La conjecture de Schanuel

Michel WALDSCHMIDT
(Orsay 22 mai 1973)

La conjecture la plus générale concernant les propriétés de transcendance de la fonction exponentielle a été énoncée par S. Schanuel (cf. [5] p. 30).

(S) Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, alors le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps

$$\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n, e^{x_1}, \ldots, e^{x_n})$$

est supérieur ou égal à n .

Cette conjecture (S) contient toutes les propriétés connues sur la nature arithmétique des valeurs de la fonction exponentielle (mises à part, évidemment, les propriétés liées aux approximations diophantiennes) ; elle est également réputée contenir toutes les conjectures raisonnables que l'on peut énoncer sur ces valeurs. Nous étudions ici plusieurs conséquences de (S) .

Préliminaires

Nous noterons $\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels, $\overline{\mathbb{Q}}$ le corps des nombres algébriques, c'est-à-dire la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$.

Si E est une extension d'un corps k et si $x_1,\ldots,x_n$ sont des éléments de E , on dit que $x_1,\ldots,x_n$ sont algébriquement indépendants sur k (ou bien qu'ils forment une partie algébriquement libre de E sur k) si l'homomorphisme canonique

$$\beta : k[X_1,\ldots,X_n] \to k[x_1,\ldots,x_n] ,$$

(de l'anneau des polynômes sur k à n indéterminées, sur le sous-anneau de E engendré par $x_1,\ldots,x_n$), défini par

$$\beta(X_i) = x_i \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n ,$$

est un isomorphisme.

Dans ces conditions, tout sous-ensemble de l'ensemble $\{x_1,\ldots,x_n\}$ forme une partie algébriquement libre de E sur k ; en particulier chacun des x_i est transcendant sur k .

On dira donc qu'une partie F de E est algébriquement libre sur k si toute partie finie de F est algébriquement libre sur k .

Une partie B de E est une base de transcendance de E sur k si B vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :

(i) B est une partie maximale algébriquement libre de E sur k.

(ii) B est une partie algébriquement libre de E sur k , et E est une extension algébrique de $k[B]$.

(iii) B est une partie minimale de E telle que E soit une extension algébrique de $k[B]$.

Toute extension E de k admet une base de transcendance, et deux telles bases sont équipotentes. Si E admet une base de transcendance finie, le nombre $n \geqslant 0$ d'éléments de cette base est appelé <u>degré de transcendance</u> (ou <u>dimension algébrique</u>) de E sur k, et noté

$$n = \dim_k E .$$

Si E_1 (resp. k_1) est une extension algébrique de E (resp. k), on a

$$\dim_k E = \dim_{k_1} E_1 = \dim_{k_1} E = \dim_k E_1 .$$

Notons qu'une extension de k est algébrique si et seulement si elle a un degré de transcendance nul sur k.

Par convention, nous dirons que des nombres complexes $x_1,\ldots,x_q$ sont <u>algébriquement indépendants</u> s'ils sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ (ou sur $\overline{\mathbb{Q}}$, cela revient au même), c'est-à-dire si

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(x_1,\ldots,x_q) = q .$$

Un nombre complexe est dit <u>transcendant</u> (resp. <u>algébrique</u>) s'il est transcendant sur $\mathbb{Q}$ (resp. algébrique sur $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire dans $\overline{\mathbb{Q}}$).

Enfin nous dirons qu'un nombre complexe ℓ est un <u>logarithme</u> d'un nombre a si $e^{\ell} = a$; en particulier, un nombre ℓ est un logarithme d'un nombre algébrique si $e^{\ell} \in \overline{\mathbb{Q}}$. Par exemple $i\pi$ est un logarithme d'un nombre algébrique.

La notation Log sera utilisée exclusivement pour désigner le logarithme népérien d'un nombre réel positif.

§1. Le théorème de Lindemann-Weierstrass

Le plus ancien résultat d'indépendance algébrique, dû à Lindemann et Weierstrass [4, 5, 8], résoud la conjecture (S) dans le cas particulier où $x_1,\ldots,x_n$ sont algébriques.

