PREMIERE PARTIE
LIVRE IV
ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES
CHAPITRE I
TOPOLOGIES D'ESPACES VECTORIELS. ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

Rédaction n° 000

Nombre de pages : 57

Nombre de feuilles : 57

Livre IV Espaces Vectoriels

Espaces localement convexes

Topologies d'espaces vectoriels

0

J.D

2

A 0

PREMIERE PARTIE

LIVRE IV

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

CHAPITRE I

TOPOLOGIES D'ESPACES VECTORIELS. ESPACES LOCALEMENT CONVEXES.

§ 1. Préliminaires. Ensembles étoilés et ensembles convexes.

Structures vectorielles réelle et complexe. Pour toutes les propriétés générales des espaces vectoriels dont nous aurons à faire usage dans ce Livre, le lecteur est prié de se reporter au § 2 du fascicule de résultats d'Algèbre, ou au ch. II du Livre II .

Il ne s'agira, dans ce Livre, que d'espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ; quand nous parlerons simplement d'espace vectoriel, il sera toujours sous-entendu qu'il s'agit d'un tel espace. Mais, sur un ensemble E support d'une telle structure d'espace vectoriel, nous aurons souvent à considérer une seconde structure d'espace vectoriel, déduite de la précédente en restreignant le domaine des opérateurs au sous-corps $\mathbb{R}$ de $\mathbb{C}$ (Alg. R, §2). On distinguera ces deux structures en les appelant respectivement structure vectorielle complexe et structure vectorielle réelle sur E; de même, on appellera complexes (resp. réelles) les variétés linéaires et les formes linéaires de la structure vectorielle complexe (resp. réelle) de E , ainsi que les applications linéaires de E , muni de sa structure vectorielle complexe (resp. réelle) dans un espace vectoriel F, muni également de sa structure vectorielle complexe (resp. réelle) ; une variété linéaire à n diemensions de la structure vectorielle complexe (resp. réelle) sera dite variété linéaire à n dimensions complexes (resp. réelles); on sait qu'une variété linéaire complexe est aussi une variété linéaire réelle ; une variété linéaire à n dimmensions complexes est une variété à 2n dimensions réelles.

Tout sous-espace vectoriel à n dimensions complexes (resp. réelles) est isomorphe à $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$).

Une variété linéaire à une dimension complexe (resp. réelle) est appelée droite complexe (resp. réelle).

Soit f une forme linéaire complexe dans E ; il est clair que les fonctions $g = \mathcal{R} f$, $h = \mathcal{I} f$ sont des formes linéaires réelles dans E ; en outre, la relation $f(ix)=if(x)$ entraîne l'identité $h(x) = -g(ix)$. Réciproquement, si g est une forme linéaire réelle, $f(x) = g(x)-ig(ix)$ est une forme linéaire complexe telle que $\mathcal{R} f = g$. Il en résulte que tout hyperplan complexe, d'équation $f(x)= \alpha + i\beta$, est l'intersection de deux hyperplans réels $g(x)=\alpha$, $g(ix)=-\beta$, et réciproquement.

Soit φ une application linéaire biunivoque de $\mathbb{R}$ dans E, ξ et η deux points quelconques de $\mathbb{R}$ tels que $\xi \leqslant \eta$, et soit $x = \varphi(\xi)$, $y = \varphi(\eta)$; l'image par φ d'un intervalle illimité ouvert (resp.fermé) d'origine ou extrémité ξ, est appelé demi-droite ouverte (resp. fermée) d'origine x ; l'image de l'intervalle $[\xi, \eta]$ (resp. $]\xi, \eta[$, $]\xi, \eta]$, $[\xi, \eta[$, en supposant $\xi < \eta$ dans ces trois derniers cas) est appelé <u>segment fermé d'extrémités</u> x <u>et</u> y (resp. segment ouvert d'extrémités x,y , segment ouvert en x , fermé en y , segment ouvert en y , fermé en x).

Une demi-droite ouverte (resp. fermée) d'origine x et passant par $y \neq x$ peut encore être définie comme l'ensemble des points $(1-\rho)x+\rho y$, avec $\rho > 0$ (resp. $\rho \geqslant 0$) ; un segment fermé d'extrémités x et y (resp. un segment ouvert d'extrémités x et y, un segment ouvert en x , fermé en y , un segment ouvert en y , fermé en x) comme l'ensemble des points $(1-\rho)x + \rho y$, avec $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ (resp. $0<\rho<1$, $0<\rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \rho<1$) ; la droite réelle passant par x et y est dite le <u>support</u> des demi-droites d'origine x , passant par y , et des segments d'extrémités x et y . Sur une droite réelle D passant par x , il y a deux demi-droites fermées (resp. ouvertes) d'origine x et de support D ; si y est un point de D distinct de x , l'une d'elles est l'ensemble des points $(1-\rho)x+\rho y$ pour $\rho \geqslant 0$ (resp. $\rho > 0$) , l'autre l'ensemble des points $(1-\rho)x+\rho y$ pour $\rho \leqslant 0$ (resp. $\rho < 0$) ; ces deux demi-droites sont dites <u>opposées</u>. Deux demi-droites fermées parallèles sont dites <u>de même sens</u> si la translation qui amène l'origine de l'une sur celle de l'autre les fait coïncider ; sinon, elles sont dites <u>de sens contraires</u> (la translation précédente amenant l'une d'elles sur l'opposée de l'autre).

Toute application linéaire (réelle ou complexe) de E dans un espace vectoriel F transforme une demi-droite (ouverte ou fermée) en une demi-droite de même espèce, un segment en segment de même espèce.

<u>Remarque</u>. Dans l'étude des espaces vectoriels par rapport au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, et de leurs variétés linéaires (réelles ou complexes) est comprise celle des espaces vectoriels par rapport au corps R ; en effet, un tel espace E peut toujours être considéré comme <u>sous-espace vectoriel réel</u> d'un espace

vectoriel par rapport à $\mathbb{C}$. Il suffit de considérer, sur l'ensemble $E \times E$, la structure d'espace vectoriel par rapport à $\mathbb{C}$ définie par les relations $(\lambda x, \lambda y) = \lambda(x,y)$ si λ est réel, et $i(x,y) = (-y,x)$; E est isomorphe au sous-espace vectoriel réel de $E \times E$ formé des points $(x,0)$.

Ensembles étoilés ; ensembles cerclés ; indicatrices. Définition 1. Un ensemble A dans un espace vectoriel E est dit étoilé par rapport à un point $x_0 \in A$ si, quel que soit $x \in A$, le segment fermé d'extrémités x_0 et x est contenu dans A (ou encore si quel que soit $x \in A$, le point $(1-\rho)x_0+\rho x$ appartient à A pour tout ρ tel que $0 \leqslant \rho \leqslant 1$).

Soit f une application linéaire (réelle ou complexe) d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F ; l'image directe par f d'une partie de E, étoilée par rapport à x_0, est un ensemble étoilé par rapport à $f(x_0)$; l'image réciproque par f d'une partie de F étoilée par rapport à un point x'_0, est un ensemble étoilé par rapport à tout point de $\overset{-1}{f}(x'_0)$.

En particulier, la translation $x \longrightarrow x-x_0$ transforme un ensemble étoilé par rapport à x_0 en un ensemble étoilé par rapport à 0. On peut donc se borner à étudier ces derniers.

Soit donc A un ensemble étoilé par rapport à 0, et $x \neq 0$ un point quelconque de E ; l'ensemble des valeurs positives de t telles que $tx \in A$ est un intervalle d'origine 0, fermé en 0, ouvert ou fermé suivant les cas à son extrémité ; soit t_x cette extrémité ($0 \leqslant t_x \leqslant +\infty$). Posons $p_A(0)=0$, $p_A(x)=1/t_x$ si $x \neq 0$ (si $t_x=0$, $p_A(x)=+\infty$); la fonction p_A, ainsi définie dans E, est appelée l'indicatrice de l'ensemble étoilé A. L'ensemble A contient l'ensemble $\overset{-1}{p_A}([0,1[)$ et est contenu dans l'ensemble $\overset{-1}{p_A}([0,1])$;

ces deux ensembles sont étoilés ; les points $x \neq 0$ de l'ensemble $\overset{-1}{p}_A([0,1[)$ sont dits points <u>internes</u> de A ; ils sont caractérisés par le fait qu'il existe $\lambda > 1$ tel que $\lambda x \in A$. On appelle <u>coque</u> de A l'ensemble $\overset{-1}{p}_A(1)$.

Il est clair que, pour $\lambda > 0$, $p_A(\lambda x) = \lambda p_A(x)$.

<u>Définition 2. Une fonction numérique</u> p <u>définie dans un espace vectoriel E est dite positivement homogène si elle ~~est~~ satisfait aux conditions suivantes</u> : 1° $p(x) \geqslant 0$ <u>quel que soit</u> $x \in E$; 2° $p(0)=0$; 3° <u>quel que soit</u> $\lambda > 0$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$.

L'indicatrice d'un ensemble étoilé par rapport à 0 est donc positivement homogène. Réciproquement, soit p une fonction positivement homogène définie dans E ; tout ensemble contenant $\overset{-1}{p}([0,1[)$ et contenu dans $\overset{-1}{p}([0,1])$ est étoilé par rapport à 0 , et p est son indicatrice.

Un ensemble A étoilé par rapport à 0 est dit <u>équilibré</u> si son indicatrice est <u>finie</u> en tout point de E : cela revient à dire que l'intersection de toute droite réelle passant par 0 et de A contient un segment ouvert auquel appartient 0 .

Soit f une application vectorielle de E dans un espace vectoriel F , et soit A un sous-ensemble de E , étoilé par rapport à 0 .

Si y est un point quelconque de F , la borne supérieure des valeurs de $\lambda > 0$ telles que $\lambda y \in f(A)$ est la borne supérieure des valeurs de λ pour lesquelles il existe un x tel que $\lambda x \in A$ et $f(x) = y$. Autrement dit, l'indicatrice q de f(A) est donnée par la formule $q(y) = \inf_{x \in \overset{-1}{f}(y)} p(x)$. Il en résulte en particulier que, si x est point interne de A , f(x) est point interne de f(A) ; et réciproquement, si y est point interne de f(A) , il existe un point interne x de A tel que $f(x) = y$.

Inversement, si B est un sous-ensemble de F , étoilé par rapport à l'origine, et q son indicatrice, l'indicatrice de $\overset{-1}{f}(B)$ est la fonction composée $q \circ f$: car la relation $\lambda x \in \overset{-1}{f}(B)$ est équivalente à $\lambda f(x) \in B$.

<u>Définition 3.</u> <u>Un ensemble A dans un espace vectoriel E est dit cerclé par rapport à un point</u> x_0 <u>si, quel que soit</u> $x \in A$, <u>le point</u> $(1-\rho)x_0 + \rho x$ <u>appartient à A quel que soit le nombre complexe</u> ρ <u>tel que</u> $|\rho| \leqslant 1$.

Si f est une application linéaire <u>complexe</u> de E dans F , elle transforme tout ensemble cerclé par rapport à x_0 en un ensemble cerclé par rapport à $f(x_0)$. Inversement, si une partie de F est cerclée par rapport à x'_0 , son image réciproque par f est cerclée par rapport à tout point de $\overset{-1}{f}(x'_0)$.

On peut se borner à considérer les ensembles cerclés par rapport à 0 .

Un tel ensemble A est aussi étoilé par rapport à 0 ; son indicatrice p_A est ici <u>homogène</u>, c'est-à-dire que $p_A(\lambda x) = |\lambda| p_A(x)$, quel que soit λ complexe et $\neq 0$. Il suffit pour le voir de remarquer que, si $y = \varepsilon x$, où ε est un nombre complexe de module 1, la relation $tx \in A$ (t positif) entraîne, d'après la définition 2 , $t\varepsilon x \in A$ c'est-à-dire $ty \in A$, et réciproquement, donc $p_A(\varepsilon x) = p_A(x)$.

Inversement, si p est une fonction positive homogène définie dans E , les ensembles $\overset{-1}{p}([0,1[)$ et $\overset{-1}{p}([0,1])$ sont cerclés ; et tout ensemble cerclé contenant le premier de ces ensembles, et contenu dans le second, a pour indicatrice p .

La réunion et l'intersection d'une famille d'ensembles étoilés (resp. cerclés) par rapport à 0 sont encore des ensembles étoilés (resp. cerclés) par rapport à 0. L'indicatrice de la réunion (resp. intersection) d'une famille d'ensembles étoilés par rapport à 0 est l'enveloppe inférieure (resp. supérieure) de la famille des indicatrices de ces ensembles.

Si (F_ι) est une famille d'espaces vectoriels et A_ι un ensemble étoilé (resp. cerclé) par rapport à 0 dans F_ι, $A = \prod_\iota A_\iota$ est étoilé (resp. cerclé) par rapport à 0 dans $\prod_\iota F_\iota$, comme intersection des ensembles étoilés (resp. cerclés) $\overset{-1}{pr_\iota}(A_\iota)$; cette remarque montre en outre que, si p_ι est l'indicatrice de A_ι, l'indicatrice de A est l'enveloppe supérieure des fonctions composées $p_\iota \circ pr_\iota$. En particulier $x = (x_\iota)$ ne peut être point interne de A que si, pour tout ι, x_ι est point interne de A_ι.

On déduit de là que, si A et B sont deux ensembles étoilés par rapport à 0 dans un espace vectoriel E, $\lambda A + \mu B$ est aussi étoilé par rapport à 0, quels que soient les constantes réelles λ, μ ; en effet, $A \times B$ est étoilé dans $E \times E$, et $(x,y) \to \lambda x + \mu y$ est une application linéaire de $E \times E$ dans E. En outre, pour qu'un point $z \in \lambda A + \mu B$ soit point interne de cet ensemble, il est nécessaire qu'il existe un couple (x,y) de points $x \in A$, $y \in B$ tels que $z = \lambda x + \mu y$ et que x soit point interne de A, <u>et</u> y point interne de B.

