Les nombres colossalement abondants et le théorème de Lang

Jean-Louis NICOLAS
(Orsay 27 mars 1973)

Désignons par $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ la somme des diviseurs de n. On sait que σ est une fonction multiplicative et que $\sigma(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$ (cf, Hardy and Wright [2], chapitre XVI). Erdös et Alaoglu ont donné dans [1] la définition suivante

Définition : On dit que n est superabondant si :

$$(1) \qquad m < n \implies \frac{\sigma(m)}{m} < \frac{\sigma(n)}{n} .$$

On trouvera dans [1] et dans [5] quelques propriétés des nombres superabondants, en particulier :

Proposition 1 : Si la décomposition en facteurs premiers d'un nombre superabondant n est $n = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, on a : $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \dots \geqslant \alpha_k$ et $\alpha_k = 1$ sauf si $n = 4$ ou $n = 36$, en désignant par p_k le $k^{\text{ième}}$ nombre premier.

Proposition 2 : On a : $\overline{\lim} \frac{\sigma(n)}{n \log\log n} = e^\gamma$, où γ est la constante d'Euler.

Cette proposition se trouve dans Hardy and Wright [2], chapitre XVIII.

Soit $\varepsilon > 0$; il découle de la proposition 2 que $\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon}} = 0$. La fonction $\frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon}}$ a donc un maximum absolu qu'elle atteint en un ou plusieurs points N_ε. On est ainsi conduit à la définition suivante :

Définition : On dit que N est colossalement abondant, s'il existe $\varepsilon > 0$, tel que la fonction $\frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon}}$ atteigne son maximum en N.

ε étant fixé, on a vu qu'il existe toujours au moins un nombre colossalement abondant N associé à ε et l'on a pour tout $n \geqslant 1$:

$$\frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon}} \leqslant \frac{\sigma(N)}{N^{1+\varepsilon}} \tag{2}$$

d'autre part, tout nombre colossalement abondant est superabondant :

$$n < N \implies \frac{\sigma(n)}{n} \leqslant \frac{\sigma(N)}{N}\left(\frac{n}{N}\right)^{\varepsilon} < \frac{\sigma(N)}{N}$$

Proposition 3 : Soit N un nombre colossalement abondant associé à ε. On définit, pour p premier et α entier $\geqslant 1$:

$$F(p,\alpha) = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{p^{\alpha}+p^{\alpha-1}+\ldots+p}\right)}{\log p} = \frac{\log\left(\frac{p^{\alpha+1}-1}{p^{\alpha+1}-p}\right)}{\log p}$$

et pour $\alpha = 0$, $F(p,0) = +\infty$. Alors si p premier divise N avec l'exposant $\alpha \geqslant 0$, on a :

$$F(p,\alpha) \geqslant \varepsilon \geqslant F(p,\alpha+1) \,. \tag{3}$$

Démonstration : Si $\alpha \geqslant 0$, on applique l'inégalité (2) avec $n = Np$. Il vient :

$$\frac{\sigma(Np)}{\sigma(N)} \leqslant \left(\frac{Np}{N}\right)^{1+\varepsilon} = p^{1+\varepsilon} \tag{4}$$

et d'autre part :

$$\frac{\sigma(Np)}{\sigma(N)} = \frac{\sigma(p^{\alpha+1})}{\sigma(p^{\alpha})} = \frac{p^{\alpha+2}-1}{p^{\alpha+1}-1} = p\left(1 + \frac{1}{p^{\alpha+1}+\ldots+p}\right) \tag{5}$$

En comparant (4) et (5), on obtient $\varepsilon \geqslant F(p,\alpha+1)$. L'inégalité $F(p,\alpha) \geqslant \varepsilon$ est évidente si $\alpha = 0$. Si $\alpha \geqslant 1$, on la démontre en appliquant (2) avec $n = \frac{N}{p}$.

Définition : On pose

$$E_p = \{F(p,\alpha)\ ,\ \alpha \geqslant 1\}$$

$$E = \bigcup_{p \text{ premier}} E_p = \{\varepsilon_1\ ,\ \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i, \ldots\}\ .$$

Pour tout $\eta > 0$, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de E supérieurs à η et l'on peut ranger les éléments de E en une suite décroissante : $\varepsilon_1 > \varepsilon_2, \ldots > \varepsilon_i$.