Théorème 1.1. *Si $x_1,\ldots,x_n$ sont des nombres algébriques, $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, alors les nombres*

$$e^{x_1},\ldots,e^{x_n}$$

sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

On peut énoncer ce résultat sous la forme équivalente suivante :

Théorème 1.2. *Si $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ sont des nombres algébriques deux à deux distincts, alors les nombres*

$$e^{\alpha_1},\ldots,e^{\alpha_m}$$

sont $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants.

On déduit de cet énoncé le théorème de Hermite Lindemann :

Théorème 1.3. *Si $\alpha \neq 0$ est algébrique, alors e^{α} est transcendant.*

Donc, si $\ell \neq 0$ est un logarithme d'un nombre algébrique, alors ℓ est transcendant. En particulier

Théorème 1.4. *Le nombre π est transcendant.*

En choisissant $x_1 = 1$ et $x_2 = i\pi$, on constate que (S) implique également la

<u>Conjecture</u> 1.5. <u>Les deux nombres</u> e <u>et</u> π <u>sont algébriquement indépendants.</u>

En fait (S) contient des propriétés encore plus fortes sur e et π (voir (4.1) et (4.2)).

§2. <u>Indépendance algébrique de logarithmes</u>

Après avoir examiné le cas où $x_1,\ldots,x_n$ sont algébriques, il est naturel d'examiner le cas où $e^{x_1},\ldots,e^{x_n}$ sont algébriques ; la conclusion de (S) est alors l'indépendance algébrique de $x_1,\ldots,x_n$.

<u>Conjecture</u> 2.1. <u>Soient</u> $\ell_1,\ldots,\ell_n$ <u>des logarithmes de nombres algébriques. Si</u> $\ell_1,\ldots,\ell_n$ <u>sont</u> $\mathbb{Q}$-<u>linéairement indépendants, alors</u> $\ell_1,\ldots,\ell_n$ <u>sont algébriquement indépendants.</u>

Un premier pas vers cette conjecture, consistant à étudier les polynômes de degré 1 en $\ell_1,\ldots,\ell_n$ à coefficients algébriques a été effectué par Baker [1] qui démontre le

<u>Théorème</u> 2.2. <u>Si</u> $\ell_1,\ldots,\ell_n$ <u>sont des logarithmes</u> $\mathbb{Q}$-<u>linéairement indépendants de nombres algébriques, alors les nombres</u>

$$1,\ell_1,\ldots,\ell_n$$

<u>sont</u> $\overline{\mathbb{Q}}$-<u>linéairement indépendants.</u>

On déduit du théorème 2.2 le théorème 1.3 de Hermite Lindemann, ainsi que le théorème de Gel'fond Schneider [4, 5, 8].

<u>Théorème</u> 2.3. <u>Si</u> $\ell \neq 0$ <u>et</u> $b \notin \mathbb{Q}$ <u>sont deux nombres complexes, l'un des trois nombres</u>

$$b\ ,\ a = e^{\ell}\ ,\ a^{b} = e^{b\ell}$$

<u>est transcendant.</u>

§3. <u>Indépendance algébrique de puissances algébriques de nombres algébriques</u>

Le théorème 2.3 de Gel'fond Schneider suggère le problème suivant (Schneider [8] problème 7).

<u>Conjecture</u> 3.1. <u>Si</u> $\ell \neq 0$ <u>est un logarithme d'un nombre algébrique</u> α , <u>et si</u> $1, \beta_1, \ldots, \beta_n$ <u>sont des nombres complexes</u> $\mathbb{Q}$-<u>linéairement indépendants, alors les nombres</u>

$$\alpha^{\beta_1} = e^{\ell\beta_1}, \ldots, \alpha^{\beta_n} = e^{\ell\beta_n}$$

sont algébriquement indépendants.

