Classification des nombres d'après Mahler

Christian LAVAULT
(Orsay 8 mai 1973)

I. Introduction :

On sait construire certains nombres transcendants par différentes méthodes, on en connait qui sont valeurs de certaines fonctions transcendantes quand l'argument est algébrique. Il est naturel de songer à ranger en classes distinctes les nombres transcendants et même tous les nombres complexes ; on sait en effet que l'ensemble des nombres transcendants a la puissance du continu puisque l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Le plus naturel, pour répartir les nombres complexes en classes est d'entreprendre une classification du point de vue de la dépendance algébrique ; on souhaiterait que des nombres de classes différentes soient toujours algébriquement indépendants et, si possible, que les nombres d'une classe donnée soient algébriquement dépendants ; i.e. qu'ils vérifient une relation du type $\sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\tau=0}^{t} A_{\sigma,\tau}\, \xi^{\sigma} \eta^{\tau} = 0$ pour $A_{\sigma,\tau}$ entiers ξ et η complexes donnés.

En particulier, les nombres algébriques devraient former une classe.

Il n'existe pas actuellement de partition vérifiant toutes ces propriétés. La classification de Mahler est cependant un premier pas dans cette voie :

1 - Les nombres de classes distinctes sont algébriquement indépendants.

2 - Mais la dépendance des nombres d'une classe donnée n'est vérifiée que pour

les A-nombres (nombres algébriques).

De plus, une des classes (T) a longtemps été considérée comme pouvant être vide et, surtout, la classe S contient "presque tous" les nombres transcendants. Nous verrons en abordant la classification de Koksma ce que le "presque tous" signifie.

II. Principe utilisé par Mahler :

Soit $\xi \in \mathbb{C}$, on cherche à déterminer le degré d'exactitude avec lequel des polynômes en ξ non identiquement nuls et à coefficients entiers approchent zéro non trivialement. Exactement, soit $\xi \in C$ et n et H entiers fixés ; on forme :

$$w_n(H,\xi) = \min_{\substack{0 \leqslant |a_\nu| \leqslant H \\ \text{entiers} \\ \Sigma a_\nu \xi^\nu \neq 0}} \left(\left| \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \xi^\nu \right| \right)$$

On voit que si $n \geqslant 1$ et $H \geqslant 1$, $w_n(H,\xi) \leqslant 1$. En effet, l'expression entre parenthèse vaut 1 pour $a_0 = 1$, $a_i = 0$ $i = 1,2\ldots n$ et ne croît pas quand n et H croissent.

Formons maintenant $w_n(\xi) = w_n = \overline{\lim_{H\to\infty}} \dfrac{-\mathrm{Log}\, w_n(H,\xi)}{\mathrm{Log}\, H}$

$$\text{et} \quad w(\xi) = w = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{w_n(\xi)}{n}$$

moyennant quoi, $w = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \overline{\lim_{H\to\infty}} \dfrac{-\mathrm{Log}\, w_n(H,\xi)}{n\ \mathrm{Log}\, H}$.

Pour $n \geqslant 1$, il est clair que $0 \leqslant w_n \leqslant \infty$ et $0 \leqslant w \leqslant \infty$; de plus, on a $w_{n+1}(H,\xi) \leqslant w_n(H,\xi)$ donc $w_{n+1}(\xi) \geqslant w_n(\xi)$.

w est donc une quantité qui est soit finie non négative, soit infinie positive

On définit alors μ comme, s'il existe, le plus petit indice tel que $w_\mu = \infty$

et, dans le cas contraire, (i.e : si w_n admet pourtant n une borne supérieure finie) comme $\mu = \infty$.

Il suit que, pour μ fini, $w = \infty$.

Pour ξ donné, μ et w ne peuvent donc être tous deux finis. Il existe donc pour les valeurs de μ et w les 4 possibilités suivantes qui définissent une partition de l'ensemble des $\xi \in \mathbb{C}$:

ξ est un A-nombre si $w = 0$, $\mu = \infty$

S-nombre si $0 < w < \infty$, $\mu = \infty$

T-nombre si $w = \infty$, $\mu = \infty$

U-nombre si $w = \infty$, $\mu < \infty$.