On pose $\varepsilon_0 = +\infty$.

Théorème : a) Si $\varepsilon \notin E$, la fonction $\frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon}}$ atteint son maximum en un seul point N_ε dont la décomposition en facteurs premiers est :

$$(6) \qquad N_\varepsilon = \prod_p p^{\alpha_p(\varepsilon)} \quad \text{avec} \quad \alpha_p(\varepsilon) = \left[\frac{\log\left(\frac{p^{1+\varepsilon}-1}{p^\varepsilon-1}\right)}{\log p}\right] - 1\ .$$

Soit $i \geqslant 1$; pour tout $\varepsilon \in \left]\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i\right[$, N_ε est constant et égal (par définition) à N_i . Les nombres N_i sont tous distincts.

b) Si les ensembles E_p sont tous disjoints, il n'y a pas d'autres nombres colossalement abondants que les N_i , et la fonction $\frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon_i}}$ atteint son maximum aux deux points N_i et N_{i+1}

c) Si les ensembles E_p ne sont pas tous disjoints, pour chaque $\varepsilon_i \in E_q \cap E_r$, la fonction $\frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon_i}}$ atteint son maximum en 4 points : N_i , qN_i , rN_i et $N_{i+1} = qr\, N_i$. Les nombres qN_i et rN_i sont colossalement abondants.

Démonstration : a) Soit p un nombre premier fixé. Comme $\varepsilon \notin E$, alors $\varepsilon \notin E_p$, et comme la suite $F(p,\alpha)$ est strictement décroissante en α , il existe α tel que :

$$(7) \qquad \frac{\log \frac{p^{\alpha+1}-1}{p^\alpha-1}}{\log p} = F(p,\alpha) > \varepsilon > F(p,\alpha+1)\ .$$

En résolvant en α , les inégalités (7) on trouve, en désignant par $[x]$ la partie entière de x

(8) $$\alpha = \left[\frac{\log \frac{p^{1+\varepsilon}-1}{p^{\varepsilon}-1}}{\log p} \right] - 1$$

et la proposition 3 dit que l'exposant de p dans N_ε est α .

b) Choisissons $\varepsilon = \varepsilon_i = F(q,\beta)$. Pour $p \neq q$, $\varepsilon \notin E_p$ et l'exposant de p dans N_ε est déterminé par (7) ou (8). L'exposant de q peut être choisi égal à β ou $\beta-1$ d'après la proposition 3. Dans le premier cas on trouve N_{i+1} , dans le second N_i et la fonction $\frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon_i}}$ atteint son maximum en ces deux points.

c) Soit $\varepsilon = F(p,\alpha) \in E$. Alors ε est irrationnel. Si l'on avait $\varepsilon = \frac{a}{b}$, a et b entiers, on aurait $p^a = (1 + \frac{1}{p^\alpha + \ldots + p})^b$ avec p^a entier et $(1 + \frac{1}{p^\alpha + \ldots + p})^b$ non entier. D'après le théorème de Gelfond-Schneider ([3], chap. 3), ε est même transcendant.

Du théorème 1 de Lang ([3] chap. 2, et [4]), on déduit que si, p , q , r sont des nombres premiers distincts et si p^ε , q^ε , r^ε sont algébriques, alors ε doit être rationnel. Mais si $\varepsilon \in E_p$, p^ε est rationnel et on conclut que $E_p \cap E_q \cap E_r = \emptyset$.

S'il existe deux ensembles E_q et E_r non disjoints, et si l'on choisit $\varepsilon_i = F(q,\beta) = F(r,\gamma) \in E_q \cap E_r$, pour $p \neq q,r$ l'exposant de p est déterminé par (7) et (8), l'exposant de q peut être β ou $\beta-1$, et celui de r , γ ou $\gamma-1$ ce qui donne les 4 possibilités annoncées. Remarquons que le quotient des deux nombres colossalement abondants consécutifs qN_i et rN_i n'est pas un nombre premier.

<u>Tables numériques</u>. La table 1 donne les valeurs de $10^5\, F(p,\alpha)$. Les valeurs non indiquées sont inférieures à 1. Les colonnes "exposant = i" indiquent l'exposant de p dans N_ε. Ainsi pour $\varepsilon = 500\ 10^{-5}$, pour $p = 7$, on a $129 < 500 < 910$ et l'exposant de 7 dans N_ε est 2.