<u>Ensembles convexes</u>. <u>Définition 4</u>. <u>Un ensemble A dans un espace vectoriel E est dit convexe si, quels que soient les points x,y appartenant à A, le segment fermé d'extrémités x et y est contenu dans A</u>.

Cette définition équivaut à la suivante : un ensemble est convexe s'il est <u>étoilé par rapport à chacun de ses points</u>.

Si f est une application linéaire (réelle ou complexe) de E dans F , l'image directe par f d'une partie convexe de E est une partie convexe de F ; l'image réciproque par f d'une partie convexe de F est une partie convexe de E .

L'ensemble vide est convexe ; il en est de même de l'ensemble réduit à un élément.

Toute variété linéaire, toute demi-droite, tout segment, est convexe ; en outre, d'après la caractérisation des intervalles sur la droite numérique (Top.géné.R, §   ), les seuls ensembles convexes non vides sur une droite réelle sont la droite tout entière, les demi-droites et les segments portés par cette droite.

Considérons un ensemble convexe A contenant l'origine 0 , et soit p_A l'indicatrice de A par rapport à 0 ; la fonction p_A satisfait à l'inégalité

$$p_A(x+y) \leqslant p_A(x) + p_A(y) \tag{1}$$

L'inégalité est évidente si l'un des nombres $p_A(x)$, $p_A(y)$ est infini ; sinon soient a, b deux nombres positifs tels que $a > p_A(x)$, $b > p_A(y)$; on a donc $x/a \in A$, $y/b \in A$, et, comme $a/(a+b) > 0$, $b/(a+b) > 0$, le point $(x+y)/(a+b)$ appartient au segment fermé d'extrémités x/a , y/b , donc à A par hypothèse ; par suite, on a $p_A(x+y) \leqslant a+b$, et comme a et b sont arbitrairement voisins de $p_A(x)$ et $p_A(y)$, on en déduit (1).

Définition 5. Une fonction positivement homogène p définie dans un espace vectoriel E est dite convexe si, quels que soient x et y dans E , on a $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$.

Nous venons de voir que l'indicatrice par rapport à 0 d'un ensemble convexe contenant 0 , est une fonction convexe. Réciproquement, soit p une fonction convexe ; l'ensemble $\overset{-1}{p}([0,1[)$ et l'ensemble $\overset{-1}{p}([0,1])$ sont convexes, comme il résulte de l'inégalité $p(tx+(1-t)y) \leqslant tp(x)+(1-t)p(y)$, valable quels que soient x et y , et quel que soit t dans $]0,1[$.

En outre, l'ensemble $V = \overset{-1}{p}(0)$ (c'est-à-dire l'ensemble des droites réelles homogènes contenues dans $\overset{-1}{p}([0,1])$) est un sous-espace vectoriel réel de E , car, si $x \in V$, $\lambda x \in V$ quel que soit λ réel, et si x et y sont des points de V , $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)=0$, d'où $p(x+y)=0$, c'est-à-dire $x+y \in V$. Si en outre p est homogène, V est un sous-espace vectoriel complexe.

Si $x \in \overset{-1}{p}([0,1])$, on a $x+y \in \overset{-1}{p}([0,1])$ quel que soit $y \in V$, en vertu de la relation $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y) = p(x)$; il en résulte que, si W est l'intersection de l'ensemble $\overset{-1}{p}([0,1])$ et d'un sous-espace vectoriel supplémentaire de V , il existe une application vectorielle biunivoque du produit $V \times W$ sur $\overset{-1}{p}([0,1])$.

Exemple. La distance euclidienne $d(0, X)$ de l'origine au point X est une fonction convexe dans l'espace numérique R^n , considéré comme espace vectoriel réel ; toute boule ouverte ou fermée est donc un ensemble convexe dans R^n.

Remarques. 1) Sur la droite numérique, considérée comme espace vectoriel réel, les seules fonctions positivement homogènes sont de la forme suivante : $p(x) = a|x|$ pour $x \geqslant 0$, $p(x)= b|x|$ pour $x \leqslant 0$, a et b étant deux constantes positives distinctes ou non. On vérifie aisément que ces fonctions sont convexes.

2) Soit f une application vectorielle (réelle ou complexe) d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F , et soit p une fonction convexe définie dans F ; il est clair que la

fonction composée $p \circ f$ est convexe dans E. En particulier, d'après la remarque précédente, si f est une forme linéaire (réelle ou complexe) dans E, $|f|$ est une fonction convexe dans E (elle est en outre homogène quand f est une forme linéaire complexe).

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n points d'un ensemble convexe A ; le point $x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i$, où les t_i sont des nombres quelconques de l'intervalle $[0,1]$, tels que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, appartient encore à A. La proposition résulte de la définition 4 pour $n=2$; démontrons-la par récurrence : en supposant $t_n \neq 1$ (sans quoi la proposition est évidente), on peut écrire $x = (1-t_n)y + t_n x_n$, avec $y = \sum_{i=1}^{n-1} t_i x_i / (1-t_n)$, d'où la proposition, y appartenant à A par hypothèse.

Toute intersection d'ensembles convexes est convexe (ce qui équivaut à dire que l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions convexes est une fonction convexe) ; en particulier, l'intersection d'un ensemble convexe et d'une droite réelle est, soit l'ensemble vide, soit la droite tout entière, soit une demi-droite, soit enfin un segment.

Etant donnée une partie quelconque A de E, il existe donc un plus petit ensemble convexe contenant A ; on l'appelle enveloppe convexe de A, et on le note $\underline{K}(A)$; on dit encore que $\underline{K}(A)$ est engendré par A. Il est clair que $\underline{K}(A)$ est contenu dans la variété linéaire $\underline{V}(A)$ engendrée par A. Soit $\iota \to x_\iota$ une représentation paramétrique de A au moyen d'un ensemble d'indices I ; $\underline{K}(A)$ est identique à l'ensemble des points $x = \sum_{\iota \in I} t_\iota x_\iota$, où les t_ι sont des nombres de l'intervalle $[0,1]$, nuls à l'exception d'un nombre fini d'entre eux, et tels que $\sum_{\iota\in I} t_\iota = 1$, et les x_ι des points quelconques de A ; en effet, $\underline{K}(A)$ doit contenir l'ensemble de ces points, et d'autre part on voit immédiatement que cet ensemble est convexe.

Il en résulte en particulier que l'enveloppe convexe d'un ensemble cerclé par rapport à un point x_0 est encore un ensemble cerclé par rapport à x_0 .

Si (F_ι) est une famille d'espaces vectoriels, et A_ι un ensemble convexe dans F_ι , $\prod_\iota A_\iota$ est un ensemble convexe dans $\prod_\iota F_\iota$, comme il résulte de la propriété analogue pour les ensembles étoilés ; on voit de même que, si A et B sont convexes dans E , $\lambda A + \mu B$ est encore un ensemble convexe, quels que soient λ et μ réels.

Si A contient l'origine et est convexe, on remarquera que $A+A = 2A$; cette relation est inexacte lorsque A est un ensemble étoilé quelconque, on a seulement alors la relation $2A \subset A+A$; il peut même se faire qu'il n'existe <u>aucun</u> nombre $\lambda > 0$ tel que $A+A \subset \lambda A$; c'est le cas, par exemple, pour l'ensemble étoilé défini par la relation $|xy| \leq 1$ dans le plan numérique R^2 .

Si A est un ensemble convexe, l'ensemble B des demi-droites fermées d'origine 0 , passant par tous les points de A , est convexe. En effet, les points de B sont de la forme λx , avec $\lambda \geqslant 0$, $x \in A$; soient λx , μy deux de ces points, et ρ un nombre quelconque de $[0,1]$; le point $\lambda\rho x+(1-\rho)\mu y$ peut s'écrire sous la forme $\alpha(\sigma x+(1-\sigma)y)$, avec $\alpha \geqslant 0$, $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$; il suffit de prendre $\alpha = \rho\lambda+(1-\rho)\mu$, et $\sigma = \rho\lambda/(\rho\lambda+(1-\rho)\mu)$.

<u>Le théorème de Hahn-Banach</u>. Soit H un hyperplan réel homogène dans un espace vectoriel E . L'espace quotient E/H est isomorphe à R (considéré comme espace vectoriel réel). Les images réciproques, par l'application

canonique de E sur E/H, des intervalles $[0,+\infty[$ et $]-\infty,0]$ sont appelés <u>demi-espaces fermés</u> déterminés par H ; les images réciproques des intervalles $]0,+\infty[$, $]-\infty,0[$ sont de même appelés <u>demi-espaces ouverts</u> déterminés par H. Si D est une droite réelle homogène supplémentaire de H (c'est-à-dire non contenue dans H), et $x_0 \neq 0$ un point quelconque de D, tout point $x \in E$ se met d'une manière et d'une seule sous la forme $y+tx_0$, avec $y \in H$, $t \in \mathbb{R}$; si E_1 (resp. E_2, E_1', E_2') désigne l'ensemble des points x tels que $t \geqslant 0$ (resp. $t \leqslant 0$, $t > 0$, $t < 0$), E_1 et E_2 sont les demi-espaces fermés, E_1' et E_2' les demi-espaces ouverts, déterminés par H.

Une partie A de E est dite <u>tout entière d'un même côté</u> de H (resp. strictement d'un même côté) si elle est contenue dans un demi-espace fermé (resp. ouvert) déterminé par H. Deux parties A, B de E sont dites <u>d'un même côté</u> (resp. strictement d'un même coté) de H si $A \cup B$ est d'un même coté (resp. strictement d'un même coté) de H. Deux parties A, B de E sont dites <u>séparées</u> (resp. strictement séparées) par H, si elles sont contenues dans deux demi-espaces fermés (resp. ouverts) distincts, déterminés par H.

Pour que deux points x, x' soient séparés (resp. strictement séparés) par H, il faut et il suffit que le segment fermé (resp. ouvert) d'extrémités x, x' rencontre H ; en effet tout point de ce segment est de la forme

$$z = (1-\rho)y+\rho y' + ((1-\rho)t + \rho t')x_0$$

avec $\rho \in [0,1]$ (resp. $\rho \in]0,1[$) ; pour qu'on puisse avoir $(1-\rho)t+\rho t'=0$, il faut et il suffit que $tt' \leqslant 0$ (resp. $tt' < 0$).

Il en résulte que les demi-espaces (ouverts ou fermés) déterminés par H sont des ensembles convexes.

Ces définitions et propriétés s'étendent immédiatement aux hyperplans réels non homogènes, à l'aide d'une translation.

Si un ensemble A étoilé par rapport à un point x_0 est tout entier d'un même coté d'un hyperplan H ne passant pas par x_0 , H ne contient pas de points internes de A , et réciproquement ; en général si une variété linéaire V ne passe pas par x_0 et ne contient pas de points internes de A , on dira qu'elle ne pénètre pas dans A ; cela équivaut à dire que, dans la variété linéaire W engendrée par V et x_0 , l'ensemble étoilé $A \cap W$ est d'un même coté de l'hyperplan V .

Théorème 1 (Hahn-Banach). Soit A un ensemble convexe équilibré par rapport à un de ses points a , et soit V une variété linéaire réelle ne pénétrant pas dans A ; il existe un hyperplan réel H contenant V et tel que A soit tout entier d'un même coté de H .

Dans cet énoncé, il faut entendre que A est considéré comme ensemble étoilé par rapport à a ; l'hypothèse que A est équilibré entraîne que V ne passe pas par a , et par ailleurs que la variété linéaire engendrée par A est l'espace E tout entier.

On peut évidemment toujours supposer, à l'aide d'une translation, que V est homogène.

La démonstration procède en deux étapes.

1) Cas où E est un espace vectoriel à deux dimensions réelles.

Les hyperplans sont ici les droites réelles : il n'y a de démonstration à faire que lorsque V est réduit à l'origine, ce point n'étant pas point interne de A par rapport à $a \neq 0$, par l'hypothèse.

Soit B l'ensemble convexe formé des demi-droites joignant 0 aux points de A ; cet ensemble est équilibré par rapport à a , et 0 n'en est pas point interne ; il en résulte que B est distinct du plan E tout entier, et par suite <u>ne peut contenir deux droites concourantes</u>.

<u>Lemme</u>. <u>Si B contient une droite homogène D et un point c non situé sur D , B est identique au demi-plan fermé déterminé par D et contenant c</u> .

En effet, si $b \neq 0$ est un point de D , B contient tous les points $\beta b + \gamma c$, avec $\gamma \geqslant 0$, d'après sa définition ; si en outre B contenait un point $\beta b + \gamma c$ avec $\gamma < 0$, il contiendrait la droite D' joignant ce point à l'origine, donc deux droites concourantes, contrairement à l'hypothèse.

Soit alors G une droite passant par a , mais non par 0 ; son intersection avec B contient un segment ouvert auquel appartient a ; nous distinguerons deux cas.

a) $G \subset B$. Soit G' la parallèle à G menée par 0 , $b \neq 0$ un point de G'. B est contenu dans le demi-plan fermé déterminé par G' et contenant a . Sinon, il existerait un point $\alpha a + \beta b \in B$, avec $\alpha < 0$; la droite D joignant 0 à ce point coupe G au point $a + \frac{\beta}{\alpha} b$, qui appartient donc à B ; par suite, les deux droites concourantes D et G seraient contenues dans B , contrairement à l'hypothèse.

b) $G \cap B$ est un segment, ou une demi-droite. Soit $b \neq a$ une de ses extrémités (si c'est un segment) ou son origine (si c'est une demi-droite). Soit G' la droite joignant 0 à b ; B est contenu dans le demi-plan fermé déterminé par G' et contenant a .

En effet, désignons par c la seconde extrémité du segment $G \cap B$, lorsque cette intersection est un segment, par c la différence a-b , lorsque $G \cap B$ est une demi-droite. Il est immédiat que B contient tout point $\beta b+\gamma c$, pour $\beta > 0$, $\gamma > 0$, et ne contient aucun point $\beta b + \gamma c$, avec $\beta > 0$, $\gamma < 0$.

