Construction de nombres transcendants, grâce aux théorèmes de Liouville, Thue, Siegel et Roth

Maurice MIGNOTTE
(Orsay 20 mars 1973)

Introduction

Cet exposé consistera d'abord en un énoncé assez bref de résultats sur l'approximation diophantienne des nombres algébriques qui, vu leur difficulté, ne seront généralement pas démontrés. Ces résultats seront utilisés pour construire certaines familles de nombres transcendants.

Il apparaîtra à l'évidence que la théorie est encore à un stade peu satisfaisant. En particulier, les nombres transcendants que l'on construit par cette méthode sont souvent très spéciaux et je ne connais aucune démonstration de transcendance d'un nombre "usuel" par cette méthode.

Notations : Soit x un réel :

$[x]$ désigne la partie entière de x ,

$\{x\} = x - [x]$ est la partie fractionnaire de x ,

on notera $\|x\|$ la distance de x à l'entier le plus proche.

I - Approximation des nombres réels par des rationnels

1. Approximation des nombres rationnels par des rationnels

Commençons par un résultat évident.

Théorème 1 : Soit $\alpha = \frac{a}{b}$ un rationnel, avec $b \geqslant 1$, et soit $\frac{p}{q}$ un nombre rationnel distinct de α , $q > 0$, alors on a

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{bq} .$$

Démonstration :

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| = \frac{|aq-pb|}{bq} \geqslant \frac{1}{bq} .$$

C.Q.F.D.

Donnons une conséquence triviale de ce résultat, mais qui indique le principe de la construction future de nombres transcendants à partir d'un théorème sur l'approximation des nombres algébriques.

Corollaire 1 : Soit α un nombre réel tel que pour tout $A > 0$, l'équation

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Aq}$$

admette une solution alors α est irrationnel.

Exemple : On obtient ainsi l'irrationnalité de $e, x \operatorname{ch} \frac{1}{x}, x \sin \frac{1}{x}, \cos \frac{1}{x}$, $\operatorname{ch} \frac{1}{x}$, avec $x^2 \in \mathbb{N}^*$. On peut même obtenir un résultat plus fort, à savoir :

Corollaire 2 : Soit x , avec $x^2 \in \mathbb{N}^*$. Soient a_1 , a_2 , a_3 , $a_4 \in \mathbb{Z}$ non tous nuls. Alors le nombre

$$\alpha = a_1 \operatorname{ch} x + a_2 \frac{1}{x} \operatorname{sh} x + a_3 \cos x + a_n \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$$

est irrationnel.

2. Approximation des nombres irrationnels par des rationnels

Théorème 2 (Dirichlet 1842) : Soit α un nombre irrationnel. Il existe une infinité de nombres rationnels $\frac{p}{q}$ tels que

(1) $$|\alpha - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{q^2} .$$

Démonstration :

Soit Q un entier $\geqslant 1$. Considérons les nombres $\alpha_k = \{k\alpha\}$, $k = 0,\dots,Q$, de l'intervalle $[0,1]$. Partageons cet intervalle en Q segments égaux de longueur $\frac{1}{Q}$. Les $Q+1$ points α_k sont répartis dans Q intervalles, l'un deux contiendra donc deux points (principe des tiroirs). D'où l'existence de deux entiers m et n distincts tels que

$$|(n-m)\alpha - ([m\alpha] - [n\alpha])| < \frac{1}{Q} .$$

Si on pose $q = n-m$ et $p = [m\alpha] - [n\alpha]$, on a alors

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{qQ} \leqslant \frac{1}{q^2} .$$

Le fait que Q soit arbitraire permet de montrer que (1) admet une infinité de solutions.

Ce résultat peut être amélioré.

Théorème 3 (Hurwitz, 1891) :

(i) Pour tout irrationnel α , il existe une infinité de rationnels $\frac{p}{q}$, avec $(p,q) = 1$, qui vérifient

(2) $$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{\sqrt{5}\, q^2} .$$

(ii) Ce résultat n'est plus vrai si on remplace la constante $\sqrt{5}$ par un nombre plus grand.

