dans F , telle que $f(0)=0$ et $f(ix)=if(x)$ pour tout $x \in E$, est un isomorphisme de E sur F .

C'est une conséquence de la prop.2 et de la prop.5 du § 2 du ch.I .

Si on supprime la condition $f(ix)=if(x)$, on peut seulement dire que f est un isomorphisme de la structure d'espace vectorielle topologique réel de E sur celle de F .

Exercices. 1) Soit E un espace localement convexe métrisable. S'il existe une métrique $d(x,y)$ compatible avec la structure de E , et telle que $d(0,2x)=2d(0,x)$ quel que soit $x \in E$, E est normable (on montrera que la prop.1 est applicable en prenant comme voisinage une boule).

2) Soit E un espace vectoriel de base (e_ν) infinie ; si, pour $x = \sum t_\nu e_\nu$ ($t_\nu \in \mathbb{C}$, $t_\nu = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices) on pose $p(x) = \sup_\nu |t_\nu|$ (resp. $p(x) = \sum_\nu |t_\nu|$, $p(x) = (\sum_\nu |t_\nu|^2)^{\frac{1}{2}}$), l'espace normé de support E défini par cette norme n'est pas complet.

3) Montrer que les espaces $\mathcal{B}(I,\mathbb{C})$, $\mathbb{L}(I,\mathbb{C})$, $\mathbb{L}^2(I,\mathbb{C})$ sont complets.

4) Soit E un espace normé, p sa norme. Montrer que la boule ouverte $p^{-1}([0,1[)$ est homéomorphe à E (considérer l'application $x \to x/(1+p(x))$) .

5) Etant donné un espace normé E à une infinité de dimensions, montrer qu'il existe une topologie d'espace normé <u>strictement plus fine</u> que celle de E ,et une topologie d'espace normé <u>strictement moins fine</u> que celle de E ; en déduire qu'il existe dans E des ensembles convexes dont tout point est <u>interne</u>, mais qui ne contiennent aucun point <u>intérieur</u> (prendre une base vectorielle (x_ι) de E telle que $\|x_\iota\| = 1$, et définir à l'aide de cette base un ensemble convexe équilibré par rapport à 0 , mais ne contenant aucune boule de centre 0 et de rayon > 0).

§ 3. <u>Espaces fonctionnels normés</u>.

<u>Dual fort d'un espace normé</u>.

On a vu au ch.I, § 2 que si on considère un espace topologique E , un espace vectoriel topologique F , et un ensemble $\mathfrak{S}$ de parties de E satisfaisant aux conditions (F'_I) et (F'_{II}) du ch.VIII, § 1 de la Top.gén., la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles de $\mathfrak{S}$ définie sur l'ensemble $\mathscr{C}(E,F)$ des applications continues de E dans F , est compatible avec la structure vectorielle de cet ensemble, pourvu que $\mathfrak{S}$ satisfasse à la condition (LF) . Dans le cas où F est <u>localement convexe</u>, cette dernière condition signifie que, pour tout $A \in \mathfrak{S}$ et tout $u \in \mathscr{C}(E,F)$, $u(A)$ est borné ; d'ailleurs, si cette condition n'est pas remplie pour <u>tout</u> $u \in \mathscr{C}(E,F)$, l'ensemble $\mathscr{B}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ des fonctions u qui y satisfont est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(E,F)$, et la topologie induite sur $\mathscr{B}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ par celle de $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est <u>compatible</u> avec la structure vectorielle de $\mathscr{B}_{\mathfrak{S}}(E,F)$.

L'espace des fonctions continues bornées. Dans la suite de ce paragraphe, nous considérerons seulement le cas où F est un espace normable, et où E est uniformisable. Nous chercherons d'abord dans quelles conditions l'espace $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}(E,F)$ est lui-même normable. Prenons sur F une norme compatible avec la topologie de cet espace, et désignons par $\|x\|$ la valeur de cette norme pour un élément quelconque $x \in F$. D'après la définition des voisinages de 0 dans $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}(E,F)$ (ch.I, § 2), et la prop.1 du § 2, pour que $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}(E,F)$ soit normable, il faut et il suffit qu'il existe $A_0 \in \mathfrak{A}$ tel que, pour tout $A \in \mathfrak{A}$, il existe un nombre fini $k_A > 0$ tel que la condition $\sup_{t \in A_0} \|u(t)\| \leqslant 1$ entraîne $\sup_{t \in A} \|u(t)\| \leqslant k_A$. On peut évidemment supposer A_0 fermé dans E (Top. gén., ch.VIII, § 1) ; la condition précédente ne peut alors être remplie que si A_0 est l'espace E tout entier. Sinon, en prenant un point $x_0 \in \complement A_0$, il existerait une fonction numérique cnntinue f, égale à 0 dans A_0, à 1 au point x_0 ; soit a un point quelconque $\neq 0$ de F, et A une partie appartenant à $\mathfrak{A}$ et contenant x_0 ; pour λ réel quelconque, on aura $\sup_{t \in A_0} \|\lambda f(t).a\| = 0$ et $\sup_{t \in A} \|\lambda f(t).a\| \geqslant |\lambda| \cdot \|a\|$, quantité qui peut être prise arbitrairement grande ; donc, dans le cas envisagé, $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}(E,F)$ ne peut être normable. Le seul cas à considérer est donc celui où $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}(E)$, autrement dit, le cas de la structure de la convergence uniforme dans E sur l'ensemble des applications-continues et de normes bornées de E dans F, que nous désignerons alors par $\mathcal{B}(E,F)$; il est immédiat que l'expression $\|u\| = \sup_{t \in E} \|u(t)\|$ est une norme compatible avec cette structure ; sauf mention expresse du contraire, lorsque nous considérerons l'ensemble $\mathcal{B}(E,F)$ comme un espace normé, c'est toujours de la structure définie par cette norme

qu'il sera question. Si F est complet, $\mathcal{B}(E,F)$ est aussi complet, car il est immédiat que c'est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}_u(E,F)$, qui est alors complet (Top.gén., chap.VIII, §1, th.1).

Lorsqu'on prend E discret, et F= $\mathcal{C}$, l'espace $\mathcal{B}(E,\mathcal{C})$ ainsi défini est bien identique à celui que nous avions désigné par cette notation au §2.

Espace normé des applications vectorielles continues d'un espace normé dans un espace normé. Envisageons maintenant le cas où E est lui-même un espace vectoriel normable, et considérons, dans $\mathcal{C}(E,F)$, le sous-ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ des applications vectorielles continues de E dans F. Pour que la condition (K) soit remplie, il est nécessaire que $\mathfrak{F}$ contienne un voisinage A de l'origine de E. Si nous supposons en outre que A est un voisinage borné, alors u(A) sera borné dans F quel que soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$; la condition (LF) est remplie pour A. Elle le sera donc pour $\mathfrak{F}$ si on prend pour $\mathfrak{F}$ l'ensemble des voisinages bornés de 0, ou, encore, ce qui revient au même d'après la prop.1 du §2, l'ensemble des homothétiques de A. On sait alors (ch.I, §2) que l'on a un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}}(E,F)$, en considérant les ensembles U(V,A), où V parcourt un système fondamental de voisinages de 0 dans F ; or, si V_0 est un voisinage cerclé convexe et borné de 0 dans F, les ensembles λV_0 forment un système fondamental de voisinages de 0 dans F. Donc les ensembles convexes et cerclés $\lambda U(V_0,A)$ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}}(E,F)$; cet espace vectoriel topologique est donc normable ; la condition (K) étant vérifiée, il est complet si F l'est. On désignera cet espace par la notation $\mathcal{L}_b(E,F)$

et sa structure topologique sera appelée structure de la convergence uniforme dans les voisinages bornés.

Si on suppose données des normes dans E et F , notées toutes deux à l'aide du symbole $\| \ \|$ (ce qui n'offre aucun inconvénient), on peut prendre pour A le voisinage $\|x\| \leqslant 1$, pour V_o le voisinage $\|y\| \leqslant 1$. L'indicatrice de $U(V_o,A)$ est $\sup_{x \in A} \|u(x)\|$ (ch.I, § 2) c'est une norme sur $\mathcal{L}_b(E,F)$ compatible avec sa topologie ; si on désigne encore sa valeur par $\|u\|$, on peut écrire

$$(1) \qquad \|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$$

(car pour $\|x\| < 1$, on peut écrire $x = \lambda z$, avec $|\lambda| < 1$, $\|z\| = 1$, et $\|u(x)\| = |\lambda| . \|u(z)\| \leqslant \|u(z)\|$) . C'est toujours cette structure d'espace normé que nous considérerons $\mathcal{L}_b(E,F)$, une fois définies des normes dans E et F .

Pour obtenir la topologie de $\mathcal{L}_b(E,F)$, nous avons introduit a priori les hypothèses : E normable, et $\mathfrak{S}$ formé des voisinages bornés de 0 dans E . Nous verrons un peu plus loin qu'en supposant seulement E localement convexe et séparé, et que $\mathfrak{S}$ satisfait à la condition (K) , les hypothèses précédentes sont non seulement suffisantes, mais encore nécessaires pour que la condition (LF) soit aussi remplie (§ 4).

Les ensembles bornés dans $\mathcal{L}_b(E,F)$ ont une interprétation très simple : ce sont les ensembles d'applications vectorielles également continues de E dans F . Lorsque E est complet (donc un espace de Banach), les prop. 4 et 5 du § 1 donnent donc les propositions suivantes :

Proposition 1. Soit E un espace de Banach, F un espace normé ; pour qu'une partie A de $\mathcal{L}_b(E,F)$ soit bornée, il faut et il suffit que, pour tout $x \in E$, $\sup_{u \in A} \|u(x)\| < +\infty$.

Proposition 2. Soit E un espace de Banach, F un espace normé, $\mathcal{F}$ un filtre sur $\mathcal{L}_b(E,F)$ tel qu'un ensemble de $\mathcal{F}$ soit borné (ce que nous exprimerons de manière abrégée en disant que $\mathcal{F}$ est un filtre borné). Si $\mathcal{F}$ converge simplement dans E vers une application u_o de E dans F, u_o est une application vectorielle continue. Si F est un espace de Banach, il suffit, pour que $\mathcal{F}$ converge simplement dans E, que $\mathcal{F}$ converge simplement dans une partie B de E telle que la variété linéaire fermée engendrée par B soit identique à E.

Corollaire. Si une suite (u_n) d'applications vectorielles continues d'un espace de Banach E dans un espace normé F, converge simplement dans E, elle est bornée dans $\mathcal{L}_b(E,F)$, et sa limite u_o appartient à $\mathcal{L}_b(E,F)$.

Remarquons encore que, si A est un sous-espace vectoriel partout dense de E, il y a correspondance biunivoque entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(A,F)$, car toute application vectorielle continue de A dans F se prolonge d'une manière unique en une application vectorielle continue de E dans F. En outre, d'après (1), la norme d'une application vectorielle continue de A dans F est égale à celle de son prolongement à E, l'intersection de A avec la sphère $\|x\| = 1$ étant dense par rapport à celle-ci. Autrement dit, les espaces normés $\mathcal{L}_b(A,F)$ et $\mathcal{L}_b(E,F)$ sont isomorphes ; on les identifie d'ordinaire.

Cette remarque permet donc, en appliquant la prop. 2, d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 3. Soit E un espace normé, F un espace de Banach, $\mathcal{F}$ un filtre borné dans $\mathcal{L}_b(E,F)$. Si $\mathcal{F}$ converge simplement dans une partie B de E telle que la variété linéaire fermée engendrée par B soit identique à E, la limite u_o de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{L}_b(E,F)$.

En effet, $\mathcal{L}_b(E,F) = \mathcal{L}_b(\hat{E},F)$, et, dans le complété $\hat{E}$, la variété linéaire fermée engendrée par B est identique à $\hat{E}$.

Enfin, en appliquant la prop.3 du §1, on voit que :

Proposition 4. Pour qu'une application vectorielle u d'un espace de Banach E dans un espace normé F soit continue, il suffit que l'application $x \to \|u(x)\|$ de E dans $\mathbb{R}$ soit semi-continue inférieurement.

Dual fort d'un espace normé. Appliquons ce qui précède au cas où $F = \mathbb{C}$; $\mathcal{L}(E,\mathbb{C})$ n'est autre alors que le dual topologique E' de E (ch.II, §1) ; la structure de la convergence uniforme dans les voisinages bornés de E, est encore appelée structure forte sur E', et l'espace normable obtenu en munissant E' de cette structure est dit le dual fort de E. Comme $\mathbb{C}$ est complet, le dual fort de tout espace normé est complet ; en outre, si A est un sous-espace vectoriel partout dense de E, les duals forts de E et de A sont identiques (on notera la différence avec ce qui se passe pour les duals faibles de E et A, qui ne sont identiques que lorsque A=E).

La norme d'une forme linéaire $x' \in E'$ a pour valeur d'après (1)

$$(2) \qquad \|x'\| = \sup_{\|x\|=1} |x'(x)| = \sup_{x \neq 0} |x'(x)| / \|x\|$$

d'après l'homogénéité de x' ; autrement dit, on a, quels que soient $x \in E$ et $x' \in E'$

$$(3) \qquad |B(x,x')| = |x'(x)| \leqslant \|x\| \cdot \|x'\|$$

ce qui montre en particulier que B est une application bilinéaire continue du produit $E \times E'$ dans $\mathbb{C}$, lorsque E' est muni de sa structure forte.

La formule (2) permet de donner une interprétation métrique de la norme de x'. Considérons en effet dans E l'hyperplan fermé H d'équation $x'(x)=a>0$; si $x'(x) \neq 0$, il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda x \in H$; donc, on peut écrire

$$\|x''\| = \sup_{x \in H} |x'(x)| / \|x\| = a. \sup_{x \in H} 1/\|x\| = a/(\inf_{x \in H} \|x\|) = a/d$$

si d désigne la distance de 0 à l'hyperplan H . On notera que, lorsque E a une infinité de dimensions, il peut fort bien n'y avoir aucun point de H de norme égale à d , même si E est complet (exerc.4bis)

Par contre (ch.I, §4,cor. du th.1) si x_0 est un point quelconque $\neq 0$ de E , il existe une forme linéaire continue x' telle que $x'(x_0) = \|x_0\|$, et $|x'(x)| \leqslant \|x\|$ quel que soit x , c'est-à-dire que $\|x''\| = 1$, et que l'hyperplan fermé d'équation $x'(x) = \|x_0\|$ passe par x_0 et est à une distance de l'origine égale à $\|x_0\|$. Ce résultat, joint à la formule (3) montre qu'on peut encore écrire, pour tout $x \in E$,

$$(4) \qquad \|x\| = \sup_{\|x''\|=1} |x'(x)| = \sup_{x' \neq 0} |x'(x)| / \|x'\|$$

formule réciproque en quelque sorte de (2).

Plus généralement, soit V une variété linéaire ne passant pas par 0, et soit d sa distance à 0 . V ne pénètre pas dans la boule $\|x\| \leqslant d$, donc il existe un hyperplan fermé H contenant V et ne pénétrant pas dans cette boule, ce qui signifie que la distance de l'origine à H est égale à d .

On peut encore interpréter ce résultat de la manière suivante : si f est une forme linéaire continue dans un sous-espace vectoriel G de E , il existe une forme linéaire $\overline{f}$ continue dans E , prolongeant f , et de norme égale à celle de f .

Dual fort d'un sous-espace vectoriel, d'un espace quotient. Ce dernier résultat nous permet de déterminer la structure du dual fort du sous-espace vectoriel G de E . On sait (ch.II, §1) que le dual topologique G' de G est isomorphe (en tant qu'espace vectoriel non topologique) à $E'/G^\perp$; montrons que cet isomorphie est une

isomorphie d'espaces normés, en prenant dans G' et dans $E'/\overline{G}$ des normes convenables. Prenons dans G' la norme définie comme ci-dessus ; alors à une forme linéaire $f \in G'$ correspond dans $E'/\overline{G}$ la classe des formes linéaires continues sur E, et prolongeant f ; pour toute forme x' de cette classe, on a, d'après (2), $\|x'\| \geqslant \|f\|$ et d'autre part, nous venons de voir qu'il en existe une $\overline{f}$ telle que $\|\overline{f}\| = \|f\|$; on peut donc écrire $\|f\| = \inf \|x'\|$, la borne inférieure étant prise dans la classe (mod. $\overline{G}$) qui correspond à f ; mais cette borne est précisément, dans $E'/\overline{G}$, une norme compatible avec la topologie de cet espace quotient ($\S 2$), d'où la proposition.

Supposons maintenant G fermé, et cherchons le dual fort de l'espace quotient $E/G = F$. Le dual topologique F' de F est isomorphe (en tant qu'espace vectoriel non topologique) à $\overline{G}$; en prenant sur $\overline{G}$ la norme induite par celle de E', sur F la norme $\|\dot{x}\| = \inf_{x \in \dot{x}} \|x\|$, et sur F' la norme correspondante, on va voir que l'isomorphie précédente est une isomorphie d'espaces normés. En effet, à une forme linéaire $\dot{x}'$ sur F correspond une forme linéaire $x' \in \overline{G}$ telle que, pour tout $\dot{x} \in F$, et tout $x \in \dot{x}$, on ait $\dot{x}'(\dot{x}) = x'(x)$. On a donc tout d'abord $|\dot{x}'(\dot{x})| \leqslant \|x'\| \cdot \|x\|$ quel que soit $x \in \dot{x}$, donc $|\dot{x}'(\dot{x})| \leqslant \|x'\| \cdot \inf_{x \in \dot{x}} \|x\| = \|x'\| \cdot \|\dot{x}\|$, ce qui montre que $\|\dot{x}'\| \leqslant \|x'\|$. D'autre part, la norme $\|\dot{x}'\|$ est la borne supérieure de $|x'(x)|$, lorsque x parcourt l'ensemble des points tels que $\inf_{y \in G} \|x+y\| \leqslant 1$; comme cet ensemble contient la boule $\|x\| \leqslant 1$, on a $\|\dot{x}'\| \geqslant \|x'\|$, d'où $\|\dot{x}'\| = \|x'\|$, ce qui établit la proposition.

Dual fort d'un produit fini. Considérons le produit $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ d'un nombre fini d'espaces normés E_i, et prenons pour norme d'un point $x = (x_i) \in E$,

$\|x\| = \sup_i \|x_i\|$. Le dual topologique E' de E est isomorphe à $\prod_{i=1}^{n} E_i'$, au point (x_i') de ce produit correspondant la forme linéaire x' définie par la relation $x'(x) = \sum_i x_i'(x_i)$. Cherchons la norme de x' : c'est par définition $\sup \left| \sum_i x_i'(x_i) \right|$, $x=(x_i)$ décrivant la boule $\sup_i \|x_i\| \leqslant 1$. On a donc $\left| \sum_i x_i'(x_i) \right| \leqslant \sum_i \left| x_i'(x_i) \right| \leqslant \sum_i \|x_i'\| . \|x_i\| \leqslant \sum_i \|x_i'\|$. D'autre part, il existe x_i tel que $\|x_i\| = 1$ et $x_i'(x_i) \geqslant (1-\varepsilon) \|x_i'\|$ donc $\|x'\| \geqslant (1-\varepsilon)(\sum_i \|x_i'\|)$, et finalement, ε étant arbitraire, $\|x'\| = \sum_i \|x_i'\|$. Comme le second membre est une norme compatible avec le produit des topologies fortes des E_i' , on voit que le dual fort de E est isomorphe au produit des duals forts des E_i (l'isomorphie étant une isomorphie d'espaces normés, avec les normes considérées).

Bidual. Soit E un espace normé. Le dual fort E" du dual fort E' de E est un espace de Banach qu'on appelle l'espace bidual de E . Si E a un nombre fini n de dimensions, E' est un espace à n dimensions donc aussi E" , qui est isomorphe à E (pour sa structure d'espace vectoriel topologique). Mais en général, les structures d'espace vectoriel topologique de E et E" ne sont pas isomorphes : c'est toujours le cas, par exemple, lorsque E n'est pas complet, puisque E" est toujours complet ; on peut aussi donner des exemples d'espaces E complets pour lesquels E" n'est pas isomorphe à E (voir exerc. 3).

D'une façon générale, nous allons montrer que E est isomorphe (en tant qu'espace normé) à un sous-espace vectoriel de E" . En effet, pour tout $x \in E$, $x' \to B(x,x')$ est une forme linéaire continue sur le dual fort E' , donc appartient à E" ; désignons-la par $\tilde{x}$, et cherchons sa norme : elle est égale par définition à $\sup_{\|x'\|=1} |x'(x)|$, donc à $\|x\|$

d'après la formule (4) . L'application $x \to \tilde{x}$ (dite application canonique de E dans E") est donc un isomorphisme de l'espace normé E sur un sous-espace vectoriel $\tilde{E}$ du bidual E" . Lorsque $\tilde{E} = E''$, on dit que E est un espace réflexif. Tout espace réflexif est donc complet ; tout espace à un nombre fini de dimensions est réflexif. Nous verrons au § 4 à quelle condition un espace de Banach est réflexif .

Exercices. 1) Montrer que si E est normé, l'espace normé $\mathcal{L}_b(\mathbb{C}, E)$ est isomorphe à E , et l'espace $\mathcal{L}_b(\mathbb{C}^n, E)$ isomorphe à E^n .

2) Soit I un ensemble d'indices quelconque, $\mathcal{F}$ le filtre des complémentaires des parties finies de I . On désigne par $\mathcal{S}(I, \mathbb{C})$ le sous-espace de l'espace norme $\mathcal{B}(I, \mathbb{C})$ (§ 2) formé des familles (x_ι) telles que $\lim_{\mathcal{F}} x_\iota$ existe . Montrer que $\mathcal{S}(I, \mathbb{C})$ est fermé dans $\mathcal{B}(I, \mathbb{C})$, donc est un espace complet. Soit $e_\varkappa$ le point $(\delta_\iota^\varkappa)$ de $\mathcal{S}(I, \mathbb{C})$, où $\delta_\iota^\varkappa = 0$ si $\iota \neq \varkappa$, $= 1$ dans le cas contraire ; et soit e_0 le point de $\mathcal{S}(I, \mathbb{C})$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1 . Montrer que l'ensemble formé de e_0 et des e_ι ($\iota \in I$) engendre un sous-espace vectoriel partout dense dans $\mathcal{S}(I, \mathbb{C})$. En déduire l'expression des formes linéaires sur $\mathcal{S}(I, \mathbb{C})$ et montrer que le dual fort de $\mathcal{S}(I, \mathbb{C})$ est isomorphe à $\mathcal{L}(I, \mathbb{C})$ (§ 2) . L'ensemble des e_ι ($\iota \in I$) engendre le sous-espace vectoriel $\mathbb{C}^{(I)}$ partout dense dans $\mathcal{L}(I, \mathbb{C})$; en déduire l'expression des formes linéaires sur $\mathcal{L}(I, \mathbb{C})$ et montrer que le dual fort de cet espace est isomorphe à $\mathcal{B}(I, \mathbb{C})$.

2 bis) L'adhérence du sous-espace vectoriel $\mathbb{C}^{(I)}$ de $\mathcal{S}(I, \mathbb{C})$ est le sous-espace $\mathcal{S}_0(I, \mathbb{C})$ formé des familles (x_ι) telles que

$\lim_{\mathcal{F}} x_\nu = 0$. Montrer que $\mathcal{S}(I, \mathcal{C})$ est isomorphe au produit $\mathcal{S}_0(I, \mathcal{C}) \times \mathcal{C}$, et que le dual fort de $\mathcal{S}_0(I, \mathcal{C})$ est isomorphe à $\mathcal{L}(I, \mathcal{C})$.

3) Dans $\mathcal{S}(I, \mathcal{C})$ et $\mathcal{L}(I, \mathcal{C})$, il existe un ensemble partout dense équipotent à I ; il n'existe pas d'ensemble partout dense dans $\mathcal{B}(I, \mathcal{C})$ et équipotent à I (former une partie de $\mathcal{B}(I, \mathcal{C})$ de puissance strictement supérieure à I et dont la distance de deux éléments quelconques est $\geqslant 1$). En déduire que $\mathcal{S}(I, \mathcal{C})$ n'est pas réflexif.

4) Sur une sphère S de $\mathcal{S}(I, \mathcal{C})$ ou de $\mathcal{L}(I, \mathcal{C})$, il existe des points par lesquels passe plus d'un hyperplan d'appui fermé de la boule de frontière S ; caractériser ces points. Montrer également que S n'est pas strictement convexe.

4 bis) Montrer qu'il existe, dans $\mathcal{S}(I, \mathcal{C})$, des hyperplans fermés dont la distance à l'origine est égale à 1, mais qui ne contiennent aucun point de norme 1.

5) S'il existe un ensemble dénombrable partout dense dans le dual fort d'un espace normé E, il existe un ensemble dénombrable partout dense dans E (prendre dans E' une suite (x'_n) de points de la sphère $\|x'\| = 1$, dense sur cette sphère, puis une suite (x_n) de points de E, telle que $\|x_n\| = 1$ et $|x'_n(x_n)| > \frac{1}{2}$. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que le sous-espace vectoriel fermé engendré par la suite (x_n) est identique à E).

§4. Structures faibles associées à un espace normé.

Soit E un espace normé, E' son dual. Nous nous proposons d'étudier, dans ce paragraphe, les rapports des structures faibles $\sigma(E,E')$ et $\sigma(E',E)$ avec la topologie d'espace normé de E et la topologie d'espace normé de E' (définie au §3) ; ces deux dernières topologies seront dites structures fortes (ou topologies fortes) sur E et E' ; on accolera le qualificatif "fort" ou l'adverbe "fortement" aux notions relatives à ces topologies.

Il faut remarquer tout de suite que les rapports entre $\sigma(E,E')$ et la structure forte sur E ne sont nullement les mêmes en général que ceux entre $\sigma(E',E)$ et la structure forte sur E'. Cela tient à ce que $\sigma(E',E)$ n'est pas en général la structure faible associée à la structure forte sur E' , car le dual E" du dual fort E' n'est pas isomorphe à E en général (§3). Sauf mention expresse du contraire, quand nous parlerons de la structure faible sur E' , il s'agira toujours de la structure $\sigma(E',E)$, et non de $\sigma(E',E")$.

a structure faible sur E . Rappelons d'abord des propriétés démontrées antérieurement. En premier lieu, la topologie forte sur E est plus fine que la topologie faible (nous verrons même ci-dessous qu'elle est en général strictement plus fine) ; il en résulte en particulier que si un filtre $\mathcal{F}$ sur E converge fortement vers un point a , il converge aussi faiblement vers a (la réciproque étant inexacte en général) ; de même, si a est fortement adhérent à $\mathcal{F}$, il est aussi faiblement adhérent. Tout ensemble faiblement fermé est aussi fortement fermé ; la réciproque est en général inexacte, mais, d'après la prop.1 du §1 du chap.II, tout ensemble convexe fortement fermé est aussi faiblement fermé.

Cette proposition s'applique en particulier aux variétés linéaires ; dans E , il est donc inutile, lorsqu'on parle de variétés linéaires fermées (ou d'ensembles convexes fermés) de spécifier par rapport à quelle topologie.

Cette propriété des ensembles convexes donne en particulier le résultat suivant :

Proposition 1. L'application $x \to \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement pour la structure faible.

En effet, l'ensemble des points x où $\|x\| \leqslant a$ $(a>0)$ est convexe et fortement fermé, donc faiblement fermé, d'où la proposition (Top. gén., chap.IV, §5, prop.).

Théorème 1. Tout ensemble faiblement borné dans E est fortement borné, et réciproquement.

Par définition (chap.II) une partie $A \subset E$ est faiblement bornée si, quel que soit $x' \in E'$, $\sup_{x \in A} |B(x,x')| < +\infty$.