La conjecture 3.1 est une conséquence immédiate de (S) ; d'ailleurs, si on on considère les nombres

$$x_1 = \ell\ ,\ x_2 = \beta_1\ell, \ldots, x_{n+1} = \beta_n\ell\ ,$$

on remarque que (S) contient même l'indépendance algébrique des nombres

$$\ell\ ,\ e^{\ell\beta_1}, \ldots, e^{\ell\beta_n}\ .$$

D'autre part l'exemple des nombres

$$\ell = \mathrm{Log}\, 2 \; ; \; \beta_1 = 2+\sqrt{2} \; ; \; \beta_2 = 2-\sqrt{2}$$

montre qu'il est insuffisant de supposer $\beta_1,\ldots,\beta_n$ irrationnels et $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants pour que la conclusion de la conjecture 3.1 puisse être vraie.

Un cas particulier de 3.1 est une conjecture de Gel'fond :

Conjecture 3.2. *Si $\ell \neq 0$ est un logarithme d'un nombre algébrique α, et si β est un nombre algébrique de degré $d = [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] \geqslant 2$, alors le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps*

$$\mathbb{Q}(\alpha^{\beta},\ldots,\alpha^{\beta^{d-1}})$$

est égal à $d-1$.

Le théorème 2.3 de Gel'fond Schneider résoud le cas $d=2$, et Gel'fond [4] a résolu le cas $d=3$.

Ramachandra a cherché à généraliser 3.2. Il avait démontré [7] le

Théorème 3.3. *Si x_1,x_2,x_3 (resp. y_1,y_2) sont des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, alors l'un des six nombres*

$$e^{x_i y_j} \; , \; i = 1,2,3 \; , \; j = 1,2$$

est transcendant.

Il avait remarqué ensuite que, si x_1,x_2,x_3 (resp. $y_1,\ldots,y_d$) sont des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, alors $d-1$ des nombres

$$e^{x_i y_j} \; , \; i = 1,2,3 \; , \; j = 1,\ldots,d$$

sont transcendants. Aussi avait-il conjecturé que

(3.4) $d-1$ <u>de ces nombres sont algébriquement indépendants.</u>

D'autre part, S. Lang [5] avait également démontré 3.3, puis il avait conjecturé :

<u>Conjecture</u> 3.5. <u>Si</u> x_1, x_2 (resp. y_1, y_2) <u>sont deux nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, alors un des quatre nombres</u>

$$e^{x_1 y_1}, \; e^{x_1 y_2}, \; e^{x_2 y_1}, \; e^{x_2 y_2}$$

<u>est transcendant.</u>

Cette conjecture (3.5) est équivalente au problème 1 de Schneider [8] :

<u>Conjecture</u> 3.6. <u>Si</u> ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 <u>sont des logarithmes de nombres algébriques, tels que</u>

$$\ell_1 \neq 0 \; ; \; \frac{\ell_2}{\ell_1} \notin \mathbb{Q} \; ; \; \frac{\ell_3}{\ell_1} \notin \mathbb{Q} \, ,$$

<u>alors le nombre</u>

$$\exp\left[\frac{\ell_2 . \ell_3}{\ell_1}\right]$$

<u>est transcendant.</u>

En suivant le même raisonnement que Ramachandra, on observe que, si la conjecture 3.5 est vraie, et si x_1, x_2 (resp. $y_1, \ldots, y_n$) sont des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, alors $n-1$ des nombres

$$e^{x_i y_j} \; , \; i = 1,2 \; ; \; j = 1,\ldots,n$$

sont Aussi était-il naturel de conjecturer que $n-1$ de ces nombres sont algébriquement indépendants (cf [9]).

<u>Or il n'en est rien</u>, comme le montre l'exemple des nombres

$x_1 = 1$; $x_2 = \sqrt{2}$; $y_1 = \mathrm{Log}\, 2$; $y_2 = \sqrt{2}\, \mathrm{Log}\, 2$; $y_3 = \mathrm{Log}\, 3$; $y_4 = \sqrt{2}\, \mathrm{Log}\, 3$;

(l'indépendance linéaire de y_1, y_2, y_3, y_4 est une conséquence de 2.3 par exemple).