La classe T est celle dont on a ignoré longtemps si elle est vide ; la classe S contient "presque tous" les nombres transcendants ; les classes T et U se laissent à nouveau subdiviser en conservant la propriété d'indépendance algébrique de 2 nombres de classes distinctes.

Ces sous-partitions s'obtiennent en remplaçant pour les T-nombres

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{w_n(\xi)}{n} \quad \text{par} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{w_n(\xi)}{n^\sigma} \qquad \sigma > 1$$

et pour les U-nombres, $\overline{\lim\limits_{H\to\infty}} \dfrac{-\mathrm{Log}\ w_n(H,\xi)}{\mathrm{Log}\ H}$ par

$$\overline{\lim_{H\to\infty}} \frac{-\mathrm{Log}(H,\xi)}{(\mathrm{Log}\ H)^\tau} \qquad \tau > 1$$

$(\mathrm{Log}\ H)^\tau$ et n^σ deviennent alors des fonctions à croissance plus rapide que $\mathrm{Log}\ H$ et n.

III. Conséquences directes :

1. Si ξ est un S-nombre, on a $\overline{\lim\limits_{H\to\infty}} \frac{w_n(\xi)}{n} = w(\xi) < \infty$ par conséquent,

$\exists\, \theta_o > 0$ tel que $w_n(\xi) = \overline{\lim\limits_{H\to\infty}} \frac{-\mathrm{Log}\, w_n(H,\xi)}{\mathrm{Log}\, H} < \theta_o n \qquad n = 1,2,\ldots$

Donc, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, H_o(n,\theta_o,\varepsilon)$ tel que $\forall\, H > H_o(n,\theta_o,\varepsilon)$,

$$\frac{-\mathrm{Log}\, w_n(H,\xi)}{\mathrm{Log}\, H} < (\theta_o+\varepsilon)n$$

donc $w_n(H,\xi) > H^{-(\theta_o+\varepsilon)n}$.

Si on pose

$$c_n = c(\xi,n,\theta_o,\varepsilon) = \operatorname*{Min}_{H=1}^{H_o(n,\theta_o,\varepsilon)} \left(\tfrac{1}{2}\, w_n(H,\xi).H^{(\theta_o+\varepsilon)n}, 1\right)$$

on a : $\qquad w_n(H,\xi) > c_n\, H^{-(\theta_o+\varepsilon)n}$ avec $c_n > 0$ indépendant de H.

et on en tire une

Définition : on appelle type du S-nombre ξ le nombre θ borne inférieure de tous les θ_i pour lesquels il existe un c_n tel que $w_n(H,\xi) > c_n\, H^{-\theta n}$ $\forall\, H = 1,2,\ldots$

On a : $\theta = \sup\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{w_n(\xi)}{n}\right)$.

2. Soit ξ un U-nombre :

$$\exists\, \mu = \mu(\xi) < \infty \text{ tel que } \forall n \geqslant \mu\, , \ w_n(\xi) = \infty$$

c'est-à-dire $\qquad \overline{\lim\limits_{H\to\infty}} \frac{-\mathrm{Log}\, w_n(H,\xi)}{\mathrm{Log}\, H} = \infty$.

Dans ce cas, pour tout $\theta > 0$ et tout $n \geqslant \mu$, on peut trouver une suite partielle H_λ telle que

$$\frac{-\mathrm{Log}\, w_n(H_\lambda,\xi)}{\mathrm{Log}\, H_\lambda} > \theta n$$

soit : $\qquad w_n(H_\lambda,\xi) < H_\lambda^{-\theta n}$.

Il existe donc des polynômes à coefficients entiers, de hauteur $H \leqslant H_\lambda$ pour lesquels on ait, quel que soit H_λ et θ donnés, $0 \neq |\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \xi^\nu| < H_\lambda^{-\theta n}$ avec $|a_\nu| \leqslant H_\lambda$ $\lim_{\lambda\to\infty} H_\lambda = \infty$.