Considérons l'image canonique $\tilde{A}$ de A dans le bidual E" de E : comme $B(x,x')=B(x',\tilde{x})$ par définition, dire que A est faiblement bornée signifie que pour tout x' , $\sup_{\tilde{x} \in \tilde{A}} |B(x',\tilde{x})| < +\infty$. Or, le dual fort E' est un espace de Banach ; donc, l'application de la prop.1 du §3 à l'espace $\mathcal{L}_b(E', \mathcal{C})=E''$ montre que la condition précédente est nécessaire et suffisante pour que $\tilde{A}$ soit bornée (au sens de la norme) dans E" , c'est-à-dire pour que A soit fortement bornée dans E , d'où le théorème.

Lorsque nous parlerons par la suite d'ensembles bornés dans E , il nous sera donc inutile de spécifier par rapport à quelle topologie.

De ce théorème, on déduit d'abord que si E a une infinité de dimensions, la structure faible $\sigma(E,E')$ est strictement moins fine que la structure forte ; en effet, on sait alors (chap.II, §1) qu'un

voisinage faible de l'origine n'est jamais borné, et tout voisinage fort est borné (§ 2).

Comme exemple d'ensemble fortement fermé, mais non faiblement fermé dans E, lorsque E a une infinité de dimensions, citons la sphère $\|x\| = 1$, dont l'adhérence faible est la boule $\|x\| \leqslant 1$. En effet, tout voisinage faible d'un point contient alors une droite (et même une variété linéaire à une infinité de dimensions) passant par ce point ; comme $\|x\|$ est (fortement) continue et non bornée sur une droite, toute droite passant par un point x_0 tel que $\|x_0\| \leqslant 1$ rencontre la sphère $\|x\| = 1$, d'après le théorème de Weierstrass, d'où la proposition.

Proposition 2. Soient p et q deux normes sur un espace vectoriel E ; pour que la topologie $\mathcal{T}_p$ définie par p soit plus fine que la $\mathcal{T}_q$ définie par q, il faut et il suffit que toute forme linéaire continue dans la topologie $\mathcal{T}_q$ soit continue dans la topologie $\mathcal{T}_p$.

La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, si elle est remplie, considérons l'ensemble convexe $p^{-1}([0,1])=A$; toute forme linéaire x' continue pour la topologie $\mathcal{T}_q$ étant aussi continue pour la topologie $\mathcal{T}_p$, on a $\sup_{x \in A} |x'(x)| < +\infty$; donc A est faiblement borné, et par suite fortement borné pour la topologie $\mathcal{T}_q$; mais cela signifie que tout voisinage de l'origine dans $\mathcal{T}_q$ contient un voisinage de l'origine dans $\mathcal{T}_p$, donc que $\mathcal{T}_p$ est plus fine que $\mathcal{T}_q$.

Corollaire. Si les formes linéaires continues sont les mêmes dans les topologies $\mathcal{T}_p$ et $\mathcal{T}_q$, ces deux topologies sont identiques.

Proposition 3. Pour qu'un espace localement convexe séparé E soit normable, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage de l'origine faiblement borné dans E.

La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, supposons-la remplie, et soit V un voisinage de l'origine faiblement borné ; on peut le supposer de la forme $p^{-1}([0,1])$, où p est une des semi-normes définissant la topologie de E . Montrons d'abord que p est une norme ; en effet, si on avait $p(x_0)=0$ pour $x_0 \neq 0$, il existe une semi-norme q telle que $q(x_0)\neq 0$, donc (chap.I, §4, cor. du th.1) une forme linéaire f continue dans E et telle que $f(x_0)=q(x_0)\neq 0$; comme, pour tout $\lambda > 0$, $\lambda x_0 \in V$, on aurait $\sup_{x \in V} |f(x)| = +\infty$, contrairement à l'hypothèse.

On peut alors supposer que la topologie $\mathscr{T}$ de E est définie par un système fondamental de semi-normes qui sont toutes $\geqslant p$ (en prenant les enveloppes supérieures de p et des semi-normes d'un système définissant la topologie de E , si cette condition n'était pas remplie) ; un tel système est donc composé de normes. Si q est l'une d'elles, et $\mathscr{T}_p$ (resp. $\mathscr{T}_q$) la topologie définie par p (resp. par q) sur E , $\mathscr{T}_q$ est plus fine que $\mathscr{T}_p$ par hypothèse. D'autre part, $\mathscr{T}_q$ est moins fine que la topologie $\mathscr{T}$; donc, toute forme linéaire continue pour $\mathscr{T}_q$ est continue pour $\mathscr{T}$; d'après l'hypothèse, V est donc faiblement borné pour $\mathscr{T}_q$, par suite fortement borné pour cette topologie (th.1) ; mais le raisonnement de la prop.2 montre que cela entraîne que $\mathscr{T}_q$ est moins fine que $\mathscr{T}_p$, donc lui est identique. Comme cela s'applique à toute semi-norme définissant la topologie $\mathscr{T}$, on en conclut que $\mathscr{T}_p = \mathscr{T}$, d'où la proposition.

Ceci nous permet de compléter le raisonnement fait au début du §3 , pour arriver à la définition de $\mathscr{L}_b(E,F)$. Supposons que E soit localement convexe et séparé, et que $\mathscr{K}$ satisfasse à la condition (K). La condition (LF) (chap.I, §2) entraîne que tout ensemble A de $\mathscr{K}$ doit être faiblement borné dans E ;

en effet, si f est une forme linéaire continue dans E , et $a \neq 0$ un point de F , $x \to f(x).a$ est une application vectorielle continue u de E dans F , et la condition $\sup_{x \in A} \|u(x)\| < +\infty$ est équivalente à $\sup_{x \in A} |f(x)| < +\infty$.

D'autre part, la condition (K) entraîne que $\mathscr{K}$ doit contenir un <u>voisinage de l'origine</u> V ; comme V doit être faiblement borné d'après ce qui précède, E est nécessairement <u>normable</u> d'après la prop.5 ; et alors tout ensemble de $\mathscr{K}$ étant faiblement, donc fortement borné, est contenu dans un homothétique de V , ce qui montre bien que les hypothèses faites pour définir $\mathscr{L}_b(E,F)$ ne restreignent aucunement la généralité.

Après ces deux applications du th.1 à la théorie des espaces localement convexes, revenons à l'espace normé E considéré au début de ce paragraphe.

Notons d'abord que l'<u>adhérence faible</u> d'un ensemble <u>borné</u> est <u>faiblement bornée</u> (Top.gén.,chap.III, §3), donc <u>fortement bornée.</u>

<u>Proposition 4.</u> <u>Si</u> (x_n) <u>est une suite de Cauchy pour la structure faible</u>, <u>l'ensemble de ses éléments est borné</u>.

En effet, pour tout $x' \in E'$, $(B(x_n,x'))$ est une suite de Cauchy de nombres complexes, donc est bornée, d'où la proposition.

Inversement, si une suite (x_n) est <u>bornée</u>, pour qu'elle soit une suite faible de Cauchy (resp. pour qu'elle converge faiblement vers a) il suffit que $(B(x_n,x'))$ soit une suite de Cauchy (resp. converge vers $B(a,x')$) pour les éléments x' d'une partie A' <u>fortement dense</u> dans E' . En effet, supposons que $\|x_n\| \leqslant k$, quel que soit n ; si x'_o est un point quelconque de E', il existe $x' \in A'$ tel que $\|x'-x'_o\| \leqslant \varepsilon/k$, d'où , pour tout n , $|B(x_n,x'-x'_o)| \leqslant \varepsilon$; si, pour $n \geqslant n_o$ et $m \geqslant n_o$,

on a $|B(x_m-x_n,x')| \leqslant \varepsilon$, on aura aussi $|B(x_m-x_n,x'_o)| \leqslant 3\varepsilon$, donc (x_n) est une suite faible de Cauchy ; raisonnement analogue pour montrer qu'elle converge faiblement vers a lorsqu'on suppose que $(B(x_n,x'))$ converge vers $B(a,x')$ pour tout $x' \in A'$.

On remarquera encore que, si a est la limite faible d'une suite (x_n) , on a , d'après la prop. 1 ,

$$\|a\| \leqslant \liminf_{n \to \infty} \|x_n\|$$

L'espace E , muni de la structure faible $\sigma(E,E')$, n'est jamais complet s'il a une infinité de dimensions. En effet, d'après le chap.II, § 1 , il suffit de voir que, dans ce cas, il y a des formes linéaires non continues dans E . Or, soit (e_ι) une base vectorielle de E par rapport à $\mathcal{C}$; on peut toujours supposer que $\|e_\iota\| = 1$. Cette base étant infinie, soit (e_n) une suite qui en soit extraite ; une forme linéaire f étant définie par ses valeurs pour les e_ν , il suffit de prendre $f(e_n)=n$, f ayant la valeur nulle pour les e_ν n'appartenant pas à la suite (e_n) , pour obtenir une forme linéaire non bornée dans la boule $\|x\| \leqslant 1$, donc non continue.

En général, un ensemble borné et fermé dans E n'est pas faiblement complet ; nous verrons un peu plus loin (th.8) que les seuls espaces où tout ensemble borné et fermé soit faiblement complet sont les espaces réflexifs. Il en résulte, d'après la prop.5 du § 1 du chap.II, que tout ensemble borné dans E est précompact, mais non relativement compact en général, pour la structure faible $\sigma(E,E')$.

Un filtre de Cauchy pour la structure faible, même s'il est borné, peut donc n'avoir aucun point adhérent si E n'est pas réflexif. En particulier, si E n'est pas réflexif, il existera en général des suites de Cauchy non convergentes, pour la structure faible. Toutefois, on peut donner des exemples

d'espaces non réflexifs, où toute suite de Cauchy pour la structure faible est, non seulement faiblement convergente, mais même fortement convergente (exerc.2) ; bien entendu, sur un tel espace, il y a des filtres de Cauchy bornés non convergents pour la structure faible.

La structure faible sur E'. Considérons maintenant la structure faible $\sigma(E',E)$ sur le dual E' de E . Cette topologie est moins fine que la topologie forte sur E'(et même en général strictement moins fine, comme nous le verrons ci-dessous) ; la convergence forte d'un filtre vers un point a (resp. le fait que a est fortement adhérent au filtre) entraîne donc sa convergence faible vers a (resp. que a est faiblement adhérent au filtre). Tout ensemble faiblement fermé est fortement fermé ; mais ici, non seulement il existe en général des ensembles fortement fermés qui ne le sont pas faiblement, mais, si E n'est pas réflexif, il existe des variétés linéaires fortement fermées, mais non faiblement fermées dans E' . En effet il existe alors, d'après la définition des espaces réflexifs (§ 3), des formes linéaires sur E' qui sont fortement continues, mais non faiblement continues (chap.II, § 1, cor. du th.1) ; l'hyperplan $f^{-1}(0)$, où f est une telle forme linéaire, est donc fortement fermé, mais non faiblement fermé.

Théorème 2. Tout ensemble fortement borné dans E' est faiblement borné ; si E est complet, tout ensemble faiblement borné dans E' est fortement borné.

Par définition (chap. II), une partie $A' \subset E'$ est faiblement bornée si, quel que soit $x \in E$, $\sup_{x' \in A'} |B(x,x')| < +\infty$; la première partie du théorème résulte donc simplement de la relation (3) du § 3 . D'autre part, si E est complet, dire que A' est faiblement borné équivaut

au fait que A' est un ensemble de formes linéaires également continues dans E , d'après la prop. 4 du §1 ; et, pour les formes linéaires, la condition d'égale continuité (chap.I, §2) signifie que les normes de ces formes constituent un ensemble borné, ou encore que A' est fortement borné, d'où le théorème.

Si E n'est pas complet, la seconde partie du théorème tombe en défaut (exerc. 3).

De la première partie du th.2, on déduit que, si E a une infinité de dimensions, la structure faible sur E' est strictement moins fine que la structure forte, car aucun voisinage faible de 0 n'est faiblement borné, et tout voisinage fort l'est.

Si E est complet, on peut parler d'ensembles bornés dans E' sans spécifier par rapport à quelle topologie. On voit en particulier que, dans ce cas, toute suite faiblement convergente dans E' est bornée (cf. prop. 4) et que l'adhérence faible d'un ensemble borné est un ensemble borné.

Sans hypothèse sur E , on a la propriété suivante :

Proposition 5. L'adhérence faible d'un ensemble fortement borné dans E' est un ensemble fortement borné.

Il suffit d'établir que toute boule fortement fermée est faiblement fermée ; on peut se limiter au cas de la boule S définie par $\|x'\| \leqslant 1$. Or, si $\|x'_0\| = 1+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| = 1$ et $|x'_0(x_0)| \geqslant 1+\varepsilon/2$; soit V le voisinage faible de x'_0 défini par la relation $|B(x_0, x'-x'_0)| \leqslant \varepsilon/4$; V ne contient aucun point de S , car en tout point $x' \in S$, $|x'(x_0)| \leqslant 1$, et en tout point $x' \in V$, $|x'(x_0)| \geqslant 1+\varepsilon/4$; donc l'ensemble $\|x'\| > 1$ est faiblement ouvert, d'où la proposition.

Corollaire. L'application $x' \to \|x'\|$ de E' dans $\mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement pour la structure faible sur E' .

En effet, l'ensemble des points où $\|x'\| \leqslant a$ est faiblement fermé d'après ce qui précède.

Par suite, si (x'_n) est une suite fortement bornée et faiblement convergente vers un point $a' \in E'$, on a

$$\|a'\| \leqslant \liminf_{n \to \infty} \|x''_n\|$$

L'espace E', muni de la structure faible $\sigma(E',E)$ n'est jamais faiblement complet s'il a une infinité de dimensions. On montre en effet, comme pour E, qu'il existe des formes linéaires sur E' qui ne sont pas fortement continues, ni à fortiori faiblement continues, d'où la proposition, d'après le chap.II, §1.

Par contre (chap.I, § 2), comme $\mathbb{C}$ est complet, toute partie A' faiblement fermée dans E' et composée de formes linéaires également continues sur E, c'est-à-dire fortement bornée, est un sous-espace faiblement complet de E'. Comme d'autre part, tout ensemble faiblement borné dans E' est faiblement précompact (chap.II, § 1, prop.5), on voit, d'après le th.2 et la prop.5, que :

Théorème 3. Tout ensemble fortement borné dans E' est relativement compact pour la structure faible.

En particulier, toute boule fortement fermée étant faiblement fermée :

Corollaire. Toute boule fortement fermée dans E' est faiblement compacte.

Dans le cas où E est complet (fortement), le th.3 est un cas particulier de la prop.6 du §1, en vertu du th.2 ; en outre, tout ensemble faiblement précompact dans E' est alors faiblement borné, donc fortement borné. Autrement dit, dans E' les notions d'ensemble borné (fortement ou faiblement), d'ensemble faiblement précompact et d'ensemble relativement compact pour la structure faible sont alors identiques.

D'après le th.3, toute suite fortement bornée dans E' a une valeur d'adhérence faible ; mais en général, si S est une boule fermée dans E' , un point de S n'aura pas de système fondamental dénombrable de voisinages dans la topologie induite sur S par la topologie faible de E' ; on ne pourra donc pas, en général, extraire d'une suite fortement bornée une suite faiblement convergente (voir Top.gén. chap. VII, § 2).

Il y a toutefois un cas où cette "extraction" est possible : c'est lorsqu'il existe une suite (x_n) de points de E partout dense dans E (pour la topologie forte). En effet, un voisinage d'un point x'_0 de S dans la topologie induite sur S par $\sigma(E',E)$ est l'ensemble des $x' \in S$ tels que $\left|B(a_i, x'-x'_0)\right| \leqslant 1$ pour une suite finie (a_i) de points de E . Soit d le diamètre de S ; pour chacun des a_i , il existe un indice n_i tel que $\|a_i - x_{n_i}\| \leqslant 1/2d$, et par suite $\left|B(a_i - x_{n_i}, x'-x'_0)\right| \leqslant \frac{1}{2}$ quel que soit $x' \in S$. Si on considère alors le voisinage faible de x'_0 défini par les relations $\left|B(x_{n_i}, x'-x'_0)\right| \leqslant \frac{1}{2}$, on voit que sa trace sur S est contenue dans le voisinage considéré ; or les voisinages de cette forme sont en infinité dénombrable, d'où la proposition.

On observera que, même dans ce cas, l'origine de E' ne possède pas de système fondamental dénombrable de voisinages faibles par rapport à E' lorsque E n'a pas de base vectorielle dénombrable (chap.II, § 1, cor. du th. 1).

topologie intermédiaire sur E' . Le corollaire du th.3 entraîne la proposition suivante :

Proposition 6. Dans E' , l'intersection d'une variété linéaire faiblement fermée et d'une boule (fortement) fermée est faiblement compacte.

Nous désignerons par (P) cette propriété des variétés linéaires faiblement fermées dans E' ; nous nous proposons de chercher toutes les variétés linéaires de E' possédant la propriété (P) .

Soit V une telle variété linéaire, x' un point de $\complement V$, S une boule fermée de centre x' . $S \cap V$ est faiblement compact, donc faiblement fermé, et comme x' n'appartient pas à cet ensemble, il existe un voisinage faible U de x' (dans E') tel que $U \cap S$ soit tout entier contenu dans $\complement V$. Désignons par $\mathfrak{F}(x',S)$ le filtre induit sur S par le filtre des voisinages faibles de x' ; on peut encore dire que $S \cap \complement V$ appartient à $\mathfrak{F}(x',S)$. Réciproquement, supposons que, pour tout point $x' \in \complement V$, et toute boule fermée S de centre x' , $S \cap \complement V$ appartienne au filtre $\mathfrak{F}(x',S)$; cela signifie que, dans la topologie induite par $\sigma(E',E)$ sur S, $S \cap \complement V$ est un voisinage de chacun de ses points, donc est ouvert ; mais alors $S \cap V$ est fermé dans S , et comme S est compacte pour la topologie précédente, il en est de même de $S \cap V$; donc $S \cap V$ est faiblement compact, autrement dit, V possède la propriété (P) . Ainsi, la propriété (P) pour une variété linéaire V est équivalente à la suivante :

(P') Quels que soient le point $x' \in \complement V$ et la boule fermée S de centre x' , $S \cap \complement V$ appartient au filtre $\mathfrak{F}(x',S)$.

Cela peut encore s'interprèter en disant que $\complement V$ est ouvert pour toute topologie sur E' telle que le filtre $\mathfrak{F}(x',S)$ converge vers x' , quels que soient x' et la boule fermée S de centre x' . On sait (Top.gén.,chap.I, § 7) que, parmi ces topologies, il en existe une plus fine que toutes les autres ; nous appellerons cette topologie la topologie intermédiaire sur E'. On a donc obtenu le résultat suivant : les variétés linéaires dans E' qui possèdent la propriété (P) sont les variétés linéaires fermées pour la topologie intermédiaire.

Nous allons étudier cette topologie que nous désignerons par $\mathscr{C}$; elle est évidemment plus fine que la topologie faible $\sigma(E',E)$; mais, sur une boule fermée S ces deux topologies induisent la même topologie. En effet, si U' est un ensemble ouvert pour la topologie $\mathscr{C}$, x' un point de $U' \cap S$, S_0 une boule fermée de centre x' contenant S à son intérieur, U' appartient à $\mathfrak{F}(x', S_0)$, donc il existe un voisinage faible V de x' tel que $V \cap S_0 \subset U'$; comme $S \subset S_0$, il en résulte que $V \cap S \subset U' \cap S$, donc $U' \cap S$ est un voisinage de x' dans la topologie induite sur S par $\sigma(E',E)$, autrement dit, est ouvert dans cette topologie, d'où la proposition.

Théorème 4. La topologie intermédiaire $\mathscr{C}$ sur E' est une topologie d'espace localement convexe, pour laquelle un système fondamental de voisinages de l'origine est défini comme suit : à toute suite $s=(x_n)$ de points de E, de limite forte 0, on fait correspondre l'ensemble V_s des points $x' \in E'$ tels que

$$\sup_n \left| B(x_n, x') \right| \leqslant 1$$

Les ensembles V_s forment un système fondamental de vdsinages de l'origine pour la topologie $\mathscr{C}$.

En effet, soit U' un ensemble ouvert pour $\mathscr{C}$, et contenant l'origine 0 de E'. Nous allons démontrer la proposition suivante :

Il existe dans E un ensemble fini A_1 de points de norme > 1, et pour chaque $n > 0$ un ensemble fini B_n de points de norme $\leqslant 1/n$, tels que, si on pose $A_{n+1} = A_n \cup B_n$ pour $n > 0$, l'ensemble des points $x' \in E'$ tels que

$$(1) \qquad \|x'\| \leqslant n \ , \quad \sup_{x \in A_n} \left| B(x,x') \right| \leqslant 1$$

soit contenu dans U'.

Il en résultera bien le théorème : en effet si s désigne la suite formée par les points de la réunion des A_n (rangés dans un ordre quelconque) on a $V_s \subset U'$; car si $x' \in V_s$ et si n est un entier $\geqslant \|x'\|$, on a $|B(x,x')| \leqslant 1$ pour tout x appartenant à s , en particulier pour tout $x \in A_n$, donc $x' \in U'$ d'après (1). Ainsi tout voisinage de 0 dans $\mathscr{E}$ contient un ensemble V_s . Mais réciproquement, les V_s sont des <u>voisinages</u> de 0 dans $\mathscr{E}$; en effet, si $s=(x_n)$, considérons un point x'_o tel que $\sup_n |B(x_n,x'_o)| = a < 1$, et soit S une boule fermée de centre x'_o et de rayon r ; il existe un entier n_o tel que, pour $n > n_o$, on ait $\|x_n\| \leqslant 1/(r+\|x'_o\|)$, et par suite $|B(x_n,x')| \leqslant 1$ pour tout $n > n_o$ et tout $x' \in V_s \cap S$; par suite l'ensemble $V_s \cap S$ est identique à l'intersection de S avec le voisinage faible de l'origine W , formé des x' tels que $\sup_{n \leqslant n_o} |B(x_n,x')| \leqslant 1$. Or, W est un voisinage faible de x'_o , donc $V_s \cap S$ appartient au filtre $\mathscr{F}(x'_o,S)$, ce qui montre que l'ensemble des x' tels que $\sup_n |B(x_n,x')| < 1$ est <u>ouvert</u> pour $\mathscr{E}$, et que V_s est donc un voisinage de 0 dans $\mathscr{E}$.

Pour démontrer la proposition énoncée ci-dessus, nous procéderons par récurrence. Si S_1 est la boule $\|x'\| \leqslant 1$, U' appartient à $\mathscr{F}(0,S_1)$, donc il existe un ensemble fini A_1 de points de E tel que l'ensemble des x' satisfaisant à

$$\|x'\| \leqslant 1 \quad , \quad \sup_{x \in A_1} |B(x,x')| \leqslant 1$$

soit contenu dans U' ; on peut d'ailleurs ne conserver des points de A_1 que ceux de norme > 1 .

Supposons que l'ensemble fini A_n soit défini de sorte que l'ensemble des x' satisfaisant à (1) appartienne à U' ; et montrons qu'il existe un ensemble <u>fini</u> B_n de points de la boule $\|x\| \leqslant 1/n$ tel que l'ensemble des $x' \in E'$ satisfaisant à

(2) $\quad \|x'\| \leqslant n+1 \quad , \quad \sup_{x \in A_n \cup B_n} |B(x,x')| \leqslant 1$

soit contenu dans U' .

Raisonnons par l'absurde ; soit K_n l'intersection de $\complement U'$ et de la boule $\|x'\| \leqslant n+1$; K_n est fermé dans la topologie $\mathcal{C}$ et comme la topologie induite par $\mathcal{C}$ sur la boule $\|x'\| \leqslant n+1$ coïncide avec la topologie induite par la topologie faible, K_n est faiblement fermé par rapport à cette boule, donc faiblement fermé dans E' , donc <u>faiblement compact</u> d'après le th.3 . Supposons que pour toute partie finie B_n de $\|x\| \leqslant 1/n$, il existe une partie <u>non vide</u> $H(B_n)$ de K_n , dont les points satisfassent à (2) ; lorsque B_n parcourt l'ensemble des parties finies $\|x\| \leqslant 1/n$, les $H(B_n)$ forment une <u>base de filtre</u> $\mathcal{F}$ sur K_n ; $\mathcal{F}$ a un point <u>faiblement adhérent</u> x'_o appartenant à K_n . Pour tout $\varepsilon > 0$ et <u>tout</u> x tel que $\|x\| \leqslant 1/n$, il existe donc x' tel que $|B(x,x')| \leqslant 1$ et $|B(x,x'-x'_o)| \leqslant \varepsilon$, d'où $|B(x,x'_o)| \leqslant 1+\varepsilon$, et comme ε est arbitraire, $|B(x,x'_o)| \leqslant 1$; d'après la définition de la norme dans E', cela signifie $\|x'_o\| \leqslant n$. Mais, pour tout $x \in A_n$, on a , par le même raisonnement, $|B(x,x'_o)| \leqslant 1$, autrement dit, x'_o satisfait à (1), donc appartient à U' par hypothèse ; mais comme $x'_o \in K_n$, on arrive ainsi à une contradiction.

C. Q. F. D.

Il résulte en particulier de ce théorème que la topologie intermédiaire sur E' est <u>moins fine</u> que la topologie <u>forte</u> (d'où son nom).

On peut même montrer que, si E a une infinité de dimensions la topologie intermédiaire sur E' est <u>strictement moins fine</u> que la topologie forte, et <u>strictement plus fine</u> que la topologie faible. En effet supposons que la suite (x_n) de points tendant vers 0 soit ordonnée de sorte que $\|x_{n+1}\| \leqslant \|x_n\|$.

Il existe $x' \neq 0$ tel que $B(x_i, x') = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$; on peut en outre supposer que $\|x'\| = 1/\|x_n\|$; x' appartiendra donc au voisinage V_s correspondant à $s=(x_n)$; comme $\|x_n\|$ tend vers 0 , on voit que V_s n'est pas borné. D'autre part, supposons que la suite $(x_n)=s$ forme un système libre dans E ; alors V_s ne peut contenir aucun voisinage faible de l'origine ; car un tel voisinage est défini par un nombre fini de relations $|B(y_i, x')| \leqslant 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant m)$. Il existe donc un x_n qui n'appartienne pas à la variété linéaire engendrée par les y_i , donc un x' tel que $B(y_i, x') = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant m)$, et $B(x_n, x') = 2$, ce qui prouve que le voisinage faible considéré n'est pas contenu dans V_s .

Le th. 4 et le cor.2 de la prop.1 du § 4 du chap.I nous montrent que nous connaîtrons les variétés linéaires de E' possédant la propriété (P) lorsque nous aurons déterminé les formes linéaires sur E' continues pour la topologie intermédiaire, autrement dit, le dual de E' , relatif à cette topologie.

Théorème 5. Si on munit E' de la topologie intermédiaire, son dual est isomorphe au complété $\hat{E}$ de E (relatif à la topologie forte).

En effet, soit f une forme linéaire sur E' , continue pour la topologie $\mathcal{C}$; d'après le th.4 , et la prop.4 du § 2 du chap.1 , il existe donc une suite (a_n) de points de E , tendant vers 0 , et telle que, pour tout $x' \in E'$, on ait

$$(5) \qquad |f(x')| \leqslant \sup_n |B(a_n, x')|$$

La forme linéaire f est évidemment fortement continue dans E' , donc appartient au bidual E" de E ; il va suffire de voir que, dans cet espace , f est fortement adhérent à l'image canonique $\tilde{E}$ de E, autrement dit,

que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $x\in E$ tel que, quel que soit x' dans la boule $\|x'\|\leqslant 1$,

$$(4)\qquad \left|f(x) - B(x,x')\right| \leqslant \varepsilon$$

Cela montrera, en effet, que si on munit E' de la topologie intermédiaire, son dual est <u>contenu</u> dans l'adhérence forte de $\widetilde{E}$ dans E'' , qui est isomorphe à $\hat{E}$. Mais si $x_0\in\hat{E}$, l'intersection de la variété linéaire $B(x_0,x')=0$ et d'une boule fermée dans E' est compacte pour la structure $\sigma(E',\hat{E})$, donc aussi pour la structure $\sigma(E',E)$ qui est <u>moins fine</u> ; autrement dit, cette variété linéaire possède la propriété (P), ce qui montre, d'après le th.4 , que $x'\to B(x_0,x')$ est continue pour la topologie intermédiaire.