De même les nombres

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = \sqrt[3]{2} \qquad ; \; x_3 = \sqrt[3]{4} \qquad ;$$

$$y_1 = \mathrm{Log}\, 2 \; ; \; y_2 = \sqrt[3]{2}\, \mathrm{Log}\, 2 \; ; \; y_3 = \sqrt[3]{4}\, \mathrm{Log}\, 2 \; ;$$

$$y_4 = \mathrm{Log}\, 3 \; ; \; y_5 = \sqrt[3]{2}\, \mathrm{Log}\, 3 \; ; \; y_6 = \sqrt[3]{4}\, \mathrm{Log}\, 3 \; ,$$

fournissent <u>un contre-exemple à</u> (3.4).

On peut néanmoins énoncer une conjecture, conséquence de (S), et contenant (3.5).

<u>Conjecture</u> 3.7. <u>Soient</u> $u_1, \ldots, u_m$ <u>des nombres complexes,</u> $\mathbb{Q}$-<u>linéairement indépendants ; soit</u> v <u>un nombre complexe, transcendant sur</u> $\mathbb{Q}$. <u>Alors le degré de transcendance sur</u> $\mathbb{Q}$ <u>du corps</u>

$$\mathbb{Q}(e^{u_1}, \ldots, e^{u_m}, e^{vu_1}, \ldots, e^{vu_m})$$

<u>est supérieur ou égal à</u> $m-1$.

Pour montrer que 3.7 (et donc aussi 3.5, qui correspond à $m=2$) est une conséquence de (S), on ordonne $u_1, \ldots, u_m$ de telle manière que, pour un entier ℓ, $0 \leqslant \ell \leqslant m$,

$$(u_1, \ldots, u_m \, , \, vu_1, \ldots, vu_\ell)$$

soit une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $u_1, \ldots, u_m$, $vu_1, \ldots, vu_m$.

Comme v est transcendant (le résultat serait vrai aussi pour v algébrique de degré supérieur ou égal à $\ell-1$), le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps

$$\mathbb{Q}(v, u_1, \ldots, u_m)$$

est inférieur ou égal à $\ell+1$. D'autre part, si (S) est vraie, le degré de transcendance du corps

$$\mathbb{Q}(u_1, \ldots, u_m, vu_1, \ldots, vu_\ell, e^{u_1}, \ldots, e^{u_m}, e^{vu_1}, \ldots, e^{vu_\ell})$$

est supérieur ou égal à $m+\ell$; a fortiori le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps

$$\mathbb{Q}(u_1, \ldots, u_m, vu_1, \ldots, vu_m, e^{u_1}, \ldots, e^{u_m}, e^{vu_1}, \ldots, e^{vu_m})$$

est supérieur ou égal à $m+\ell$. Donc $m-1$ des nombres

$$e^{u_i}, e^{vu_i} \qquad (1 \leqslant i \leqslant m)$$

sont algébriquement indépendants.

§4. Autres conséquences de (S)

La conjecture de Schanuel permet de déterminer le degré de transcendance de corps obtenus en adjoignant à $\mathbb{Q}$ des nombres complexes définis à partir de la fonction exponentielle (ou de fonctions logarithmes). On constate dans chaque exemple que le degré de transcendance est le plus grand que l'on puisse espérer. Ainsi, pour illustrer ce fait, nous allons montrer que (S) contient la

Conjecture 4.1. Les 16 nombres suivants sont algébriquement indépendants :

$$e, \pi, e^\pi, \mathrm{Log}\ \pi, e^e, \pi^e, \pi^\pi, \mathrm{Log}\ 2, 2^\pi, 2^e, 2^i, e^i, \pi^i, \mathrm{Log}\ 3, (\mathrm{Log}\ 2)^{\mathrm{Log}\ 3}, 2^{\sqrt{2}}.$$

(En particulier, chacun de ces nombres doit être transcendant).

Considérons les 17 nombres $x_1,\dots,x_{17}$ suivants :

$1, i\pi, \pi, \text{Log } \pi, e, e \text{ Log } \pi, \pi \text{ Log } \pi, \text{Log } 2, \pi \text{ Log } 2, e \text{ Log } 2, i \text{ Log } 2, i, i \text{ Log } \pi, \text{Log } 3,$
$\text{Log Log } 2, \text{Log } 3.\text{Log Log } 2, \sqrt{2} \text{ Log } 2$.