En effet, si $G \cap B$ est une demi-droite, $G \cap B$ contient par définition tous les points $b+\lambda c$ avec $\lambda > 0$, donc B contient les points $\mu(b+\lambda c)$ avec $\mu \geqslant 0$; $G \cap B$ ne contient aucun point $b+\lambda c$ avec $\lambda < 0$, donc B ne peut contenir aucun point $\mu(b+\lambda c)$ avec $\lambda < 0$, $\mu > 0$.

Si $G \cap B$ est un segment, il contient tous les points $\rho b+(1-\rho)c$, avec $0 < \rho < 1$, donc $\mathcal{B}$ contient tous les points $\lambda(\rho b+(1-\rho)c)$ avec $\lambda > 0$, $0 < \rho < 1$; or, quels que soient $\beta > 0$, $\gamma > 0$, il existe $\lambda > 0$, et ρ tel que $0 < \rho < 1$ vérifiant $\beta = \lambda\rho$, $\gamma = \lambda(1-\rho)$. On voit de même que B ne peut contenir de points $\beta b+\gamma c$ avec $\beta > 0$, $\gamma < 0$, parce que $G \cap B$ ne peut contenir de points $\rho b+(1-\rho)c$ avec $\rho > 1$.

Pour démontrer notre proposition, il suffit de voir que B ne peut contenir aucun point de la forme $\beta b + \gamma c$, avec $\beta < 0$, $\gamma < 0$. Comme B contient le point $d = -(\beta b+\gamma c)$, il contiendrait la droite D joignant ce point à l'origine ; mais B contient aussi des points strictement séparés par D (par exemple, les points $d + \frac{\gamma}{2} c$, $d - \frac{\gamma}{2} c$); d'après le lemme, B serait le plan entier, contrairement à l'hypothèse.

2) <u>Cas général</u>. Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des variétés linéaires homogènes réelles contenant V et ne pénétrant pas dans A ; <u>ordonnons</u> $\mathfrak{M}$ par inclusion. Il est clair que la réunion des variétés linéaires appartenant à une partie totalement ordonnée de $\mathfrak{M}$, est encore une variété linéaire appartenant à $\mathfrak{M}$; autrement dit, $\mathfrak{M}$ est <u>inductif</u> (<u>Ens</u>. R, § 6). Le théorème de Zorn montre par suite que $\mathfrak{M}$ possède

un élément __maximal__ H ; le théorème sera établi si nous prouvons que H est un __hyperplan réel__.

Supposons le contraire ; comme A est équilibré par rapport à a, aucun ensemble de $\mathfrak{M}$ ne contient a ; soit K le sous-espace vectoriel engendré par a et H. Dans cet espace, H est un hyperplan, la droite D joignant O et a un sous-espace vectoriel supplémentaire de H. Comme K n'est pas l'espace E entier, il existe une droite D' passant par O et non contenue dans K ; soit K' le sous-espace vectoriel engendré par K et D', et A' l'ensemble convexe intersection de A et K'. Dans l'espace K', le plan P engendré par D et D' est supplémentaire de H ; autrement dit, tout $x \in K'$ se met, d'une manière et d'une seule, sous la forme $f(x)+g(x)$, avec $f(x) \in P$, $g(x) \in H$. La fonction f est linéaire, donc $B = f(A')$ est convexe dans P, et équilibré par rapport à a ; en outre $O = f(H)$ n'est pas point interne de B. Il existe donc dans P une droite D" passant par O, et ne pénètrant pas dans B ; la variété linéaire H' engendrée par H et D" n'est pas identique à H et ne pénètre pas dans A', ni a fortiori dans A ; H ne serait donc pas un élément maximal de $\mathfrak{M}$, contrairement à l'hypothèse.

C.Q.F.D.

__Remarque.__ Si un ensemble convexe A est équilibré par rapport à un de ses points a, et si c n'est pas un point interne de A par rapport à un quelconque de ses points b, c ne peut être point interne de A par rapport à a. En effet, on peut supposer a=O ; par hypothèse, il existe $\lambda > 0$ tel que $-\lambda b \in A$; si c était point interne de A par rapport à O, il existerait $\mu > 1$ tel que $\mu c \in A$; le point $d = \rho\mu c - \lambda(1-\rho)b$ appartiendrait aussi à A quel que soit $\rho \in [0,1]$; or, si on prend

$\rho=(1+\lambda)/(\mu+\lambda)$, on a bien $0<\rho<1$, et $d = b+\sigma(c-b)$ avec $\sigma = (\mu+\lambda\mu)/(\mu+\lambda)>1$, contrairement à l'hypothèse.

Si en outre c est un point de la <u>coque</u> de A par rapport à b, c'est aussi un point de la <u>coque</u> de A par rapport à a.

En effet, pour ρ et σ dans $[0,1]$, le point

$$d = \rho(\sigma b+(1-\sigma)c)-\lambda(1-\rho)b$$

appartient à A ; prenons $\rho = \lambda/(\lambda+\sigma)$; on aura $d = \alpha c$, avec $\alpha = (\lambda-\lambda\sigma)/(\lambda+\sigma)$, et pour σ suffisamment voisin de 0, α est aussi voisin de 1 qu'on veut.

On voit donc que, lorsque A est équilibré par rapport à un de ses points a, et qu'une variété linéaire ne contient aucun point interne de A relativement à un point b de A, elle ne contient pas non plus de point interne relativement à A ; lorsqu'on dit qu'elle "ne pénètre pas" dans A, il est donc inutile de préciser par rapport à quel point et le théorème de Hahn-Banach lui est applicable.

On appelle <u>hyperplan d'appui</u> d'un ensemble convexe A équilibré par rapport à un de ses points a, un hyperplan contenant au moins un point de la <u>coque</u> de A par rapport à a, et ne pénétrant pas dans A (donc tel que A soit tout entier d'un même coté de l'hyperplan) ; le théorème de Hahn-Banach a en particulier pour conséquence que, par toute variété linéaire réelle ne pénétrant pas dans A et contenant un point de la coque de A, passe un hyperplan d'appui de A. Il peut naturellement passer plusieurs hyperplans d'appui, et même une infinité, par un point de la coque d'un ensemble convexe équilibré A ; lorsqu'il ne passe par un tel point x_0 qu'<u>un seul</u> hyperplan d'appui, on dit que A est <u>strictement convexe au point</u> x_0 ; A est dit *strictement convexe* s'il est strictement convexe en tous les points de sa coque.

Corollaire 1. Soient p *une fonction convexe finie définie dans un espace vectoriel* E , G *un sous-espace vectoriel réel de* E , f *une forme linéaire réelle définie dans* G *et telle que* $f(x) \leq p(x)$ *en tout point de* G . *Il existe une forme linéaire réelle* $\overline{f}$ *définie dans* E , *prolongeant* f , *et telle que* $\overline{f}(x) \leq p(x)$ *en tout point de* E .

En effet, on peut supposer que f n'est pas identiquement nulle (sans quoi la proposition est triviale). Soit V la variété linéaire définie, dans G , par la relation $f(x)=1$; on a donc $p(x) \geqslant 1$ en tout point de V ; autrement dit, si A est l'ensemble convexe $\overset{-1}{p}([0,1])$, V ne pénètre pas dans A . Comme A est équilibré par rapport à 0, on peut appliquer le théorème de Hahn-Banach : il existe un hyperplan réel H passant par V et tel que A soit tout entier du même coté de H . Soit $\overline{f}$ la forme linéaire réelle définie dans E , et telle que $\overline{f}(x)=1$ sur H ; comme, dans le sous-espace G , V est un hyperplan sur lequel la restriction de $\overline{f}$ et f sont égales, on a $\overline{f}(x)=f(x)$ en tout point de G ; enfin, comme le point 0 appartient au demi-espace fermé $\overline{f}(x) \leq 1$, ce demi-espace contient A , autrement dit $\overline{f}(x) \geqslant 1$ entraîne $p(x) \geqslant 1$; en particulier, $\overline{f}(x)=1$ entraîne $p(x) \geqslant 1$, d'où, en vertu de l'homogénéité de $\overline{f}$ et de p , $\overline{f}(x) \leq p(x)$ en tout point où $\overline{f}(x) > 0$; et comme aux autres points de E , on a $\overline{f}(x) \leq 0 \leq p(x)$, la proposition est démontrée.

Remarque. Le théorème de Hahn-Banach s'applique en particulier lorsque la variété V *ne rencontre pas* l'ensemble convexe A ; mais cette hypothèse supplémentaire ne permet pas d'affirmer qu'il existe un hyperplan passant par V et ne rencontrant pas A (analytiquement, l'inégalité stricte $f(x) < p(x)$ en tout point de G n'implique pas l'existence d'un prolongement linéaire $\bar{f}$ de f à E tel que $\bar{f}(x) < p(x)$ en tout point de E). Si on considère, par exemple, dans l'espace R^3, l'ensemble convexe A formé des demi-droites fermées joignant le point (0,0,1) aux points de l'ensemble convexe défini par les relations $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $xy \geqslant 1$, $z=0$, la droite $y=0$, $z=0$ ne rencontre pas A, mais le seul plan passant par cette droite et ne pénétrant pas dans A est le plan $y=0$, qui rencontre A au point (0,0,1).

<u>Corollaire 2</u>. <u>Tout ensemble convexe A équilibré par rapport à un de ses points</u> a <u>et contenant sa coque par rapport à</u> a, <u>est identique à l'intersection des demi-espaces fermés le contenant</u>.

Il suffit de voir que tout point x de cette intersection appartient à A ; or, dans le cas contraire (en supposant, pour simplifier, a=0), il existerait $\lambda < 1$ tel que le point λx appartienne à la coque de A ; par le point λx passerait donc un hyperplan réel H ne contenant pas O, et tel que A soit contenu dans le demi-espace fermé déterminé par H et contenant O ; or, ce demi-espace ne contient pas x, contrairement à l'hypothèse.

<u>Proposition 1</u>. <u>Soient</u> p <u>une fonction convexe homogène finie, définie dans un espace vectoriel E, G un sous-espace vectoriel complexe de E, f une forme linéaire complexe définie dans G et telle que</u> $|f(x)| \leqslant p(x)$ <u>en tout point de G</u>. <u>Il existe une forme linéaire complexe $\bar{f}$ définie dans E, prolongeant f, et telle que</u> $|\bar{f}(x)| \leqslant p(x)$ <u>en tout point de E</u>.

En effet, soit $g = \mathcal{R}f$; g est une forme linéaire réelle dans G, et on a $g(x) \leqslant p(x)$ en tout point de G ; d'après le corollaire 1 du th.1, il existe donc une forme linéaire réelle $\bar{g}$, prolongeant de g à E, telle que $\bar{g}(x) \leqslant p(x)$ en tout point de E. Posons $\bar{f}(x)=\bar{g}(x)-i\bar{g}(ix)$; $\bar{f}$ est une forme linéaire complexe, qui prolonge f à E, et on a $\mathcal{R}\bar{f}(x) \leqslant p(x)$ quel que soit x ; d'après l'homogénéité de p, on en déduit, pour tout ε tel que $|\varepsilon| = 1$, $\mathcal{R}(\varepsilon\bar{f}(x)) = \mathcal{R}\bar{f}(\varepsilon x) \leqslant p(\varepsilon x) = p(x)$; d'où $|\bar{f}(x)| \leqslant p(x)$.

Cette proposition correspond, dans le cas complexe, au corollaire 1 du théorème de Hahn-Banach ; la proposition qui correspond au théorème de Hahn-Banach lui-même est la suivante : <u>si A est un ensemble convexe équilibré par rapport à un de ses points, et V une variété linéaire complexe ne pénètrant pas dans A, il existe un hyperplan complexe H contenant V et ne pénètrant pas dans A</u>.

En effet, supposons V <u>homogène</u> ; il existe un hyperplan <u>réel</u> H' contenant V et ne pénètrant pas dans A ; soit $f(x)=0$ son équation, et H'' l'hyperplan réel d'équation $f(ix)=0$. $H = H' \cap H''$ est un hyperplan complexe contenant V et ne pénètrant pas dans A.

<u>Proposition 2</u>. <u>Soient A et B deux ensembles convexes, tels que A soit équilibré par rapport à un de ses points</u> a, <u>et qu'aucun point interne de A n'appartienne à B. Dans ces conditions, il existe un hyperplan réel H séparant A et B</u>.

En effet, considérons l'ensemble $C = A-B$, qui est convexe. Si b est un point quelconque de B, C est équilibré par rapport à $a-b$; d'autre part, l'origine 0 n'est pas un point interne de C. Il existe donc un hyperplan réel H', d'équation $f(x)=0$, et tel que C soit tout entier d'un même coté de H' ; on peut supposer par exemple que $f(x) \geqslant 0$ en tout point de C. Il en résulte que, pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$, $f(x) \geqslant f(y)$. Posons $\alpha = \inf_{x \in A} f(x)$; α est fini ;

en tout point $x \in A$, $f(x) \geqslant \alpha$, et en tout point $y \in B$, $f(y) \leqslant \alpha$; l'hyperplan d'équation $f(x) = \alpha$ <u>sépare</u> donc A et B .

<u>Exercices</u>. 1) Soit A un ensemble convexe, B un ensemble quelconque contenant A . Parmi les ensembles convexes contenant A et contenus dans B , il existe au moins un ensemble <u>maximal</u>.

2) Soit A un ensemble convexe, et soit A' la réunion de A et des coques de A relatives à tous les points de A . Montrer que A' est convexe.

Montrer que l'on peut avoir $(A')' \neq A'$ sur l'exemple suivant : E est un espace vectoriel ayant une base dénombrable (e_n) $(n=0,1,\ldots)$; pour chaque $n > 0$, on appelle C_n l'ensemble des points $\lambda e_n + (1-1/n)\mu e_0$, où λ et μ prennent toutes les valeurs réelles telles que $\lambda > 0$, $\mu \geqslant 0$, $\lambda + \mu \leqslant 1$. A est l'ensemble convexe engendré par la réunion des C_n . On fera voir que $e_0 \notin A'$, mais $e_0 \in (A')'$.