Pour démontrer (4), considérons l'espace $\mathcal{B}(\mathcal{N},\mathcal{C})$ des suites bornées $z=(z_n)$ de nombres complexes, normé par $\|z\| = \sup_n|z_n|$ (§§2 et 3) A tout $x'\in E'$, faisons correspondre le point $z=\varphi(x')=(B(a_n,x'))$; φ est une application linéaire continue de E' , muni de la topologie intermédiaire, dans $\mathcal{B}(\mathcal{N},\mathcal{C})$. D'après (3), la relation $\varphi(x')=0$ entraîne $f(x')=0$; donc on peut écrire $f=g\circ\varphi$, où g est une forme linéaire sur $\varphi(E')$, et la relation (3) montre que $\left|g(z)\right|\leqslant\|z\|$ sur $\varphi(E')$, autrement dit, g est <u>continue</u> sur le sous-espace vectoriel $\varphi(E')$ de $\mathcal{B}(\mathcal{N},\mathcal{C})$; donc (chap.I, § 4, th.1) il existe une forme linéaire continue $\bar{g}$ sur $\mathcal{B}(\mathcal{N},\mathcal{C})$, <u>prolongeant</u> g .

Déterminons alors un entier p tel que, pour $n>p$, $\|a_n\|\leqslant\varepsilon/\|\bar{g}\|$; et soit $\varphi_p(x')$ la suite $(B(a_1,x'),..,B(a_p,x'),0,0,...)$; il est clair que l'on a , pour tout x' de norme $\leqslant 1$,

$$\|\varphi(x') - \varphi_p(x')\| \leqslant \varepsilon/\|\bar{g}\|$$

d'où

$$(5)\qquad \left|f(x')-\bar{g}(\varphi_p(x'))\right| = \left|\bar{g}(\varphi(x'))-\bar{g}(\varphi_p(x'))\right| \leqslant \varepsilon$$

Or, si e_p est la suite de nombres complexes (ξ_{np}), où $\xi_{np}=0$ si $n\neq p$, et $\xi_{pp}=1$, on peut écrire $\varphi_p(x')=\sum_{k=1}^{p} B(a_k,x').e_k$, d'où $\overline{g}(\varphi_p(x'))=\sum_{k=1}^{p} B(a_k,x')\overline{g}(e_k)$; si on pose $\overline{g}(e_k)=\lambda_k$, et $x=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k a_k$, on a aussi $\overline{g}(\varphi_p(x'))=B(x,x')$, et par suite, d'après (5), la relation (4) est démontrée.

Théorème 6 (Banach). Pour que toute variété linéaire dans E', telle que l'intersection de cette variété et de toute boule fermée soit faiblement compacte, soit une variété faiblement fermée, il faut et il suffit que E soit complet.

C'est une conséquence immédiate du th.5 .

Espaces réflexifs. Considérons le bidual E" de E, et munissons-le de sa structure faible $\sigma(E'',E')$; d'après la définition de l'isomorphisme canonique $x\to\tilde{x}$ de E sur $\tilde{E}$, la structure induite sur $\tilde{E}$ par cette structure faible, est la transportée, par l'isomorphisme canonique, de la structure faible $\sigma(E,E')$ sur E .

Théorème 7. Si S" désigne, dans E", la boule $\|x''\|\leqslant 1$, $S''\cap\tilde{E}$ est faiblement dense par rapport à S" .

Soit $x''\in S''$; il nous suffira de montrer que, pour toute suite finie $(x'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de points $\neq 0$ de E', il existe $x_o\in E$ tel que $\|x_o\|\leqslant 1$ et que $|B(x'_i,x'')-B(x_o,x'_i)|\leqslant 1$. Or, soit V la variété linéaire fermée dans E, définie par les n relations $B(x,x'_i)=0$; l'espace quotient E/V a un nombre fini de dimensions, et son dual fort est la variété linéaire fermée $V^{\perp}$ engendrée par les x'_i (§3) ; comme tout espace à un nombre fini de dimensions est réflexif, le dual fort de $V^{\perp}$ est isomorphe à l'espace normé E/V . Or, si f désigne la restriction de x" à $V^{\perp}$, f est une forme linéaire continue sur $V^{\perp}$, donc appartient au dual de $V^{\perp}$; d'autre part, sa norme est $\leqslant\|x''\|$, donc $\leqslant 1$.

Il existe donc un point $\dot{x} \in E/V$, de norme $\leqslant \|x''\|$, donc $\leqslant 1$, tel que $B(x'_i,x'') = B(\dot{x},x'_i)$ quel que soit i ; par suite, pour tout $x \in \dot{x}$, on aura aussi $B(x'_i,x'')=B(x,x'_i)$. Or, d'après la définition de la norme dans un espace quotient (§§ 2 et 3), il existe $x \in \dot{x}$ à une distance $\leqslant \varepsilon$ de la boule $\|x\| \leqslant 1$; autrement dit, il existe x_o tel que $\|x_o - x\| \leqslant \varepsilon$ et $\|x_o\| \leqslant 1$. Mais $|B(x'_i,x'')-B(x_o,x'_i)| = |B(x-x_o,x'_i)| \leqslant \varepsilon \|x'_i\|$. Si on a pris ε assez petit pour que $\varepsilon \|x'_i\| \leqslant 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, x_o remplira donc les conditions voulues.

C.Q.F.D.

Théorème 8. Pour qu'un espace normé E soit réflexif, il faut et il suffit que, dans E, tout ensemble borné soit relativement compact pour la structure faible.

La condition est évidemment nécessaire, d'après le th.3, appliqué à E". Elle est suffisante d'après le th.7 : en effet, $S'' \cap \widetilde{E}$ est l'image canonique de la boule $\|x\| \leqslant 1$ dans E ; cette boule est bornée et faiblement fermée, donc faiblement compacte par hypothèse ; c'est donc un ensemble fermé dans E" muni de la structure faible $\sigma(E'',E')$, ce qui entraîne $S'' = S'' \cap \widetilde{E}$ d'après le th.7, et par suite $E'' = \widetilde{E}$.

Corollaire. Si V est un sous-espace vectoriel fermé dans un espace réflexif E, V et E/V sont des espaces réflexifs.

En effet, V est faiblement fermée, et la structure faible sur V est induite par la structure faible sur E (chap.II, § 1, prop. 3) ; tout ensemble borné faiblement fermé dans V est la trace sur V d'un ensemble borné faiblement fermé dans E, donc est faiblement compact, ce qui montre que V est réflexif. D'autre part, la boule $\|\dot{x}\| \leqslant 1$ dans E/V est l'image de la boule $\|x\| \leqslant 1$ dans E par l'application canonique $x \to \dot{x}$ de E sur E/V. Or, cette application est faiblement continue

(chap.II, § 2, prop.7) ; elle transforme donc tout ensemble faiblement compact en un ensemble faiblement compact, donc E/V est réflexif d'après le th. 8 .

Le dual d'un espace réflexif est évidemment réflexif ; mais le corollaire précédent montre que si un espace complet E n'est pas réflexif, son dual E' ne peut être réflexif. En effet, si E' était réflexif, il en serait de même de E" , donc du sous-espace $\tilde{E}$ de E" , qui est fortement fermé dans E" ; comme E est isomorphe à $\tilde{E}$, on arrive à une contradiction. On voit donc que, si un espace complet n'est pas réflexif, ses espaces duals successifs sont tous distincts, en ce sens qu'un isomorphisme canonique transforme un dual d'ordre n en une partie d'un dual d'ordre $n+2p$, partie qui n'est jamais identique à ce dernier dual ; en outre, aucun de ces duals n'est réflexif.

Toutes les propriétés de la structure faible d'un espace dual s'appliquent à la structure faible $\sigma(E,E')$ d'un espace réflexif ; en particulier, sur E , tout filtre de Cauchy pour la structure faible, qui est borné, est convergent ; plus particulièrement, toute suite faible de Cauchy (nécessairement bornée d'après le th.1) est convergente.

Espaces uniformément convexes. L'application du th.8 est en général malaisée ; nous allons voir par contre que si la norme d'un espace normé E possède une certaine propriété de vérification facile, E est réflexif.

Définition 1. Sur un espace vectoriel E , on dit qu'une norme $\|x\|$ est uniformément convexe si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que les relations $\|x\| = 1$, $\|y\| \leqslant 1$, $\frac{1}{2}\|x+y\| \geqslant 1-\delta$ entraînent $\|x-y\| \leqslant \varepsilon$.

Cette hypothèse entraîne en particulier que la sphère $\|x\| = 1$ ne peut contenir aucun segment non réduit à un point, autrement dit, que la boule $\|x\| \leqslant 1$ est strictement convexe.

Un espace normé est dit uniformément convexe si sa norme est uniformément convexe.

Par exemple, l'espace $L^2(I, \mathbb{C})$ est uniformément convexe (avec la norme définie au § 2), car on vérifie aisément que cette norme satisfait à l'identité

$$\left\|\tfrac{1}{2}(x+y)\right\|^2 + \left\|\tfrac{1}{2}(x-y)\right\|^2 = \tfrac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

En particulier, la norme euclidienne dans l'espace $\mathbb{C}^n$ est uniformément convexe ; mais la norme $\sup|x_i|$ ne l'est pas, n'étant même pas strictement convexe ; on voit donc qu'une norme équivalente à une norme uniformément convexe peut fort bien ne pas être uniformément convexe : le fait qu'un espace normé soit uniformément convexe est une propriété de sa norme, mais non de sa topologie.

Proposition 7. Soit E un espace complet uniformément convexe, et V une variété linéaire fermée dans E . Il existe un point de V et un seul, où la norme $\|x\|$ est égale à sa borne inférieure sur V (autrement dit, il existe un point de V et un seul dont la distance à l'origine soit égale à la distance de l'origine à V).

En effet, soit d la borne inférieure de $\|x\|$ sur V , et soit A_a l'ensemble (non vide) des points de V tels que

$$d \leqslant \|x\| \leqslant d + a \qquad (a > 0)$$

Si x et y sont deux points de A , $\frac{1}{2}(x+y)$ appartient à V donc $\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| \geqslant d$. D'après l'uniforme convexité, et en supposant par exemple $\|x\| \geqslant \|y\|$, on en déduit aussitôt que, si a a été pris assez petit (de façon précise, tel que $d/(d+a) \geqslant 1-\delta$) on a $\|x-y\| \leqslant \varepsilon(d+a)$.

Autrement dit, A_α est un ensemble aussi petit que l'on veut, pour la structure <u>forte</u> de E , et comme les A_α forment une base de filtre, c'est une base de filtre de Cauchy, donc elle converge vers un point x_0 qui appartient à V (cette variété étant fermée) et qui est tel que $\|x_0\| = d$, d'après la continuité de la norme.

En particulier, on voit que si $x' \in E'$ est une forme linéaire sur E , il existe un point et un seul x sur la sphère $\|x\| = 1$, tel que $x'(x) = \|x'\|$.

<u>Proposition 8. Un espace complet uniformément convexe est réfléxif.</u>

En effet, avec les notations du th.7, considérons un point x" de E" tel que $\|x"\|=1$; la trace sur $S" \cap \tilde{E}$ du filtre des voisinages faibles de x" dans E" (pour la structure $\sigma(E",E')$) est un <u>filtre</u> $\mathcal{F}$ d'après le th.7 ; $\mathcal{F}$ est d'ailleurs un filtre de Cauchy pour la structure faible $\sigma(\tilde{E},E')$. Nous allons montrer qu'il existe sur $\tilde{E}$ un filtre de Cauchy $\mathcal{G}$ pour la structure <u>forte</u>, qui soit <u>plus fin</u> que $\mathcal{F}$; $\mathcal{G}$ convergera donc fortement vers un point $\tilde{x} \in \tilde{E}$; a fortiori, $\tilde{x}$ sera <u>fortement adhérent</u>, donc <u>faiblement adhérent</u> à $\mathcal{G}$, et par suite <u>faiblement adhérent à</u> $\mathcal{F}$, qui est un filtre moins fin ; mais cela entraîne $\tilde{x}=x"$ d'après la définition de $\mathcal{F}$, et par suite $E"=\tilde{E}$.

Pour définir $\mathcal{G}$, considérons un point $x'_0 \in E'$ tel que $\|x'_0\| =1$ et $1 \geqslant B(x'_0,x") \geqslant 1-\frac{\delta}{2}$, et soit $\tilde{A}_\delta$ l'ensemble (appartenant à $\mathcal{F}$) des points de $S" \cap \tilde{E}$ tels que $\left| B(x'_0,x")-B(x'_0,\tilde{x}) \right| \leqslant \frac{\delta}{2}$; on aura donc, pour les points de $A_\delta \subset E$ dont $\tilde{A}_\delta$ est l'image canonique, $\left|1-B(x,x'_0)\right| \leqslant \delta$, et $\|x\| \leqslant 1$. Soit alors x_0 le point de E tel que $B(x_0,x'_0)=1$ et $\|x_0\|=1$; on aura $\left|B(x-x_0,x'_0)\right| \leqslant \delta$ pour $x \in A_\delta$ donc $\left|B(\frac{1}{2}(x+x_0),x'_0)\right| \geqslant 1-\delta$, ce qui, vu la relation $\|x'_0\| =1$, entraîne $\|\frac{1}{2}(x+x_0)\| \geqslant 1-\delta$; d'après l'uniforme convexité, on en conclut que $\|x-x_0\| \leqslant \varepsilon$ dans A_δ ,

autrement dit, $\tilde{A}_\delta$ a un diamètre $\leqslant 2\varepsilon$; si on prend pour $\mathcal{G}$ le filtre engendré par les intersections des $\tilde{A}_\delta$ (pour tous les $\delta > 0$) avec les ensembles de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sera bien un filtre de Cauchy pour la structure forte, plus fin que $\mathcal{F}$, ce qui achève la démonstration.

Proposition 9. Soit E un espace uniformément convexe, $\mathcal{F}$ un filtre sur E, faiblement convergent vers un point x_0. Si on a en outre $\|x_0\| = \lim.\inf_{\mathcal{F}} \|x\|$ (resp. $\|x_0\| = \lim \|x\|$), x_0 est fortement adhérent à $\mathcal{F}$ (resp. limite forte de $\mathcal{F}$).

En effet, soit $x'_0 \in E'$ tel que $\|x'_0\| = 1$ et $x'_0(x_0) = B(x_0, x'_0) = \|x_0\|$. Il existe par hypothèse un ensemble $A \in \mathcal{F}$ tel que, pour tout $x \in A$ $|B(x-x_0, x'_0)| \leqslant \delta$. Si $\|x_0\| = \lim.\inf_{\mathcal{F}} \|x\|$, il existe un point $x \in A$ tel que $\|x\| \leqslant \|(1+\delta)x_0\|$. Or, on a $|B((1+\delta)x_0 - x, x'_0)| \geqslant (1+\|x_0\|)$ d'où $|B(\frac{1}{2}((1+\delta)x_0+x), x'_0)| \geqslant \|(1+\frac{\delta}{2})x_0\| - \frac{\delta}{2}$, et comme $\|x'_0\| = 1$, cela entraîne $\|\frac{1}{2}((1+\delta)x_0+x)\| \geqslant \|(1+\frac{\delta}{2})x_0\| - \frac{\delta}{2}$; d'après l'uniforme convexité, on en déduit que, si δ a été pris assez petit, on aura $\|(1+\delta)x_0 - x\| \leqslant \varepsilon$, ce qui montre que x_0 est fortement adhérent à $\mathcal{F}$. On verrait de même que x_0 est limite de $\mathcal{F}$ si $\lim_{\mathcal{F}} \|x\| = \|x_0\|$ (le raisonnement précédent s'appliquant alors à tout $x \in A$).

Si on suppose seulement que x_0 soit faiblement adhérent à $\mathcal{F}$, mais que $\lim_{\mathcal{F}} \|x\| = \|x_0\|$, le même raisonnement montre que x_0 est aussi fortement adhérent à $\mathcal{F}$.

Exercices. 1) Soit E un espace normé, $\mathcal{F}$ un filtre sur E, x_0 un point faiblement adhérent à $\mathcal{F}$; montrer que

$$\|x_0\| \leqslant \lim.\sup_{\mathcal{F}} \|x\|$$

2) Dans l'espace $L(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ (§ 2), toute suite faible de Cauchy est fortement convergente (se ramener à la démonstration du lemme suivant, en utilisant l'exerc.2 du § 3 : soit (x^n)

une suite d'éléments $x^n=(\xi_m^n)$ de $L(\mathcal{N},\mathcal{C})$ telle que $\limsup_{n\to\infty}\|x^n\| = \limsup_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|\xi_m^n| \geqslant a>0$; il existe une suite (a_m) telle que $\sup_m |a_m|<+\infty$, et que

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\sum_{m=0}^{\infty} a_m \xi_m^n\right| > 0 .)$$

3) Soit E le sous-espace non complet $\mathcal{C}(\mathcal{N})$ de $\mathcal{L}_o(\mathcal{N},\mathcal{C})$ (§ 3, exerc. 2 bis), dont le dual E' est $L(\mathcal{N},\mathcal{C})$. Donner un exemple d'ensemble faiblement borné, mais non fortement borné, dans E' (considérer une suite double (a_{mn}) de nombres complexes, telle que $s_n=\sum_{m=1}^{\infty}|a_{mn}|$ soit finie quel que soit n , que, pour tout n , a_{mn} tende vers une limite lorsque m tend vers l'infini, mais que s_n tende vers $+\infty$ avec n).

4) Soit H un hyperplan fermé dans un espace réflexif E ; il existe un point de H dont la norme soit égale à la distance de l'origine à H .

5) Démontrer le th.8 à l'aide du th.6 .

6) Tout produit fini d'espaces réflexifs est réflexif.

7) Généraliser la prop.7 aux ensembles convexes fermés dans un espace uniformément convexe complet.

8) Tout espace quotient d'un espace uniformément convexe par un sous-espace vectoriel fermé est uniformément convexe (pour la norme définie au § 2).

9) Soit S la boule $\|x\|\leqslant 1$ dans un espace normé E . Si on munit S de la topologie induite par la topologie faible $\sigma(E,E')$ et E' de la topologie forte, B(x,x') est continue dans le produit $S \times E'$.

§ 5. Familles sommables et familles biorthogonales dans les espaces normés.

Familles faiblement sommables dans les espaces normés. Nous aurons à considérer, dans ce paragraphe, des familles de points d'un espace normé E et des familles de points de son dual E' ; la sommabilité de ces familles sera étudiée relativement aux diverses topologies que nous avons définies antérieurement sur ces deux espaces.

Considérons d'abord une famille $(x_\iota)_{\iota\in I}$ de points de E, et supposons qu'elle soit faiblement sommable ; pour toute partie finie H de l'ensemble d'indices I, nous poserons $s_H = \sum_{\iota\in H} x_\iota$. Pour tout $x'\in E'$, $B(x,x')$ est une forme linéaire faiblement continue dans E ; par suite, la famille $(B(x_\iota,x'))_{\iota\in I}$ de nombres complexes est sommable dans $\mathbb{C}$. Il en résulte en particulier que l'ensemble des sommes partielles finies $\sum_{\iota\in H} B(x_\iota,x') = B(s_H,x')$, où H parcourt l'ensemble $\mathfrak{F}(I)$ des parties finies de I, est borné dans $\mathbb{C}$; donc (§ 4, th. 1) :

Proposition 1. Une condition nécessaire pour qu'une famille (x_ι) de points de E soit faiblement sommable, est que l'ensemble des sommes partielles finies de cette famille soit borné dans E.

Réciproquement, supposons cette condition vérifiée ; on en déduit que, pour tout $x'\in E'$, l'ensemble des sommes partielles finies $B(s_H,x')$, où H parcourt l'ensemble $\mathfrak{F}(I)$ des parties finies de I, est borné dans $\mathbb{C}$, donc que la famille $(B(x_\iota,x'))$ est sommable dans $\mathbb{C}$. Il en résulte immédiatement que, si on se donne un nombre fini de points x'_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ de E', il existe une partie finie J de I telle que, pour toute partie finie K de I ne rencontrant pas J, et pour tous les indices i, on ait $|B(s_K,x'_i)|\leqslant 1$.

Autrement dit, l'image, par l'application $H \to s_H$, du filtre des sections de l'ensemble filtrant $\mathfrak{F}(I)$, est un filtre de Cauchy borné pour la structure faible $\sigma(E,E')$; on ne pourra donc en conclure que, dans tous les cas, la famille (x_ι) est faiblement sommable, que si E est un espace réflexif (§ 4, th. 8).

Toutefois, si I est dénombrable, et si toute suite de Cauchy pour la structure faible de E est faiblement convergente, on voit que la famille (x_ι) est faiblement sommable si elle satisfait à la condition de la prop.1 ; mais dans ce cas, nous verrons plus loin qu'on a une propriété beaucoup plus précise.

En appliquant les mêmes raisonnements aux familles faiblement sommables dans E' , et en tenant compte du th.3 du § 4 , on obtient le résultat suivant :

Proposition 2. Si une famille (x'_ι) de points de E' est faiblement sommable, l'ensemble des sommes partielles finies de cette famille est faiblement borné. Réciproquement, si cet ensemble est fortement borné, la famille (x'_ι) est faiblement sommable.

La distinction entre "faiblement borné" et "fortement borné" dans cet énoncé, disparaît lorsque E est complet (§ 4, th. 2).

Familles fortement sommables. Remarquons d'abord que, si une famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$ de points d'un espace normé E est fortement sommable, on n'a $x_\iota \neq 0$ que pour une infinité dénombrable d'indices. En effet, on a $\lim \|x_\iota\| = 0$ suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I ; l'ensemble H_n des indices tels que $\|x_\iota\| \geqslant 1/n$ est donc fini, et comme l'ensemble des indices tels que $x_\iota \neq 0$ est la réunion des H_n , il est dénombrable.

Dans l'étude des familles fortement sommables, on peut donc se restreindre au cas où l'ensemble d'indices I est dénombrable.

Une famille fortement sommable $(x_\iota)_{\iota \in I}$ de points de E est a fortiori faiblement sommable dans E (avec la même somme) ; l'ensemble des sommes partielles finies de cette famille est donc borné d'après la prop. 1.

Pour étudier la réciproque de cette proposition, nous nous limiterons au cas où E est un espace de Banach (cette réciproque ne pouvant évidemment être exacte dans un espace normé non fortement complet). Mais, même dans ce cas, la condition de la prop.1 n'est pas suffisante en général pour que (x_ι) soit fortement sommable.

Considérons par exemple l'espace $\mathcal{B}(N, C)$, et soit $x_n=(\zeta_{mn})$ $(m=1,2,..)$ le point de cet espace tel que $\zeta_{mn}=0$ pour $m\neq n$, et $\zeta_{nn}=1$; toute somme partielle finie de termes de la suite (x_n) a une norme $\leqslant 1$, mais cette suite n'est pas fortement sommable, car toute somme partielle finie non vide a une norme égale à 1 .

Nous dirons qu'un espace de Banach E est faiblement semi-complet lorsque toute suite de Cauchy pour la structure faible $\sigma(E,E')$ est faiblement convergente. Comme toute suite de Cauchy pour la structure faible est bornée dans E (§ 4,prop.4), tout espace réflexif est faiblement semi-complet ; mais il y a des espaces faiblement semi-complets et non réflexifs.

Théorème 1 (Orlicz). Soit E un espace faiblement semi-complet. Pour qu'une famille (x_ι) de points de E soit fortement sommable, il faut et il suffit que l'ensemble des sommes partielles finies de cette famille soit borné dans E .

Scholie. Il résulte donc de ce théorème et de la prop.1 que, dans un espace faiblement semi-complet, toute famille faiblement sommable est aussi fortement sommable ; autrement dit, dans un tel espace (et en particulier dans un espace réflexif) les notions de sommabilité forte et de sommabilité faible sont équivalentes.

La démonstration du th.1 se ramène à celle de la proposition suivante:

Proposition 3. Soit E un espace faiblement semi-complet ; si la suite (a_n) de points de E est telle que, pour tout $x' \in E'$, la suite $(B(a_n,x'))$ soit sommable dans $\mathbb{C}$, on a $\lim_{n\to\infty} \|a_n\| = 0$.

Supposons en effet cette proposition démontrée, et soit (x_ι) une famille de points de E telle que l'ensemble des sommes partielles finies de cette famille soit borné. Si cette famille n'était pas fortement sommable, il existerait un nombre $\alpha > 0$ tel que, pour toute partie finie J de I, il existe une partie finie K de I, ne rencontrant pas J, et telle que $\|s_K\| \geqslant \alpha$. On en déduit aussitôt la définition, par récurrence, d'une suite (K_n) de parties finies de I, deux à deux sans élément commun, telles que $\|s_{K_n}\| \geqslant \alpha$ quel que soit n. Posons $a_n = s_{K_n} / \|s_{K_n}\|$; on a $\|a_n\| = 1$ quel que soit n ; d'autre part, la famille $(B(x_\iota,x'))$ est sommable dans $\mathbb{C}$ pour tout $x' \in E'$; il en est donc de même de la suite $(B(a_n,x'))$ puisque chacun des termes de cette suite est une somme partielle finie de la famille $(B(x_\iota,x'))$, multipliée par un nombre $\leqslant 1/\alpha$ (associativité de la somme). On aboutit donc à une contradiction, ce qui établit le théorème.

Pour démontrer la prop.3, nous pouvons nous borner au cas où le sous-espace vectoriel fermé V de E engendré par la suite (a_n) est identique à E. En effet, comme toute forme linéaire continue dans V est la restriction à V d'une forme linéaire continue dans E, toute suite de Cauchy pour la structure faible $\sigma(V,V')$ est aussi une suite de Cauchy pour la structure $\sigma(E,E')$; elle est donc faiblement convergente dans E, et comme V est faiblement fermé (chap.II, §1, prop.1), elle converge faiblement dans V, ce qui montre que V est aussi faiblement semi-complet.

En supposant donc V=E , il existe alors un sous-ensemble dénombrable partout dense dans E ; il en résulte que, dans E' , de toute suite bornée (x'_n) , on peut extraire une suite faiblement convergente ($\S$ 4).

Pour établir la prop. 3, il suffit de montrer, d'après la formule (4) du $\S$ 3, que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un indice n_0 tel que, pour tout $x'' \in E'$, on ait

$$(1) \qquad |B(a_n, x')| \leqslant \varepsilon \, \|x''\| \qquad \text{pour tout } n \geqslant n_0$$

Nous allons déduire cette inégalité de la proposition plus précise suivante : il existe un indice n_0 tel que, pour tout $x' \in E'$

$$(2) \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} |B(a_n, x')| \leqslant \varepsilon \, \|x'\|$$

Raisonnons par l'absurde ; si la proposition n'était pas vraie, il existerait un $\alpha > 0$, une suite (n_i) d'entiers, tendant vers $+\infty$, et une suite (x'_i) de points de E' , telle que $\|x'_i\| \leqslant 1$ et que

$$(3) \qquad \sum_{n=n_i}^{\infty} |B(a_n, x'_i)| \geqslant \alpha$$

On peut supposer la suite (x'_i) faiblement convergente vers un point $x'_0 \in E'$ (en extrayant au besoin une suite partielle, d'après les hypothèses antérieures).