Démonstration : Voir par exemple Hardy et Wright Chap. XI.

Pour une généralisation aux nombres quadratiques imaginaires, voir Poitou (1953).

Le travail de Markov a beaucoup précisé ce théorème, nous nous contentons de donner une toute petite partie de ses résultats (voir Cassels, Chap.II).

Théorème 4 (Markov, 1879) :

Il y a une infinité non dénombrable de nombres irrationnels (non équivalents, au sens des fractions continues) tels que

$$\underline{\lim}\ q \,\|q\alpha\| = \frac{1}{3}\ .$$

Corollaire : Il existe une infinité non dénombrable de nombres transcendants α pour lesquels il existe une constante $c = c(\alpha) > 0$ avec

$$(3) \qquad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^2}$$

pour tout q.

Remarque 1 : Un nombre α vérifie (3), pour une certaine constante c, si, et seulement si, les quotients partiels du développement en fraction continue de α sont bornés. Je ne connais pas d'exemple de nombre usuel dont on ait démontré qu'il vérifie (3) en dehors des nombres irrationnels quadratiques. Par contre, on sait que beaucoup de nombres usuels n'appartiennent pas à cette classe, par exemple c'est le cas de $e^{1/p}$ pour t entier (on connait le développement en fraction continue de ce nombre, voir par exemple les ouvrages de Penon (1913) ou Lang (1966)). Il semble bien que tout nombre algébrique de degré $\geqslant 3$ a des quotients partiels non bornés ; en tout cas le calcul d'un grand nombre de réduit de nombreux nombres algébriques semble confirmer cette conjecture, voir par exemple Neumann et Tuckerman (1955), Richtunyer, Devany et Metropolis (1962), Bryuno (1964).

La plupart des irrationnels ne vérifient pas (3) :

<u>Théorème</u> 5 (Khintchine 1926) :

Soit $\psi(q)$ une fonction positive. Considérons les inégalités

(4)
$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{\psi(q)}{q} .$$

Alors

(i) Si la série $\sum_{q=1}^{\infty} \psi(q)$ converge alors (4) n'a qu'un nombre fini de solutions $\frac{p}{q}$, $q > 0$, pour presque tout α (au sens de la mesure de Lebesgue).

(ii) Si ψ est décroissante (au sens large) et la série ci-dessus diverge, cette inégalité a une infinité de solutions pour presque tout α.

<u>Démonstration</u> :

(i) Considérons d'abord le cas où $\alpha \in I = [0,1[$. Soit q fixé. L'ensemble des $\alpha \in I$ qui vérifient (4) est contenu dans l'union de $q+1$ intervalles (centrés aux points $0, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, 1$) de longueur $\frac{2\psi(q)}{q}$, sa mesure est donc au plus égale à $4\psi(q)$. Ainsi, l'ensemble des $\alpha \in I$ pour lesquels (4) admet une solution avec $q \geqslant Q$ a une mesure au plus égale à

$$4 \sum_{q \geqslant Q} \psi(q) ,$$

quantité qui tend vers 0 avec Q^{-1}. La conclusion est alors évidente.

(ii) Voir par exemple Khintchine (1964) ou Cassels ch.VII. Pour des résultats semblables voir aussi Borel (1909) et Bernstein (1912) où Hardy et Wright Th.196, Th.197 chap.XI.

Exemples :

1. L'ensemble des nombres α irrationnels qui pour un $\varepsilon = \varepsilon(\alpha) > 0$ sont tels que l'inégalité

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

admette une infinité de solutions est de mesure nulle.

2. La conclusion précédente a encore lieu si on remplace l'inégalité ci-dessus par

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2(\log q)^{1+\varepsilon}} .$$

II - Approximation des nombres algébriques

1. Le théorème de Liouville

Théorème 6 (Liouville 1844) :

Soit α un nombre algébrique de degré $n \geqslant 2$. Il existe une constante $c = c(\alpha) > 0$ telle que, pour tout rationnel $\frac{p}{q}$, $q \geqslant 1$, on ait l'inégalité

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n} .$$

Démonstration :

Soit P le polynôme minimal de α, i.e. le polynôme de degré n, à coefficients entiers, primitif et de terme principal positif tel que $P(\alpha) = 0$.

