Nombres irrationnels

Samir KARAM
(Orsay 3 avril 1973)

L'existence des nombres irrationnels fut connue depuis les grecs. Pythagore prouva que $\sqrt{2}$ est irrationnel par l'impossibilité de solutions entières de $a^2 = 2b^2$. A nos jours, il est connu que cette catégorie de nombres est très vaste puisqu'elle englobe les nombres normaux et les nombres transcendants. Cependant, l'irrationalité de nombres tels que 2^e, π^e, $\pi^{\sqrt{2}}$ et celle de la fameuse constante d'Euler $\gamma = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n)$ n'est pas encore établie.

I - e et π sont irrationnels

. Si $e = \frac{a}{b}$, $b \in \mathbb{N}^*$, on sait que e s'écrit

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Pour $K \geqslant b$ alors $b \mid K!$ et

$$\alpha = K!\left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \dots - \frac{1}{K!}\right) \text{ est un entier naturel}$$

tel que $0 < \alpha = \frac{1}{(K+1)} + \frac{1}{(K+1)(K+2)} + \dots < \frac{1}{(K+1)} + \frac{1}{(K+1)^2} + \dots = \frac{1}{K}$

ce qui est absurde.

Par contre l'irrationalité de π est moins évidente et plusieurs preuves en ont été données. On va en donner deux : la 1ère courte et élémentaire donnée par Niven ([1]), et la seconde plus générale donnée par Schneider ([2], p. 39).

. <u>1ère preuve</u> :

<u>Théorème</u> : π^2 et π sont irrationnels.

<u>Démonstration</u> : soit $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=n}^{2n} c_m x^m$ avec $c_m = (-1)^{m-n}\binom{n}{m-n} \in \mathbb{Z}$

pour $n \leqslant m \leqslant 2n$.

Si $0 < x < 1 \Longrightarrow 0 < f(x) < \frac{1}{n!}$ (1).

Aussi $f(0) = 0$, $f^{(m)}(0) = 0$ si $m < n$ ou $m > 2n$, et

$$n \leqslant m \leqslant 2n \Longrightarrow f^{(m)}(0) = \frac{m!}{n!} c_m \in \mathbb{Z} .$$

Ainsi $f(x)$ et toutes ses dérivées ont des valeurs entières en $x = 0$, et aussi en $x = 1$ car $f(1-x) = f(x)$.

Si π^2 était rationnel alors $\pi^2 = \frac{a}{b}$ où a et b sont entiers positifs.

Soit alors

$$G(x) = b^n\{\pi^{2n}f(x) - \pi^{2n-2}f''(x) + \pi^{2n-4}f^{(4)}(x) + \ldots + (-1)^n f^{(2n)}(x)\}$$

alors $G(0)$ et $G(1)$ sont entiers rationnels.

Aussi

$$\frac{d}{dx}\{G'(x)\sin \pi x - \pi G(x)\cos \pi x\} = \{G''(x) + \pi^2 G(x)\}.\sin \pi x$$

$$= b^n.\pi^{2n+2}.f(x).\sin \pi x = \pi^2.a^n.f(x).\sin \pi x .$$

On en tire

$$\pi \int_0^1 a^n.\sin \pi x.f(x)dx = \left[\frac{G'(x).\sin \pi x}{\pi} - G(x).\cos \pi x\right]_0^1 = G(0) + G(1) \in \mathbb{Z} .$$

Mais d'après (1)

$$0 < \pi \int_0^1 a^n.\sin \pi x.f(x)dx < \frac{\pi a^n}{n!}$$

et $\frac{\pi a^n}{n!}$ devient < 1 pour n assez grand. D'où le résultat.

. <u>2ème preuve</u> :

<u>Théorème</u> : si $\alpha \neq 0$, alors α et e^{α} n'appartiennent pas tous deux au corps des nombres de Gauss $[\mathbb{Q}(i)]$.

<u>Démonstration</u> :

On part de l'identité

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta-\zeta_0} + \frac{z-\zeta_0}{(\zeta-\zeta_0)(\zeta-\zeta_1)} + \dots + \frac{\prod_{\nu=0}^{n-1}(z-\zeta_\nu)}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta-\zeta_\nu)} + \frac{\prod_{\nu=0}^{n}(z-\zeta_\nu)}{(\zeta-z)\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta-\zeta_\nu)}$$

établie par récurrence sur n , où $\zeta_0 , \zeta_1 , \dots , \zeta_n$ et z sont des nombres complexes n'annulant pas les dénominateurs.