Considérons alors une suite quelconque (ξ_n) de nombres complexes telle que $|\xi_n| \leqslant 1$ pour tout n . La suite $(B(a_n, x'))$ étant sommable dans $\mathcal{C}$, il en est de même de la suite $(\xi_n B(a_n, x'))$, c'est-à-dire $(B(\xi_n a_n, x'))$; comme E est faiblement semi-complet, on en conclut (voir remarques suivant la prop.1) que la suite $(\xi_n a_n)$ est faiblement sommable dans E ; soit a sa somme. On a donc $\sum_{n=1}^{\infty} B(\xi_n a_n, x') = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n B(a_n, x') = B(a, x')$; en particulier $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n B(a_n, x'_i - x'_0) = B(a, x'_i - x'_0)$. Comme la suite $(x'_i - x'_0)$ converge faiblement vers 0 , on voit finalement qu'en posant $b_{in} = B(a_n, x'_i - x'_0)$, on arrive à la conclusion suivante ;

quelle que soit la suite (ξ_n) de nombres complexes de valeur absolue $\leqslant 1$, on a

$$\lim_{i\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_{in}\,\xi_n\right) = 0 \tag{4}$$

La proposition 3 sera démontrée si nous établissons la proposition suivante :

Proposition 4 (I. Schur). Si la suite double (b_{in}) satisfait à la condition (4), on a

$$\lim_{i\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|b_{in}\right|\right) = 0 \tag{5}$$

En effet, supposons cette proposition démontrée ; soit m un indice tel que $\sum_{n=m}^{\infty}\left|B(a_n,x_0')\right| \leqslant \alpha/4$; il existe un indice i tel que $n_i > m$ et que $\sum_{n=1}^{\infty}\left|b_{in}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|B(a_n,x_i')-B(a_n,x_0')\right| \leqslant \alpha/4$; par suite, on a $\sum_{n=m}^{\infty}\left|B(a_n,x_i')\right| \leqslant \alpha/2$, contrairement à l'hypothèse (3).

Reste donc à démontrer la proposition 4. Raisonnons par l'absurde, et supposons que

$$\limsup_{i\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|b_{in}\right|\right) = \beta > 0 \tag{6}$$

Définissons par récurrence deux suites d'entiers (i_k) et (p_k) de la manière suivante :

1° i_1 est le plus petit indice i tel que $\sum_{n=1}^{\infty}\left|b_{in}\right| \geqslant \beta/2$;

2° p_1 est le plus petit indice p tel que

$$\sum_{n=1}^{p}\left|b_{i_1 n}\right| \geqslant \beta/4 \quad \text{et} \quad \sum_{n=p+1}^{\infty}\left|b_{i_1 n}\right| \leqslant \beta/10 \ ;$$

3° i_k est le plus petit indice $i > i_{k-1}$ et tel que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|b_{in}\right| \geqslant \beta/2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{p_{k-1}}\left|b_{in}\right| \leqslant \beta/10$$

(un tel indice existe puisque, pour chaque n fixe, $\lim_{i\to\infty} b_{in} = 0$)

4° p_k est le plus petit indice $p > p_{k-1}$ et tel que

$$\sum_{n=p_{k-1}+1}^{p}\left|b_{i_k n}\right| \geqslant \beta/4 \quad \text{et} \quad \sum_{n=p+1}^{\infty}\left|b_{i_k n}\right| \leqslant \beta/10$$

Posons maintenant

$$\xi_n = b_{i_1 n}/|b_{i_1 n}| \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant n \leqslant p_1$$

$$\xi_n = b_{i_{k+1} n}/|b_{i_{k+1}, n}| \quad \text{pour} \quad p_k < n \leqslant p_{k+1}$$

(si $b=0$, on convient que $b/|b|$ est pris égal à 0). On a évidemment $|\xi_n| \leqslant 1$ quel que soit n, donc la relation (4) a lieu par hypothèse. Mais, d'après le choix de ξ_n, on a

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n b_{i_k n}\Big| \geqslant \sum_{n=p_{k-1}+1}^{p_k} |b_{i_k n}| - \sum_{n=1}^{p_{k-1}} |b_{i_k n}| - \sum_{n=p_k+1}^{\infty} |b_{i_k n}|$$

$$\geqslant \beta/4 - \beta/10 - \beta/10 = \beta/20$$

Cette relation ayant lieu quel que soit k, contredit (4), ce qui établir la prop.4, et achève la démonstration du théorème 1.

Remarque. On a déjà vu (§ 2) que si, pour une famille (x_ι) de points d'un espace normé E, la famille $(\|x_\iota\|)$ des normes est sommable (dans $\mathbb{R}$), il en résulte que la famille (x_ι) est sommable dans E. Mais cette condition suffisante de sommabilité n'est nullement nécessaire en général. Par exemple, considérons dans l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, la famille (x_n), où $x_n=(\xi_{np})$ avec $\xi_{np}=0$ pour $p \neq n$, et $\xi_{nn}=1/n$. Il est immédiat que cette suite est sommable, sa somme étant le point $x=(\xi_{pp})$; mais, comme $\|x_n\|=1/n$, la suite des normes n'est pas sommable dans $\mathbb{R}$.

Familles biorthogonales dans les espaces normés. Lorsque nous considérerons deux familles biorthogonales $(x_\iota)_{\iota \in I}$, $(x'_\iota)_{\iota \in I}$, dont les points appartiennent à E et E' respectivement, nous supposerons toujours que l'on a $B(x_\iota, x'_\iota)=1$ quel que soit ι (on dit alors que les deux familles biorthogonales sont normales) ; si cette condition n'était pas remplie, on peut toujours multiplier chacun des x_ι par un facteur convenable λ_ι

de manière que les familles $(\lambda_\iota x_\iota)$ et (x'_ι) soient biorthogonales et normales. On observera que, si (x_ι) et (x'_ι) sont deux familles biorthogonales et normales, il en est de même de $(\lambda_\iota x_\iota)$ et (x'_ι/λ_ι), quels que soient les facteurs $\lambda_\iota \neq 0$; toutes ces familles seront dites <u>semblables</u> ; pour toutes les familles semblables à deux familles biorthogonales données, les produits $\|x_\iota\| \cdot \|x'_\iota\|$ ont la même valeur ; mais il n'en est pas de même des normes $\|x_\iota\|$ et $\|x'_\iota\|$.

On dira que la famille (x_ι) est <u>totale</u> dans E si le sous-espace vectoriel fermé qu'elle engendre est identique à E ; comme les variétés linéaires fortement et faiblement fermées dans E sont identiques, il faut et il suffit pour cela que la relation "quel que soit ι , $B(x_\iota, y')=0$ " entraîne $y'=0$.

On dira que la famille (x'_ι) est <u>fortement totale</u> (resp. <u>faiblement totale</u>) dans E' si le sous-espace vectoriel <u>fortement fermé</u> (resp. <u>faiblement fermé</u>) qu'elle engendre est identique à E' . Une famille (x'_ι) fortement totale est a fortiori faiblement totale ; mais la réciproque n'est pas vraie en général ; les deux notions ne se confondent que lorsque E est <u>réflexif</u> (§ 4). Pour que (x'_ι) soit faiblement totale, il faut et il suffit que la relation "quel que soit ι , $B(y, x'_\iota)=0$ " entraîne $y=0$; cette condition est donc encore nécessaire, mais non suffisante, pour que (x'_ι) soit fortement totale.

Le fait qu'une des familles (x_ι), (x'_ι) soit totale (fortement ou faiblement) n'entraîne nullement que l'autre famille le soit; nous en verrons des exemples au chap. IV .

Considérons deux familles biorthogonales et normales (x_ι), (x'_ι). A tout $x \in E$ correspond la famille $c(x)=(c_\iota(x))$ des <u>coefficients</u> $c_\iota(x)=B(x, x'_\iota)$ de sont développement suivant les familles (x_ι), (x'_ι) ;

de même, à tout $x' \in E'$ correspond la famille $c'(x')=(c'_\iota(x'))$ des <u>coefficients</u> $c'_\iota(x')=B(x_\iota,x')$ de son développement. On définit ainsi une <u>application vectorielle</u> $x \to c(x)$ de E sur un sous-espace vectoriel K de $\mathscr{C}^I$, et une application vectorielle $x' \to c'(x')$ de E' sur un sous-espace vectoriel K' de $\mathscr{C}^I$; nous allons d'abord étudier ces applications.

Remarquons en premier lieu qu'elles sont <u>continues</u>, lorsqu'on munit E et E' de leurs topologies fortes ou faibles, et $\mathscr{C}^I$ de la topologie <u>produit</u>, ou d'une topologie <u>moins fine</u> que cette dernière : en effet, chacun des coefficients $c_\iota(x)$ (resp. $c'_\iota(x')$) est continu dans E (resp. E') (Top.gén., chap.I, § 8, cor.2 du th.1). Mais il y a plus :

<u>Proposition 5</u>. <u>Si on munit E'</u> (resp. E) <u>de sa topologie forte, et K'</u> (resp. K) <u>d'une topologie d'espace de Fréchet, plus fine que la topologie induite sur K'</u> (resp. K) <u>par la topologie produit de $\mathscr{C}^I$</u>, <u>l'application</u> $x' \to c'(x')$ (resp. $x \to c(x)$ <u>si E est complet</u>), <u>est continue dans E'</u> (resp. E).

Nous utiliserons le cor.2 du th.1 du § 1 ; il nous suffit de voir que la partie G de $E' \times K'$, définie par la relation $t=c'(x')$, est <u>fermée</u> dans cet espace produit.

Or, soit (a',b) un point adhérent à G $(b=(b_\iota))$, et considérons un indice ι quelconque ; comme pr_ι est continue dans K', par hypothèse, il existe un voisinage V de b tel que $|pr_\iota t-b_\iota| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in V$; soit d'autre part S' la boule de centre a' et de rayon ε dans E'. Il existe par hypothèse un point $(x',c'(x')) \in S' \times V$; comme $\|x'-a'\| \leqslant \varepsilon$, on a $|c'_\iota(x')-c'_\iota(a')| \leqslant \varepsilon \|x_\iota\|$; d'autre part, comme $pr_\iota(c'(x'))=c'_\iota(x')$ par définition, on a aussi $|c'_\iota(x')-b_\iota| \leqslant \varepsilon$; d'où $|c'_\iota(a')-b_\iota| \leqslant (\|x_\iota\|+1)\varepsilon$, et comme ε est arbitraire, $c'_\iota(a')=b_\iota$,

donc $(a',b) \in G$, ce qui démontre la proposition. Démonstration analogue pour l'application $x \to c(x)$ lorsque E est complet.

Pour que $x \to c(x)$ (resp. $x' \to c'(x')$) soit une application biunivoque de E sur K (resp. de E' sur K'), il faut et il suffit que (x'_ι) soit faiblement totale (resp. que (x_ι) soit totale).

Si (x_ι) est totale (resp. (x'_ι) faiblement totale et E complet) on voit donc, d'après le th.1 du § 1, que la seule topologie d'espace de Fréchet sur K' (resp. K), plus fine que la topologie induite par la topologie produit de $\mathcal{C}^I$, est la topologie d'espace de Banach transportée de celle de E' (resp.E) par l'application biunivoque c' (resp.c) Autrement dit, si f' (resp. f) est l'application réciproque de c' (resp. c), f' (resp. f) est un isomorphisme de K' sur E' (resp. de K sur E).

En ce qui concerne E', cette proposition peut se généraliser :

Proposition 5 bis. Supposons (x_ι) totale, et soit f' l'application réciproque de c' ; si on munit E' de sa topologie forte, et un sous-espace vectoriel P' de K' d'une topologie d'espace de Fréchet, plus fine que la topologie induite sur P' par la topologie produit de $\mathcal{C}^I$, la fonction f' est continue dans P' .

Nous utiliserons la prop.3 du § 1 ; il nous suffit de voir que l'application $t \to \|f'(t)\|$ de P' dans $\mathbb{R}$, est semi-continue inférieurement en tout point $b=(b_\iota) \in P'$.

Raisonnons par l'absurde ; si, en un tel point, $\|f'(t)\|$ n'était pas semi-continue inférieurement, il existerait un nombre $a > 0$ tel que, dans tout voisinage de b dans P' , existe un point $t=(t_\iota)$ tel que

$$\|f'(t)\| \leqslant \|f'(b)\| - a$$

Soit W(V) l'ensemble des points du voisinage V de b satisfaisant à cette relation ; les W(V) forment une <u>base de filtre</u>, dont l'image par f' est contenue dans la boule S' de centre 0 et de rayon $\|f'(b)\| - a$; cette image a donc un point <u>faiblement adhérent</u> x' (§ 4, th.3) contenu dans S' . Pour tout indice ι et tout $\varepsilon > 0$, il existe donc, dans tout voisinage de b , un t tel que $|B(x_\iota, x') - B(x_\iota, f'(t))| \leqslant \varepsilon$. Mais par définition $B(x_\iota, f'(t)) = t_\iota$, donc $|c'_\iota(x') - t_\iota| \leqslant \varepsilon$. Mais par hypothèse, l'application pr_ι est continue dans P' , donc on a , quel que soit ι , $c'_\iota(x') = b_\iota$, et comme (x_ι) est supposée <u>totale</u>, x'=f'(b) ; mais cela contredit la relation $\|x'\| \leqslant \|f'(b)\| - a$, d'où la proposition.

<u>Remarques</u>. Ici, on ne peut plus déduire de cette proposition, en général, que f' est un isomorphisme de P' dans E' ; il faut et il suffit pour cela (§ 1,th.1) que f'(P') soit <u>fermé</u> dans E' . Dans ce dernier cas, d'ailleurs, le raisonnement de la prop.5 est applicable, et la proposition analogue pour E est vraie en supposant seulement E complet. Au contraire, la prop.5 bis n'a d'analogue dans E que lorsque cet espace est <u>réflexif</u>.

<u>Etude des espaces vectoriels K et K'</u>. Les sous-espaces vectoriels (non munis de topologies, a priori) K et K' de $\mathbb{C}^I$ dépendent de l'espace E et des familles biorthogonales (x_ι) et $x'_\iota)$. On peut se proposer de les caractériser, autrement dit, de chercher à quelle condition un point $t=(t_\iota)$ de $\mathbb{C}^I$ appartient à K ou à K' .

Pour K', on peut donner à cette question une réponse complète, tout au moins au point de vue théorique. Il s'agit en effet de savoir à quelle condition il existe une forme linéaire x' continue dans E et telle que

(7) $$x'(x_\iota) = B(x_\iota, x') = t_\iota$$

pour tout $\iota \in I$. Soit G le sous-espace vectoriel de E , engendré par la famille (x_ι) , c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_\iota \lambda_\iota x_\iota$ (où $\lambda_\iota = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices). Les conditions (7) reviennent à dire que x' doit être un prolongement à E de la forme linéaire f , définie dans G par la condition

$$f(\sum_\iota \lambda_\iota x_\iota) = \sum_\iota \lambda_\iota t_\iota$$

Or, on sait (chap.I, § 4, th.1) qu'il faut et il suffit, pour qu'une telle forme x' existe, que f soit continue dans G ; comme G est normé, cette condition s'exprime de la manière suivante : il faut et il suffit que la quantité

$$\sup\left(\left|\sum_\iota \lambda_\iota t_\iota\right| / \left\|\sum_\iota \lambda_\iota x_\iota\right\|\right)$$

soit finie, la borne supérieure étant prise sur l'ensemble de toutes les familles (λ_ι) de nombres complexes, nuls sauf pour un nombre fini d'indices.

Pour K , le raisonnement analogue montre qu'une condition nécessaire pour que $(t_\iota) \in K$, est que $\sup\left(\left|\sum_\iota \lambda_\iota t_\iota\right| / \left\|\sum_\iota \lambda_\iota x'_\iota\right\|\right) < +\infty$. Mais cette condition n'est suffisante que lorsque E est réflexif ; elle exprime en effet qu'il existe une forme linéaire g fortement continue dans E' et telle que $g(x'_\iota) = t_\iota$ pour tout $\iota \in I$; mais cette forme linéaire n'est pas nécessairement faiblement continue si E n'est pas réflexif, et par suite, il n'existe pas nécessairement de point $x \in E$ tel que $B(x,x') = g(x')$ quel que soit $x' \in E'$.

Les conditions précédentes sont d'ailleurs inapplicables en pratique ; aussi est-il utile de possèder des critères nécessaires et des critères suffisants plus simples, pour que $t = (t_\iota)$ appartienne à K ou à K' . Nous allons en donner quelques-uns.

Proposition 6. Soit G' (resp. G) le sous-espace vectoriel fortement fermé de E' (resp. E) engendré par la famille (x'_ι) (resp. (x_ι)) ; pour tout $x' \in G'$ (resp. pour tout $x \in G$), on a $\lim(B(x_\iota, x')/\|x_\iota\|)=0$ (resp. $\lim(B(x, x'_\iota)/\|x'\|)=0$) suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I .

En effet, quel que soit $\varepsilon>0$, il existe une suite finie (ι_k) d'indices, et une combinaison linéaire $\sum_k a_{\iota_k} x'_{\iota_k}$ telle que $\|x' - \sum_k a_{\iota_k} x'_{\iota_k}\| \leqslant \varepsilon$. Pour tout indice ι distinct des ι_k , on a $B(x_\iota, x'_{\iota_k})=0$, d'où $|B(x_\iota, x')| = |B(x_\iota, x' - \sum_k a_{\iota_k} x'_{\iota_k})| \leqslant \varepsilon \|x_\iota\|$, d'où la proposition.

Corollaire. La famille (x'_ι) (resp. (x_ι)) est fortement totale, et si $t=(t_\iota) \in K'$ (resp. $(t_\iota) \in K$) , $\lim t_\iota / \|x_\iota\| = 0$ (resp. $\lim t_\iota / \|x'_\iota\| = 0$) suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I .

On a ainsi une condition nécessaire pour que $(t_\iota) \in K'$ (resp. $(t_\iota) \in K$). Une condition suffisante est donnée par une remarque du § 3 du chap.II : pour toute partie finie H de l'ensemble d'indices I , formons la somme $s'_H = \sum_{\iota \in H} t_\iota x'_\iota$ (resp. $s_H = \sum_{\iota \in H} t_\iota x_\iota$) ; si l'application $H \to s'_H$ (resp. $H \to s_H$) a une valeur d'adhérence faible dans E' (resp. E) suivant le filtre des sections Φ de l'ensemble filtrant des parties finies de I (a fortiori si la famille $(t_\iota x'_\iota)$ (resp.$(t_\iota x_\iota)$) est faiblement sommable dans E' (resp. E)) , (t_ι) appartient à K' (resp. à K).

En particulier, lorsque I est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers (cas le plus fréquent dans les applications) et si la série $\sum_{n=0}^{\infty} t_n x'_n$ (resp. $\sum_{n=0}^{\infty} t_n x_n$) est faiblement convergente dans E' (resp. E) , (t_n) appartient à K' (resp. K).

En ce qui concerne le sous-espace K' , on peut transformer de la manière suivante cette condition suffisante :

Proposition 7. Si $\liminf_{\Phi} \| s'_H \| < +\infty$, (t_ι) appartient à K' .

En effet, il existe un nombre $a>0$ tel que, pour toute partie finie J_0 de I , il existe une partie finie $J \supset J_0$ telle que $\| s'_J \| \leqslant a$. Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des parties finies J de I telles que $\| s'_J \| \leqslant a$; d'après ce qui précède, le filtre Φ induit un filtre Φ' sur $\mathfrak{F}$; comme l'image de Φ' par l'application $H \to s'_H$ est une base de filtre sur la boule $\| x' \| \leqslant a$, elle admet un point faiblement adhérent x'_0 (§ 4 , th.3) ; donc $H \to s'_H$ a pour valeur d'adhérence x'_0 suivant le filtre Φ' , et à fortiori suivant le filtre Φ , et on est ramené au critère précédent.

Par des considérations un peu différentes, nous allons encore obtenir d'autres conditions pour que $(t_\iota) \in K$ ou $(t_\iota) \in K'$.

Proposition 8. Soit (p_ι) une famille de nombres complexes. Si la famille $(p_\iota x'_\iota)$ (resp. $(p_\iota x_\iota)$) est faiblement sommable dans E' (resp. dans E), la famille $(p_\iota B(x,x'_\iota))$ (resp. $(p_\iota B(x_\iota,x'))$) de nombres complexes a une somme quel que soit $x \in E$ (resp. $x' \in E'$). Réciproquement, si $(p_\iota B(x,x'_\iota))$ (resp. $(p_\iota B(x_\iota,x'))$) a une somme quel que soit $x \in E$ (resp. $x' \in E'$) , et si E est complet (resp. si E est faiblement semi-complet) , la famille $(p_\iota x'_\iota)$ (resp. $(p_\iota x_\iota)$) est faiblement sommable dans E' (resp. fortement sommable dans E) .

La première partie de la proposition est immédiate, puisque $p_\iota B(x,x'_\iota) = B(x,p_\iota x'_\iota)$, et que l'application $x' \to B(x,x')$ est faiblement continue dans E' .

Réciproquement, si la famille de nombres complexes $(B(x,p_\iota x'_\iota))$ a une somme, ses sommes partielles finies forment un ensemble borné dans $\mathbb{C}$ quel que soit $x \in E$, donc les sommes partielles finies de la famille $(p_\iota x'_\iota)$ forment un ensemble faiblement borné dans E' . Comme E est complet, il en résulte que la famille $(p_\iota x'_\iota)$ est faiblement sommable (prop. 2) .

Même raisonnement pour la famille $(p_\iota x_\iota)$ lorsque E est faiblement semi-complet, en utilisant le th.1 .

Remarque. La première partie de la proposition est encore valable lorsqu'on suppose seulement que les sommes partielles finies de $(p_\iota x'_\iota)$ (resp. $(p_\iota x_\iota)$) sont faiblement bornées ; on a donc une condition nécessaire pour que $(t_\iota) \in K$ (resp. $(t_\iota) \in K'$) :

Corollaire. Soit (p_ι) une famille de nombres complexes telle que les sommes partielles finies de la famille $(p_\iota x'_\iota)$ (resp. $(p_\iota x_\iota)$) forment un ensemble faiblement borné dans E' (resp. E). Si $(t_\iota) \in K$ (resp. $(t_\iota) \in K'$) , la famille $(p_\iota t_\iota)$ est sommable dans $\mathbb{C}$.

Proposition 9. On suppose E complet, et la famille (x_ι) totale, et on considère une famille (p_ι) de nombres $\geqslant 0$. Pour que la condition "quel que soit ι , $|t_\iota| \leqslant p_\iota$" entraîne $(t_\iota) \in K'$, il faut et il suffit que la famille $(p_\iota x'_\iota)$ soit faiblement sommable dans E' .

En effet, si la famille $(p_\iota x'_\iota)$ est faiblement sommable, la famille $(p_\iota B(x,x'_\iota))$ est sommable dans $\mathbb{C}$ quel que soit $x \in E$ d'après la prop.8 ; il en est donc de même de la famille $(t_\iota B(x,x'_\iota))$ si $|t_\iota| \leqslant p_\iota$; donc la famille $(t_\iota x'_\iota)$ est faiblement sommable dans E' , d'après la prop.8, ce qui montre que $(t_\iota) \in K'$.

Réciproquement, désignons par P le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^I$ formé des familles (t_ι) telles que $\sup_{\iota \in I} |t_\iota|/p_\iota < +\infty$ (on convient que, si $p_\iota = 0$, $|t_\iota|/p_\iota = +\infty$ si $t_\iota \neq 0$, et $|t_\iota|/p_\iota = 0$ si $t_\iota = 0$) , et supposons que $P \subset K'$; si, pour $t=(t_\iota) \in P$, on pose $\|t\| = \sup_\iota |t_\iota|/p_\iota$, on définit sur P une norme, et il est immédiat que l'espace normé P ainsi défini est complet. Soit $f(t) \in E'$ le point (uniquement déterminé puisque (x_ι) est totale) tel que $B(x_\iota, f(t)) = t_\iota$ quel que soit $\iota \in I$; il résulte de la prop.5 bis que l'application f de P dans E' est continue dans P .

Par suite, il existe un nombre $a>0$ tel que $\|f(t)\| \leqslant a.\|t\|$ quel que soit $t \in P$. Soit alors H une partie finie quelconque de I , et prenons $t_\iota = p_\iota$ pour $\iota \in H$, $t_\iota = 0$ pour $\iota \in \complement H$; on a bien $t=(t_\iota) \in P$, et $f(t) = \sum_{\iota \in H} p_\iota x'_\iota$; donc on a $\left\| \sum_{\iota \in H} p_\iota x'_\iota \right\| \leqslant a$. Par suite (prop.2), la famille $(p_\iota x'_\iota)$ est faiblement sommable dans E' .

Remarques. 1) La seconde partie de la démonstration précédente ne suppose pas que E soit complet.

2) On peut faire un raisonnement analogue à la première partie du précédent pour la condition $(t_\iota) \in K$: on voit ainsi que, si les sommes partielles de la famille $(p_\iota x_\iota)$ forment un ensemble borné dans E , et si $|t_\iota| \leqslant p_\iota$, les sommes partielles de la famille $(t_\iota x_\iota)$ forment encore un ensemble borné dans E ; donc, si on suppose que E soit faiblement semi-complet, on en déduit encore $(t_\iota) \in K$; on obtient donc des conditions suffisantes pour que $(t_\iota) \in K$ (resp. $(t_\iota) \in K'$).

3) Il résulte des prop. 8 et 9 que, si E est complet, et (x_ι) une famille totale, les propositions suivantes sont équivalentes :

a) quel que soit $x \in E$, la famille $(p_\iota B(x,x'_\iota))$ a une somme ;

b) la condition "quel que soit ι , $|t_\iota| \leqslant p_\iota$ " entraîne $(t_\iota) \in K'$.

Sommabilité des développements biorthogonaux. Considérons deux familles biorthogonales infinies (x_ι), (x'_ι) ; on sait que si la famille $(c_\iota(x).x_\iota)$ (resp. $(c'_\iota(x').x'_\iota)$) est faiblement sommable dans E (resp. E'), et si y (resp. y') est sa somme, y-x (resp. y'-x') est orthogonal au sous-espace vectoriel faiblement fermé engendré par (x'_ι) (resp. (x_ι)) ; en particulier, si (x'_ι) (resp. (x_ι)) est faiblement totale (resp. totale) , on a y=x (resp. y'=x').

mais en général, il existe des points $x \in E$ (resp. $x' \in E'$) tels que la famille $(c_\iota(x).x_\iota)$ (resp. $(c'_\iota(x').x'_\iota)$) ne soit pas faiblement sommable; nous en verrons des exemples au chap. IV .

Proposition 10. Si la famille $(c_\iota(z_0).x_\iota)$ (resp. $(c'_\iota(z'_0).x'_\iota)$ est faiblement sommable dans E (resp. E') , la famille $(c_\iota(z_0).c'_\iota(z'))$ (resp. $(c_\iota(z).c'_\iota(z'_0))$ est sommable dans $\mathbb{C}$ quel que soit $z' \in E'$ (resp. $z \in E$) ; si (x'_ι) est faiblement totale (resp. si (x_ι) est totale), la somme de cette famille est égale à $B(z_0,z')$ (resp. $B(z,z'_0)$).

En effet, pour toute partie finie H de l'ensemble d'indices I , $\sum_{\iota \in H} c_\iota(z_0)c'_\iota(z') = B(\sum_{\iota \in H} c_\iota(z_0)x_\iota, z')$ d'où la proposition, d'après la définition de la sommabilité faible.

Cette proposition admet une réciproque partielle :

Proposition 11. Si E est complet, et si la famille $(c_\iota(z)c'_\iota(z'_0))$ est sommable dans $\mathbb{C}$ quel que soit $z \in E$, la famille $(c'_\iota(z'_0).x'_\iota)$ est faiblement sommable dans E' .