La table 2 donne les valeurs de $v^{-1}(F(p,\alpha))$ avec $v(x) = \dfrac{\log(1+\frac{1}{x})}{\log x}$. Comme v est une fonction décroissante de x, l'ordre des termes est inversé par rapport à la table 1. Elle permet de trouver les nombres colossalement abondants de plus grand facteur premier p donné. Pour avoir $p = 97$, on doit choisir $97 \leqslant x \leqslant 101$ = nombre premier suivant 97, et l'on trouve :

$$2^8\ 4^5\ 5^3\ 7^2\ 11^2\ 13\ \ 17\ \ldots\ldots\ 97 \quad \text{pour} \quad x < 100{,}9$$

et

$$2^8\ 3^5\ 5^3\ 7^2\ 11^2\ 13^2\ 17\ \ldots\ldots\ 97 \quad \text{pour} \quad x > 100{,}9\ .$$

La table 3 donne la suite des nombres colossalement abondants.

Table 1

p\α		α = 1		α = 2		α = 3		α = 4		α = 5
2	exposant = 0	58 496	exposant = 1	22 239	exposant = 2	9 954	exposant = 3	4 731	exposant = 4	2 308
3		26 286		7 286		2 305		755		250
5		11 328		2 037		400		79		16
7		6 862		910		129		18		3
11		3 629		315		29		3		
13		2 889		214		16		1		
17		2 017		115		7				

Table 2

	$\alpha = 1$		$\alpha = 2$		$\alpha = 3$		$\alpha = 4$		$\alpha = 5$
	2	exposant = 1	3,29	exposant = 2	5,44	exposant = 3	9,08	exposant = 4	15,36
	3		6,72		15,38		36,3		88,57
	5		16,8		60,50		230,4		920,5
	7		31,4		153,9		812,8		4 531,5
	11		73,4		554,9		4 580,6		40 080,3
	13		100,9		897,2		8 743,5		90 404,7
	17		168,8		1 951,4		24 842,7		335 898,5
	$\alpha = 6$	exposant = 6	$\alpha = 7$	exposant = 7	$\alpha = 8$	exposant = 8	$\alpha = 9$	exposant = 9	$\alpha = 10$
$p = 2$	26,3		45,7		80,2		142,4		255,4
$p = 3$	221,7		567,6		1 480,4		3 919,7		10 507,9

Table 3

		n	$\sigma(n)$	$\sigma(n)/n$
ε_1 =	58 496	1	1	1
ε_2 =	26 286	2	3	1,5
ε_3 =	22 239	2 3	12	2
ε_4 =	11 328	4 3	28	2,333
ε_5 =	9 954	4 3 5	168	2,8
ε_6 =	7 286	8 3 5	360	3
ε_7 =	6 862	8 9 5	1 170	3,25
ε_8 =	4 731	8 9 5 7	9 360	3,7143
ε_9 =	3 629	16 9 5 7	19 344	3,8381
ε_{10} =	2 889	16 9 5 7 11	232 128	4,1870
ε_{11} =	2 308	16 9 5 7 11 13	3 249 792	4,5091
ε_{12} =	2 305	32 9 5 7 11 13	6 604 416	4,5818
ε_{13} =	2 037	32 27 5 7 11 13	20 321 280	4,6993
ε_{14} =	2 017	32 27 25 7 11 13	104 993 280	4,8559
		32 27 25 7 11 13 17	1 889 879 040	5,1416

Références

[1] Erdős (P) and Alaoglu (L).- On highly composite and similar numbers, Trans. Amer. math. Soc. t. 56, 1944, p. 448-469.

[2] Hardy (G.H.) and Wright (E.M.).- An introduction to the theory of numbers, 4th edition, Oxford at the Clarendon Press.

[3] Lang (S).- Introduction to transcendental numbers, Addison Wesley 1966.

[4] Lang (S.).- Nombres transcendants, Séminaire Bourbaki 18e année, 1965-66, n° 305.

[5] Nicolas (J.L.).- Ordre maximal d'un élément du groupe S_n des permutations et "higlhy composite numbers", Bull. Soc. Math. France, 97, 1969, p. 129-191.