3) Soit A un ensemble étoilé par rapport à 0 , ne contenant aucun point de sa coque. Montrer que si $A+A=2A$, A est convexe (on montrera, par récurrence sur n , que si $x \in A$, $y \in A$, A contient, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 2^n$, les points $\lambda x + \mu y$, pour toutes les valeurs de λ et μ satisfaisant aux inégalités

$$0 \leqslant \lambda \leqslant k/2^n \quad , \qquad 0 \leqslant \mu \leqslant 1-k/2^n \quad)$$

4) Soit A une partie quelconque d'un espace vectoriel à n dimensions réelles. Montrer que l'enveloppe convexe de A est identique à l'ensemble des points $\sum_{i=0}^{n} t_i x_i$, où chacun des (n+1) points x_i parcourt A , et où $t = (t_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ parcourt la partie de R^{n+1} définie par les relations $t_i \geqslant 0$, $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$

(On établira d'abord le lemme suivant : si les (n+1) points x_i forment un système libre, et si $x = \sum_{i=0}^{n} t_i x_i$, avec $t_i \geqslant 0$, $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$, il existe un indice k et n nombres u_i $(i \neq k)$ tels que $u_i \geqslant 0$, $\sum_{i \neq k} u_i \leq 1$, et $x = \sum_{i \neq k} u_i x_i$).

§2. Espaces vectoriels topologiques.

Définition 1. Une topologie sur un espace vectoriel E est dite compatible avec la structure vectorielle complexe (resp. réelle) de cet espace, si elle est compatible avec sa structure de groupe additif, et si en outre elle vérifie l'axiome suivant : (L) L'application $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ de $\mathbb{C} \times E$ (resp. de $R \times E$) dans E est continue.

Une structure complexe (resp. réelle) d'espace vectoriel et une topologie compatible avec cette structure définissent sur E une structure d'espace vectoriel topologique complexe (resp. réel) ; E , muni de cette structure, est appelé espace vectoriel topologique complexe (resp. réel).

Exemples. La topologie de $\mathbb{C}^n$ (resp. R^n) satisfait à l'axiome (L), ainsi que nous l'avons vu en Topologie générale (ch. , §) ; elle est donc compatible avec la structure vectorielle complexe (resp. réelle) de cet espace ; nous verrons d'ailleurs au § 3 que c'est la seule topologie séparée qui possède cette propriété.

Il est clair qu'une topologie compatible avec la structure vectorielle complexe de E est aussi compatible avec sa structure réelle . Dans tout ce Livre, nous étudierons les propriétés des structures d'espace vectoriel topologique complexe ; les résultats correspondants pour les structures d'espace vectoriel topologique réel s'en déduisent, ou s'obtiennent par des raisonnements tout à fait analogues ; nous laisserons souvent au lecteur le soin de les énoncer, sauf lorsqu'il s'agira de propriétés spéciales aux structures réelles.

Par un abus de langage, et pour abréger les énoncés, nous dirons souvent par la suite "espace vectoriel" au lieu d'"espace vectoriel topologique complexe", chaque fois que cette manière de s'exprimer ne prêtera pas à confusion.

Une topologie compatible avec la structure vectorielle (complexe ou réelle) de E , étant une topologie de groupe abélien sur E , y définit une structure uniforme (ch.III, §2) ; lorsque nous parlerons de la structure uniforme d'un espace vectoriel topologique E , c'est toujours de cette structure qu'il sera question.

L'axiome (L) entraîne que, pour tout $x_0 \in E$, λx_0 est fonction uniformément continue de λ dans $\mathbb{C}$, d'après la relation $(\lambda - \lambda')x_0 = \lambda x_0 - \lambda' x_0$. De même, pour tout $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, l'homothétie $x \to \lambda_0 x$ est uniformément continue dans E , en vertu de $\lambda_0 x - \lambda_0 x' = \lambda_0(x-x')$. Il en résulte que toute homothétie de rapport $\neq 0$ est un isomorphisme de la structure d'espace vectoriel topologique de E sur elle-même (et aussi un isomorphisme de la structure uniforme de E sur elle-même). En particulier, si A est un ensemble ouvert (resp. fermé) dans E , λA est aussi un ensemble ouvert (resp. fermé) pour tout $\lambda \neq 0$.

Voisinages de l'origine dans un espace vectoriel topologique. Nous allons chercher à caractériser le filtre $\mathfrak{V}$ des voisinages de l'origine dans un espace vectoriel topologique E . Remarquons d'abord que, quels que soient $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $x_0 \in E$, on peut écrire

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = (\lambda - \lambda_0)(x - x_0) + \lambda_0(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0$$

et comme la topologie de E est une topologie de groupe, l'axiome (L) est équivalent au système des trois axiomes suivants :

(L'_{I}) Quel que soit $x_0 \in E$, λx_0 est fonction continue de λ au point $\lambda = 0$.

(L'_{II}) Quel que soit $\lambda_0 \in \mathcal{C}$, $\lambda_0 x$ est fonction continue de x au point $x = 0$.

(L'_{III}) λx est continue au point $(0,0)$ de $\mathcal{C} \times E$.

La définition des fonctions continues (Top. gén., ch.I, § 4) permet de remplacer les trois conditions précédentes par les conditions équivalentes :

(L''_{I}) Quel que soit $x_0 \in E$, et quel que soit $V \in \mathfrak{V}$, il existe $a > 0$ tel que $\lambda x_0 \in V$ pour tout $\lambda \in \mathcal{C}$ tel que $|\lambda| \leqslant a$.

(L''_{II}) Quel que soit $\lambda_0 \in \mathcal{C}$, et quel que soit $V \in \mathfrak{V}$, il existe $W \in \mathfrak{V}$ tel que $\lambda_0 W \subset V$.

(L''_{III}) Quel que soit $V \in \mathfrak{V}$, il existe $W \in \mathfrak{V}$ et $a > 0$ tels que $\lambda W \subset V$ pour tout $\lambda \in \mathcal{C}$ tel que $|\lambda| \leqslant a$.

Mais les deux dernières conditions peuvent s'exprimer autrement : (L''_{II}) signifie que, si $V \in \mathfrak{V}$, $\lambda V \in \mathfrak{V}$ quel que soit $\lambda \neq 0$, ou encore que $\mathfrak{V}$ est invariant par toute homothétie de rapport $\neq 0$; si maintenant, dans (L''_{III}), on pose $V' = \bigcup_{|\lambda| \leqslant \alpha} \lambda W$, on voit que V' est un voisinage cerclé contenu dans V ; et réciproquement, l'existence d'un tel voisinage contenu dans V entraîne (L''_{III}). Remarquons encore que lorsque V est cerclé (L''_{I}) signifie que V est équilibré par rapport à 0 ; enfin, en tenant compte des axiomes des voisinages de l'unité dans un groupe topologique (Top.gén., ch.III, § 1), nous arrivons au théorème suivant :

<u>**Théorème 1.** Si E est un espace vectoriel topologique, il existe un système fondamental $\mathfrak{S}$ de voisinages de l'origine, invariant par toute homothétie de rapport $\neq 0$, formé d'ensembles cerclés et équilibrés par rapport à 0, et satisfaisant à la condition :</u>

(LV) <u>Quel que soit</u> $V \in \mathfrak{S}$, <u>il existe</u> $W \in \mathfrak{S}$ <u>tel que</u> $W + W \subset V$.

<u>Réciproquement, une base de filtre $\mathfrak{S}$ sur E satisfaisant à ces conditions définit sur E une topologie compatible avec la structure vectorielle complexe de E, et dans laquelle $\mathfrak{S}$ est un système fondamental de voisinages de l'origine.</u>

<u>Remarques</u>. 1) Les mêmes raisonnements, pour une structure d'espace vectoriel topologique <u>réelle</u>, conduisent au résultat suivant : le théorème 1 subsiste, en y remplaçant les mots "<u>ensembles cerclés et équilibrés par rapport à 0</u>" par "<u>ensembles étoilés, symétriques et équilibrés par rapport à 0</u>".

2) On a déjà attiré l'attention sur le fait que, même dans un groupe séparé, un voisinage de l'origine peut être <u>non borné</u> (Top. gén., ch. III, § 1) ; nous rencontrerons par la suite des espaces vectoriels topologiques <u>séparés</u> où <u>tout</u> voisinage de l'origine contient un sous-espace vectoriel à une infinité de dimensions.

3) Soit $x \to \lambda(x)$ une application de E dans $\mathbb{C}$, telle que $|\lambda(x)| \leqslant k$ pour tout x dans un voisinage V de 0 ; la fonction $\lambda(x).x$ est <u>continue</u> au point $x=0$; en effet, si W est un voisinage quelconque de 0, contenu dans V, pour tout $x \in W/k$, on a $\lambda(x).x \in k.(W/k)=W$.

Définition d'une topologie d'espace vectoriel par une famille d'indicatrices. Si $\mathfrak{S}$ est un système fondamental de voisinages de 0 dans un espace vectoriel E, satisfaisant aux conditions du théorème 1, on peut toujours supposer que les ensembles de $\mathfrak{S}$ contiennent leur coque ; car, lorsque V parcourt $\mathfrak{S}$, les ensembles $\overset{-1}{p}_V([0,1])$ forment un système fondamental de voisinages équivalent à $\mathfrak{S}$ (puisqu'on a $V/2 \subset \overset{-1}{p}_V([0,1]) \subset 2V$), et possédant les mêmes propriétés que $\mathfrak{S}$.

On peut en outre toujours supposer que l'intersection de deux ensembles quelconques de $\mathfrak{S}$ (qui est encore un ensemble cerclé, équilibré et contenant sa coque) appartient à $\mathfrak{S}$.

La donnée ~~#~~ de $\mathfrak{S}$ revient alors à celle de l'ensemble Φ des indicatrices des ensembles de $\mathfrak{S}$; cet ensemble est formé de fonctions homogènes et finies ; si $p \in \Phi$, $\lambda p \in \Phi$ quel que soit $\lambda > 0$; enfin, en exprimant que l'intersection de deux ensembles de $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}$, et que $\mathfrak{S}$ satisfait à (LV), on voit que Φ satisfait aux deux conditions suivantes :

(LI_I) L'enveloppe supérieure d'un nombre fini de fonctions de Φ appartient à Φ.

(LI_{II}) Quelle que soit $p \in \Phi$, il existe $\alpha > 0$ et $q \in \Phi$ tels que les relations $q(x) \leqslant \alpha$, $q(y) \leqslant \alpha$ entraînent $p(x+y) \leqslant 1$.

Réciproquement, considérons un ensemble Φ de fonctions homogènes et finies, satisfaisant aux conditions (LI_I) et (LI_{II}) ; il est immédiat que l'ensemble $\mathfrak{S}$ des ensembles $\overset{-1}{p}([0,\lambda])$, où p parcourt Φ et λ parcourt l'ensemble des nombres >0, est formé d'ensembles cerclés et équilibrés et satisfait aux conditions du th. 1, autrement dit, est un système fondamental de voisinages de 0 dans une topologie d'espace vectoriel sur E .

Définition 2. Un ensemble Φ de fonctions homogènes et finies, satisfaisant aux conditions (LI_I) et (LI_{II}) est appelé un système fondamental d'indicatrices.

Toute topologie d'espace vectoriel peut donc être définie par un système fondamental d'indicatrices.

Considérons un ensemble Γ de fonctions homogènes et finies sur E satisfaisant uniquement à la condition :

(LI'_{II}) Quelle que soit $p \in \Gamma$, il existe $a > 0$ et des fonctions $q_1, q_2, \ldots, q_n$ de Γ telles que les conditions $q_i(x) \leqslant a$, $q_i(y) \leqslant a$ $(i=1,2,\ldots,n)$ entraînent $p(x+y) \leqslant 1$.

On en déduit un système fondamental d'indicatrices Φ en prenant l'ensemble des enveloppes supérieures d'un nombre fini de fonctions de Γ . On dit que Γ engendre le système fondamental Φ . Si en outre Γ ne contient aucun couple de fonctions proportionnelles, on dit que Γ est un système réduit d'indicatrices.

On définit de la même manière les systèmes fondamentaux et systèmes réduits d'indicatrices pour les structures d'espace vectoriel topologique réel ; il suffit de remplacer partout "homogène" par "positivement homogène et symétrique" .

Si Φ est un système fondamental d'indicatrices dans E , et si on désigne par $V_{p,a}$ la partie de $E \times E$ définie par $p(x-y) \leqslant a$ les ensembles $V_{p,a}$ forment un système fondamental d'entourages de la structure uniforme de E .

Proposition 1. Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ deux topologies sur un espace vectoriel E , compatibles avec la structure complexe de E , et définies respectivement par deux systèmes fondamentaux d'indicatrices Φ, Φ'. Pour que $\mathcal{T}'$ soit plus fine que $\mathcal{T}$, il faut et il suffit que, pour toute indicatrice $p \in \Phi$, il existe $q \in \Phi'$ et $a > 0$ tels que $p(x) \leqslant a.q(x)$ quel que soit x.

En effet, si $\mathcal{T}'$ est plus fine que $\mathcal{T}$, pour tout $p \in \Phi$ et tout $\lambda > 0$, il existe $q \in \Phi'$ et $\mu > 0$ tels que $\overset{-1}{q}([0,\mu]) \subset \overset{-1}{p}([0,\lambda])$; par suite, pour tout x tel que $p(x) \geqslant \lambda$, on a $q(x) \geqslant \mu$; ceci entraîne $p(x) \leqslant \frac{\lambda}{\mu} q(x)$ en tout point où $p(x) \neq 0$, et l'inégalité est évidente aux autres points de E. La réciproque est immédiate.

Deux systèmes fondamentaux d'indicatrices sont dits équivalents s'ils définissent la même topologie sur E ; la proposition 1 permet d'exprimer la condition pour que Φ et Φ' sont équivalents, en écrivant que chacune des topologies $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ est plus fine que l'autre.