En effet, on a, pour toute partie finie H de I

$$\sum_{\iota \in H} c_\iota(z)c'_\iota(z'_0) = B(z, \sum_{\iota \in H} c'_\iota(z'_0)x'_\iota)$$

donc, comme l'ensemble des sommes partielles de $(c_\iota(z)c'_\iota(z'_0))$ est borné par hypothèse, quel que soit $z \in E$, l'ensemble des sommes partidles finies de $(c'_\iota(z'_0)x'_\iota)$ est faiblement borné dans E' , donc fortement borné puisque E est complet ; par suite (prop.2), la famille $(c'_\iota(z'_0)x'_\iota)$ est faiblement sommable.

Si on suppose de même que $(c_\iota(z_0)c'_\iota(z'))$ est sommable dans $\mathbb{C}$ quel que soit $z' \in E'$, on peut seulement en conclure que l'ensemble des sommes partielles finies de la famille $(c_\iota(z_0)x_\iota)$ est borné dans E ; on peut encore en conclure à la sommabilité faible, et même à la sommabilité forte de cette famille, lorsque E est faiblement semi-complet (th. 1).

Proposition 12. SI E est complet, et si, quels que soient $z \in E$ et $z' \in E'$, la famille $(c_\iota(z)c'_\iota(z'))$ est sommable dans $\mathbb{C}$:

1° la famille $(c_\iota(z).x_\iota)$ est fortement sommable pour tout z appartenant au sous-espace vectoriel fermé engendré par la famille (x_ι) ; elle est fortement sommable pour tout $z \in E$ si E est faiblement semi-complet ;

2° la famille $(c'_\iota(z')x'_\iota)$ est fortement sommable pour tout z' appartenant au sous-espace vectoriel fortement fermé engendré par la famille (x'_ι) ; elle est fortement sommable pour tout $z' \in E'$ si E est réflexif.

1°) Pour toute partie finie H de I, considérons l'application vectorielle continue $x \to s_H(x) = \sum_{\iota \in H} c_\iota(x).x_\iota$ de E dans lui-même ; comme on a $B(s_H(x),x') = \sum_{\iota \in H} c_\iota(x).c'_\iota(x')$, pour un x quelconque donné dans E, l'ensemble des $s_H(x)$ est borné dans E (§4, th.1) ; donc, comme E est complet, l'ensemble des applications s_H est borné dans l'espace normé $\mathcal{L}_b(E,E)$ (§3, prop.1). L'image par l'application $H \to s_H$, du filtre des sections de $\mathcal{F}(I)$ est donc un filtre borné $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{L}_b(E,E)$; comme ce filtre converge simplement pour tout x_ι (puisque $s_H(x_\iota)=x_\iota$ si $\iota \in H$), il converge aussi simplement pour tout x appartenant au sous-espace vectoriel fermé engendré par (x_ι) (§3, prop.2). Le cas où E est faiblement complet a été vu ci-dessus.

2°) Considérons de même l'application vectorielle $x' \to s'_H(x') = \sum_{\iota \in H} c'_\iota(x').x'_\iota$ de E' dans lui-même ; comme E' est complet, on voit comme ci-dessus que l'ensemble des s'_H est borné dans l'espace normé $\mathcal{L}_b(E',E')$. D'autre part, d'après la prop.11, la famille $(c'_\iota(z').x'_\iota)$ est faiblement sommable dans E', pour tout $z' \in E'$; soit y' sa somme faible ; on a $s'_H(y') = s'_H(z')$ pour toute partie finie H de I.

Comme y' appartient au sous-espace vectoriel <u>faiblement fermé</u> engendré par (x'_ι), on ne peut en conclure (par le même raisonnement que dans la première partie) que $s_H(y')$ converge <u>fortement</u> vers y' que lorsque tout sous-espace vectoriel <u>faiblement fermé</u> est aussi <u>fortement fermé</u>, c'est-à-dire lorsque E est réflexif, ou lorsque $z'=y'$ appartient au sous-espace vectoriel fortement <u>fermé</u> engendré par (x'_ι).

<u>Cas des familles biorthogonales dénombrables</u>. Considérons le cas particulier où $I=\mathcal{N}$; on sait alors (chap.II, § 3), que si la <u>série</u> $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x).x_n$ (resp. $\sum_{n=0}^{\infty} c'_n(x').x'_n$) a une <u>limite faible</u> y (resp. y') dans E (resp. E'), $y-x$ (resp. $y'-x'$) est orthogonal au sous-espace vectoriel faiblement fermé engendré par (x'_n) (resp. (x_n)) ; en particulier, si (x'_n) (resp. (x_n)) est <u>faiblement totale</u> (resp. totale), on a $y=x$ (resp. $y'=x'$).

Il suffit de raisonner comme pour les propositions 10, 11 et 12, mais en remplaçant les parties finies H de l'ensemble d'indices par les parties $\{1,n\}$ de $\mathcal{N}$, pour obtenir les propositions correspondantes

<u>Proposition 13</u>. <u>Si la série</u> $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0)x_n$ (resp. $\sum_{n=0}^{\infty} c'_n(z'_0)x'_n$) <u>a une limite faible dans E</u> (resp. E'), <u>la série</u> $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0)c'_n(z')$ (resp. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z)c'_n(z'_0)$) <u>converge dans</u> $\mathbb{C}$ <u>quel que soit</u> $z'\in E'$ (resp. $z\in E$) ; <u>si</u> (x'_n) <u>est faiblement totale</u> (resp. <u>si</u> (x_n) <u>est totale</u>), <u>la limite de cette série est égale à</u> $B(z_0,z')$ (resp. $B(z,z'_0)$).

<u>Proposition 14</u>. <u>Si E est complet, et si la série</u> $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z)c'_n(z'_0)$ <u>converge dans</u> $\mathbb{C}$ <u>quel que soit</u> $z\in E$, <u>la série</u> $\sum_{n=0}^{\infty} c'_n(z'_0)x'_n$ <u>a une limite faible dans E'</u>.

<u>Si E est faiblement semi-complet, et si la série</u> $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0)c'_n(z')$ <u>converge dans</u> $\mathbb{C}$ <u>quel que soit</u> $z'\in E'$, <u>la série</u> $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0)x_n$ <u>a une limite forte dans E</u>.

Proposition 15. Si, quels que soient $z \in E$ et $z' \in E'$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z)c'_n(z')$ converge dans $\mathbb{C}$:

1° si en outre E est complet, la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z)x_n$ a une limite forte dans E pour tout z appartenant au sous-espace vectoriel fermé engendré par la suite (x_n) ;

2° la série $\sum_{n=0}^{\infty} c'_n(z')x'_n$ a une limite forte dans E' pour tout z' appartenant au sous-espace vectoriel fortement fermé engendré par la suite (x'_n).

Exercices. 1) Soit E un espace de Banach, et $(e_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de points de E telle que, pour tout $x \in E$, il existe une famille et une seule $(t_\iota(x))_{\iota \in I}$ de nombres complexes telle que la famille $(t_\iota(x).e_\iota)$ soit fortement sommable et ait pour somme x.

a) On désigne par F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^I$ formé des familles $(t_\iota(x))=t(x)$, où x parcourt E. Si on pose $\|t(x)\| = \sup \left\| \sum_{\iota \in H} t_\iota(x).e_\iota \right\|$, où H parcourt l'ensemble des parties finies de I, montrer que cette expression est une norme sur F, et que l'espace F ainsi normé est complet.

b) En déduire que $x \to t(x)$ est un isomorphisme de E sur F (utiliser le th.1 du § 1), que chacune des applications $x \to t_\iota(x)$ est une forme linéaire continue dans E, et enfin que les familles (e_ι), (t_ι) sont biorthogonales.

c) Montrer que, si J et J' sont deux parties complémentaires de I, les sous-espaces vectoriels fermés E_J et $E_{J'}$ de E, engendrés respectivement par les familles $(e_\iota)_{\iota \in J}$ et $(e_\iota)_{\iota \in J'}$ sont supplémentaires.

2) Soient E et F deux espaces de Banach ; (x_ι),(x'_ι) deux familles biorthogonales dans E et E' ; (y_ι),(y'_ι) deux familles biorthogonales dans F et F' , où l'ensemble d'indices est <u>le même</u> que pour (x_ι) et (x'_ι).

a) Soit (h_ι) une famille de nombres complexes telle que, pour tout $x \in E$, la relation "quel que soit ι , $B(y,y'_\iota)=h_\iota B(x,x'_\iota)$ " soit vérifiée par un point et un seul $y=u(x) \in F$. Montrer que u est une application vectorielle continue de E dans F (utiliser le cor. 2 du th. 1 du § 1).

b) En déduire que, pour tout $y' \in F'$, la relation "quel que soit ι , $B(x_\iota,x')=h_\iota B(y_\iota,y')$" est vérifiée par un point $x' \in E'$ (considérer la transposée de u).

c) Si on suppose (x_ι) totale, et (y'_ι) faiblement totale, une condition nécessaire et suffisante pour que (h_ι) satisfasse à la condition de a), est que l'on ait

$$\sup \left(\left\| \sum_\iota h_\iota \lambda_\iota y_\iota \right\| / \left\| \sum_\iota \lambda_\iota x_\iota \right\| \right) < +\infty$$

la borne supérieure étant prise pour toutes les familles (λ_ι) de nombres complexes, nuls sauf pour un nombre fini d'indices (utiliser le cor. 2 du th. 1 du § 1).

153

A 1

L I V R E IV

CHAPITRE IV

ESPACES HILBERTIENS

§1. Espaces préhilbertiens et espaces hilbertiens.

Considérons un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On dit qu'une application H de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ est une forme hermitienne bilinéaire définie dans $E \times E$, si elle satisfait aux conditions suivantes :

(H_I) $H(\lambda x,y)=\lambda H(x,y)$ quels que soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in E$, $y \in E$.

(H_{II}) $H(x+x',y)=H(x,y)+H(x',y)$ quels que soient x,x',y.

(H_{III}) $H(y,x) = \overline{H(x,y)}$ quels que soient x,y (on rappelle que $\bar{a}$ désigne le nombre complexe conjugué d'un nombre complexe a).

On déduit aussitôt de ces propriétés que l'on a, pour $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$H(x, \lambda y) = \overline{H(\lambda y,x)} = \bar{\lambda}.\overline{H(y,x)} = \bar{\lambda}.H(x,y)$$

et $$H(x,y+y') = \overline{H(y+y',x)} = \overline{H(y,x)+H(y',x)} = H(x,y)+H(x,y')$$

d'où, plus généralement

$$H\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\ ,\ \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j\Big) = \sum_{i,j} \lambda_i \bar{\mu}_j H(x_i,y_j)$$

Il en résulte que, dans l'espace $\mathbb{C}^n$, si e_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont n vecteurs formant une base de $\mathbb{C}^n$, on a, pour $x=\sum_i \lambda_i e_i$, $y = \sum_i \mu_i e_i$, $H(x,y)= \sum_{i,j} H(e_i,e_j)\, \lambda_i \bar{\mu}_j$; la notion de forme hermitienne bilinéaire coïncide donc dans ce cas avec celle déjà définie sous ce nom en Algèbre (chap. VIII).

L'application $x \to H(x,x)$ de E dans $\mathbb{C}$ est appelée la forme hermitienne définie par $H(x,y)$; d'après (H_{III}), c'est une fonction réelle.

D'après (H_I), on a $H(0,y)=0$ quel que soit y, et de même, $H(x,0)=0$ quel que soit x. En particulier $H(0,0,)=0$. La forme hermitienne $H(x,x)$ est dite positive si $H(x,x) \geqslant 0$ quel que soit $x \in E$;

elle est dite <u>strictement positive</u> si $H(x,x)>0$ quel que soit $x\neq 0$; autrement dit, dans ce cas, la relation $H(x,x)=0$ entraîne $x=0$.

<u>Proposition 1</u>. <u>Si une forme hermitienne</u> $H(x,x)$ <u>est positive, on a</u> , <u>quels que soient</u> $x\in E$, $y\in E$,

$$(1) \qquad |H(x,y)|^2 \leqslant H(x,x)H(y,y)$$

(<u>inégalité de Schwarz</u>). <u>Si en outre</u> $H(x,x)$ <u>est strictement positive</u>, <u>les deux membres de</u> (1) <u>ne peuvent être égaux que si</u> x <u>et</u> y <u>forment un système lié</u>.

En effet, quels que soient les nombres complexes λ , μ ,

$$H(\lambda x+\mu y, \lambda x+\mu y) = |\lambda|^2 H(x,x)+ \lambda\bar{\mu} H(x,y)+ \bar{\lambda}\mu \overline{H(x,y)}+ |\mu|^2 H(y,y)$$

est une forme hermitienne <u>positive</u> en λ et μ ; or, on a vu en Algèbre (chap. VIII) que, pour qu'une forme hermitienne $f(\lambda , \mu)= a|\lambda|^2 +b\lambda\bar{\mu}+ \bar{b}\bar{\lambda}\mu + c|\mu|^2$ soit positive, il faut et il suffit que $ac-|b|^2 \geqslant 0$. En écrivant cette condition, on obtient l'inégalité de Schwarz . On sait en outre que, si $ac-|b|^2 = 0$, il existe deux nombres complexes λ , μ non tous deux nuls, tels que $f(\lambda , \mu)=0$; il en résulte que, si $H(x,x)$ est strictement positive, on doit avoir $\lambda x+\mu y=0$ si les deux membres de (1) sont égaux, ce qui achève la démonstration.

<u>Proposition 2</u>. <u>Si la forme hermitienne</u> $H(x,x)$ <u>est positive</u> (resp. <u>strictement positive</u>), <u>la fonction</u> $\sqrt{H(x,x)}$ <u>est une semi-norme</u> (resp. <u>une norme</u>) <u>dans E</u> .

Il suffit de démontrer que $\sqrt{H(x,x)}$ satisfait à l'inégalité du triangle. Or, on a

$$H(x+y,x+y) = H(x,x)+H(x,y)+ \overline{H(x,y)}+ H(y,y)$$

et, d'après l'inégalité de Schwartz

$$\begin{aligned} H(x+y,x+y) &\leqslant H(x,x)+2\sqrt{H(x,x)H(y,y)}+H(y,y) \\ &= \left(\sqrt{H(x,x)}+\sqrt{H(y,y)}\right)^2 \end{aligned}$$

d'où la proposition.

Définition 1. Si $H(x,y)$ est une forme hermitienne bilinéaire définie dans $E \times E$, et telle que $H(x,x)$ soit strictement positive dans E, la structure d'espace normé définie sur E par la norme $\sqrt{H(x,x)} = \|x\|$ est dite structure d'espace préhilbertien ; si en outre E, muni de cette structure, est complet, E est dit espace hilbertien (ou espace de Hilbert). La forme hermitienne bilinéaire $H(x,y)$ est appelée produit scalaire, dans l'espace préhilbertien qu'elle définit.

Lorsque, dans une question déterminée, on n'a à considérer qu'une seule structure d'espace préhilbertien sur un espace vectoriel donné, on note souvent le produit scalaire sous la forme abrégée (x,y) (parenthèses grasses).

Remarques. 1) Si $H(x,x)$ est positive, mais non strictement positive, l'ensemble G des points où $H(x,x)=0$ est un sous-espace vectoriel de E. En outre, d'après l'inégalité de Schwarz, si $x \in G$, on a $H(x,y)=0$ quel que soit $y \in E$, donc si $x' \equiv x''$ (mod. G), $y' \equiv y''$ (mod. G), $H(x',y')=H(x'',y'')$. Par passage au quotient, on obtient donc à partir de H une fonction $\dot{H}$ sur $(E/G) \times (E/G)$, et on vérifie immédiatement que c'est une forme hermitienne bilinéaire telle que $\dot{H}(x,x)$ soit strictement positive, et définisse sur E/G la structure d'espace normé associée à la structure non séparée d'espace localement convexe définie sur E par $\sqrt{H(x,x)}$.

2) Considérons un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Une forme bilinéaire $Q(x,y)$ définie sur $E \times E$ sera dite symétrique si $Q(x,y)=Q(y,x)$; $Q(x,x)$ est appelée une forme quadratique sur E. On a encore $Q(0,0) = 0$.

La forme quadratique sera dite positive (resp. strictement positive) dans E si $Q(x,x) \geqslant 0$ quel que soit $x \in E$ (resp. si $Q(x,x) > 0$ pour tout $x \neq 0$ de E). On montre comme ci-dessus qu'une forme quadratique positive satisfait à l'inégalité de Schwarz

$$|Q(x,y)|^2 \leqslant Q(x,x)Q(y,y)$$

et que, si elle est strictement positive, $\sqrt{Q(x,x)}$ est une norme sur E (au sens de sa structure vectorielle réelle). L'espace E, muni de cette structure d'espace normé, sera dit espace préhilbertien réel, et espace hilbertien réel s'il est complet (lorsqu'on voudra éviter toute ambiguité, on dira "espace préhilbertin (resp. hilbertien) complexe" au lieu d'"espace préhilbertien (resp. hilbertien"), au sens de la définition 1).

Soit E un espace vectoriel complexe, et H(x,x) une forme hermitienne strictement positive définissant sur E une structure d'espace préhilbertien complexe. Il est immédiat que H(x,x) est aussi une forme quadratique strictement positive, pour la structure vectorielle réelle de E ; elle correspond à la forme bilinéaire symétrique

$$Q(x,y) = \frac{1}{2}(H(x,y)+H(y,x)) = \mathcal{R}(H(x,y))$$

A toute structure d'espace préhilbertien complexe est donc associée de cette manière une structure d'espace préhilbertien réel ; il est clair, en outre, que si l'espace complexe est complet il en est de même de l'espace réel associé.

Les propriétés des espaces préhilbertiens et hilbertiens réels sont tout à fait analogues à celles des espaces préhilbertiens et hilbertiens complexes que nous allons exposer ; nous laisserons au lecteur le soin de formuler explicitement la plupart d'entre elles.

Complétion d'un espace préhilbertien. Soit E un espace préhilbertien, $H(x,y)$ son produit scalaire, $\|x\| = \sqrt{H(x,x)}$ sa norme. L'inégalité de Schwarz entraîne que $H(x,y)$ est continue dans $E \times E$, et même uniformément continue dans toute partie bornée de $E \times E$; en effet on a

$$H(x,y)-H(x_0,y_0) = H(x-x_0,y-y_0)+ H(x-x_0,y_0)+ H(x_0,y-y_0)$$

d'où, si $\|x-x_0\| \leqslant \varepsilon$, $\|y-y_0\| \leqslant \varepsilon$,

$$\left|H(x,y)-H(x_0,y_0)\right| \leqslant \varepsilon^2 + \varepsilon\,(\|x_0\| + \|y_0\|)$$

On voit, plus généralement, que $H(\lambda x, \mu y)$ est fonction continue de (λ, μ, x, y) dans $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times E \times E$, et uniformément continue dans toute partie bornée de cet espace.

Complétons l'espace préhilbertien E ; on sait (chap.III, § 2) que la norme $\|x\|$ se prolonge en une norme (notée encore $\|x\|$) compatible avec la structure d'espace vectoriel topologique de $\hat{E}$. En outre, $H(x,y)$, étant une fonction continue bilinéaire dans le produit du groupe additif de E par lui-même, se prolonge en une application bilinéaire de $\hat{E} \times \hat{E}$ dans $\hat{E}$ (top. gén., chap.III, § 5, th.1). Il est évident que les identités (H_I), (H_{II}) et (H_{III}) se conservent par prolongement, ainsi que la relation $H(x,x) = \|x\|^2$; donc $\hat{E}$ est un espace hilbertien, dont $H(x,y)$, ainsi prolongée, est le produit scalaire.

Projection d'un point sur une variété linéaire fermée. Soit E un espace de Hilbert $H(x,y)$ son produit scalaire, $\|x\| = \sqrt{H(x,x)}$ sa norme. On a les identités

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + H(x,y)+\overline{H(x,y)} \tag{2}$$

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - H(x,y)-\overline{H(x,y)} \tag{3}$$

d'où, en ajoutant membre à membre

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \tag{4}$$

On en conclut que la norme $\|x\|$ est uniformément convexe (chap.III, §4), car les relations $\|x\| = 1$, $\|y\| \leqslant 1$, $\|x+y\| \geqslant 2(1-\delta)$ entraînent d'après (4)

$$\|x-y\|^2 \leqslant 8\delta$$

Il en résulte, comme E est complet, que, si G est une variété linéaire fermée dans E , et x_0 un point quelconque de E , il existe un point $y_0 \in G$ et un seul tel que $y_0 - x_0$ soit égal à la distance de x_0 à G (chap.III, §4,prop.7). Le point y_0 se nomme la projection de x_0 sur G .

Proposition 3. Soit G un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert E . Si x est un point quelconque de E , y sa projection sur G , on a, pour tout $z \in G$,

(5) $$H(y-x,z)=0 \quad .$$

En effet, on a, quel que soit le nombre complexe λ et quel que soit $z \in G$,

$$\|x-y-\lambda z\|^2 \geqslant \|x-y\|^2$$

d'après la définition de la projection, ce qui s'écrit

(6) $$|\lambda|^2 \|z\|^2 - \bar{\lambda} H(x-y,z) - \lambda \overline{H(x-y,z)} \geqslant 0$$

Si z=0, la relation (5) est évidente ; sinon, donnons à λ , dans (6), la valeur $H(x-y,z)/\|z\|^2$; il vient

$$\left|H(x-y,z)\right|^2 \leqslant 0$$

ce qui entraîne (5) .

Formes linéaires continues dans un espace hilbertien. Soit f une forme linéaire continue $\neq 0$ dans l'espace de Hilbert E , et soit G l'hyperplan fermé $f^{-1}(0)$. Il existe un point x n'appartenant pas à G ; soit y sa projection sur G ; on a $H(y-x,z)=0$ quel que soit $z \in G$; il en résulte que $y-x \notin G$, sans quoi on aurait $H(y-x,y-x) = \|y-x\|^2 = 0$ donc $x = y \in G$ contrairement à l'hypothèse.

Posons $x_0 = y - x$; on a donc $f(x_0) \neq 0$. G étant un hyperplan, tout point $z \in E$ peut se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme $z = \lambda x_0 + z'$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $z' \in G$, et on a $f(z) = \lambda f(x_0)$. Mais d'autre part, comme $H(x_0, z') = 0$, on a aussi $H(z, x_0) = \lambda H(x_0, x_0) = \lambda \|x_0\|^2$, d'où l'identité

$$f(z) = H(z, x_0).(f(x_0) / \|x_0\|^2)$$

ou, en posant $y_0 = (\overline{f(x_0)} / \|x_0\|^2).x_0$,

$$f(z) = H(z, y_0) \tag{7}$$

Autrement dit, il existe une application φ du dual E' de E dans E , telle que, quels que soient $x \in E$, $x' \in E'$,

$$B(x, x') = H(x, \varphi(x')) \tag{8}$$

Remarquons maintenant que si on a $H(x, y_0) = 0$ quel que soit $x \in E$, on en tire en particulier $H(y_0, y_0) = 0$, donc $y_0 = 0$, autrement dit φ est une application <u>biunivoque</u> de E' dans E . Comme d'autre part, $x \to H(x, y_0)$ est une forme linéaire continue dans E , d'après (H_I) et la continuité de $H(x,y)$, φ applique E' <u>sur</u> E . Il est clair par ailleurs, d'après (8), que φ est <u>antilinéaire</u>. Enfin, cherchons la <u>norme</u> de $\varphi(x')$; d'après l'inégalité de Schwarz, on a $|H(x, \varphi(x'))| \leqslant \|x\| . \|\varphi(x')\|$, et, pour $x = \varphi(x') / \|\varphi(x')\|$, $H(x, \varphi(x')) = \|\varphi(x')\|$. Or, cette valeur de x a pour norme 1 , donc $\|\varphi(x')\| = \sup_{\|x\|=1} |H(x, \varphi(x'))| = \|x'\|$ d'après la définition de $\|x'\|$ et la relation (8). Finalement :

<u>Théorème 1</u>. <u>L'espace dual d'un espace de Hilbert E est un espace normé anti-isomorphe à E</u> .

On retrouve ainsi en particulier le fait que E est <u>réflexif</u>, qui résulte directement de la prop. 8 du § 4 du chap. III.

Si donc on munit le dual E' de la structure d'espace vectoriel <u>conjuguée</u> de sa structure ordinaire, E' devient <u>isomorphe</u> à E ; aussi <u>identifie</u>-t-on d'ordinaire ces deux espaces. On dira donc que

deux éléments x,y de E sont orthogonaux si $H(x,y)=0$; cette relation est évidemment symétrique d'après (H_{III}). On appellera de même sous-espace vectoriel orthogonal à une partie non vide M de E l'ensemble des $y \in E$ orthogonaux à tous les $x \in M$. Il est clair que ce sous-espace vectoriel est l'image par φ du sous-espace M de E' ; on le désignera encore par $M^{\perp}$ par abus de langage.

Sous-espaces et espaces quotients d'un espace de Hilbert. Soit G un sous-espace vectoriel complexe fermé d'un espace de Hilbert E ; la restriction de $H(x,y)$ à $G \times G$ définit évidemment sur G une structure d'espace préhilbertien qui n'est autre que la structure d'espace normé induite sur G par celle de E ; comme G est complet pour cette structure, c'est donc un espace hilbertien.

De même, si G est un sous-espace vectoriel réel fermé de E , la structure d'espace hilbertien réel de E induit sur G une structure d'espace hilbertien réel.

Considérons le sous-espace $G^{\perp}$ orthogonal à G ; c'est un sous-espace fermé de E . Si x est un point quelconque de E , y sa projection sur G , on a vu que $z=x-y$ est orthogonal à G , donc $x=y+z$, où $y \in G$, $z \in G^{\perp}$, autrement dit E est la somme de G et $G^{\perp}$. Mais par ailleurs, $G \cap G^{\perp} = \{0\}$, car un élément $x \in G$ ne peut être orthogonal à G que si $H(x,x)= \|x\|^2 = 0$. Autrement dit :

Théorème 2. Le sous-espace vectoriel orthogonal à un sous-espace vectoriel fermé G d'un espace de Hilbert E , est supplémentaire de G .

Le sous-espace orthogonal à $G^{\perp}$ est d'ailleurs G , puisque G est fermé, et $z=x-y$ n'est autre que la projection de x sur $G^{\perp}$; en outre, comme y et z sont orthogonaux, on a la relation de Pythagore

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 \qquad (9)$$

Plus généralement, si x et x' sont deux points quelconques de E , y , y' leurs projections sur G , z,z' leurs projections sur $G^\perp$, on a

$$H(x,x') = H(y,y') + H(z,z') \tag{10}$$

Considérons l'espace quotient E/G ; on sait (Alg., chap.II, § 3) que sa structure d'espace vectoriel est isomorphe à celle de $G^\perp$, l'isomorphisme canonique φ appliquant E/G sur $G^\perp$ étant tel qu'à une classe $\dot{x}$ (mod.G) corresponde la projection commune z de tous les points de la classe $\dot{x}$ sur $G^\perp$. Au § 2 du chap.III, nous avons défini une norme $\|\dot{x}\|$ sur E/G , comme égale à $\inf_{x \in \dot{x}} \|x\|$; d'après (9) , on voit qu'on a $\|\dot{x}\| = \|\varphi(\dot{x})\|$; donc φ est un isomorphisme de la structure d'espace normé de E/G , sur celle du sous-espace $G^\perp$ de E . Par ailleurs, si on pose $\dot{H}(\dot{x},\dot{y}) = H(\varphi(\dot{x}),\varphi(\dot{y}))$, il est clair que $\dot{H}$ est une forme hermitienne bilinéaire sur E/G , et que $\dot{H}(\dot{x},\dot{x}) = \|\dot{x}\|^2$, d'après ce qui précède. Donc, tout espace quotient d'un espace de Hilbert est un espace de Hilbert.