Pour que 4.1 soit une conséquence de (S), il suffit que (S) entraîne l'indépendance linéaire de $x_1,\dots,x_{17}$ sur $\mathbb{Q}$; il suffit donc, a fortiori, que (S) contienne l'indépendance algébrique des 6 nombres

$$\pi, \text{Log } \pi, e, \text{Log } 2, \text{Log } 3, \text{Log Log } 2 .$$

Le même raisonnement, à partir des nombres $x'_1,\dots,x'_6$:

$$1, i\pi, \text{Log } \pi, \text{Log } 2, \text{Log } 3, \text{Log Log } 2$$

ramène le problème à l'indépendance algébrique des 5 nombres

$$\pi, \text{Log } \pi, \text{Log } 2, \text{Log } 3, \text{Log Log } 2 ,$$

donc à l'indépendance linéaire des nombres

$$i\pi, \text{Log } \pi, \text{Log } 2, \text{Log } 3, \text{Log Log } 2 .$$

En considérant les exponentielles des parties réelles, on doit montrer que π, 2, 3, Log 2 sont multiplicativement indépendants (sur $\mathbb{Z}$) ; or on sait déjà que (S) contient l'indépendance algébrique de π et Log 2 , d'après (2.1) (c'est-à-dire en choisissant $x_1 = i\pi$ et $x_2 = \text{Log } 2$ dans (S)). D'où le résultat.

Une conséquence un peu moins évidente de (S) est une conjecture de Lang [6]. On définit par récurrence une suite croissante (K_n) de sous-corps de $\mathbb{C}$ de la manière suivante :

$$K_o = \bar{\mathbb{Q}} \; ; \; K_n = \overline{K_{n-1}(\exp(K_{n-1}))} \; ;$$

autrement dit K_n est la clôture algébrique du corps obtenu en adjoignant à K_{n-1} les nombres

$$\exp t \; , \; t \in K_{n-1} \; .$$

Conjecture 4.2

$$\pi \notin \bigcup_{n \geqslant 0} K_n \; .$$

La démonstration de l'implication (S) $\Longrightarrow$ (4.2) est esquissée dans [6].

Terminons en indiquant une dernière conjecture [3], conséquence de (S), et contenant les résultats et les conjectures des paragraphes 1 et 2

Conjecture 4.3. *Soient* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *des nombres algébriques,* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants ; soient* $\ell_1, \ldots, \ell_m$ *des logarithmes* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants de nombres algébriques. Alors les nombres*

$$e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_m} \; , \; \ell_1, \ldots, \ell_m$$

sont algébriquement indépendants.

Références

[1] Alan BAKER. Linear forms in the logarithms of algebraic numbers. I, II, III, Mathematika, 13 (1966), 204-216 ; ibid., 14 (1967), 102-107, 220-228.

[2] I. KAPLANSKY. Hilbert's problems (en préparation ; voir : The Mathematical Intelligencer, n° 5 (1973) p. 3-5).

[3] Alexandre Ossipowitch GELFOND. Sur quelques résultats nouveaux dans la théorie des nombres transcendants. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A, 119 (1934) p. 259.

[4] Alexandre Ossipovitch GELFOND. Transcendental and algebraic numbers, G.I.T.T.L., Moscou,(1952)Trad. anglaise, Dover, New-York, (1960).

[5] Serge LANG. Introduction to transcendental numbers. Addison-Wesley, Reading, Mass., (1966).

[6] Serge LANG. Transcendental numbers and diophantine approximations. Bull. Amer. Math. Soc., 77, n° 5 (1971), 635-677.

[7] K. RAMACHANDRA. Contributions to the theory of transcendental numbers. Acta Arith., 14 (1968), 65-88.

[8] Theodor SCHNEIDER. Introduction aux nombres transcendants. Springer Verlag, Berlin, (1957) ; trad. française Paris, Gauthier-Villars, (1959).

[9] Michel WALDSCHMIDT. Indépendance algébrique des valeurs de la fonction exponentielle, Bull. Soc. Math. France, t. 99 (1971) 285-304, et Séminaire Delange Pisot Poitou, 1970/71, n° 6, 8p.

Université de Paris-Sud
Mathématique Bâtiment 425
91405 ORSAY