Proposition 2. Une topologie sur un espace vectoriel E, définie par un système fondamental d'indicatrices Φ, est la moins fine des topologies compatibles avec la structure vectorielle de E, et pour lesquelles les fonctions de Φ sont continues à l'origine.

En effet, il est clair que les fonctions de Φ sont continues au point 0. Réciproquement, si les fonctions de Φ sont continues à l'origine dans une topologie $\mathcal{T}$ compatible avec la structure vectorielle de E, pour tout $p \in \Phi$ et tout $\lambda > 0$ $\overset{-1}{p}([0,\lambda])$ est un voisinage de 0 dans E, ce qui exprime que $\mathcal{T}$ est plus fine que la topologie définie par le système Φ.

Si la topologie de E est définie par un système fondamental d'indicatrices Φ, une condition nécessaire et suffisante pour que E soit séparé est que, pour tout $x \neq 0$, il existe une indicatrice $p \in \Phi$ telle que $p(x) \neq 0$; cela exprime en effet que l'intersection des voisinages $\overset{-1}{p}([0,\lambda])$ se réduit au point 0 (Top. gén., ch.III, § 2).

Remarquons enfin que l'<u>intérieur</u> d'un voisinage cerclé et équilibré de 0 est encore un ensemble cerclé et équilibré ; si on remplace les ensembles d'un système fondamental de voisinages $\mathfrak{S}$ satisfaisant aux conditions du th.1 , par les <u>intérieurs</u> de ces ensembles, on obtient donc un système équivalent $\mathfrak{S}'$ satisfaisant aux mêmes conditions, et formé d'ensembles <u>ouverts</u>. Il en résulte que les indicatrices des ensembles de $\mathfrak{S}'$ sont <u>semi-continues supérieurement</u> dans E ; autrement dit, on peut toujours définir une topologie d'espace vectoriel par un système fondamental d'indicatrices semi-continues supérieurement dans cette topologie.

<u>Sous-espaces vectoriels</u>. Soit G un sous-espace vectoriel (complexe ou réel) d'un espace vectoriel E ; l'axiome (L) montre immédiatement que toute topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel de E induit sur G une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel (réelle ou complexe) induite sur G par celle de E . G , muni de la structure d'espace vectoriel et de la topologie induites par les structures correspondantes de E , est dit <u>sous-espace vectoriel topologique</u> (<u>réel</u> ou <u>complexe</u> suivant les cas) de E (pour abréger, on dira souvent "sous-espace vectoriel" au lieu de "sous-espace vectoriel topologique" lorsqu'il n'en résultera pas de confusion).

Si la topologie de E est définie par un système fondamental d'indicatrices Φ , celle de G est définie par le système formé par les <u>restrictions</u> à G des fonctions de Φ .

Les <u>translations</u> dans E étant des homéomorphismes de E sur E , on voit que toute <u>variété linéaire complexe</u> (resp. <u>réelle</u>) (munie de la topologie induite par celle de E) est <u>homéomorphe</u> à un <u>sous-espace vectoriel complexe</u> (resp. <u>réel</u>).

Proposition 3. Dans un espace vectoriel séparé, toute droite homogène complexe (resp. réelle) D est un sous-espace vectoriel isomorphe à $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{R}$).

En effet, soit φ une application vectorielle biunivoque de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{R}$) sur D . Les voisinages de 0 dans E étant équilibrés et cerclés, l'image réciproque par φ d'un tel voisinage contient un ensemble de la forme $|\xi| \leqslant \alpha$ $(\alpha > 0)$, ce qui montre que φ est continue. D'autre part, soit $\xi_0 \neq 0$ un point quelconque de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{R}$), et soit $x_0 = \varphi(\xi_0)$; comme E est séparé par hypothèse, il existe un voisinage cerclé V de 0 dans E ne contenant pas x_0 ; si U désigne, dans $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{R}$) l'ensemble des points ξ tels que $|\xi| \leqslant |\xi_0|$, $\varphi(U)$ contient la trace sur D du voisinage V , donc φ est bicontinue, ce qui établir la proposition.

Corollaire. Dans un espace vectoriel topologique, tout ensemble étoilé est connexe.

En effet, si x est un point d'un ensemble A étoilé par rapport à un point a , le segment fermé d'extrémités a et x est contenu dans A , et ce segment est connexe, comme image continue d'un ensemble connexe dans $\mathcal{R}$.

Remarque. L'hypothèse de la continuité de la fonction λx par rapport à l'ensemble des deux variables λ, x , intervient de façon essentielle (par l'intermédiaire du th.1) dans la proposition 3. On peut en effet donner des exemples de topologies de groupe sur $\mathcal{R}$, distinctes de la topologie de la droite numérique, et pour lesquelles le produit λx est continu par rapport à chacun des deux arguments, mais non par rapport à leur ensemble. (*)

<u>Espace quotient par un sous-espace vectoriel</u>. Soit G un sous-espace vectoriel complexe d'un espace vectoriel topologique E ; on sait (Top.gén., ch.III, § 3) que la topologie quotient de celle de E par la relation d'équivalence $x-y \in G$, est compatible avec la structure de groupe additif de l'espace vectoriel quotient E/G . Pour voir qu'elle est aussi compatible avec la structure d'espace vectoriel complexe de E/G , il suffit de montrer que l'application $(\lambda, \dot{x}) \rightarrow \lambda \dot{x}$ de $\mathbb{C} \times (E/G)$ dans E/G est continue. Or (Top.gén., ch.I, § 9, th.1), il suffit pour cela de voir que l'application $(\lambda, x) \rightarrow \lambda \dot{x}$ de $\mathbb{C} \times E$ dans E/G est continue ($x \rightarrow \dot{x}$ désignant l'application canonique de E sur E/G). Mais cette application est composée de l'application canonique de E sur E/G , et de l'application $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ de $\mathbb{C} \times E$ dans E , qui sont toutes deux continues.

E/G , muni de sa structure d'espace vectoriel quotient de celle de E par G , et de la topologie quotient précédente, est dit espace vectoriel topologique <u>quotient</u> de E par G (pour abréger, on dira souvent simplement "espace vectoriel quotient", si aucune confusion n'en résulte).

Raisonnements et résultats analogues lorsque G est un sous-espace vectoriel <u>réel</u> ; si G n'est pas aussi un sous-espace vectoriel complexe, on ne définit ainsi sur E/G qu'une structure d'espace vectoriel topologique réel.

<u>Remarque</u>. On sait que E/G a une <u>structure d'espace vectoriel</u> isomorphe à celle d'un sous-espace vectoriel <u>supplémentaire</u> de G ; mais il se peut qu'il n'existe aucun sous-espace vectoriel supplémentaire de G , et dont la <u>topologie</u> soit isomorphe à celle de E/G .

33

Les voisinages de l'origine dans E/G sont les images par l'application canonique $x \to \dot{x}$ des voisinages de l'origine dans E. Donc, si Φ est un système fondamental d'indicatrices dans E, et si à tout $p \in \Phi$, on fait correspondre la fonction $\dot{p}$ définie dans E/G par la relation $\dot{p}(\dot{x}) = \inf_{x \in \dot{x}} p(x)$, on obtient dans E/G, un ensemble $\dot{\Phi}$ qui engendre un système fondamental définissant la topologie de E/G.

On sait que, pour que E/G soit <u>séparé</u>, il faut et il suffit que G soit <u>fermé</u> (Top. gén., ch.III, § 3, prop.4). Supposons en particulier que E ne soit pas séparé, et soit N l'adhérence de l'origine dans E (intersection des voisinages de 0) ; on sait que N est un sous-groupe du groupe additif de E ; il est clair en outre que N est invariant par toute homothétie ; donc N est un <u>sous-espace vectoriel fermé</u> de E. L'espace vectoriel quotient E/N, qui est séparé, est dit l'espace séparé <u>associé</u> à l'espace non séparé E.

<u>Fonctions linéaires continues</u>. Soient E et E' deux espaces vectoriels et f une application vectorielle de E dans E' ; si A' est cerclé et équilibré dans E' par rapport à l'origine, $\overset{-1}{f}(A')$ est cerclé et équilibré dans E par rapport à l'origine ; on en conclut que si E' est muni d'une topologie d'espace vectoriel, <u>l'image réciproque</u> de cette topologie par f est compatible avec la structure vectorielle de E.

Dans le cas où E est un sous-espace de E', et f l'application canonique de E dans E', on retrouve ainsi que la topologie induite sur E est compatible avec la structure vectorielle induite sur E.

Si Φ' est un système fondamental d'indicatrices définissant la topologie de E', l'ensemble Φ des fonctions $q \circ f$, où q parcourt Φ', est un système fondamental d'indicatrices définissant la topologie image réciproque par f de celle de E'.

De cette remarque, et de la prop.1, on déduit aussitôt une condition pour qu'une application vectorielle d'un espace vectoriel topologique dans un autre soit continue :

Proposition 4. Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques dont les topologies sont définies respectivement par des systèmes fondamentaux d'indicatrices Φ et Ψ. Pour qu'une application vectorielle f de E dans F soit continue, il faut et il suffit que, pour toute indicatrice $q \in \Psi$, il existe $p \in \Phi$ et $a \geqslant 0$ tels que, pour tout $x \in E$,

(1) $$q(f(x)) \leqslant a.p(x)$$

Si f est une application vectorielle continue de E dans F, $G = \overset{-1}{f}(0)$ est un sous-espace vectoriel de E, qui est fermé si F est séparé. Par la décomposition canonique de f (Ens. R, § 5), on obtient une application vectorielle biunivoque et continue g de E/G sur f(E) ; on dit encore que f est un homomorphisme de E dans F si g est un isomorphisme de E/G sur f(E) ; il faut et il suffit pour cela que l'image par f de tout voisinage de 0 dans E, soit un voisinage de 0 dans F (cf.Top.gén., ch.III, § 3).

Toute application vectorielle continue d'un espace vectoriel topologique E dans un autre F, est en particulier une représentation continue du groupe additif de E dans celui de F, ou, comme on dit encore, une fonction additive continue. Mais, réciproquement, on a la propriété suivante :

Proposition 5. Toute application additive et continue f d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est aussi une application vectorielle réelle de E dans F ; c'est une application vectorielle complexe de E dans F si elle satisfait en outre à l'identité $f(ix) = if(x)$.

En effet, de l'identité $f(x+y)=f(x)+f(y)$, on déduit d'abord, par récurrence $f(nx)=nf(x)$ quel que soit l'entier n ; en remplaçant x par x/n dans cette identité, elle devient $f(x/n)= f(x)/n$, d'où, pour tout r *rationnel*, $f(rx)= rf(x)$; mais alors, si λ est un nombre réel quelconque et $\varepsilon>0$ arbitraire, il existe $\eta>0$ tel que, pour $|\mu-\lambda|\leq\eta$, $|f((\lambda-\mu)x)| = |f(\lambda x)-f(\mu x)|\leq\varepsilon$, et $|(\lambda-\mu)f(x)|\leq\varepsilon$; en prenant μ rationnel, on en déduit $|f(\lambda x)-\lambda f(x)|\leq 2\varepsilon$, et comme ε est arbitraire, $f(\lambda x)= \lambda f(x)$, d'où la proposition.

Produit d'espaces vectoriels topologiques. Soit (E_ι) une famille d'espaces vectoriels topologiques, E leur produit. On sait (Top.gén.,ch.III, §3) que la topologie produit de celles des E_ι est compatible avec la structure de groupe additif produit de celles des E_ι . Montrons en outre que cette topologie est compatible avec la structure vectorielle produit de celles des E_ι ; il suffira de voir que l'application $(\lambda,(x_\iota))\rightarrow(\lambda x_\iota)$ de $\mathbf{C}\times E$ dans E est continue, ou encore (Top. gén., ch.I, §8,th.1) que, pour chaque indice κ , $(\lambda,(x_\iota))\rightarrow\lambda x_\kappa$ est une application continue de $\mathbf{C}\times E$ dans E_κ ; or, cette application est composée de $(\lambda,x_\kappa)\rightarrow\lambda x_\kappa$ et de $(\lambda,x)\rightarrow(\lambda,\mathrm{pr}_\kappa x)$ qui sont toutes deux continues.

On dit que l'espace vectoriel $E = \prod_\iota E_\iota$, muni de la topologie produit des topologies des E_ι , est l'espace vectoriel topologique *produit* des espaces E_ι .

Si la topologie de E_ι est définie par un système fondamental d'indicatrices Φ_ι, les fonctions $p_\iota \circ pr_\iota$ engendrent un système fondamental d'indicatrices de la topologie de E (lorsque ι parcourt l'ensemble des indices, et que p_ι parcourt Φ_ι).

<u>Remarque</u>. On a vu au § 1 que tout espace vectoriel <u>réel</u> E peut être considéré comme sous-espace vectoriel réel de $E \times E$ muni d'une structure vectorielle complexe convenable. Si on suppose que E est muni en outre d'une topologie compatible avec sa structure vectorielle réelle, la topologie produit de celle de E par elle-même est compatible avec la structure vectorielle <u>complexe</u> de $E \times E$. Tout revient à montrer que l'application $(x,y) \rightarrow i(x,y)=(-y,x)$ de $E \times E$ dans lui-même est continue. Or, si V parcourt un système fondamental de voisinages symétriques de 0 dans E, $V \times V$ parcourt un système fondamental de voisinages de (0,0) dans $E \times E$; et, comme l'application $(x,y) \longrightarrow (-y,x)$ applique $V \times V$ dans $V \times V$, elle est continue. On peut donc toujours considérer un espace vectoriel topologique <u>réel</u> comme sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel topologique <u>complexe</u>.

<u>Espaces vectoriels topologiques fonctionnels</u>. Si E est un espace vectoriel topologique, I un ensemble quelconque muni de la topologie discrète, l'espace vectoriel topologique produit E^I n'est autre que l'ensemble des <u>applications continues de I dans E</u>, muni de la structure uniforme de la <u>convergence simple</u>, et de la topologie qui s'en déduit (Top. gén., ch.VIII, § 1).