Soit d'abord $\frac{p}{q}$ tel que

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| \leqslant 1 .$$

On a alors

$$\frac{1}{q^n} \leqslant \left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|P\left(\frac{p}{q}\right)-P(\alpha)\right| = \left|\alpha-\frac{p}{q}\right| P'(\zeta) , \quad \text{avec} \quad \zeta \in \left]\alpha,\frac{p}{q}\right[,$$

d'où

$$\frac{1}{Mq^n} \leqslant \left|\alpha-\frac{p}{q}\right| \quad \text{avec} \quad M = \max\left(\sup_{\alpha-1\leqslant x\leqslant\alpha+1} |P'(x)|,1\right) .$$

Cette dernière inégalité a encore lieu si $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| > 1$. D'où le résultat.

Remarque 2 : Le théorème de Dirichlet montre que ce résultat est essentiellement le meilleur possible dans le cas des irrationnels quadratiques.

2. Les nombres de Liouville

On dira qu'un nombre α est de Liouville si, pour tout $A > 0$, il existe un nombre rationnel $\frac{p}{q}$, $q \geqslant 1$, tel que

$$0 < \left|\alpha-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^A} .$$

Le théorème 6 montre qu'un tel nombre est transcendant. Il est bon de rappeler qu'avant Liouville l'existence de nombres transcendants n'était pas démontrée.

Exemple : L'application

$$\sum_{n\geqslant 1} \varepsilon_n 2^{-n} \mapsto \sum_{n\geqslant 1} \varepsilon_n 2^{-n!} , \quad \varepsilon_n \in \{0,1\}$$

définit une injection de l'ensemble des nombres irrationnels de l'intervalle $]0,1[$ dans l'ensemble des nombres de Liouville.

L'ensemble $\mathcal{L}$ des nombres de Liouville a donc la puissance du continu (il est étonnant de lire dans l'article de Fel'dman et Shidlovski (1967) qu'on ne sait pas si $\mathcal{L}$ est dénombrable). Il est aussi facile de voir que $\mathcal{L}$ est partout dense dans $\mathbb{R}$. Par contre le théorème 5, exemple 1, montre que $\mathcal{L}$ est de mesure nulle. Ce n'est pas un fait isolé, tous les ensembles de nombres transcendants qu'on définira plus loin seront aussi de mesure nulle, ce qui montre le faiblesse des méthodes d'approximation diophantienne pour la construction de nombres transcendants.

On peut aussi facilement caractériser les nombres de Liouville par les propriétés de leur développement en fraction continue. Soit $\alpha = [a_0;a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots]$ un nombre irrationnel. On sait que

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2} \quad \text{avec} \quad \frac{p_n}{q_n} = [a_0;a_1,\ldots,a_n] .$$

On voit donc que α est un nombre de Liouville si, et seulement si,

$$\lim \frac{\log a_{n+1}}{\log a_n} = +\infty ,$$

il suffit de se souvenir en plus que si $\frac{p}{q}$ vérifie

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$$

alors il existe n tel que $\frac{p}{q} = [a_0;a_1,\ldots,a_n]$.

Pour des exemples de nombres transcendants, mis sous forme de fractions continues, obtenu grâce au théorème de Liouville ou à sa généralisation à l'approximation par les irrationnels quadratiques voir Maillet (1904, 1906a., 1907 a.b.c), Perron(1913), Perna (1913,1914), Gigli (1923).

3. Une généralisation du théorème de Liouville

Théorème 7 : Soit α un nombre algébrique de degré $n \geqslant 1$ et soit $P(x)$ un polynôme à coefficients entiers de degré d et de hauteur H donc α n'est pas racine. Alors on a

$$|P(\alpha)| \geqslant \frac{c^d}{H^{n-1}}, \quad \text{avec} \quad c = c(\alpha) > 0 .$$

Pour $n = 1$, on retrouve le théorème de Liouville.