Soit $f(\zeta)$ une fonction de la variable complexe ζ , régulière dans $\mathcal{G}$ borné, simplement connexe, alors en multipliant l'identité par $\frac{1}{2i\pi} f(\zeta)$ et en intégrant les deux membres sur la frontière Γ de $\mathcal{G}$, on obtient, lorsque $\zeta_0 , \dots , \zeta_n$, z sont intérieurs à Γ , par l'application de l'intégrale de CAUCHY :

$$f(z) = f(\zeta_0) + a_1(z-\zeta_0) + \dots + a_n \prod_{\nu=0}^{n-1} (z-\zeta_\nu) + R_n(z) \tag{2}$$

où
$$a_\ell = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\prod_{\nu=0}^{\ell}(\zeta-\zeta_\nu)} \quad \text{pour } \ell = 1,\dots,n \tag{3}$$

et
$$R_n(z) = \prod_{\nu=0}^{n}(z-\zeta_\nu) \times \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta-\zeta_\nu)} \tag{4}$$.

On dira $\zeta_0 , \dots , \zeta_n , \dots$ sont des valeurs d'interpolation pour (2). En particulier, on choisit

$$f(z) = e^{\alpha z} \; , \; \alpha \neq 0$$

et pour valeurs d'interpolation

$$\zeta_\nu = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \nu \quad \text{pair} \\ 1 & \text{si} \quad \nu \quad \text{impair} \end{cases}$$

On choisit pour Γ la circonférence de centre 0, contenant le point $\zeta = 1$ en son intérieur. On déduit alors de (3) les valeurs de a_ℓ pour $\ell = 2t + \delta$ ($t \in \mathbb{N}$ et $\delta = 0$ ou 1) :

$$a_\ell = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{e^{\alpha\zeta}\, d\zeta}{\zeta^{t+1}(\zeta-1)^{t+\delta}} \quad \text{pour} \quad \ell = 1,\ldots,n \tag{5}$$

En appliquant le théorème des résidus à la fonction $z \mapsto \dfrac{e^{\alpha z}}{z^{t+1}(z-1)^{t+\delta}}$ et au contour Γ, on trouve

$$a_\ell = \frac{1}{t!} \left(\frac{e^{\alpha z}}{(z-1)^{t+\delta}}\right)^{(t)} \Bigg/_{z=0} + \frac{1}{(t-\delta+1)!} \left(\frac{e^{\alpha z}}{z^{t+1}}\right)^{(t+\delta-1)} \Bigg/_{z=1} \tag{6}$$

La dérivée $\left(\dfrac{e^{\alpha z}}{(z-1)^{t+\delta}}\right)^{(t)}$ peut s'écrire :

$$\sum_{i=0}^{t} \binom{t}{i} \alpha^i e^{\alpha z}(-1)^{t-i}(t+\delta)(t+\delta+1)\ldots(2t+\delta-i-1)(z-1)^{-(2t+\delta-i)} .$$

Le numérateur de cette quantité se présente comme un polynôme en z et une forme linéaire à coefficients entiers de $e^{\alpha z}, \alpha e^{\alpha z},\ldots,\alpha^t e^{\alpha z}$, et son dénominateur divise $(z-1)^{2t+\delta}$.

Si $\alpha = a_{(1)} + b_{(1)} i$ où $a_{(1)}$ et $b_{(1)} \in \mathbb{Q}$ et où q_1 est le plus petit dénominateur commun de $a_{(1)}$ et $b_{(1)}$, on obtient pour $z = 0$ un nombre de Gauss dont le dénominateur divise q_1^t. De façon analogue

$$\left(\frac{e^{\alpha z}}{z^{t+1}}\right)^{(t+\delta-1)} = \sum_{i=0}^{t+\delta-1} \binom{t+\delta-1}{i} \alpha^i e^{\alpha z}.(-1)^{(t+\delta+i-1)}(t+1)\ldots(2t+\delta-1-i)z^{-(2t+\delta-i)} .$$

Le numérateur est un polynôme en z et une forme linéaire à coefficients entiers en $e^{\alpha z}$, $\alpha e^{\alpha z},\dots,\alpha^{t+\delta-1}e^{\alpha z}$ et dont le dénominateur divise $z^{2t+\delta}$.

Si e^{α} est un nombre de Gauss de dénominateur q_2, on obtient pour $z = 1$ un nombre de Gauss dont le dénominateur divise $q_1^{t+\delta-1}q_2$.