Plus généralement, considérons l'ensemble $\mathcal{C}(F,E)$ des applications continues d'un espace topologique F dans E. SI $\mathfrak{K}$ est un ensemble de parties de F satisfaisant aux conditions (F'_I) et (F'_{II}), (Top.gén.,ch.VIII, § 1) on sait que la topologie déduite de la structure uniforme $\mathcal{U}_{\mathfrak{K}}$ est compatible avec la structure de groupe additif de $\mathcal{C}(F,E)$; on obtient un système fondamental de voisinages de l'origine dans cette topologie en considérant, pour tout voisinage V de 0 dans E , et tout ensemble $A \in \mathfrak{K}$, l'ensemble U(V,A) des fonctions $u \in \mathcal{C}(F,E)$ telles que $u(A) \subset V$.

Or, $\mathcal{C}(F,E)$ est aussi muni d'une structure vectorielle complexe; cherchons à quelle condition la topologie précédente est <u>compatible</u> avec cette structure vectorielle. On peut se contenter de considérer les ensembles U(V,A) correspondant aux ensembles V d'un système fondamental $\mathfrak{S}$ de voisinages de 0 dans E , satisfaisant aux conditions du th.1 . Il est clair alors que les U(V,A) sont <u>cerclés</u> et que l'ensemble $\mathfrak{S}'$ des U(V,A) est invariant par homothétie et satisfait à la condition (LV) ; tout revient à voir si U(V,A) est un ensemble <u>équilibré</u>, ce qui équivaut à la condition suivante :

(LF) <u>Quels que soient</u> $u \in \mathcal{C}(F,E)$, $A \in \mathfrak{K}$, <u>et</u> $V \in \mathfrak{S}$, <u>il existe</u> $\lambda > 0$ <u>tel que</u> $u(A) \subset \lambda V$.

Cela implique en particulier que u(A) est <u>borné</u> (Top. gén., ch.III, § 1), mais cette condition n'est pas équivalente à la précédente (voir exerc.).

Si p est l'indicatrice de V , celle de U(V,A) n'est autre que la fonction q définie par la relation $q(u) = \sup_{x \in A} p(u(x))$. Si la condition (LF) est remplie, les fonctions q engendrent un système fondamental d'indicatrices de la topologie de $\mathcal{C}_{\mathfrak{K}}(F,E)$, lorsque A parcourt $\mathfrak{K}$ et p un système fondamental d'indicatrices de E.

Considérons plus particulièrement le cas où F est lui-même un <u>espace vectoriel topologique</u>, et soit $\mathcal{L}_{\mathfrak{K}}(F,E)$ la partie de $\mathcal{C}_{\mathfrak{K}}(F,E)$ formée des <u>applications vectorielles continues de F dans E</u>;

si la condition (LF) est vérifiée, $\mathcal{L}_{\mathfrak{H}}(F,E)$ est un <u>sous-espace vectoriel topologique</u> de $\mathcal{C}_{\mathfrak{H}}(F,E)$. On sait en outre (Top. géné., ch. VIII, § 1) que, si la condition (K) est vérifiée par l'ensemble $\mathfrak{H}$, et si E est <u>séparé</u> et <u>complet</u>, $\mathcal{C}_{\mathfrak{H}}(F,E)$ est aussi <u>séparé</u> et <u>complet</u>, et que l'ensemble des <u>représentations continues</u> du groupe additif de F dans celui de E est <u>fermé</u> dans $\mathcal{C}_{\mathfrak{H}}(F,E)$; mais le raisonnement qui sert à démontrer cette proposition s'étend aussitôt aux applications vectorielles continues de F dans E, et montre donc que $\mathcal{L}_{\mathfrak{H}}(F,E)$ est <u>fermé</u> dans $\mathcal{C}_{\mathfrak{H}}(F,E)$, et par suite <u>complet</u>.

La condition (K) ne peut être remplie que si l'ensemble $\mathfrak{H}$ contient au moins un voisinage de 0 dans F. Mais inversement, si on considère un ensemble quelconque $\mathfrak{S}$ de voisinages de 0 dans F, l'ensemble $\mathfrak{H}$ des homothétiques des ensembles de $\mathfrak{S}$ satisfait à la condition (K) ; en outre, on peut se borner à ne considérer, dans $\mathcal{L}_{\mathfrak{H}}(F,E)$ que les voisinages $U(V,A)$ où $A \in \mathfrak{S}$; car les relations $u(\lambda A) \subset V$, et $u(A) \subset V/\lambda$ étant équivalentes, on a $U(\lambda A,V) = U(A,V/\lambda)$.

Il faut remarquer à ce propos qu'il se présente des cas où <u>aucun</u> voisinage de 0 dans F ne peut satisfaire à la condition (LF) ; nous en rencontrerons des exemples par la suite.

Si $\mathfrak{H}$ est l'ensemble des <u>parties finies</u> de F, la condition (LF) est toujours remplie, comme on l'a vu plus haut, mais la condition (K) ne l'est pas ; et en général, l'espace correspondant $\mathcal{L}_c(F,E)$ (espace des applications vectorielles continues de F dans E, muni de la structure de la <u>convergence simple</u>) <u>n'est pas complet</u>, même lorsque E est <u>séparé</u> et <u>complet</u>. Toutefois, dans ce cas, toute partie <u>fermée</u> S de $\mathcal{L}_c(F,E)$, formée de fonctions <u>également continues</u>, est un sous-espace <u>complet</u> de $\mathcal{L}_c(F,E)$ (Top. gén., ch. VIII § 2, prop. 2).

La condition d'égale continuité des fonctions de S s'exprime facilement si on s'est donné les structures de E et F par des systèmes fondamentaux d'indicatrices Φ et Ψ respectivement : pour toute indicatrice $q \in \Phi$, il existe une indicatrice $p_q \in \Psi$ et un nombre $a_q > 0$ tels que, pour tout $x \in F$ et tout $u \in S$, $q(u(x)) \leqslant a_q \cdot p_q(x)$. En effet, cette condition exprime l'égale continuité <u>à l'origine</u> ; mais inversement, si elle est remplie, et si x_0 est un point quelconque de F , on aura $q(u(x)-u(x_0)) \leqslant a_q \cdot p_q(x-x_0)$ pour tout $u \in S$, ce qui montre l'égale continuité <u>au point</u> x_0 .

<u>Complétion d'un espace vectoriel topologique</u>. Soit E un espace vectoriel topologique <u>séparé</u>, $\hat{E}$ son complété. On sait (Top.gén.,ch.III, § 4) que la structure de groupe additif de E se prolonge à $\hat{E}$; montrons de même qu'on peut prolonger à $\hat{E}$ la structure vectorielle topologique de E . Il suffira d'établir qu'on peut prolonger par continuité à $C \times \hat{E}$ la fonction λx définie dans $C \times E$; cela va résulter de la proposition générale suivante :

<u>Proposition 6</u>. <u>Soient</u> E,F,G <u>trois groupes abéliens séparés et complets</u> ; A <u>un sous-groupe partout dense de E ; B un sous-groupe partout dense de F ; soit enfin f une application bilinéaire continue de</u> $A \times B$ <u>dans</u> G ; <u>f peut être prolongée par continuité dans</u> $E \times F$.

En effet, soit (x_0,y_0) un point quelconque de $E \times F$, $\mathfrak{U}_A$, $\mathfrak{V}_B$ les traces sur A et B respectivement, des filtres de voisinages de x_0 et y_0 ; il suffit de montrer que $f(\mathfrak{U}_A \times \mathfrak{V}_B)$ est une base de filtre de Cauchy dans G (Top.gén.,ch.II, § 3,prop.7). Soit donc W un voisinage quelconque de 0 dans G ; il existe un voisinage U de 0 dans E , et un voisinage V de 0 dans F , tels que $f((U+U) \cap A ,(V+V) \cap B) \subset W$. Choisissons $x_1 \in (U+x_0) \cap A$, $y_1 \in (V+y_0) \cap B$

(ce qui est possible, puisque A et B sont partout denses dans E et F respectivement). On peut écrire

$$f(x',y')-f(x,y) = f(x'-x,y_1)+f(x'-x,y'-y_1)+f(x_1,y'-y)$$
$$+f(x-x_1,y'-y)$$

Si les points x,x' sont quelconques dans $(U+x_0)\cap A$, les points y,y' quelconques dans $(V+y_0)\cap B$, on a donc $f(x'-x,y'-y_1)+f(x-x_1,y'-y)\in W+W$. D'autre part, l'application partielle $x\longrightarrow f(x,y_1)$ est continue dans A ; il existe donc un voisinage U' de 0 dans E tel que $f((U'+U')\cap A,y_1)\subset W$; on voit de même qu'il existe un voisinage V' de 0 dans F tel que $f(x_1,(V'+V')\cap B)\subset W$. Si on pose $U_1 = ((U\cap U')+x_0)\cap A$, $V_1=((V\cap V')+y_0)\cap B$, on a donc $U_1\in\mathfrak{U}_A$, $V_1\in\mathfrak{V}_B$, et, si (x,y) et (x',y') sont deux points quelconques de $U_1\times V_1$, on a $f(x',y')-f(x,y)\in W+W+W+W$, d'après ce qui précède, d'où la proposition.

<u>Exercices</u>. 1) Pour que l'application (λ,x) de $\mathbb{C}\times E$ dans E (E espace vectoriel topologique) soit <u>uniformément continue</u> dans un voisinage de l'origine de l'espace $\mathbb{C}\times E$, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage V_0 de 0 dans E, tel que les ensembles λV_0 forment un système fondamental de voisinages de 0 dans E (ce qui entraîne entre autres que la structure uniforme de E est <u>métrisable</u>).

2) Soit E l'espace vectoriel formé de toutes les fonctions complexes <u>bornées</u> définies sur l'intervalle $[0,1[$. Pour tout couple (δ,ε) de nombres >0, on désigne par $V_{\delta,\varepsilon}$ l'ensemble des $x\in E$ tels que $|x(t)|\leqslant\delta$ sauf sur un ensemble formé d'un nombre fini d'intervalles non empiétants, de longueur totale $\leqslant\varepsilon$. Montrer que les $V_{\delta,\varepsilon}$ forment une base de filtre

satisfaisant aux conditions du th.1, et définissent par suite une topologie sur E compatible avec sa structure d'espace vectoriel ; cette topologie n'est pas séparée. Qules que soient δ et ε , il existe un entier $n > 0$ tel que $\overset{n}{+}(V_{\delta,\varepsilon})=E$, mais aucun $\lambda > 0$ tel que $E = \lambda V_{\delta,\varepsilon}$ si $\varepsilon < 1$.

3) Soit E un espace vectoriel à une infinité de dimensions. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}$ de tous les ensembles cerclés et équilibrés par rapport à l'origine ne satisfait pas à l'axiome (LV). (Etant donnée une base vectorielle (x_ι) de E , soit (x_n) une suite infinie extraite de cette base ; pour chaque n , on désigne par A_n l'ensemble des points $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i$, où les nombres complexes t_i décrivent l'ensemble défini par les conditions : $|t_i| \leqslant 1/n$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $t_n \neq 0$; soit A la réunion des A_n , B un sous-espace vectoriel supplémentaire du sous-espace vectoriel engendré par A , C l'ensemble A+B ; montrer qu'il n'existe aucun ensemble M , cerclé et équilibré par rapport à 0 , et tel que $M + M \subset C$.)

§ 3. Ensembles convexes, variétés linéaires et formes linéaires continues dans un espace vectoriel topologique.

Proposition 1. <u>Dans un espace vectoriel topologique, l'adhérence d'un ensemble convexe est un ensemble convexe ; l'adhérence d'une variété linéaire réelle</u> (resp. <u>complexe</u>) <u>est une variété linéaire réelle</u> (resp. <u>complexe</u>).

En effet, soit A un ensemble convexe (resp. une variété linéaire réelle, une variété linéaire complexe) ; pour tout $t \in [0,1]$ (resp. $t \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{C}$), $(x,y) \longrightarrow tx+(1-t)y$ est une application continue de $A \times A$ dans A, donc elle applique $\bar{A} \times \bar{A}$ dans $\bar{A}$ (Top. gén., ch.I, §4,prop.1), ce qui prouve que $\bar{A}$ est convexe (resp. une variété linéaire réelle, une variété linéaire complexe).

Définition 1. Dans un espace vectoriel topologique E, on appelle variété linéaire complexe (resp. réelle) fermée engendrée par une partie A de E, l'adhérence de la variété linéaire complexe (resp. réelle) engendrée par A.

On peut encore dire que la variété linéaire fermée engendrée par A est la plus petite variété linéaire fermée contenant A.

Remarque. On a vu au § 2 que la variété linéaire engendrée par un voisinage quelconque de 0 est l'espace E tout entier ; il en résulte que, si V est une variété linéaire distincte de E, elle ne peut contenir de point intérieur ; en particulier, une variété linéaire fermée et distincte de E est un ensemble épars dans E (Top.gén.,ch.VII, § 2).

Corps convexes. Proposition 2. Si un ensemble convexe A contient un point intérieur x_0, l'intérieur de A est identique à l'ensemble des points internes de A par rapport à x_0 ; la frontière de A est identique à sa coque par rapport à x_0.

En effet, on peut supposer $x_0=0$; soit $x \neq 0$ un point quelconque de A ; quels que soient $z \in A$ et $t \in [0,1[$, A contient le point $tx+(1-t)z$; autrement dit, on a $tx \in tx+(1-t)A \subset A$, et comme $1-t \neq 0$, tx est point intérieur de $(1-t)A+tx$, et par suite de A.

Si x est un point de la coque de A, et V un voisinage quelconque de 0, il existe $t \in]0,1]$ tel que $tx \in V$; donc $(1-t)x \in (V+x) \cap A$, $(1+t)x \in (V+x) \cap (\complement A)$, ce qui montre que x est point frontière de l'ensemble A (ceci s'applique même si A est simplement étoilé par rapport à l'origine). Enfin, soit x un point n'appartenant pas à A ni à sa coque ; il existe donc $t < 1$ tel que, pour $0 \leqslant t' < t$, $t'x \in A$, et pour $t'' > t$, $t''x \in \complement A$; il en résulte que, pour y intérieur à A, le point $x+(1-1/t)y$ n'appartient pas à A, sans quoi, comme $tx = t(x+(1-1/t)y)+(1-t)y$, tx serait intérieur à A, ce qui est absurde, tx étant un point de la coque de A ; l'ensemble $x+(1-1/t)\overset{\circ}{A}$ est donc un voisinage de x ne rencontrant pas A, autrement dit, x est extérieur à A, ce qui achève de démontrer la proposition.