Produit d'espaces de Hilbert. Soient E_1 , E_2 deux espaces de Hilbert, H_1,H_2 leurs produits scalaires respectifs. Sur l'espace produit $E = E_1 \times E_2$ (considéré d'abord comme espace vectoriel non topologique) on peut définir une forme bilinéaire hermitienne H , de la manière suivante :

$$H((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = H(x_1,y_1) + H(x_2,y_2)$$

On vérifie en effet immédiatement les axiomes (H_I),(H_{II}),(H_{III}) ; en outre, on a $H((x_1,x_2),(x_1,x_2)) = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$, donc H est strictement positive ; elle définit donc sur E une structure d'espace préhilbertien, donc la norme est $\|(x_1,x_2)\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$. La topologie de cet espace n'est autre que la topologie produit de celles de E_1 et E_2 ; on sait en effet que cette topologie est

compatible avec la norme $\sup(\|x_1\|, \|x_2\|)$ (chap.III, § 2), et on a $\sup(\|x_1\|, \|x_2\|) \leqslant \sqrt{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2} \leqslant 2.\sup(\|x_1\|, \|x_2\|)$. On voit en particulier que E est un espace de Hilbert, qu'on appellera le produit des espaces de Hilbert E_1 et E_2. Si F_1 (resp. F_2) désigne le sous-espace de E formé des couples $(x_1,0)$ (resp. $(0,x_2)$), et isomorphe à l'espace de Hilbert E_1, on voit que F_1 et F_2 sont deux sous-espaces orthogonaux (et supplémentaires) dans E. Réciproquement, la formule (10) montre que, si G est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert E, E est isomorphe au produit des sous-espaces G et $G^\perp$.

Il est bon d'observer que deux sous-espaces fermés supplémentaires F et G, de l'espace de Hilbert E, peuvent être tels que l'application canonique de H sur $F \times G$ ne soit pas un isomorphisme. Considérons en effet ($\S 2$) un espace de Hilbert E dans lequel existe une suite orthogonale et totale (x_n) ; posons $y_n = x_{2n-1} + n x_{2n}$; soit F le sous-espace fermé engendré par la suite (x_{2n}), G le sous-espace fermé engendré par (y_n). Comme $x_{2n-1} = y_n - n x_{2n}$, $F+G=E$; en outre, F est l'ensemble des points de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} x_{2n}$, avec $\sum_{n=1}^{\infty} |c_{2n}|^2 < +\infty$. Montrons que $F \cap G = \{0\}$; sinon, il y aurait une combinaison linéaire $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ ($a_n = 0$ sauf pour un nombre fini de valeurs de n) telle que $\| \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} x_{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \|^2 \leqslant \varepsilon$, ce qui, en tenant compte des relations d'orthogonalité, donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{2n} - n a_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leqslant \varepsilon$$

d'où à fortiori

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leqslant \varepsilon \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_{2n}/n - a_n|^2 \leqslant \varepsilon$$

et par suite

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{2n}/n|^2 \leqslant 4\varepsilon$$

Comme ε est arbitraire, cela implique $c_{2n}=0$ quel que soit n , et montre que F et G sont supplémentaires.

Tout point $x \in E$ s'écrit donc $x=f(x)+g(x)$, où $f(x) \in F$, $g(x) \in G$, f et g étant deux applications vectorielles ; or, f n'est pas continue, car on a $f(x_{2n-1})=-nx_{2n}$, d'où $\| f(x_{2n-1}) \| / \| x_{2n-1} \| = n$, qui est arbitrairement grand.

On définit de même le produit d'un nombre fini d'espaces de Hilbert $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Exercices. 1) Soit E un espace normé, de norme $\|x\|$. Pour qu'il existe une forme hermitienne bilinéaire $H(x,y)$ telle que $H(x,x)=\|x\|^2$, il faut et il suffit que la norme satisfasse à l'identité

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

(montrer que l'on doit avoir nécessairement

$$\mathcal{R}(H(x,y)) = (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)/4$$

$$H(x,y) = \mathcal{R}(H(x,y)) - i\,\mathcal{R}(H(ix,y))$$

puis déduire de l'identité de l'énoncé que

$$\mathcal{R}(H(x+y,z)) + \mathcal{R}(H(x-y,z)) = 2\,\mathcal{R}(H(x,z))$$

en conclure que (H_{II}) est vérifié, puis montrer que $H(\lambda x,y)$ est continue en λ , et en déduire (H_I)).

2) Soit (E_i) une famille d'espaces de Hilbert, F l'espace vectoriel (non topologique) $\prod_i E_i$, E le sous-espace de F formé des points (x_i) tels que $\sum_i \|x_i\|^2 < +\infty$. Pour tout couple $((x_i),(y_i))$ de E , montrer que la somme $\sum_i H_i(x_i,y_i)$ existe, et est une forme hermitienne bilinéaire définissant une structure d'espace de Hilbert sur E .

3) Soit E un espace de Hilbert réel, $Q(x,y)$ la forme bilinéaire symétrique qui le définit. On considère, sur $E \times E$, la structure d'espace vectoriel complexe telle que tout $z \in E \times E$ s'écrive $z=x+iy$, où x et y appartiennent à $E \times \{0\}$ (identifié à E) (chap.I, §2). Montrer qu'on définit sur $E \times E$ une structure d'espac de Hilbert complexe dont la structure réelle induit sur E la structure donnée, en prenant la forme hermitienne bilinéaire telle que $2H(x'+ix'',y'+iy'')=Q(x',y')+Q(x'',y'')+i(Q(x'',y')-Q(x',y''))$

§2. Familles orthogonales et familles biorthogonales dans un espace de Hilbert.

Familles orthogonales dans un espace de Hilbert. **Définition 1.** *Dans un espace de Hilbert E, dont le produit scalaire est noté (x,y), on dit qu'une famille (x_ι) de points est orthogonale si $(x_\iota,x_\kappa)=0$ pour $\iota \neq \kappa$, et $(x_\iota,x_\iota) = \|x_\iota\|^2 \neq 0$.*

Une famille orthogonale (x_ι) sera dite *normale* si $\|x_\iota\| = 1$ pour tout ι ; en remplaçant x_ι par $\lambda_\iota x_\iota$ dans une famille orthogonale, on obtient une famille orthogonale $(\lambda_\iota x_\iota)$, dite *semblable* à (x_ι) ; en remplaçant une famille orthogonale par une famille semblable, on peut toujours supposer qu'elle est *normale* ; c'est ce que nous ferons dans ce qui suit.

On voit que la donnée d'une famille orthogonale (x_ι) dans E revient à la donnée de deux familles biorthogonales (x_ι), (x'_ι), liées par la relation $x_\iota = \varphi(x'_\iota)$, où φ est l'antiisomorphisme du dual de E sur E (§1). Cette particularité est à l'origine des remarquables propriétés des familles orthogonales, que nous allons exposer.

On dira qu'une famille orthogonale est totale si le sous-espace vectoriel fermé qu'elle engendre est identique à E (chap.III, § 5) ; d'après l'expression des formes linéaires dans E (§ 1), pour qu'une famille orthogonale (x_ι) soit totale, il faut et il suffit que les conditions $(y,x_\iota) = 0$ quel que soit ι entraînent $y=0$.

Etant donnée une famille orthogonale (x_ι) et un élément $z \in E$, on dira encore que $c_\iota(z) = (z,x_\iota)$ est le coefficient d'indice ι de z par rapport à la famille (x_ι) ; la famille $\left(\sum_{\iota \in H} c_\iota(z).x_\iota \right)$ des sommes partielles finies de la famille $(c_\iota(z).x_\iota)$ est dite le développement de z suivant la famille orthogonale (x_ι).

Théorème 1. Si (x_ι) est une famille orthogonale et normale dans un espace de Hilbert E , la somme $\sum_\iota |(z,x_\iota)|^2$ est finie pour tout $z \in E$, et on a (inégalité de Bessel)

$$(1) \qquad \sum_\iota |(z,x_\iota)|^2 \leqslant \|z\|^2 .$$

Posons pour simplifier $a_\iota = (z,x_\iota)$; pour toute partie finie H de l'ensemble d'indices, on a $\left(z - \sum_{\iota \in H} a_\iota x_\iota , x_\kappa\right) = 0$ pour tout $\kappa \in H$ d'après les relations d'orthogonalité, donc $\sum_{\iota \in H} a_\iota x_\iota$ est la projection de z sur le sous-espace vectoriel engendré par les x_ι ($\iota \in H$) ; comme $\left\| \sum_{\iota \in H} a_\iota x_\iota \right\|^2 = \sum_{\iota \in H} |a_\iota|^2$, d'après les relations d'orthogonalité, la relation de Pythagore (§ 1, (9)) donne

$$\|z\|^2 - \sum_{\iota \in H} |a_\iota|^2 = \left\| z - \sum_{\iota \in H} a_\iota x_\iota \right\|^2 \geqslant 0$$

ce qui montre que toutes les sommes partielles finies de la famille $(|a_\iota|^2)$ sont $\leqslant \|z\|^2$, d'où le théorème.

Corollaire 1. Pour tout $z \in E$, l'ensemble des indices tel que $(z,x_\iota) \neq 0$ est dénombrable.

Corollaire 2. Quels que soient z,z' dans E , la famille $(c_\iota(z)\overline{c_\iota(z')})$ est addible dans $\mathbb{C}$.

En effet, $|c_\iota(z)\overline{c_\iota(z')}| \leqslant \frac{1}{2}(|c_\iota(z)|^2 + |c_\iota(z')|^2)$.

Théorème 2. Pour que la famille (t_ι) de nombres complexes soit telle que la famille $(t_\iota x_\iota)$ soit (fortement) addible dans E, il faut et il suffit que $\sum_\iota |t_\iota|^2 < +\infty$.

En effet, on a, pour toute partie finie H de l'ensemble d'indices, $\| \sum_{\iota \in H} t_\iota x_\iota \|^2 = \sum_{\iota \in H} |t_\iota|^2$, et le théorème résulte de l'application du critère de Cauchy dans E et dans R.

Proposition 1. Pour tout $z \in E$, la famille $(c_\iota(z).x_\iota)$ est addible dans E, et sa somme est la projection de z sur le sous-espace vectoriel fermé engendré par la famille (x_ι).

L'addibilité de $(c_\iota(z).x_\iota)$ résulte aussitôt des théorèmes 1 et 2 ; si on pose $z' = \sum_\iota c_\iota(z).x_\iota = \sum_\iota (z,x_\iota).x_\iota$, on sait (chap.II, §3) que z'-z est orthogonal au sous-espace vectoriel fermé engendré par les x_ι ; donc z' est la projection de z sur ce sous-espace.

Corollaire. Le sous-espace de $\mathcal{C}^I$ formé des familles $(c_\iota(z))$ des coefficients des points de E relativement à la famille orthogonale $(x_\iota)_{\iota \in I}$, est identique à $\mathcal{L}^2(I, \mathcal{C})$ (chap.III, §2).

Théorème 3. Si la famille orthogonale et normale (x_ι) est totale, on a, pour tout $z \in E$,

$$(2) \qquad z = \sum_\iota c_\iota(z).x_\iota = \sum_\iota (z,x_\iota).x_\iota$$

$$(3) \qquad \|z\|^2 = \sum_\iota |c_\iota(z)|^2 = \sum_\iota |(z,x_\iota)|^2$$

et, quels que soient $z \in E$, $z' \in E$,

$$(4) \qquad (z,z') = \sum_\iota (z,x_\iota)\overline{(z',x_\iota)}$$

(identités de Parseval). Inversement, si (2) ou (3) ont lieu pour tout $z \in E$, la famille (x_ι) est totale.

L'identité (2) est une conséquence immédiate de la prop.1, lorsque (x_ι) est totale ; et (3) en résulte, en tenant compte de la relation de Pythagore.

Quant à (4), elle résulte des relations

$$(z,z') = \Big(\sum_\iota (z,x_\iota)x_\iota z'\Big) = \sum_\iota (z,x_\iota)(x_\iota,z') = \sum_\iota (z,x_\iota)\overline{(z',x_\iota)}$$

Il résulte aussi de la prop.1 que si (2) a lieu pour tout $z \in E$, le sous-espace vectoriel fermé G engendré par (x_ι) est identique à E. De même, si (3) a lieu quel que soit $z \in E$, on a $z=0$ pour tout z orthogonal à G, donc $G=E$.

Orthogonalisation. Théorème 4. Dans un espace de Hilbert E, il existe une famille orthogonale et totale.

Une famille orthogonale (x_ι) étant en correspondance biunivoque avec son ensemble d'indices, on peut supposer que son ensemble d'indices est une partie de E. Soit alors $\mathfrak{D}$ l'ensemble de toutes les familles orthogonales dans E, qu'on peut considérer comme une partie de $\mathfrak{P}(E)$; si on l'ordonne par inclusion, $\mathfrak{D}$ est inductif (Ens. R, § 6) : car, si $\mathfrak{C}$ est une partie totalement ordonnée de $\mathfrak{D}$, et M la réunion des familles orthogonales $X \in \mathfrak{C}$, deux éléments distincts x,y de M appartiennent à une même famille orthogonale $X \in \mathfrak{C}$, donc $(x,y)=0$. D'après le théorème de Zorn, il existe donc dans $\mathfrak{D}$ une famille maximale (x_ι). Cette famille est totale ; sinon, elle engendrerait un sous-espace vectoriel fermé $G \neq E$, et le sous-espace orthogonal $G^\perp$ ne se réduirait donc pas à 0, autrement dit, il existerait $y \neq 0$ orthogonal à G et tel que $\|y\| = 1$. Mais alors, la famille formée de (x_ι) et de y serait orthogonale et normale, contrairement à l'hypothèse que (x_ι) est maximale. C.Q.F.D.

Corollaire. Dans tout sous-espace vectoriel fermé G d'un espace de Hilbert E, il existe une famille orthogonale telle que le sous-espace vectoriel fermé engendré par cette famille soit identique à G.

C'est immédiat, puisque G est un espace de Hilbert (§ 1).

Dans le cas particulier où $G=\overline{H}$, et où H admet une <u>base vectorielle dénombrable</u> (a_n), un processus d'<u>orthogonalisation</u> analogue au processus de <u>biorthogonalisation</u> du chap.II, §5, permet de préciser ce résultat : on pose $x_1=a_1/\|a_1\|$, puis, si les x_i ont été définis pour $1\leqslant i\leqslant n$, de sorte qu'ils forment une famille orthogonale et normale engendrant le même sous-espace A_n que les a_i $(1\leqslant i\leqslant n)$, on définit x_{n+1} de la manière suivante : on a $a_{n+1}\notin A_n$ par hypothèse, donc la <u>projection</u> de a_{n+1} sur $\complement A_n$ n'est pas nulle ; si y_{n+1} est cette projection, on pose $x_{n+1}=y_{n+1}/\|y_{n+1}\|$; il est clair que $(x_i,x_{n+1})=0$ pour $1\leqslant i\leqslant n$, et que le sous-espace vectoriel engendré par $A_n\cup\{x_{n+1}\}$ est identique à A_{n+1}. On voit donc que, dans le cas envisagé, on peut trouver une famille orthogonale engendrant le sous-espace vectoriel H (et engendrant naturellement le sous-espace vectoriel <u>fermé</u> $\overline{H}=G$).

<u>Isomorphismes d'un espace de Hilbert sur un espace de Hilbert</u>. Considérons deux espaces de Hilbert E,F. Conformément aux définitions générales, (<u>Ens</u>. R, §8) une application f de E sur F est un <u>isomorphisme</u> de la structure d'espace hilbertien de E sur celle de F si : 1° f est une application vectorielle biunivoque de E sur F ; 2° quels que soient x,y dans E, on a $(f(x),f(y))=(x,y)$. Il en résulte évidemment que f est un isomorphisme de la structure d'espace <u>normé</u> de E sur celle de F ; en particulier $\|f(x)\|=\|x\|$ quel que soit $x\in E$. Mais inversement, il résulte du th. de Mazur-Ulam (chap.III, §2, th.1) que si $\|f(x)\|=\|x\|$ quel que soit $x\in E$, et $f(ix)=if(x)$, f est un isomorphisme de la structure d'espace normé de E sur celle de F (en particulier f est nécessairement une application vectorielle biunivoque de E sur F) ; et, comme on a

$$\mathcal{R}(x,y) = (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)/4$$

et $$(x,y) = \mathcal{R}(x,y) - i\,\mathcal{R}(ix,y)$$

on en déduit aussitôt que $(f(x),f(y)) = (x,y)$, autrement dit, f est un isomorphisme de la structure d'espace <u>hilbertien</u> de E sur celle de F .

En particulier, l'identité de Parseval (3) montre que, si $(x_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille orthogonale et totale dans un espace de Hilbert E , l'espace $L^2(I,\mathbb{C})$, muni de la norme définie au chap. III, § 2 , est un espace de Hilbert <u>isomorphe à E</u> .

Si (x_ι) est une famille orthogonale et totale dans E , et f un isomorphisme de E sur F , il est clair que $(f(x_\iota))$ est une famille orthogonale et totale dans F . Réciproquement, supposons donnée dans F une famille orthogonale et totale <u>équipotente</u> à (x_ι) ; on peut donc la noter (y_ι), en la supposant rapportée au même ensemble d'indices ; pour tout $z \in E$, on a $\|z\|^2 = \sum_\iota |(z,x_\iota)|^2$, donc la famille $((z,x_\iota).y_\iota)$ est addible dans F , d'après le th.2 ; si on pose $f(z) = \sum_\iota (z,x_\iota).\, y_\iota$, il est clair (puisque (x_ι) et (y_ι) sont totales) qu'on définit une application vectorielle <u>biunivoque</u> de E <u>sur</u> F , telle que $(f(x),f(y)) = (x,y)$ quels que soient x et y dans E , d'après l'identité de Parseval (4) ; donc :

<u>Proposition 2</u>. <u>Si E et F sont deux espaces de Hilbert tels qu'il existe dans E et F deux familles orthogonales et totales équipotentes, E et F sont des espaces de Hilbert isomorphes</u>.

Cette proposition admet une <u>réciproque</u> :

<u>Proposition 3</u>. <u>Si E et F sont deux espaces de Hilbert isomorphes, toute famille orthogonale et totale dans E est équipotente à toute famille orthogonale et totale dans F</u> .

Il suffit évidemment de montrer que, si M et N sont deux familles orthogonales et totales dans E (considérées comme des parties de E), elles sont <u>équipotentes</u>. Or, pour tout $x \in M$, soit A_x la partie de N formée des $y \in N$ tels que $(x,y) \neq 0$. Comme N est totale, et $x \neq 0$, A_x n'est pas vide ; d'autre part, d'après le corollaire 1 du th.1, A_x est dénombrable. Enfin, pour tout $y \in N$, il existe $x \in M$ tel que $(x,y) \neq 0$, puisque M est totale et $y \neq 0$; donc N est la <u>réunion</u> des A_x lorsque x parcourt M. La puissance de N est donc inférieure à celle de $\mathfrak{N} \times M$, donc (en supposant M infini), à celle de M (<u>Ens</u>. R, § 7) ; de même on voit que (si N est infini) la puissance de M est inférieure à celle de N ; M et N sont donc équipotents (<u>Ens</u>. R, § 7).

Le cas où l'un des ensembles M,N est <u>fini</u>, que nous avons laissé de coté, est trivial, puisque, en vertu de (2), une famille orthogonale et totale finie est une <u>base vectorielle</u> de l'espace.

<u>Familles biorthogonales dans un espace de Hilbert</u>. Soit E un espace de Hilbert. Si (x_ι), (x'_ι) sont deux familles biorthogonales dans E et son dual E', et si on pose $\varphi(x'_\iota) = y_\iota$, ($\varphi$ étant l'antiisomorphisme de E' sur E), on a évidemment les conditions

$$(5) \qquad (x_\iota, y_\kappa) = 0 \qquad \text{si} \quad \iota \neq \kappa$$

$$(6) \qquad (x_\iota, y_\iota) = 1$$

Par abus de langage, on dira que deux familles (x_ι), (y_ι) de points de E, qui satisfont à (5) et (6), sont des familles <u>biorthogonales</u> dans E.

A tout $z \in E$ correspondent <u>deux</u> développements relatifs à deux familles biorthogonales dans E, suivant qu'on considère z comme point de E, ou comme image par φ d'un point de E'. Dans le <u>premier développement</u>, les coefficients de z sont, d'après la formule (8) du § 1,

$c_\iota(z)=(z,y_\iota)$, et le développement lui-même est formé des sommes partielles finies de la famille $(c_\iota(z).x_\iota)$.

Dans le second développement, les coefficients de z sont $c'_\iota(z) = (x_\iota,z)$, et le développement est formé des sommes partielles finies de la famille $(c'_\iota(z).y_\iota)$.

Les diverses particularités des familles biorthogonales que nous avons signalées dans les chap.II et III peuvent se produire pour deux familles biorthogonales dans un espace de Hilbert, comme nous allons le voir ; la théorie de ces familles ne présente donc aucune différence notable avec la théorie générale des familles biorthogonales dans les espaces normés.

Ceci montre bien que les remarquables propriétés des familles orthogonales dans un espace de Hilbert tient essentiellement aux relations $x_\iota = y_\iota$ entre les deux familles biorthogonales (confondues) qui la constituent.

Pour donner des exemples de ces diverses circonstances, nous nous placerons, pour plus de simplicité, dans un espace de Hilbert E dans lequel existe une famille orthogonale et totale infinie dénombrable (x_n). On remarquera que, dans ce cas, deux familles biorthogonales dans E sont toujours dénombrables . En effet, d'après le th.3, l'ensemble A des sommes finies de la forme $\sum_{n\in H} r_n x_n$ où les r_n sont des nombres complexes rationnels, est partout dense dans E ; si (y_ι), $(z_\iota$ sont deux familles biorthogonales, on peut toujours supposer $\|z_\iota\| =1$ pour tout ι . Si ι et $\varkappa$ sont deux indices distincts on a $(y_\iota-y_\varkappa , z_\iota) = 1 \leqslant \|y_\iota-y_\varkappa\|$. Or, dans la boule de centre y_ι et de rayon 1/4 , il existe un point $u_\iota \in A$; on a, d'après ce qui précède $u_\iota \neq u_\varkappa$ si $\iota \neq \varkappa$, donc l'ensemble des indices a une puissance inférieure à A , autrement dit, est dénombrable.

Soient donc (y_n), (z_n) deux familles biorthogonales dans E . Montrons d'abord que (y_n) peut être <u>totale</u> sans que (z_n) le soit. Il suffira de prendre

(7) $$y_n = x_0 + x_{n+1} \quad , \quad z_n = x_{n+1} \qquad (n \geqslant 0)$$

La suite (z_n) n'est évidemment pas totale, puisque $(x_0, z_n) = 0$ quel que soit n ; au contraire la suite (y_n) est totale, car tout $x \in E$ s'écrit $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$, avec $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty$ (th.3) ; la relation $(x, y_n) = 0$ donne donc $a_n = -a_0$ quel que soit $n > 0$, et comme $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, $a_0 = 0$, donc $a_n = 0$ quel que soit n , et $x = 0$.

Donnons maintenant un exemple de deux suites biorthogonales (y_n) et (z_n) <u>maximales</u> (chap.II, § 3), mais <u>non totales</u> ; on prendra cette fois

(8) $$y_n = x_0 + x_{n+2} \quad , \quad z_n = x_1 + x_{n+2} \qquad (n \geqslant 0)$$

Montrons qu'il ne peut exister deux points y, z tels que $(y, z_n) = 0$ quel que soit n , $(y_n, z) = 0$ quel que soit n , et $(y, z) \neq 0$. En effet, si $y = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 < +\infty$, on doit avoir $b_1 + b_{n+2} = 0$ pour tout $n \geqslant 0$, et comme $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$, $b_{n+2} = -b_1 = 0$ pour tout $n \geqslant 0$, donc $y = b_0 x_0$; de même, on voit qu'il faut $z = c_1 x_1$; mais alors $(y, z) = 0$, d'où la proposition.

Il est facile d'ailleurs de voir directement que x_0 appartient au sous-espace vectoriel fermé G engendré par les y_n (comme nous l'avons démontré en général au chap.II, § 3) ; en effet

$$\left\| x_0 - \left(\sum_{n=0}^{m-1} y_n \right)/m \right\|^2 = \left(\sum_{n=0}^{m-1} \| x_{n+2} \|^2 \right)/m^2 = 1/m$$

quantité arbitrairement petite. De même, x_1 appartient au sous-espace vectoriel fermé engendré par les z_n .

Si (y_n) est totale, on a vu (chap.III, § 5) qu'on peut transporter sur le sous-espace K de $\mathcal{C}^{\mathcal{N}}$, formé des suites $(c_n(z))$, la structure d'espace normé de E, par l'application biunivoque $z \to c(z)=(c_n(z))$; et cette structure (qui est donc une structure d'espace hilbertien) est la seule structure d'espace de Fréchet plus fine que la topologie induite par la topologie produit de $\mathcal{C}^{\mathcal{N}}$. Mais la norme $\|c(z)\| = \|z\|$ ainsi définie n'est nullement égale à $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z)|^2$; et cette dernière somme peut fort bien être infinie, comme nous allons le voir en prenant pour (y_n) et (z_n) les familles (7).

Si $z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty$, on a en effet $c_n(z)=(z,y_n) = a_0+a_{n+1}$; il suffit de prendre $a_0=1$, $a_{n+1}=0$ $(n \geqslant 0)$ pour réaliser la condition voulue.

Bien entendu, conformément à la prop.6 du § 5 du chap.III, le point z ainsi défini n'appartient pas au sous-espace vectoriel fermé engendré par la suite (z_n).

Enfin, le même exemple montre que la famille $(c_n(z).z_n)$ peut ne pas être addible dans E : elle se réduit en effet alors à $(z_n)=(x_{n+1})$, qui n'est pas addible dans E, d'après le th.2 .

Exercices. 1) Etant donnés n points x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ dans un espace de Hilbert E, on appelle déterminant de Gram de ces n points, le déterminant

$$G(x_1,x_2,\dots,x_n) = \boxed{(x_i,x_j)}\ 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n$$

Montrer que $G(x_1,x_2,\dots,x_n) \geqslant 0$ (si A_{ij} est le mineur de G formé des lignes d'indices $\neq i$ et des colonnes d'indices $\neq j$, établir que

$$G(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})G(x_1,x_2,\dots,x_n) = \left\| \sum_{k=1}^{n} (-1)^k A_{kn} x_k \right\|^2)$$

2) Pour que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forment un système lié, il faut et il suffit que $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ (écrire qu'il existe une combinaison linéaire des x_i, à coefficients non tous nuls, et orthogonale à tous les x_i).

3) La distance d'un point x au sous-espace vectoriel A engendré par n points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ formant un système libre, est égale à

$$\sqrt{G(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) / G(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

(chercher l'expression de x-y, où y est la projection de x sur A).

4) Soit (x_n) une suite de points d'un espace de Hilbert E. Pour que (x_n) soit <u>hétérogonale</u> (chap.II, § 3), il faut et il suffit que, pour tout $p > 0$

$$\sup_n \left(G(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n) / G(x_1, \ldots x_n)\right) < +\infty$$

(utiliser l'exerc. 3).

5) Soit (x_n) une famille orthogonale totale dans un espace de Hilbert E. On considère les familles biorthogonales

$$y_n = x_n - x_{n+1} \quad , \quad z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \qquad (n \geqslant 0)$$

a) Montrer que ces familles sont totales.

b) Trouver des points x de E pour lesquels l'un ou l'autre, ou les deux développements de x ne soient pas addibles.

6) Soient $(x_n), (y_n)$ deux familles biorthogonales dans un espace de Hilbert E. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} (z, y_n) \cdot x_n$ est fortement convergente, la suite (u_n), où

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} (z, y_i)(z, y_j)(x_i, x_j)$$

est convergente.