Par (6) on déduit que a_ℓ est de la forme $a+bi$, a et $b \in \mathbb{Q}$ et dont le dénominateur divise $t!q_1^t q_2$. Lorsque $a_\ell \neq 0$, on aura

$$|t!.q_1^t.q_2.a_\ell| \geqslant 1 \tag{7}$$

Soit $\ell > 5$, donc $t > 2$, et choisissons pour Γ dans (5) une circonférence de rayon $|\zeta| = t$. Alors

$$|\zeta-1| > \frac{t}{2} \quad \text{car} \quad |\zeta-1| > t-1 > \frac{t}{2}.$$

De (5) et de $\underset{|\zeta|=t}{\operatorname{Max}} |e^{\alpha\zeta}| \leqslant e^{|\alpha|.t}$ on tire

$$|a_\ell| < \frac{1}{2\pi}.\frac{e^{|\alpha|.t}}{t^{t+1}(\frac{t}{2})^{t+\delta}}.2\pi t = e^{|\alpha|.t}.2^{t+\delta}.t^{-(2t+\delta)}.$$

Combinée avec (7), cette majoration donne

$$t!\ q_1^t.q_2 \times e^{|\alpha|.t}.2^{t+\delta} > t^{2t+\delta}, \text{ et comme } t^t > t!$$

on obtient $$q_1^t\ q_2\ e^{|\alpha|.t}\ 2^{t+\delta} > t^{t+\delta}$$

ce qui est absurde pour t assez grand. Donc $\exists n_o \ / \ \ell > n_o \implies a_\ell = 0$ dans (2).

De (4) on tire la limite du reste quand $n \to \infty$. On choisit $f(z) = e^{\alpha z}$ et pour Γ le cercle de centre 0 et de rayon $|\zeta| = n$. Alors pour z fixé et n suffisamment grand, on déduit de (4) :

$$|R_n(z)| < \prod_{\nu=o}^{n} |z-\zeta_\nu| \times \frac{1}{2\pi} \times \frac{e^{|\alpha|n}}{(\frac{n}{2})^{n+2}} \times 2\pi n$$

et on voit que $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n(z)| = 0$.

Dans (2) avec $f(z) = e^{\alpha z}$, on passe à la limite en n . Alors $e^{\alpha z}$ aura une série d'interpolation ayant un nombre fini de termes $\neq 0$, donc un polynôme, ce qui est absurde lorsque $\alpha \neq 0$.

II - Autres propriétés des irrationnels

Théorème : x réel est rationnel $\Longleftrightarrow$ le développement décimal de x est périodique.

Théorème : x entier algébrique et $x \notin \mathbb{Z} \Longrightarrow x$ est irrationnel.

Théorème : Les entiers algébriques réels de degré quelconque fixé $n \geqslant 2$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Soient α et β réels, $\alpha < \beta$. Prouvons alors que $\exists \gamma \in \bar{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$, $\deg.\gamma = n$ et $\alpha < \gamma < \beta$. $\bar{\mathbb{Q}}$ étant la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$.

Notons d'abord que

$$x + \alpha > 0 \Longrightarrow$$

$$(x+\beta)^n - (x+\alpha)^n = \{(x+\alpha) + (\beta-\alpha)\}^n - (x+\alpha)^n > n(x+\alpha)^{n-1}(\beta-\alpha) .$$

Mais $n(x+\alpha)^{n-1}(\beta-\alpha)$ tend vers l'infini pour x tendant vers l'infini. On en déduit $\exists j \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$j+\alpha > 0 \quad \text{et} \quad j+\beta > 0 \quad \text{et} \quad (j+\beta)^n - (j+\alpha)^n > 5 .$$

Ainsi l'intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités $(j+\alpha)^n$ et $(j+\beta)^n$ contient au moins 4 entiers positifs consécutifs et en particulier un de la forme $4K+2$.

Mais l'application $]\alpha,\beta[\to](j+\alpha)^n , (j+\beta)^n[$

$$x \mapsto (j+x)^n$$

étant continue alors on tire

$$\exists\gamma \in \mathbb{R} , \alpha < \gamma < \beta \text{ et } (j+\gamma)^n = 4K+2 .$$

Il s'ensuit que γ est entier algébrique racine du polynôme unitaire

$$f(x) = (x+j)^n - 2(1+2K) = 0 .$$

Pour finir la démonstration, il faut établir que $\deg.\gamma = n$, ou que $f(x)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Mais cela équivaut à montrer que

$f(x-j) = x^n - 2(1+2K)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$, ce qui résulte du critère d'Eisenstein :

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} +\dots+ a_{n-1}x + a_n \qquad a_i \in \mathbb{Z}$$

si $\exists p$ premier $p|a_i$ pour $i = 1,2,\dots,n$

$$p\nmid a_0 \text{ et } p^2\nmid a_n$$

alors $f(x)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Ici $p = 2$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] NIVEN.- Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947) p. 509.

[2] SCHNEIDER.- Initiation aux nombres transcendants. G.V. Paris (1959).

[3] NIVEN.- Irrational numbers 1963. John Wiley and Sons.