<u>Définition 2</u>. <u>Dans un espace vectoriel topologique, on appelle corps convexe un ensemble convexe fermé et contenant un point intérieur</u>.

On voit donc que si un ensemble convexe A contient un point intérieur, son adhérence est un <u>corps convexe</u> ; l'intérieur de A est identique à l'intérieur de $\bar{A}$, l'adhérence de A à l'adhérence de $\overset{\circ}{A}$.

On retrouve ainsi le fait que, dans R^n, l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et même rayon, l'intérieur d'une boule fermée la boule ouverte de même centre et même rayon, la frontière d'une boule (ouverte ou fermée) la sphère de même centre et même rayon. D'une façon générale, la structure des ensembles convexes dans R^n est particulièrement simple : <u>pour qu'un ensemble convexe A dans R^n ait un point intérieur, il faut et il suffit que la variété linéaire engendrée par A soit identique à R^n</u>.

La condition est évidemment <u>nécessaire</u> ; pour voir qu'elle est <u>suffisante</u>, remarquons que, si elle est remplie, A contient un système libre de $n+1$ points ; par une transformation linéaire biunivoque, on peut transformer ces $n+1$ points en l'origine et les n vecteurs unitaires e_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; le transformé de A , qui est convexe, contient alors le pavé $\prod_{i=1}^{n} [0,1/n]$, donc contient un point intérieur, d'où la proposition. On en déduit que, si un ensemble convexe dans R^n engendre une variété linéaire à p dimensions $(p \leqslant n)$ il possède un point intérieur par rapport à cette variété.

La proposition précédente montre aussi que, pour qu'un point x_0 d'un ensemble convexe $A \subset R^n$ soit intérieur à A , il faut et il suffit que A soit équilibré par rapport à x_0. Cette proposition est inexacte pour les espaces vectoriels topologiques à une infinité de dimensions : on peut donner des exemples d'ensembles convexes équilibrés par rapport à chacun de leurs points, mais ne contenant aucun point intérieur (voir ch.III, § exerc.).

Hyperplans fermés et formes linéaires continues. Proposition 3. Pour qu'un hyperplan complexe (resp. réel) soit fermé, il faut et il suffit que son complémentaire ait un point intérieur.

La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, si un hyperplan H (réel ou complexe) n'est pas fermé, son adhérence est une variété linéaire distincte de H et contenant H , donc nécessairement l'espace tout entier ; autrement dit, H est partout dense dans E , d'où la proposition.

Théorème 1. Pour qu'un hyperplan homogène complexe (resp. réel) soit fermé, il faut et il suffit que le premier membre de son équation soit une forme linéaire complexe (resp. réelle) continue.

La condition est évidemment suffisante (Top.gén.,ch.I, §4,th.2).

Réciproquement, soit H un hyperplan homogène complexe (resp. réel) fermé, x_0 un point de $\complement H$; tout point $x \in E$ se met d'une manière et d'une seule sous la forme $x = t(x).x_0 + y(x)$, où $t(x) \in \mathbb{C}$ (resp. $t(x) \in R$) et $y(x) \in H$; nous allons voir que t est une forme linéaire complexe (resp. réelle) continue dans E . Il suffit de montrer qu'elle est continue au point $x=0$. Supposons le contraire : il existerait un nombre $a > 0$ tel que, dans tout voisinage cerclé V de 0 dans E , il existe un point z tel que $|t(z)| \geqslant a$, et par suite aussi un point z' tel que $t(z')=a$. Autrement dit, si H' désigne l'hyperplan d'équation $t(x)=a$, on aurait $H' \cap V \neq \emptyset$, ce qui signifie que le point 0 est adhérent à H' ; or H', qui se déduit de H par translation, est fermé par hypothèse, et ne contient pas l'origine, d'où contradiction, ce qui prouve le théorème.

Corollaire. Si H est un hyperplan réel fermé, les demi-espaces fermés (resp. ouverts) déterminés par H sont des ensembles fermés (resp. ouverts).

En effet, si H a pour équation $f(x)=a$, f est continue, et les demi-espaces fermés (resp. ouverts) déterminés par H sont les ensembles $\overset{-1}{f}([a,+\infty[)$, $\overset{-1}{f}(]-\infty,a])$ (resp. $\overset{-1}{f}(]a,+\infty[)$, $\overset{-1}{f}(]-\infty,a[)$) ; d'où la proposition.

Proposition 4. Pour qu'une forme linéaire f (réelle ou complexe) soit continue dans E , il faut et il suffit qu'il existe un voisinage de l'origine V tel que, si $p_{K(V)}$ désigne l'indicatrice de l'enveloppe convexe de V , on ait, pour tout $x \in E$,

$$|f(x)| \leqslant p_{K(V)}(x)$$

La condition est évidemment suffisante (§ 2, prop. 4) .

Réciproquement, soit f une forme linéaire complexe continue, et H l'hyperplan d'équation $f(x)=1$. H est contenu dans l'hyperplan réel K d'équation $\mathcal{R}f(x)=1$, qui est fermé, puisque $\mathcal{R}f$ est continue. L'origine 0 est contenue dans le demi-espace ouvert $\mathcal{R}f(x) < 1$, donc il existe un voisinage V cerclé de 0 contenu dans ce demi-espace ; comme ce demi-espace est convexe, $\underline{K}(V)$ y est contenu ; on a donc, quel que soit $x \in E$, $\mathcal{R}f(x) \leq p_{\underline{K}(V)}(x)$, d'où, pour $|\varepsilon| = 1$, $\mathcal{R}(\varepsilon f(x)) = \mathcal{R}f(\varepsilon x) \leq p_{\underline{K}(V)}(\varepsilon x) = p_{\underline{K}(V)}(x)$, c'est-à-dire $|f(x)| \leq p_{\underline{K}(V)}(x)$. Démonstration analogue pour les formes linéaires réelles.

<u>Corollaire</u>. <u>Pour qu'il existe une forme linéaire continue non identiquement nulle dans E, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage de l'origine dont l'enveloppe convexe ne soit pas identique à l'espace E tout entier</u>.

C'est évidemment <u>nécessaire</u> d'après la prop.1. Inversement, supposons qu'il existe un voisinage cerclé convexe V de l'origine, non identique à E. Si $x_0 \notin V$, et si D est la droite complexe joignant x_0 à l'origine, tout point de D est de la forme $x = tx_0$, $t \in \mathbb{C}$; la fonction $f(x)=t$ est une forme linéaire définie sur D, et on a $|f(x)| \leq p_V(x)$ en tout point de D. D'après la prop.1 du § 1, il existe donc une forme linéaire complexe $\overline{f}$ qui prolonge f à E, et est telle que $|\overline{f}(x)| \leq p_V(x)$ dans E ; $\overline{f}$ est donc continue et non identiquement nulle, d'où la proposition.

On peut donner des exemples d'espaces <u>séparés</u> où la condition précédente n'est pas remplie, et où il n'existe donc aucune forme linéaire non identiquement nulle (voir exerc. 1). Dans un tel espace, tout hyperplan est donc <u>partout dense</u>.

Sous-espaces vectoriels à n dimensions. Proposition 5. Dans un espace vectoriel séparé, tout sous-espace vectoriel à n dimensions complexes (resp. réelles) est isomorphes à $\mathcal{C}^n$ (resp. R^n).

La proposition étant vraie pour n=1 (§ 2,prop.3), nous la démontrerons par récurrence sur n. Remarquons d'abord, avec les notations du th.1, que l'application $x \to (t(x),y(x))$ de E sur l'espace produit $\mathcal{C}\times H$, est un isomorphisme ; car t(x) est continue donc aussi $y(x)=x-t(x).x_0$; et réciproquement, l'application $(t,y) \to tx_0+y$ de $\mathcal{C}\times H$ dans E est continue. Considérons alors un sous-espace vectoriel G de E, à n dimensions complexes ; soit K un sous-espace vectoriel de G à n-1 dimensions complexes ; K est aussi un sous-espace de E, donc est isomorphe à $\mathcal{C}^{n-1}$, d'après l'hypothèse ; il est donc complet, et par suite fermé dans G. Mais, dans G, K est un hyperplan fermé ; G est donc isomorphe à $\mathcal{C}\times K$, d'après la remarque précédente, et par suite à $\mathcal{C}\times\mathcal{C}^{n-1}$, c'est-à-dire à $\mathcal{C}^n$. Démonstration analogue pour les sous-espaces vectoriels réels à un nombre fini de dimensions.

Corollaire. Dans un espace vectoriel séparé, tout sous-espace vectoriel à un nombre fini de dimensions (complexes ou réelles) est fermé.

En effet, c'est un sous-espace complet, d'après la prop. 4.

Proposition 6. Si un sous-espace vectoriel complexe (resp. réel) fermé G d'un espace vectoriel séparé E a pour supplémentaire un sous-espace vectoriel à n dimensions complexes (resp. réelles) K, E est isomorphe à l'espace produit $G\times K$.

Nous venons de le voir pour n=1 ; démontrons-le par récurrence sur n. Soit K' un sous-espace vectoriel de K, à n-1 dimensions complexes (resp. réelles), K'' une droite homogène complexe (resp. réelle), supplémentaire de K' par rapport à K ; K'' est aussi supplémentaire de $G+K'$, qui est un hyperplan H de E . Or, G est fermé dans le sous-espace H , et K' est supplémentaire de G dans H ; H est donc isomorphe à $G \times K'$. D'autre part H est <u>fermé</u> dans E ; car, dans l'espace quotient E/G , qui est séparé et à n dimensions complexes (resp. réelles), l'image canonique de H est un sous-espace à $n-1$ dimensions, qui est fermé dans E/G , d'après la prop.4 . E est donc isomorphe à $H \times K''$, donc à $(G \times K') \times K''$, et par suite à $G \times (K' \times K'')$; comme $K' \times K''$ est isomorphe à K , d'après la prop.4, la proposition est démontrée.

<u>Exercices</u>. 1) Montrer que, dans l'espace E défini dans l'exerc.2 du § 2, ainsi que dans l'espace séparé E' associé à E , il n'existe aucune forme linéaire continue non identiquement nulle (si f est une forme linéaire continue, bornée sur un $V_{\delta,\varepsilon}$, montrer que $f(x)=0$ pour toute fonction $x \in V_{\delta,\varepsilon}$, nulle dans $[0,1[$ sauf sur un ensemble formé d'un nombre fini d'intervalles non empiétants, de longueur totale $\leqslant \varepsilon$).

2) Soit (E_ι) une famille d'espaces vectoriels topologiques E leur produit. A toute forme linéaire continue f_ι sur E_ι , on fait correspondre la forme linéaire continue sur E , $f'_\iota = f_\iota \circ pr_\iota$. Montrer que toute forme linéaire continue sur E est une combinaison linéaire d'un nombre <u>fini</u> de formes f'_ι .

3) Dans un espace vectoriel topologique, l'enveloppe convexe d'un ensemble ouvert est un ensemble ouvert. Donner un exemple d'une partie <u>fermée</u> de R^2 dont l'enveloppe convexe <u>n'est pas un ensemble fermé</u>.

4) Dans un espace vectoriel topologique à un nombre <u>fini</u> de dimensions réelles, l'enveloppe convexe d'un ensemble <u>compact</u> est un ensemble <u>compact</u> (utiliser l'exerc. 4 du § 1).

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^I$, où I est un ensemble <u>infini</u> quelconque, on désigne par e_ι ($\iota \in I$) le point dont toutes les coordonnées sont 0, à l'exception de celle d'indice ι ("vecteurs unitaires"). Si A est la partie de $\mathbb{R}^I$ formée de l'origine et des points e_ι ($\iota \in I$), montrer que A est compact, mais que son enveloppe convexe n'est pas fermée dans $\mathbb{R}^I$.

§ 4. <u>Espaces localement convexes</u>.

<u>Définition 1</u>. <u>On dit qu'un espace vectoriel topologique E est localement convexe lorsqu'il existe un système fondamental de voisinages de l'origine formé d'ensembles convexes</u>.

On peut encore exprimer cette définition de la manière équivalente suivante : un espace vectoriel topologique E est localement convexe si les <u>enveloppes convexes</u> des voisinages de l'origine forment un système fondamental de voisinages.

Les voisinages convexes de l'origine dans un espace localement convexe sont des ensembles cerclés, équilibrés ; leur ensemble $\mathfrak{S}$ est invariant par homothétie et vérifie (LV) : mais, en raison de la relation $V+V=2V$, valable pour les ensembles convexes, la condition (LV) est ici une conséquence de l'invariance de $\mathfrak{S}$ par homothétie. Autrement dit, dans un espace vectoriel E, <u>toute base de filtre $\mathfrak{S}$ formée d'ensembles convexes, cerclés et équilibrés par rapport à l'origine et invariante par homothétie, est un système fondamental de voisinages d'une topologie compatible avec la structure vectorielle de E</u>.