7) Si A est une partie partout dense d'un espace de Hilbert E, toute famille orthogonale et totale dans E a une puissance inférieure à celle de A.

CHAPITRE V .

EQUATIONS LINÉAIRES ET NON LINEAIRES DANS LES ESPACES NORMÉS.

§ 1. Fonctions vectorielles fortement continues.

Considérons deux espaces normés E et F , et une application vectorielle u de E dans F . Si on désigne par E' et F' les duals topologiques de E et E' respectivement, on peut appliquer à l'étude de l'équation linéaire $u(x)=y_0$ les résultats du chap.II, 2, pourvu qu'on connaisse les propriétés de u relatives aux structures faibles $\sigma(E,E')$ et $\sigma(F,F')$. Nous dirons que u est fortement continue (resp. un homomorphisme fort de E dans F) si elle est continue (resp. un homomorphisme de E dans F), lorsqu'on munit E et F de leurs structures fortes (structures d'espaces normés). D'après la prop.7 du § 2 du chap.II, si u est fortement continue (resp. un homomorphisme fort), u est aussi faiblement continue (resp. un homomorphisme faible) . Mais ici, ces deux propositions admettent des réciproques :

Proposition 1. Si u est faiblement continue dans E , u est fortement continue dans E .

En effet, soit S la boule $\| x \| \leqslant 1$ dans E ; il suffit de montrer que u(S) est bornée dans F . Or, si $y' \in F'$, $y' \circ u$ est une forme linéaire continue dans E , donc $\sup_{x \in S} |y'(u(x))| < +\infty$, ou encore $\sup_{y \in u(S)} |y'(y)| < +\infty$; comme y' est quelconque, on voit que u(S) est faiblement bornée dans F , donc bornée (chap.III, § 4, th.1) .

Proposition 2. Si u est un homomorphisme faible de E dans F , u est un homomorphisme fort de E dans F .

Remarquons d'abord que u est faiblement continue, donc fortement continue dans E d'après la prop.1 . Supposons en premier lieu que u

soit un isomorphisme faible de E dans F . Si u' est la transposée de u , on a alors $u'(F')=E'$ (chap.II, § 2, cor. du th.1). Considérons la boule S : $\|y\| \leqslant 1$ dans F ; pour voir que u est un isomorphisme fort, il suffit de montrer que $^{-1}u(S)$ est bornée dans E . Or, quel que soit $x' \in E'$, il existe $y' \in F'$ tel que $x'=u'(y')$, donc $B(x,x')=B(x,u'(y')) = C(u(x),y')=y'(u(x))$; quel que soit $x \in {}^{-1}u(S)$, on a par suite $|x'(x)| = |y'(u(x))| \leqslant \|y'\|$; donc $^{-1}u(S)$ est faiblement bornée, et par suite bornée dans E (chap.III, § 4, th.1).

Passons au cas général, et soit $K={}^{-1}u(0)$; on peut écrire, d'après la décomposition canonique de u , $u=v \circ \varphi$, où φ est l'application canonique de E sur E/K , et v une application vectorielle biunivoque de E/K sur u(E). On sait (chap.II, § 1), que le dual topologique de E/K est le même, que l'on munisse E/K de la topologie quotient par K de la topologie forte de E ou de la topologie quotient par K de la topologie faible de E ; en outre, la topologie quotient par K de la topologie faible de E , est la topologie faible de l'espace normé E/K (chap.I, § 1, cor.de la prop.4). Donc v est un isomorphisme faible de l'espace normé E/K dans l'espace normé F ; il en résulte que c'est aussi un isomorphisme fort de E/K dans F , donc u est un homomorphisme fort de E dans F .

On peut donc désormais parler d'application vectorielle continue (resp. d'homomorphisme) de E dans F sans avoir à préciser par rapport à quelles topologies sur E et F .

Proposition 3. Soit u un homomorphisme d'un espace normé E dans un espace normé F . Si E est complet, u(E) est fermé dans F . Réciproquement, si E et F sont complets, et si u est une application vectorielle continue de E dans F , telle que u(E) soit fermé dans F , u est un homomorphisme de E dans F .

En effet, si E est complet, et u un homomorphisme de E dans F , u(E) est complet (chap.III, § 1, th.1), donc fermé dans F . Réciproquement, si E et F sont complets et u(E) fermé dans F , u(E) est complet, donc u est un homomorphisme de E sur u(E) (chap.III, § 1, th.1).

La première partie de cette proposition est évidemment inexacte si E n'est pas complet : il suffit de considérer l'application identique u de E dans son complété $\hat{E}$. De même, la seconde partie de la proposition est inexacte si un des deux espaces E,F n'est pas complet (voir chap.III, § 2, exerc.5).

ransposée d'une application vectorielle continue. Proposition 4. La transposée u' d'une application vectorielle continue u d'un espace normé E dans un espace normé F , est fortement et faiblement continue dans F' .

Il suffit de montrer que u' est fortement continue, car on sait déjà (chap.II, § 2, prop.2) que u' est faiblement continue. Or, on a, quels que soient $x \in E$, $y' \in F'$

$$\left|B(x,u'(y'))\right| = \left|C(u(x),y')\right| \leqslant \|u(x)\| . \|y'\| \leqslant \|u\| . \|x\| . \|y'\|$$

ce qui montre que la norme de la forme linéaire u'(y') est $\leqslant \|u\| . \|y'\|$, donc que u' est fortement continue et de norme $\|u'\| \leqslant \|u\|$. On peut d'ailleurs montrer que $\|u'\| = \|u\|$. En effet, quel que soit $x_0 \in E$, il existe $y'_0 \in F'$ tel que $y'_0(u(x_0)) = \|u(x_0)\|$ et $\|y'_0\| = 1$ (chap.III, § 3), donc

$$C(u(x_0),y'_0) = \|u(x_0)\| = \left|B(x_0,u'(y'_0))\right| \leqslant \|x_0\| . \|u'(y'_0)\| \leqslant \|u'\| . \|x_0\|$$

puisque $\|y'_0\| = 1$; donc $\|u(x_0)\| \leqslant \|u'\| . \|x_0\|$, ce qui entraîne $\|u\| \leqslant \|u'\|$

Remarque. Si v est une application vectorielle faiblement continue de F' dans E' , on sait qu'il existe une application vectorielle continue u de E dans F telle que v=u' (chap.II, § 2). Mais il n'en est pas de même nécessairement si v est supposée seulement

2

fortement continue, car il n'y a pas ici d'analogue à la prop.7 du § 2 du chap.II, autrement dit une application v de F' dans E' peut être fortement continue mais non faiblement continue ; cela tient au fait que, si E et F ne sont pas réflexifs, les structures faibles $\sigma(E',E)$, $\sigma(F',F)$ ne sont pas associées aux structures fortes sur E' et F' (chap.III, § 4). Par exemple, supposons E non complet, et soit $F=\hat{E}$ son complété ; on sait que les structures fortes de E' et F' sont isomorphes. Donc l'application identique v de E' sur F' est fortement continue, mais elle n'est pas faiblement continue, car la structure $\sigma(E',E)$ est strictement moins fine que $\sigma(F',F)$ (chap.II, § 1, cor. du th.1).

Proposition 5. Pour que u' soit un homomorphisme fort de F' dans E' , il faut et il suffit que u'(F') soit fortement fermé dans E' .

En effet, comme E' est complet, cette condition équivaut à dire que u'(F') est un sous-espace complet de F' ; la proposition se ramène alors au th.1 du § 1 du chap.III .

Proposition 6. Si E est complet, et si u' est un homomorphisme fort de F' dans E', u' est aussi un homomorphisme faible de F' dans E' .

Soit $G={}^{-1}u'(0)$; si φ est l'application canonique de F' sur l'espace quotient F'/G , on peut écrire $u'=v\circ\varphi$, où v est une application vectorielle biunivoque de F'/G sur u'(F'). Désignons par A l'adhérence $\overline{u(E)}$ (les adhérences forte et faible sont identiques, puisque u(E) est un sous-espace vectoriel de F) ; on a $G=\overline{A}^{\perp}$; il en résulte (chap.III, § 3) que le dual fort A' de l'espace normé A est isomorphe à l'espace normé F'/G . D'autre part la structure faible $\sigma(A',A)$ est isomorphe à la topologie quotient de $\sigma(F',F)$ par G (chap.II, § 1,prop.4) ; on peut donc identifier A' avec l'espace quotient F'/G , au point de vue des

topologies faibles et fortes de ces deux espaces. Comme u' est faiblement continue dans F' , v est faiblement continue dans A' ; soit w son application réciproque (de u'(F') sur A') ; la proposition sera établie si on montre que w est <u>faiblement continue</u>. Or (chap.II, § 2, prop.1), il suffit pour cela de montrer que, si H est un hyperplan faiblement fermé dans A' , $^{-1}w(H)=v(H)$ est <u>faiblement fermé</u> dans u'(F') ; nous allons montrer davantage, à savoir que v(H) est faiblement fermé <u>dans E'</u>. En effet, soit S une boule fermée (fortement et faiblement) dans E' , telle que $S_1=S\cap v(H)$ ne soit pas vide ; par hypothèse, v est un <u>isomorphisme fort</u> de A' sur u'(F'), donc $^{-1}v(S)$ est <u>fortement borné</u> dans A' ; d'autre part, $^{-1}v(S)$ est <u>faiblement fermé</u> dans A' , puisque v est faiblement continue. Donc (chap.III, § 4, th.3), $^{-1}v(S)$ est <u>faiblement compact</u> dans A' , et il en est de même de $^{-1}v(S)\cap H = {}^{-1}v(S_1)$, puisque H est faiblement fermé ; comme v est faiblement continue, $S_1=v(^{-1}v(S_1))$ est faiblement compact dans E' . Comme E est complet, le th. de Banach (chap.III, § 4, th.6) prouve que v(H) est faiblement fermé dans E' .

C.Q.F.D.

2 <u>Remarque</u>. La proposition tombe en défaut si on ne suppose pas E complet. Prenons en effet alors $F=\hat{E}$, et pour u l'application canonique de E dans F ; u' est alors l'application canonique de F' sur E' , qui est un isomorphisme fort, mais non un isomorphisme faible (chap.II, § 1, cor. du th.1).

<u>Proposition 7. Si F est complet, et si u' est un homomorphisme faible de F' dans E' , u' est un homomorphisme fort de F' dans E'</u> .

Conservons les notations de la démonstration de la prop.6 ; l'hypothèse entraîne cette fois que v est un <u>isomorphisme faible</u> de A' sur u'(F') et que v est <u>fortement continue</u> dans A' (prop. 4) ;

v est la transposée d'une application vectorielle continue f de E dans A , et comme v est un isomorphisme faible, $f(E)=A$ (chap.II, § 2, cor. du th.1). Si S est la boule $\|x'\| \leqslant 1$ dans E' , il suffira de montrer que $^{-1}v(S)$ est fortement bornée dans A' pour établir la proposition. Or, pour tout $y \in A$, il existe $x \in E$ tel que $f(x)=y$; donc, pour $y' \in A'$, $B(y,y')=B(f(x),y')=B(x,v(y'))$; si $y' \in {}^{-1}v(S)$, $|B(y,y')| = |B(x,v(y'))| \leqslant \|x\|$; donc $^{-1}v(S)$ est faiblement bornée dans A' . Or, A est fermé (fortement) dans F , qui est complet par hypothèse ; donc A est complet, et par suite, (chap.III, § 4, th.2) $^{-1}v(S)$ est fortement bornée.

C.Q.F.D.

Remarque. La proposition tombe en défaut si on ne suppose pas F complet (exerc. 1).

Proposition 8. Si u est un homomorphisme de E dans F , u' est un homomorphisme fort de F' dans E' .

En effet (chap.II, § 2, th.1), u'(F') est alors faiblement fermé dans E' , donc aussi fortement fermé ; par suite (prop.5), u' est un homomorphisme fort de F' dans E' .

Réunissant tous ces résultats, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 1. Soit u une application vectorielle continue d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F . Les propositions suivantes sont équivalentes :

a) u est un homomorphisme (fort ou faible) de E dans F ;

b) u(E) est (fortement ou faiblement) fermé dans F ;

c) u' est un homomorphisme fort de F' dans E' ;

d) u' est un homomorphisme faible de F' dans E' ;

e) u'(F') est fortement fermé dans E' ;

f) u'(F') est faiblement fermé dans E'.

En effet, a) et b) sont équivalentes d'après la prop.3 ; b) et d) sont équivalentes d'après le th.1 du § 2 du chap.II ; d'après le même théorème, a) et f) sont équivalentes ; c) et d) sont équivalentes d'après les prop. 6 et 7 ; enfin, c) et e) sont équivalentes d'après la prop.5 .

Exercice. Soit E l'espace $L^2(I, \mathbb{C})$, F le sous-espace de $\mathcal{L}_0(I, \mathbb{C})$ (chap.III, § 3, exerc.2 et 2 bis) ayant même support (partie de $\mathbb{C}^I$) que $L^2(I, \mathbb{C})$. Soit u l'application identique de E sur F ; montrer que u est continue, mais non un isomorphisme, et que u' est un isomorphisme faible de F' dans E' , mais non un isomorphisme fort.

§ 2. La méthode des approximations successives.

La méthode que nous allons développer dans ce paragraphe permet essentiellement d'étudier des équations "suffisamment voisines" d'équations linéaires : si, pour certaines valeurs de y , l'équation linéaire $y=u(x)$ a une solution, on peut en conclure que, pour des valeurs de y convenablement choisies, l'équation $y=u(x)+v(x)$ aura encore une solution, pourvu que v soit une fonction "assez petite" par rapport à u , en un sens que nous allons préciser.

Soient E et F deux espaces de Banach et u un homomorphisme de E sur F ; cette hypothèse revient à supposer que u est une application vectorielle continue et que $u(E)=F$, autrement dit que l'équation $y=u(x)$ a au moins une solution pour tout $y \in F$ (§ 1, prop. 3).

D'après la définition d'un homomorphisme (Top.gén.,chap.III, § 2), l'image par u de tout <u>voisinage</u> d'un point de E est un <u>voisinage</u> d'un point de F .

Soit a un point de E , et $b=u(a)$; supposons définie, dans un voisinage V de a , une application v de V dans F , satisfaisant aux conditions suivantes :

A) $$m = \sup_{x \in V} \|v(x)\| < +\infty$$

B) il existe $k > 0$ tel que, quels que soient x et x' dans V ,

(1) $$\|v(x)-v(x')\| \leqslant k \|x-x'\|$$ (<u>condition de Lipschitz</u>).

<u>Théorème 1</u>. <u>Si les nombres m et k sont assez petits, l'image de v par l'application</u> $x \to u(x)+v(x)$, <u>est un voisinage de b</u> .

Autrement dit, pour tout y assez voisin de $b=u(a)$, l'équation $y=u(x)+v(x)$ aura une solution voisine de a .

Pour démontrer ce théorème, nous allons chercher à définir une suite (x_n) $(n \geqslant 0)$ de points de V satisfaisant aux "équations approchées"

(2) $$u(x_0) = y$$

(3) $$u(x_n) = y - v(x_{n-1}) \qquad (n > 0)$$

et <u>convergeant</u> vers un élément x de V . Comme la condition (1) entraîne la continuité de v dans V , on aura, en passant à la limite dans (3) , $u(x)=y-v(x)$, d'où le théorème.

Nous pouvons supposer que V est une <u>boule</u> fermée : $\|x-a\| \leqslant r$. Soit G le sous-espace vectoriel fermé $u^{-1}(0)$ de E , et φ l'application canonique de E sur E/G ; d'après l'hypothèse, on peut écrire $u=w\circ\varphi$, où w est un <u>isomorphisme</u> de E/G <u>sur</u> F . Si $\frac{1}{\rho}$ est la <u>norme de l'application réciproque de w</u> , on a donc $\|w(\dot{x})\| \geqslant \rho \|\dot{x}\|$ quel que soit $\dot{x} \in E/G$; d'après la définition de la norme dans E/G (chap.III, § 2) ,

cela signifie que l'on a $\| u(x) \| \geqslant \rho \cdot \inf_{z \in x+G} \| z \|$; autrement dit, ε étant un nombre >0 arbitrairement petit, pour tout $y \in F$, il existe $z \in E$ tel que $u(z)=y$ et que $\| z \| \leqslant \| y \| /(\rho-\varepsilon)$. En particulier, $u(V)$ contient une boule S de centre b et de rayon $(\rho-\varepsilon)r$.

Nous supposerons donc d'abord $y \in S$, pour qu'il existe un point $x_o \in V$ satisfaisant à (2). D'une façon générale, supposons les (x_i) définis pour $i \leqslant n$, et satisfaisant à (2) et (3) ; le point x_{n+1} devra satisfaire à la relation

$$u(x_{n+1}-x_n) = v(x_{n-1})-v(x_n)$$

Il existera donc un x_{n+1} satisfaisant à cette relation, et tel que

$$\| x_{n+1}-x_n \| \leqslant \| v(x_{n-1})-v(x_n) \| /(\rho-\varepsilon) \leqslant (k/(\rho-\varepsilon)) \cdot \| x_n-x_{n-1} \| .$$

Si en outre, $\| x_{n+1}-a \| \leqslant r$, $v(x_{n+1})$ sera défini ; la récurrence pourra se poursuivre, et on aura, pour tout $n \geqslant 0$

$$\| x_{n+1}-x_n \| \leqslant (k/(\rho-\varepsilon))^n \cdot \| x_1-x_o \| \qquad (4)$$

Comme E est <u>complet</u>, et V <u>fermé</u>, il en résulte que, si on a

$$k < \rho \qquad (5)$$

on pourra supposer choisi ε de sorte que $k/(\rho-\varepsilon)<1$, et alors la série de terme général $(x_{n+1}-x_n)$ converge absolument, donc la suite (x_n) est convergente. Mais pour pouvoir tirer cette conclusion, il faut qu'on soit assuré que $x_n \in V$ quel que soit n. Or, on a

$$u(x_1-x_o) = -v(x_o)$$

donc x_1 est choisi de sorte que $\| x_1-x_o \| \leqslant \| v(x_o) \| / (\rho-\varepsilon) \leqslant m/(\rho-\varepsilon)$.

Si on suppose tous les x_n définis, on aura donc

$$\| x_n-a \| \leqslant \| x_o-a \| + \sum_{i=0}^{n-1} \| x_{i+1}-x_i \| \leqslant \| x_o-a \| + \sum_{i=0}^{\infty} \| x_{i+1}-x_i \| \leqslant \| x_o-a \| + m/(\rho-k-\varepsilon)$$

Pour avoir $\| x_n-a \| \leqslant r$, il suffit que m satisfasse à la condition

$$m < r(\rho-k) \qquad (6)$$

On peut alors choisir ε tel que $m/(\rho-k-\varepsilon)<r$; et on pourra prendre x_0 tel que $\|x_0-a\|+m/(\rho-k-\varepsilon)\leqslant r$, pourvu qu'on ait choisi y de sorte que

$$\|y-b\|\leqslant(r-m/(\rho-k-\varepsilon))(\rho-\varepsilon) \tag{7}$$

Les calculs précédents montrent alors que, si ces hypothèses sont toutes remplies, les x_n déterminés par récurrence appartiennent bien tous à V , ce qui achève la démonstration. On voit en outre que la condition "m et k suffisamment petits" de l'énoncé est précisé par les deux inégalités (5) et (6) .

La boule (7) ne contient pas nécessairement le point $u(a)+v(a)=b+v(a)$; pour qu'elle soit un voisinage de ce point, il suffira de supposer que $m<(r-m/(\rho-k-\varepsilon))(\rho-\varepsilon)$, ce qui sera rempli pour un ε convenable si on a

$$m<r\rho(\rho-k)/(2\rho-k)<r(\rho-k) \tag{6'}$$

Lorsque u est un <u>isomorphisme</u> de E <u>sur</u> F , le théorème 1 admet un important complément :

<u>Théorème 2</u>. <u>Si u est un isomorphisme de E sur F , et si k est assez petit, l'application f définie par</u> $f(x)=u(x)+v(x)$ <u>est un homéomorphisme de V sur</u> $f(V)$.

En effet, supposons vérifiée la condition (5) ; pour deux points quelconques x,x' de V , on a

$$f(x')-f(x)=u(x')-u(x)+v(x')-v(x)=u(x'-x)+v(x')-v(x)$$

Or $\|u(x'-x)\|\geqslant\rho\|x'-x\|$ et $\|v(x')-v(x)\|\leqslant k.\|x'-x\|$, donc

$$\|f(x')-f(x)\|\geqslant(\rho-k)\|x'-x\|$$

ce qui montre que f est une application <u>biunivoque</u> et <u>bicontinue</u> de V sur $f(v)$.

Remarque. Ce théorème se généralise comme suit : soit E un espace métrique, d sa métrique, F un espace normé, u et v deux applications de E dans F telles que, pour deux points quelconques x,x' de E , on ait $\| u(x')-u(x) \| \geqslant \rho.d(x,x')$ et $\| v(x')-v(x) \| \leqslant k.d(x,x')$; si $k < \rho$, l'application $x \to u(x)+v(x)$ est une application biunivoque de E dans F ; elle est bicontinue si en outre u est continue.

Applications aux homomorphismes. Un cas particulier important des théorèmes 1 et 2 est celui où le voisinage V est l'espace E tout entier ; alors, la condition (6) sur m disparaît, ainsi que la restriction (7) des valeurs de y (on peut en effet déterminer les x_n par récurrence pour tout $y \in F$, puisque v est défini dans E tout entier) ; autrement dit, $x \to u(x)+v(x)$ est alors (moyennant l'unique condition (5)) une application de E sur F transformant tout ensemble ouvert en ensemble ouvert, lorsque u est un homomorphisme de E sur F , et un homéomorphisme de E sur F lorsque u est un isomorphisme de E sur F . Plus particulièrement, si v est aussi une application vectorielle continue de E dans F , on a la proposition suivante :

Proposition 1. Soit u un homomorphisme (resp. un isomorphisme) de E sur F ; si v est une application vectorielle continue de E dans F , de norme assez petite, u+v est un homomorphisme (resp. un isomorphisme) de E sur F .

La restriction sur la norme de v peut être précisée, d'après (5) de la façon suivante : si $G = u^{-1}(0)$, et si $1/\rho$ est la norme de l'application réciproque de l'isomorphisme $\mathring{u}$ de E/G sur F , associé à u , il suffit que $\| v \| \leqslant \rho$.

Nous allons maintenant généraliser cette proposition dans certains cas aux homomorphismes et isomorphismes de E dans F .

Proposition 2. Soit u un isomorphisme de E dans F , tel que l'espace quotient F/u(E) ait un nombre fini p de dimensions. Si v est une application vectorielle continue de E dans F , de norme assez petite, f=u+v est un isomorphisme de E dans F , tel que F/f(E) ait encore p dimensions.

Comme u est un isomorphisme de E dans F , il existe $\rho > 0$ tel que $\| u(x')-u(x) \| \geqslant \rho \| x'-x \|$ quels que soient x et x' dans E (il suffit de prendre pour $1/\rho$ la norme de l'application réciproque de u (application de u(E) sur E)) ; le raisonnement du th.2 montre alors que si la norme k de v satisfait à $k < \rho$, f est un isomorphisme de E dans F .

D'autre part, soit G un sous-espace vectoriel à p dimensions, supplémentaire de u(E) . G est un sous-espace normé de F , isomorphe à F/u(E) (chap.I, § 3, rpop.6) ; et tout $z \in F$ peut s'écrire d'une seule manière $z=\varphi(z)+\psi(z)$, où φ est une application vectorielle continue de F sur u(E) , ψ une application vectorielle continue de F sur G . On va voir que si la norme de v est assez petite, G et f(E) sont supplémentaires, ce qui démontrera la proposition.

Considérons, pour tout $y \in u(E)$, le point $\varphi(v(u^{-1}(y)))=g(y) \in u(E)$; g est une application vectorielle continue de u(E) dans lui-même, et si h est la norme de φ , on a $\| g \| \leqslant hk/\rho$; donc, d'après la prop.1, si $k < \rho/h$, $y \to y+g(y)$ est un isomorphisme de u(E) sur lui-même ; or $y+g(y)=\varphi(y)+\varphi(v(u^{-1}(y)))=\varphi(f(u^{-1}(y)))$. Tout $z \in F$ s'écrit $z=\varphi(z)+\psi(z)$; posons $y=\varphi(z) \in u(E)$; il existe $y' \in u(E)$ tel que $y=\varphi(f(u^{-1}(y'))) = f(u^{-1}(y'))-\psi(f(u^{-1}(y')))$, donc $z=f(u^{-1}(y'))+\psi(z-f(u^{-1}(y')))$, ce qui établit que $F=f(E)+G$; d'autre part, on ne peut avoir $\varphi(f(u^{-1}(y)))=0$

que si $y=0$, autrement dit $G \cap f(E)=\{0\}$, ce qui démontre que $f(E)$ et G sont supplémentaires.

Théorème 3. Soit u un homomorphisme de E dans F, tel que $H=u^{-1}(0)$ soit un sous-espace vectoriel à un nombre fini q de dimensions, et que l'espace quotient $F/u(E)$ ait un nombre fini p de dimensions. Si v est une application vectorielle continue de E dans F, de norme assez petite, $f=u+v$ est un homomorphisme de E dans F ; $f^{-1}(0)$ est un sous-espace vectoriel de E à un nombre fini r de dimensions, et on a $r \leqslant q \leqslant p+r$; enfin, $F/f(E)$ a $p-(q-r)$ dimensions.

En effet, il existe un sous-espace vectoriel fermé K de E, supplémentaire de H (chap.I, § 4, cor. 3 de la prop. 1). La restriction u_K de u à K est un isomorphisme de K sur $u(E)$, puisque K est isomorphe à E/H ; donc, si la norme de v est assez petite, f_K est un isomorphisme de K dans F, d'après la prop. 2, et $F/f(K)$ a p dimensions. Les sous-espaces K et $f^{-1}(0)=G$ ont une intersection réduite à 0 (f_K étant biunivoque), donc G a un nombre fini de dimensions $r \leqslant q$. Soit L un espace à $q-r$ dimensions, supplémentaire de $G+K$; la restriction de f à $K+L$ est biunivoque ; la restriction de f à K est un isomorphisme de K dans F d'aprs ce qu'on a vu ci-dessus, et la restriction de f à L est aussi un isomorphisme de L dans F, puisque L a un nombre fini de dimensions ; donc comme $K+L$ est isomorphe à $K \times L$ (chap.I, § 3, prop. 6) la restriction de f à $K+L$ est un isomorphisme de $K+L$ dans F, et $f(K+L)=f(E)$ est somme directe de $f(K)$ et d'un sous-espace à $q-r$ dimensions. Donc $q-r \leqslant p$, et $F/f(E)$, qui est isomorphe à $(F/f(K))/(f(E)/f(K))$, a $p-(q-r)$ dimensions.

Remarque. On peut songer à étendre les deux résultats précédents en supprimant les hypothèses relatives aux nombres de dimensions finis. La première partie de la démonstration de la prop.2 montre, sans aucune hypothèse sur E et F , que $u+v$ est encore un isomorphisme de E dans F si la norme de v est assez petite ; quant à la seconde partie, elle est encore valable pourvu qu'il existe un sous-espace vectoriel G de F , supplémentaire de $u(E)$, et tel que F soit isomorphe au produit $G \times u(E)$; c'est ce qui aura toujours lieu, par exemple, si F est un espace de Hilbert (chap.IV, § 1), en prenant pour G le sous-espace vectoriel orthogonal à $u(E)$. Dans ces conditions, la démonstration de la prop.2 montre que $F/u(E)$ et $F/f(E)$ sont tous deux isomorphes à G , pourvu que la norme de v soit assez petite.