[On rappelle à ce sujet que H est hauteur d'un polynôme $P(x) = \sum_{\sigma=0}^{s} a\sigma\, x^{s-\sigma}$ si $H = \operatorname{Max}_{\sigma=0}^{s} |a\sigma|$].

Il existe une infinité de tels polynômes. Il en résulte que tout nombre de Liouville est un U-nombre tel que $\mu = 1$. [Un nombre de Liouville ξ est tel que il existe une suite p_n/q_n avec $(p_n, q_n) = 1$ et s_n telle que $\overline{\lim}\, s_n = \infty$ telles que

$$|\xi - \frac{p_n}{q_n}| \leqslant \frac{1}{q_n^{s_n}}].$$

3. Si ξ est un T-nombre, il ne peut être un U-nombre donc

$$w_n(H,\xi) > c_n . H^{-\theta_n n} \quad (n = 1,2\ldots)$$

$$\begin{cases} \theta_n = \theta(\xi, n) > 0 \\ c_n = c(\xi, n, \theta_n) . \end{cases}$$

Mais, si $\overline{\lim}_{n\to\infty} \theta_n < \infty$, alors ξ vérifie la propriété des S-nombres vue au 1. Ceci n'est pas possible et donc $\overline{\lim}_{n\to\infty} \theta_n = \infty$ pour tout T-nombre.

IV. <u>Deux théorèmes</u> :

<u>Théorème</u> 1 : tout nombre algébrique est un **A**-nombre et tout **A**-nombre est algébrique.

<u>Démonstration</u> : α) Soit ξ algébrique de degré s et $P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ un polynôme à coefficients entiers de hauteur H tel que $P(\xi) \neq 0$.

On a : $0 \neq |\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \xi^\nu| > \frac{c}{H^{s-1}}$ où $c = c(\xi,n)$

ceci entraîne : $w_n(\xi) \leqslant \overline{\lim_{H\to\infty}} (\frac{-\mathrm{Log}\ c}{\mathrm{Log}\ H} + s-1) = s-1$ et donc, $w(\xi) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{s-1}{n} = 0$

donc ξ est un A-nombre $(w = 0)$.

β) Soit $\xi \in \mathbb{C}$ transcendant, on sait que $w_n(H,\xi) < c\, H^{-\frac{n-1}{2}}$ donc

$w_n(\xi) \geqslant \frac{n-1}{2}$ et $w(\xi) \geqslant \frac{1}{2}$ donc $w \neq 0$ et ξ n'est pas un A-nombre. cqfd.

Théorème 2 : si deux nombres ξ et η sont algébriquement dépendants, ils appartiennent à la même classe.

La démonstration est assez longue et technique (voir Schneider Introduction aux nombres transcendants p. 70).

V. Un résultat sur les S-nombres et le lien avec la classification de Koksma :

Proposition : a) tous les nombres réels sont des S-nombres de type $1 \leqslant \theta \leqslant 2$ sauf ceux d'un ensemble négligeable pour la mesure de Lebesgue sur la droite.

b) tous les nombres complexes sont des S-nombres de type $\frac{1}{2} \leqslant \theta \leqslant 3/2$ sauf ceux d'un ensemble Lebesgue-négligeable dans le plan.

Cette proposition exprime le fait que "presque tous" les nombres transcendants sont des S-nombres. Sa démonstration est simplifiée si on considère la classification de Koksma pour les nombres transcendants, classification en S^*-nombres
T^*-nombres
U^*-nombres

qui a la propriété que $\xi \in S^* \Longrightarrow \xi \in S$.

. On fait donc la démonstration pour les S^*-nombres et on en déduit la propriété pour les S-nombres.

Actuellement, on arrive à un résultat encore plus précis qui avait été conjecturé par Mahler :

<u>Théorème</u> : "presque tous" les nombres réels sont des S-nombres de type 1 et "presque tous" les complexes sont des S-nombres de type $\frac{1}{2}$.

<u>Bibliographie</u> : Schneider, Th.- Introduction aux nombres transcendants. Paris, Gauthier Villars, 1959.