__Exemples__. 1) L'ensemble $\mathfrak{K}_0$ de __tous__ les ensembles convexes cerclés et équilibrés par rapport à 0 définit sur E une topologie d'espace localement convexe ; c'est évidemment __la plus fine__ de toutes. Dans cette topologie, __tout hyperplan complexe est fermé__, car si H est un hyperplan complexe ne passant pas par 0 , il est l'intersection de deux hyperplans réels K,K' ne passant pas par 0 ; si V,V' sont les demi-espaces ouverts contenant 0 déterminés par K et K' respectivement $W = V \cap V'$ est un ensemble convexe contenant 0 , équilibré par rapport à 0 et ne rencontrant pas H . Soit W' l'intersection des ensembles εW , lorsque ε parcourt le cercle unité $|\varepsilon| = 1$; W' est convexe et cerclé par rapport à 0 , et ne rencontre pas H ; il suffit de voir que W' est équilibré par rapport à 0 . Or, soit D une droite complexe homogène ; $D \cap W$ est un ensemble convexe A contenu dans un espace vectoriel à deux dimensions réelles ; soit x un point de D tel que x et ix soient des points de A/2 (il en existe, puisque A est équilibré par rapport à 0) ; tout point εx , avec $|\varepsilon| \leqslant 1$, appartient alors à A , donc à W' ; leur ensemble est équilibré par rapport à 0 , d'où la proposition. Dans la topologie définie par $\mathfrak{K}_0$, toute forme linéaire complexe sur E est donc __continue__.

2) Etant donnée une topologie $\mathcal{C}$ d'espace vectoriel sur E , l'ensemble des enveloppes convexes des voisinages de 0 dans E est un système fondamental de voisinages dans la topologie localement convexe __la plus fine__ de toutes celles qui sont __moins fines__ que $\mathcal{C}$; cette topologie est appelée la topologie localement convexe __adjointe__ à la topologie $\mathcal{C}$. D'après la prop.3 du § 3, les formes linéaires continues sont __les mêmes__ pour la topologie $\mathcal{C}$ et pour son adjointe.

Comme tout voisinage convexe V de l'origine satisfait à la relation $\overset{n}{+} V = nV$, quel que soit l'entier $n > 0$, la définition d'un ensemble <u>borné</u> dans un espace localement convexe (Top.gén., ch.III, § 1) équivaut à la suivante : <u>un ensemble A est borné si, quel que soit le voisinage V de 0, il existe un nombre réel $\lambda > 0$ tel que $A \subset \lambda V$.</u>

<u>Semi-normes</u>. Si $\mathfrak{S}$ est un système fondamental de voisinages convexes cerclés de l'origine, dans un espace localement convexe E, les indicatrices des ensembles de $\mathfrak{S}$ forment un système fondamental d'indicatrices <u>convexes</u> définissant la topologie de E.

Réciproquement, <u>tout</u> ensemble Γ de fonctions <u>convexes</u>, <u>homogènes</u> et <u>finies</u> sur un espace vectoriel E <u>engendre</u> un système fondamental d'indicatrices définissant une topologie localement convexe $\mathcal{C}$ sur E ; en effet, en vertu de la relation de convexité $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$ il est immédiat que Γ satisfait à (LI'_{II}).

On dit que Γ est un système de <u>semi-normes</u> définissant la topologie $\mathcal{C}$; le système fondamental d'indicatrices <u>engendré</u> par Γ est encore un système de semi-normes définissant $\mathcal{C}$.

En vertu de l'inégalité $|p(x)-p(y)| \leq p(x-y)$, on voit en outre que les semi-normes d'un système Γ définissant la topologie $\mathcal{C}$ sont <u>uniformément continues</u> dans E, au sens de la structure uniforme correspondant à $\mathcal{C}$; les fonctions $p(x-y)$ ($p \in \Gamma$) forment un système d'<u>écarts</u> définissant cette structure uniforme (Top.gén., ch.VII, § 1).

<u>Sous-espaces vectoriels, espaces quotients et espaces produits d'espaces localement convexes.</u> Il est clair que tout sous-espace vectoriel d'un espace localement convexe est un espace localement convexe ; il en est de même de tout espace quotient d'un espace localement convexe, l'image d'un ensemble convexe par une application linéaire étant convexe (voir § 2). Enfin, comme tout produit d'ensembles convexes est convexe, le produit d'une famille d'espaces localement convexes est localement convexe. Plus généralement, si un espace vectoriel E est localement convexe, l'espace $\mathcal{C}_{\mathfrak{X}}(F,E)$ (où $\mathfrak{X}$ satisfait à la condition (LF)) est un espace localement convexe, d'après la définition d'un système fondamental d'indicatrices de la topologie de cet espace (§ 2).

<u>Complétion d'un espace localement convexe.</u> Si Γ est un système fondamental de semi-normes définissant la topologie d'un espace localement convexe séparé E , les fonctions de Γ , qui sont uniformément continues dans E , se prolongent par continuité dans le complété $\hat{E}$ de E ; soit $\overline{\Gamma}$ l'ensemble de ces fonctions prolongées. D'après le principe de prolongement des inégalités (Top.gén.,ch.IV, § 5), les fonctions de $\overline{\Gamma}$ sont <u>convexes</u> dans $\hat{E}$, et évidemment homogènes. En outre, si $\overline{p}$ désigne le prolongement à $\hat{E}$ de la fonction $p \in \Gamma$, les fonctions $\overline{p}(x-y)$ forment un système d'écarts définissant la structure uniforme de $\hat{E}$ (Top.gén.,ch.VII, §1) ; les fonctions $\overline{p}$ forment donc un système fondamental d'indicatrices de $\hat{E}$, d'où résulte ~~que~~ que $\hat{E}$ est <u>localement convexe</u>, et que les semi-normes définissant la topologie de E se prolongent en semi-normes définissant la topologie de $\hat{E}$.

Notons encore que, dans un espace localement convexe <u>complet</u> E , dont la topologie est définie par un système de semi-normes Φ , une condition *suffisante* pour qu'une famille (x_ι) de points de E soit *sommable* (Top.gén.,ch.III, §2) est que, pour toute semi-norme $p \in \Phi$, $\sum_\iota p(x_\iota)$ soit *finie*. En effet, pour toute partie finie H de l'ensemble d'indices I , posons $s_H = \sum_{\iota \in H} x_\iota$; si $\sum_\iota p(x_\iota)$ est finie, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie H_0 de I telle que, pour toute partie finie H de I ne rencontrant pas H_0 , on ait $\sum_{\iota \in H} p(x_\iota) \leq \varepsilon$; comme p est convexe, on en déduit $p(s_H) = p(\sum_{\iota \in H} x_\iota) \leq \sum_{\iota \in H} p(x_\iota) \leq \varepsilon$; comme cela s'applique à toute semi-norme de Φ par hypothèse, l'image par l'application $H \rightarrow s_H$ du filtre des sections sur l'ordonné filtrant des parties finies de I , est une base de filtre de Cauchy sur E , donc converge dans E .

Cette condition suffisante n'est pas nécessaire en général (voir).

Formes linéaires continues et variétés linéaires fermées. *Proposition 1*. *Soient E un espace vectoriel topologique, A un corps convexe dans E , G une variété linéaire complexe* (resp. *réelle*) , *ne pénétrant pas dans A . Il existe un hyperplan complexe* (resp. *réel*) *fermé contenant G et ne pénétrant pas dans A* .

Considérons d'abord le cas où G est une variété linéaire réelle ; d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe un hyperplan réel H contenant G et ne pénétrant pas dans A ; comme $\complement H$ contient l'intérieur de A , donc au moins un point intérieur, H est *fermé*.

Si G est une variété linéaire complexe, qu'on peut supposer homogène, il existe un hyperplan réel H fermé d'équation $f(x)=0$, contenant G et ne pénétrant pas dans A ; f étant continue, l'hyperplan réel H' d'équation $f(ix)=0$ est fermé, donc l'hyperplan complexe $H \cap H'$, qui contient G et ne pénètre pas dans A , est fermé.

En particulier, tout *hyperplan d'appui* d'un corps convexe est *fermé*, et on sait que, par tout point frontière du corps convexe, il passe au moins un hyperplan d'appui.

Corollaire 1. Dans un espace localement convexe, si G est une variété linéaire fermée et x_0 *un point de* $\complement G$ *, il existe un hyperplan fermé contenant G et ne contenant pas* x_0 .

En effet, x_0 étant intérieur à $\complement G$, il existe un ensemble ouvert convexe A contenant x_0 et ne rencontrant pas G ; l'application du th.1 montre qu'il existe un hyperplan fermé contenant G et ne rencontrant pas A .

Corollaire 2. Dans un espace localement convexe, la variété linéaire fermée engendrée par une partie A est l'intersection des hyperplans fermés contenant A .

En effet, cette intersection contient la variété linéaire fermée G engendrée par A ; et si $x_0 \in \complement G$, il existe un hyperplan fermé contenant G et ne contenant pas x_0 .

Corollaire 3. Dans un espace localement convexe séparé, si V est un sous-espace vectoriel à n dimensions, il existe un sous-espace vectoriel fermé supplémentaire de V .

La proposition est une conséquence du corollaire 1 si $n=1$; il suffit de l'appliquer à un point $x_0 \neq 0$ de V , et à la variété linéaire G réduite au point 0 , qui est fermée. Si maintenant V est à n dimensions $(n > 1)$, soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base vectorielle de V ; il existe un hyperplan fermé H_i supplémentaire de la droite homogène passant par a_i ; l'intersection des H_i est un sous-espace vectoriel supplémentaire de V , et il est fermé.

Théorème 1. Soit E un espace localement convexe, G un sous-espace vectoriel de E, f une forme linéaire continue définie dans G ; il existe une forme linéaire continue $\bar{f}$ qui est un prolongement de f à E.

En effet, si la structure de E est définie par une famille Φ de semi-normes il existe $a > 0$ et $p \in \Phi$ tels que $|f(x)| \leq a.p(x)$ en tout point de G. D'après la prop.1 du § 1, il existe donc une forme linéaire $\bar{f}$ qui prolonge f à E et est telle que $|\bar{f}(x)| \leq a.p(x)$ quel que soit $x \in E$, ce qui montre que $\bar{f}$ est continue.

Corollaire. Soient E un espace localement convexe, $x_0 \neq 0$ un point de E, p une semi-norme telle que $p(x_0) \neq 0$; il existe une forme linéaire continue f telle que $f(x_0) = p(x_0)$ et $|f(x)| \leq p(x)$ quel que soit $x \in E$.

On peut le déduire du th.1, en remarquant que si, pour tout point $x = tx_0$ on pose $g(x) = t$, g est une forme linéaire continue sur la droite homogène passant par x_0, telle que $|g(x)| = p(x)$. On peut aussi remarquer que la proposition exprime simplement que, par le point x_0 de la frontière du corps convexe $p(x) \leq p(x_0)$ passe un hyperplan d'appui fermé.

Proposition 2. Dans un espace vectoriel topologique E, soit A un corps convexe, et B un ensemble convexe ne contenant aucun point intérieur de A ; il existe un hyperplan réel fermé séparant A et B.

En effet, il existe un hyperplan réel H séparant A et B (§ 1, prop. 2) et comme H ne pénètre pas dans A, $\complement H$ contient un point intérieur, donc H est fermé.

Corollaire. Dans un espace localement convexe, tout ensemble convexe fermé est une intersection de demi-espaces fermés déterminés par des hyperplans fermés.

En effet, soit A un ensemble convexe fermé dans un espace localement convexe E . Si $x_0 \in \complement A$, il existe un voisinage convexe ouvert V de x_0 , ne rencontrant pas A ; il existe donc un hyperplan fermé H séparant A et V , et x_0 n'est pas dans le demi-espace fermé déterminé par H et contenant A .

Ensembles précompacts dans un espace localement convexe.

Soit A un ensemble précompact dans un espace vectoriel topologique séparé E ; quel que soit le voisinage V de l'origine, il existe un nombre fini de points a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ tels que A soit contenu dans la réunion des voisinages $V+a_i$; en particulier, si G est le sous-espace vectoriel engendré par les points a_i (et dont le nombre de dimensions est $\leqslant n$), A est contenu dans $V+G$.

Proposition 3. Tout espace localement convexe localement précompact a un nombre fini de dimensions.

En effet, supposons qu'il existe une semi-norme p dans E telle que le voisinage $V = \overset{-1}{p}([0,1])$ de l'origine soit précompact ; ce voisinage est donc borné, autrement dit, quel que soit le voisinage W de 0, il existe λ tel que $V \subset \lambda W$, ou encore $V/\lambda \subset W$; mais cela exprime que les ensembles λV , où λ parcourt l'ensemble des nombres >0 , forment un système fondamental de voisinages de l'origine, ou encore que la structure de E est définie par la seule semi-norme p ; E étant séparé, on a d'ailleurs $p(x)\neq 0$ pour $x\neq 0$ (nous étudierons de manière détaillée les espaces de cette nature au ch.III).

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace vectoriel G à un nombre fini de dimensions, tel que $V \subset G + \varepsilon V$. Si E a une infinité de dimensions, il existe un point $x \in \complement G$; d'après ce qui précède, comme G est fermé, $p(y-x)$ a une borne inférieure $d>0$ lorsque y parcourt G ; prenons $y\in G$ tel que $d\leq p(y-x)\leq d/(1-\varepsilon)$, puis posons $x_0=(x-y)/p(x-y)$. On a évidemment $p(x_0)=1$; d'autre part, quel que soit $z\in G$, le point $y+p(x-y)z$ appartient à G ; donc

$$p(x_0-z) = p(x-(y+p(x-y)z))/p(x-y) \geqslant 1-\varepsilon$$

Mais $x_0\in V$, et par hypothèse, il existe $z\in G$ tel que $p(x_0-z)\leq\varepsilon$; on a donc une contradiction, puisque ε est arbitrairement petit.

Exercices. 1) Soit E un espace vectoriel à une infinité de dimensions, (e_ι) une base vectorielle de E. Pour tout $x=\sum_{\iota\in H} x_\iota e_\iota$ (H fini), on pose $p(x)=\left(\sum_{\iota\in H}\sqrt{|x_\iota|}\right)^2$; montrer que l'ensemble réduit à la seule fonction p est un système fondamental d'indicatrices d'une structure d'espace vectoriel topologique sur E, qui n'est pas localement convexe ; montrer qu'il existe des formes linéaires continues non identiquement nulles dans E.

2) Dans un espace localement convexe, l'enveloppe convexe d'un ensemble précompact est un ensemble précompact.

3) Montrer que l'espace séparé associé à l'espace E défini dans l'exerc.2 du § 2 n'est pas localement précompact.