Il en résulte que, dans les mêmes hypothèses sur F , on peut dans le th.3, supprimer les restrictions sur le nombre de dimensions de $F/u(E)$, en conservant celles sur $H=\tilde{u}^{1}(0)$. Nous allons voir en outre qu'on peut encore supprimer ces dernières, en nous plaçant, pour simplifier, dans le cas où E est un espace de Hilbert (le lecteur verrait aisément quelles hypothèses plus générales permettraient de faire un raisonnement analogue à celui qui suit). Il suffi alors de montrer que si K est choisi de façon convenable, et si la norme de v est assez petite, K est isomorphe à E/K , et que le sous-espace $K+G$ (somme directe) est isomorphe au produit $K \times G$ (notations du th.3). Pour le premier point, il suffit de prendre pour K le sous-espace orthogonal à H (chap. IV, § 1) ; pour tout $z \in E$ on peut alors écrire $z=\varphi(z)+\psi(z)$, où $\varphi(z)$ est la projection de z sur H , $\psi(z)$ celle de z sur K , φ et ψ étant continues. Soit $G'=\varphi(G)$ la projection de G sur H ; nous allons montrer que si $\|v\|$

est assez petite, l'application $x \to \varphi(x)$ de G sur G' est un isomorphisme. En effet, pour tout $x \in G$, on a $u(x)+v(x)=0$ par hypothèse, et en outre $u(\varphi(x))=0$ d'après la définition de H; donc $v(x)=-u(\psi(x))$. Or, u, restreinte à K, est un isomorphisme de K dans F ; donc il existe un nombre $\rho > 0$ tel que $\|u(\psi(x))\| \geqslant \rho . \|\psi(x)\|$, d'où $\|\psi(x)\| \leqslant (\|v\|/\rho) . \|x\|$; si on suppose $\|v\| < \rho$, on aura donc $\|\varphi(x)\| = \|x-\psi(x)\| \geqslant (1-\|v\|/\rho)\|x\|$ d'où la proposition. Soit maintenant z un point quelconque de K+G ; on peut écrire $z=x+y$, avec $x \in G$, $y \in K$, d'où $\varphi(x)=\varphi(z)$, et par suite, si θ est l'isomorphisme de G' sur G, réciproque de φ, on a $x=\theta(\varphi(z))$, ce qui montre que x est fonction continue de z, et suffit par suite à prouver l'isomorphisme de K+G et de $K \times G$. La fin du raisonnement est la même que dans le th.3 ; on prendra pour L le sous-espace orthogonal à K+G. On peut donc dire dans ce cas que, si la norme de v est assez petite, u+v est un homomorphisme de E dans F, $f^{-1}(0)$ est isomorphe à un sous-espace de $u^{-1}(0)$ et F/f(E) est isomorphe à un espace quotient de F/u(E).

§ 3. Applications vectorielles continues d'un espace normé dans lui-même.

Les propriétés démontrées au paragraphe précédent s'appliquent en particulier lorsque F=E. Un cas particulièrement intéressant est celui où l'application u est l'application identique. Le th.2 du § 2 montre alors que $x \to x+v(x)$ sera un homéomorphisme d'un voisinage W d'un point $a \in E$ sur un voisinage de a, pourvu que v soit définie dans une boule $\|x-a\| \leqslant r$, y satisfasse aux conditions A) et B) du § 2, les constantes r,m et k étant assujetties aux inégalités

(1) $k < 1$

(2) $m < r(1-k)$

En particulier, si a=0, on a la proposition suivante :

Proposition 1 ("théorème du point fixe"). Si, dans la boule $\|x\| \leqslant r$, l'application v satisfait aux conditions A) et B), les constantes k et m vérifiant (1) et (2), il existe un point x_0 et un seul tel que $\|x_0\| \leqslant r$, et $x_0 = v(x_0)$.

En supposant toujours que u est l'application identique de E, et v une application vectorielle continue de E dans lui-même, nous allons maintenant abandonner l'hypothèse que la norme de v est très petite, en la remplaçant par des hypothèses plus larges. Nous désignerons par v^n la $n^{ème}$ itérée de v ($v^n = v \circ v^{n-1}$).

Proposition 2. Soit v une application vectorielle continue de E dans lui-même, telle que $\sup_{n \in \mathcal{N}} \|v^n\| < +\infty$; si on pose $u(x) = x - v(x)$, l'intersection des sous-espaces $H = u^{-1}(0)$ et $K = \overline{u(E)}$ est réduite à 0 (autrement dit, leur somme est directe).

En effet, soit x un point de $H \cap K$; on a d'une part $x = v(x)$, et d'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in E$ tel que $\|x - (y - v(y))\| \leqslant \varepsilon$ Par hypothèse, il existe un nombre k tel que $\|v^n\| \leqslant k$ quel que soit n. On a donc $\|v^n(x) - (v^n(y) - v^{n+1}(y))\| \leqslant k\varepsilon$; mais $v^n(x) = x$ quel que soit n, donc, en ajoutant membre à membre les inégalités correspondant à $0 \leqslant n \leqslant p-1$, il vient

$$\|px - (y - v^p(y))\| \leqslant (1 + k(p-1))\varepsilon$$

d'où

$$\|x - (y - v^p(y))/p\| \leqslant (k - (k-1)/p)\varepsilon < k\varepsilon$$

Or $\|v^p(y)\| \leqslant k\|y\|$, donc, en faisant tendre p vers $+\infty$, il vient

$$\|x\| \leqslant k\varepsilon$$

et comme ε est arbitraire, x=0, ce qui démontre la proposition.

Remarques. 1) Si on suppose en outre que u est un homomorphisme de E dans E , ou, ce qui revient au même (§ 1, th. 1) que u(E) est fermé dans E , on peut remplacer l'hypothèse $\sup \|v^n\| < +\infty$, par l'hypothèse moins restrictive

$$\lim_{n \to \infty} \|v^n\| / n = 0$$

dans l'énoncé de la prop. 2 . En effet, on a alors K=u(E) ; si $x \in H \cap K$, il existe $y \in E$ tel que $x = y - v(y)$, d'où aisément $nx = y - v^n(y)$, $x = (y - v^n(y))/n$, et en faisant tendre n vers $+\infty$, l'hypothèse sur v entraîne x=0 .

2) L'hypothèse $\sup \|v^n\| < +\infty$ est évidemment remplie si $\|v\| \leqslant 1$, puisqu'alors $\|v^n\| \leqslant 1$ quel que soit n ; le seul cas intéressant alors est celui où $\|v\| = 1$, car on sait d'après le th. 2 du § 2 que, si $\|v\| < 1$, u est un isomorphisme de E sur lui-même, et la prop. 2 devient triviale.

Considérons maintenant la transposée v' de v ; la transposée u' de u est l'application $x' \to x' - v'(x')$; on notera que $\|v'\| = \|v\|$ (§ 1), et par suite $\|v'^n\| = \|v^n\|$.

Proposition 3. Si $\sup \|v^n\| < +\infty$, et si on désigne par p et q les nombres de dimensions respectifs des espaces $u^{-1}(0)$ et $u'^{-1}(0)$, on a $p \leqslant q$.

Il doit être sous-entendu dans cet énoncé que $p = +\infty$ (resp. $q = +\infty$) si $u^{-1}(0)$ (resp. $u'^{-1}(0)$) a une infinité de dimensions.

Pour démontrer cette proposition, remarquons que E/K ($K = \overline{u(E)}$) a au moins p dimensions, donc son dual a aussi au moins p dimensions ; or, ce dual est isomorphe au sous-espace $K^\perp$ de E' orthogonal à K (chap. III, § 3), et d'autre part, $K^\perp$ n'est autre que $u'^{-1}(0)$ (chap. II, § 2, prop. 3), d'où la proposition.

Corollaire. Si E est réflexif, on a p=q .

En effet, E est alors le dual fort de E' , donc on peut intervertir les rôles de E et E' dans la prop.3, ce qui donne $q \leqslant p$.

Applications vectorielles ergodiques. Définition 1. On dit qu'une application vectorielle continue u d'un espace de Banach E dans lui-même est ergodique si : 1° $\sup_n \|u^n\| < +\infty$; 2° pour tout $x \in E$, la suite des points $x_n = (\sum_{p=1}^{n}{}' u^p(x))/n$ a une valeur d'adhérence faible.

Remarque. Si E est réflexif, la première de ces conditions entraîne la seconde, car si $\|u^n\| \leqslant k$ pour tout n , on a $\|x_n\| \leqslant k\|x\|$ quel que soit n , et on sait (chap.III, § 4, th.8) que tout ensemble borné dans E est alors faiblement relativement compact.

On notera que, si u^k est ergodique pour un entier $k > 0$, u est ergodique ; en effet, tout n peut s'écrire $n = pk+h$, avec $h < k$; si on pose $\alpha = \sup_m \|u^{km}\|$, et $\beta = \sup_{0 \leqslant h < k} \|u^h\|$, on aura $\|u^n\| \leqslant \alpha\beta$ quel que soit n ; en outre, si y est valeur d'adhérence faible de la suite des $z_n = (\sum_{p=1}^{n} u^{pk}(x))/n$, $y+u(y)+\ldots+u^{k-1}(y)$ est valeur d'adhérence faible de la suite des $x_n = (\sum_{p=1}^{n} u^p(x))/n$.

Théorème 1 (théorème ergodique). Soit u une application ergodique d'un espace de Banach E dans lui-même ; pour tout $x \in E$, la suite des points $x_n = (\sum_{p=1}^{n} u^p(x))/n$ converge fortement vers un point $y = u_1(x)$; u_1 est un homomorphisme de E dans E ; on a $u \circ u_1 = u_1 \circ u = u_1 \circ u_1 = u_1$ et $u_1(E)$ est l'ensemble des $x \in E$ tels que $x = u(x)$.

Il existe par hypothèse un point y qui est valeur d'adhérence faible de la suite (x_n) ; nous allons voir que y est limite forte de (x_n).

Soit $v(x) = x - u(x)$ et $K = \overline{v(E)}$; montrons d'abord que $y - x \in K$.

Sinon, il existerait une forme linéaire $x' \in E'$ telle que $B(y-x,x')=1$ et $B(z,x')=0$ pour tout $x \in K$. Mais on a pour $n \geqslant 0$, $u^n(x)-u^{n+1}(x)=v(u^n(x)) \in K$, donc $B(u^n(x),x')=B(u^{n+1}(x),x')$, ce qui donne $B(x_n,x')=B(x,x')$ quel que soit n ; par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n tel que $|B(y-x_n,x')| \leqslant \varepsilon$, donc $|B(y-x,x')| \leqslant \varepsilon$, ce qui donne $B(y-x,x')=0$ contrairement à l'hypothèse.

En second lieu, montrons que $y \in {}^{-1}v(0)$, autrement dit que

(4) $$u(y) = y .$$

En effet, on a $\| u(x_n)-x_n \| = \| u^{n+1}(x)-u(x) \| /n \leqslant 2a \| x \| /n$, si $\| u^n \| \leqslant a$ quel que soit n. On sait que u est faiblement continue (chap. II, § 2, prop. 7) : soit u' sa transposée. Quels que soient les points $x'_i \in E'$ en nombre fini, il existe des n arbitrairement grands tels que l'on ait $|B(y-x_n,x'_i)| \leqslant \varepsilon$ et $|B(y-x_n,u'(x'_i))| \leqslant \varepsilon$, autrement dit $|B(u(y)-u(x_n),x'_i)| \leqslant \varepsilon$, et par suite

$$|B(u(y)-y-(u(x_n)-x_n),x'_i)| \leqslant 2\varepsilon$$

d'où

$$|B(u(y)-y,x'_i)| \leqslant 2\varepsilon + (2a \| x \|/n) . \| x'_i \|$$

et on peut prendre n assez grand pour que $|B(u(y)-y,x'_i)| \leqslant 3\varepsilon$ pour tous les x'_i ; donc $u(y)-y$ appartient à tout voisinage faible de 0 dans E, ce qui démontre (4).

Si on pose $z=x-y$, on a $u^n(z)=u^n(x)-y$, donc, si $z_n=(\sum_{p=1}^{n} u^p(z))/n$, $z_n=x_n-y$; tout revient à démontrer que la suite (z_n) converge fortement vers 0. Or, comme $z \in K$, il existe $w \in E$ tel que $\| z-(w-u(w)) \| \leqslant \varepsilon$, d'où $\| u^p(z)-(u^p(w)-u^{p+1}(w)) \| \leqslant a\varepsilon$ d'où, en ajoutant membre à membre, $\| z_n-(w-u^n(w))/n \| \leqslant a\varepsilon$, ce qui donne $\| z_n \| \leqslant a(2 \| w \| /n + \varepsilon) \leqslant 2a\varepsilon$ lorsque n est assez grand, donc z_n tend fortement vers 0, et par suite x_n tend fortement vers y.

Comme $\|x_n\| \leqslant a\|x\|$ quel que soit n , on a aussi $\|y\| \leqslant a\|x\|$, donc si on pose $y=u_1(x)$, u_1 est continue ; pour tout $x \in \overset{-1}{v}(0)$, $u_1(x)=x$, donc, d'après (4), $u_1(E)=\overset{-1}{v}(0)$, qui est fermé, donc u_1 est un homomorphisme de E dans E ; cela montre aussi que $u_1 \circ u_1 = u \circ u_1 = u_1$; d'autre part, on a $u_1(u(x))=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{p=2}^{n+1} u^p(x)\right)/n = \lim_{n\to\infty} u(x_n)=u(u_1(x))=u_1(x)$, ce qui achève la démonstration.

Il résulte de la démonstration du th.1 que, si u est ergodique, E est somme directe des sous-espaces fermés $\overset{-1}{v}(0)$ et $K=\overline{v(E)}$, et tel que l'application canonique de E sur le produit $K \times \overset{-1}{v}(0)$ soit un isomorphisme. Inversement, si E est somme directe de $\overset{-1}{v}(0)$ et de K et si $\sup_n \|u^n\| < +\infty$ u est ergodique. En effet, pour tout $x \in E$, on peut écrire $x=u_1(x)+u_2(x)$, avec $u_1(x) \in \overset{-1}{v}(0)$, $u_2(x) \in K$. On a d'après la définition de v , $u(u_1(x))=u_1(x)$, donc $u^p(u_1(x))=u_1(x)$. D'autre part, comme $u_2(x) \in K=\overline{v(E)}$, il existe $w \in E$ tel que $\|u_2(x)-(w-u(w))\| \leqslant \varepsilon$, d'où $\|u^p(u_2(x))-(u^p(w)-u^{p+1}(w))\| \leqslant a\varepsilon$, si $\|u^p\| \leqslant a$ quel que soit p ; on en déduit immédiatement que la suite (x_n) converge fortement vers $u_1(x)$.

En particulier, on a, par le même raisonnement que pour la prop.3 , la proposition suivante :

Proposition 4. Soit u une application ergodique d'un espace de Banach E dans lui-même, et soit $v(x)=x-u(x)$; les nombres de dimensions des espaces $\overset{-1}{v}(0)$ et $\overset{-1}{v'}(0)$ sont égaux.

De façon plus précise, on peut dire que $\overset{-1}{v'}(0)$ est isomorphe au dual de $\overset{-1}{v}(0)$.

Le critère suivant permet parfois de montrer qu'une application vectorielle continue u est ergodique :

Proposition 5. Soit u une application vectorielle continue d'un espace de Banach E dans lui-même satisfaisant aux conditions suivantes : 1° $\sup_n \| u^n \| = a < +\infty$; 2° il existe un entier k et une application vectorielle continue w de E dans lui-même telle que $\|u^k - w\| = a < 1$, et que l'image par w de tout ensemble borné dans E soit faiblement relativement compacte. Dans ces conditions, u est ergodique.

Il suffit de considérer le cas où $k=1$. Si on remarque que, pour toute application vectorielle continue f de E dans lui-même, les applications $f \circ w$ et $w \circ f$ transforment aussi tout ensemble borné en ensemble faiblement relativement compact, on voit que, pour tout entier $p>0$, on peut écrire $u^p = w_p + r^p$, où w_p transforme tout ensemble borné en ensemble relativement compact, et où $r=u-w$, ce qui entraîne $\| r^p \| \leqslant a^p$. Posons $x_{n,p} = (\sum_{k=1}^{p} u^k(x))/n$; on peut écrire

$$x_n = x_{n,p} + u^p(x_{n,n-p}) = x_{n,p} + r^p(x_{n,n-p}) + w_p(x_{n,n-p})$$

On a évidemment $\| x_{n,p} \| \leqslant (p/n)a \| x \|$, $\| x_{n,n-p} \| \leqslant a \| x \|$, donc

$$\| x_n - w_p(x_{n,n-p}) \| \leqslant (a^p + p/n)a \| x \| \qquad (5)$$

quels que soient n et $p \leqslant n$. Considérons alors un ultrafiltre $\mathcal{F}$ plus fin que le filtre de Fréchet ; pour toute valeur de p, l'application $n \to w_p(x_{n,n-p})$ converge faiblement suivant $\mathcal{F}$ vers un point y_p. Pour tout $\varepsilon > 0$ et toute forme linéaire continue x' telle que $\| x' \| = 1$, il existe donc un ensemble $H_p \in \mathcal{F}$ tel que, pour tout $n \in H_p$, $\left| B(y_p - w_p(x_{n,n-p}), x') \right| \leqslant \varepsilon$; d'où, d'après (5)

$$\left| B(y_p - x_n, x') \right| \leqslant \varepsilon + (a^p + p/n)a \| x \| \quad \text{pour tout } n \in H_p \qquad (6)$$

Comme $H_p \cap H_q$ n'est pas vide, on déduit de (6) et de l'inégalité analogue où p est remplacé par q, que

$$\left| B(y_p - y_q, x') \right| \leqslant 2\varepsilon + (a^p + a^q + (p+q)/n)a \| x \|$$

et, comme $H_p \cap H_q$ est infini,

(7) $$\left| B(y_p - y_q, x') \right| \leqslant 2\varepsilon + (a^p + a^q)a \left\| x \right\|$$

Cette inégalité ayant lieu quelle que soit la forme linéaire continue x' telle que $\left\| x' \right\| = 1$, on en conclut que

$$\left\| y_p - y_q \right\| \leqslant 2\varepsilon + (a^p + a^q)a \left\| x \right\| \leqslant 3\varepsilon$$

dès que p et q sont assez grands ; autrement dit, la suite (y_p) est une suite de Cauchy, qui converge donc fortement vers un point y . Prenons alors p assez grand pour que $\left\| y - y_p \right\| \leqslant \varepsilon$, et $a^p a \left\| x \right\| \leqslant \varepsilon$; quelles que soient les m formes linéaires continues x'_i de normes égales à 1 , il existe un ensemble $H \in \mathfrak{F}$ tel que, pour tout $n \in H$,

$$\left| B(y - x_n, x'_i) \right| \leqslant 3\varepsilon + (p/n)a \left\| x \right\| \qquad (1 \leqslant i \leqslant m)$$

et comme H est un ensemble infini, on voit que y est une valeur d'adhérence faible de la suite (x_n).

C.Q.F.D.

§4. Applications totalement continues.

<u>Définition 1</u>. <u>Soient E et F deux espaces de Banach ; on dit qu'une application vectorielle u de E dans F est totalement continue si l'image par u de tout ensemble borné dans E est relativement compact</u> (pour la structure forte) <u>dans</u> F .

Si E ou F a un nombre fini de dimensions, toute application vectorielle de E dans F est totalement continue.

Nous considérerons surtout des applications totalement continues d'un espace de Banach E <u>dans lui-même</u>. Si u et v sont deux telles applications, u+v est encore totalement continue ; si f est une application vectorielle continue quelconque de E dans E , f∘u et u∘f sont totalement continues.

<u>Proposition 1</u>. <u>Si u est une application totalement continue de E dans F, sa transposée u' est une application totalement continue de F' dans E'</u> .

Soit S' la boule $\|y'\| \leqslant 1$ dans l'espace dual F' ; il faut montrer que u'(S') est fortement relativement compacte dans E', c'est-à-dire (puisque E' est complet) que u'(S') est fortement <u>précompact</u>, ou encore que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des points y'_i en nombre fini dans S' tels que, pour tout $y' \in S'$, il existe un indice i tel que $\|u'(y')-u'(y'_i)\| \leqslant \varepsilon$. On a, par définition

$$(1) \qquad \|u'(y')-u'(y'_i)\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |y'(u(x))-y'_i(u(x))|$$

Or, comme u est totalement continue, on peut trouver un nombre fini de points x_k de E, de norme $\leqslant 1$, tels que, pour tout x de norme $\leqslant 1$, il existe un k tel que $\|u(x)-u(x_k)\| \leqslant \varepsilon$; il en résulte que $|y'(u(x))-y'(u(x_k))| \leqslant \varepsilon$ pour tout $y' \in S'$; d'autre part, S' est <u>faiblement compacte</u> dans F' (chap.III, § 4, th.3), donc il existe des y'_i en nombre fini tels que, pour tout $y' \in S'$, il existe un indice i pour lequel

$$|y'(u(x_k))-y'_i(u(x_k))| \leqslant \varepsilon$$

pour <u>tous</u> les indices k ; avec ce choix des y'_i, pour tout $y' \in S'$ il existe un i tel que, pour <u>tout</u> x de norme $\leqslant 1$, $|y'(u(x))-y'_i(u(x))| \leqslant 4\varepsilon$ d'où la proposition, d'après (1).

<u>Théorie de F. Riesz</u>. Soit E un espace de Banach, u une application totalement continue de E dans lui-même ; nous allons étudier, avec F. Riesz, l'application $x \to x-u(x)$ de E dans lui-même, que nous désignerons par v.

<u>Théorème 1</u>. <u>L'application v est un homomorphisme de E dans E</u>.

Soit H le sous-espace vectoriel $v^{-1}(0)$; d'après la définition de la norme dans E/H (chap.III, § 2), tout revient à démontrer qu'il existe un nombre $a > 0$ tel que, pour tout $x \in E$ dont la <u>distance</u> à H est égale à 1, on ait $\|v(x)\| \geqslant a$. Or, dans le cas contraire, il existerait une suite (x_n) de points de E, telle que $\|x_n\| \leqslant 2$ quel que

soit n, que la distance de x_n à H soit égale à 1 , et que $\|v(x_n)\| = \|x_n - u(x_n)\| \leqslant 1/n$. La suite (x_n) étant bornée, la suite $(u(x_n))$ a , par hypothèse, une valeur d'adhérence y , qui est donc aussi valeur d'adhérence de la suite (x_n) ; la distance de y à H serait donc égale à 1 , et on aurait $v(y)=0$, ce qui est absurde.

Corollaire. Le sous-espace v(E) est fermé dans E ; l'application transposée v' de v est un homomorphisme de E' dans E' ; le sous-espace v'(E') est faiblement (et fortement) fermé dans E' .

Ce corollaire résulte aussitôt du th.1 du § 1 .

Théorème 2. Soit H_∞ le sous-espace vectoriel de E formé des points x tels que $v^n(x)=0$ pour un entier n ; H_∞ a un nombre fini de dimensions

Soit H_n le sous-espace vectoriel formé des x tels que $v^n(x)=0$; on a donc $H_1=H=v^{-1}(0)$. Montrons d'abord que les H_n ont tous un nombre fini de dimensions ; en effet, comme $x=u(x)$ en tout point de H_1 , l'intersection de H_1 et de la boule $\|x\| \leqslant 1$ est compacte ; comme c'est un voisinage de 0 dans H_1 , on en déduit la proposition pour H_1 . Pour la même raison, H_n a un nombre fini de dimensions, car on peut écrire $v^n(x)=x-u_n(x)$, où u_n est totalement continue dans E .

Il est clair qu'on a $H_n \subset H_{n+1}$; montrons que la suite croissante (H_n) ne peut avoir une infinité de termes distincts H_{n_k} ; il en résultera le théorème. Or, si $H_{n_k} \neq H_{n_k-1}$, il existe y_k dans H_{n_k} tel que $\|y_k\| = 1$, et que la distance de y_k à H_{n_k-1} soit $\geqslant 1/2$; pour $k>h$, on a

$$u(y_k)-u(y_h)=y_k-(y_h+v(y_k)-v(y_h))$$

et $y_h+v(y_k)-v(y_h)$ appartient à H_{n_k-1} , d'après la définition des H_n ;

donc, on a $\|u(y_k)-u(y_h)\| \geqslant 1/2$; cela entraîne que la suite $u(y_k))$ ne peut avoir de valeur d'adhérence, ce qui est absurde, puisque la suite (y_k) est bornée et u totalement continue.

C.Q.F.D.

Théorème 3. Le sous-espace $^{-1}v(0)$ a même nombre de dimensions que $E/v(E)$.

Montrons d'abord que, si $v(E)=E$, $^{-1}v(0)=\{0\}$. En effet, s'il existait $x_1 \neq 0$ tel que $v(x_1)=0$, il existerait, par récurrence, une suite (x_n) telle que $v(x_n)=x_{n-1}$, et par suite $v^n(x_n)=0$, $v^{n-1}(x_n)=x_1 \neq 0$; autrement dit, la suite (H_n) serait formée de sous-espaces distincts, contrairement au th.2 .

Réciproquement, si $^{-1}v(0)=\{0\}$, on a $v(E)=E$; en effet, $^{-1}v(0)=\{0\}$ entraîne que $v'(E')$, qui est faiblement fermé (cor. du th.1) est égal à E' (chap.II, § 2) ; mais, comme u' est totalement continue (prop.1), la relation $v'(E')=E'$ entraîne $^{-1}v'(0)=\{0\}$ d'après le raisonnement précédent ; comme $v(E)$, qui est fermé, est le sous-espace orthogonal à $^{-1}v'(0)$ (chap.II, § 2), on a bien $v(E)=E$.

Abordons maintenant le cas général. Remarquons d'abord que, par définition des H_n , v applique H_∞ dans lui-même ; soit v_∞ la restriction de v à H_∞ ; soit d'autre part v_0 l'application vectorielle de l'espace quotient E/H_∞ dans lui-même, déduite de v par passage aux quotients ; il est immédiat que $v_0(z)=z-u_0(z)$, où u_0 est totalement continue ; en outre, la relation $v_0(z)=0$ implique $z=0$ d'après la définition de H_∞ ; donc v_0 est un automorphisme de E/H_∞ . Soit alors K un sous-espace vectoriel fermé supplémentaire de H ; ce qui précède montre que v(K) est encore un sous-espace vectoriel supplémentaire de H_∞ , et fermé puisque v est un homomorphisme ; en outre, il est clair que v(E) est la somme directe de v(K) et de $v(H_\infty)=v_\infty(H_\infty)$.

Donc $E/v(E)$ est isomorphe à $H_\infty/v_\infty(H_\infty)$; or, comme v_∞ est une application vectorielle de l'espace H_∞ à un nombre fini de dimensions dans lui-même, $H_\infty/v_\infty(H_\infty)$ a le même nombre de dimensions que $\overset{-1}{v}_\infty(0)=\overset{-1}{v}(0)$.

C.Q.F.D.

On voit, d'après cette démonstration, que l'étude de l'application v est essentiellement ramenée à celle de sa restriction v_∞ à H_∞ , restriction qui est un endomorphisme de ce sous-espace groupe à un nombre fini de dimensions ; la structure de cet endomorphisme est donc entièrement élucidée par la théorie des diviseurs élémentaires, exposée en Algèbre.

On notera que, contrairement à ce qui se passe pour les applications ergodiques de E dans lui-même (§ 3, dém. du th.1), E n'est pas somme directe des sous-espaces $\overset{-1}{v}(0)$ et $\overline{v(E)}=v(E)$, en général, bien que $E/v(E)$ soit isomorphe à $\overset{-1}{v}(0)$ (et par suite que les sous-espaces $\overset{-1}{v}(0)$ et $\overset{-1}{v'}(0)$ aient le même nombre (fini) de dimensions) ; cela n'a pas lieu, en effet, même lorsque E a un nombre fini de dimensions (cf. Alg., chap.V, § 7).