Démonstration :

Soit q un dénominateur de α, alors q^d est un dénominateur de $P(\alpha)$ et

$$1 \leqslant |\mathrm{Norm}(q^d P(\alpha))| \leqslant |q^d P(\alpha)| \; (q^d(1+a)^d H)^{n-1}$$

où a désigne la hauteur de α. D'où la conclusion.

On en déduit facilement l'énoncé suivant (voir Schneider (1957) chp. I, §3).

Corollaire : Si α est algébrique de degré n et ξ algébrique de degré d et de hauteur H, alors, pour $\xi \neq \alpha$, on a

$$|\alpha-\xi| > \frac{c_1^d}{H^n}, \quad \text{où} \quad c_1 = c_1(\alpha) > 0 .$$

Bibliographie : Brauer (1929a, 1929b), Bombieri (1958) et Güting (1961).

De ce corollaire on peut déduire le résultat suivant.

Proposition 1 : Toute racine réelle positive de la fonction

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} a_{\nu} x^{\nu}}{(\nu!)^{\nu!}}$$

a une valeur transcendante si les a_ν sont des entiers naturels tels que $0 < a_\nu < B^\nu$, où B est une constante > 0.

Démonstration : Voir Schneider (1957) Th.5, Ch.I, §4.

Bibliographie : Cohn (1946).

4. Le théorème de Roth

Théorème 7 (Roth 1955) :

Soit α algébrique de degré $n > 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, l'inégalité

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

n'a qu'un nombre fini de solutions.

Pour des résultats antérieurs plus faibles voir Thue (1908, 1909), Siegel (1921), Dyson (1947), Gefond (1952) chap.1.

Démonstration :

Voir par exemple Cassels ch.VI.

Remarque 3 (W. Schmidt 1971, page 12) : In view of Dirichlet's theorem, the exponent 2 is best possible here. But it is conceivable that the factor q^{ε} could be replaced by a smaller factor. But nothing is known in this direction. The metrical result (exemple 2, Th.5 suggests that

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2(\log q)^{1+\varepsilon}}$$

has only finitely many solutions for every positive δ . The first written account of this conjecture appears to be in Lang (1965).

Conséquence : Soit α un nombre et soit $\varepsilon > 0$ tels que l'inégalité

$$(5) \qquad |\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

admette une infinité de solutions $\frac{p}{q}$ distinctes. Alors α est transcendant.

Exemple : $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-3^n}$ est transcendant.

Remarque 4 : D'après l'exemple 1 du th.5, l'ensemble $\mathfrak{K}$ des nombres transcendants construits par cette méthode est de mesure nulle. Là encore, je ne connais pas d'exemple de nombre transcendant usuel dont on sache qu'il appartient à $\mathfrak{K}$. Par contre, par exemple, le nombre e^{α} , α algébrique non nul, n'appartient pas à cette classe : voir Mahler (1932), (1967), Baker (1965), Kappe (1966)...

Davenport et Roth (1955) ont montré que, si $\frac{p_n}{q_n}$ désigne la n-ième réduite d'un nombre algébrique irrationnel α , on a

$$\log \log q_n < \frac{c_1(\alpha)n}{\sqrt{\log n}} .$$

Baker (1962) a repris les travaux de Maillet (1906 chap.VII) et les a améliorés en utilisant les travaux de Davenport et Roth et démontre en particulier :

Proposition 2 : Soit $\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_m, \ldots]$. S'il existe une infinité de n tels que

$$* \qquad a_n = a_{n+1} = \ldots = a_{n+\lambda(n)-1}$$

et si le développement n'est pas périodique et que $*$ a lieu pour $n = n_i$ avec

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log \lambda_i (\log n_i)^{\frac{1}{2}}}{n_i} = \infty \text{ , où } \lambda_i = \lambda(n_i) \text{ , alors } \alpha \text{ est transcendant.}$$

De même que Maillet, il obtient des résultats plus généraux en considérant des blocs de a_i , consulter le papier cité à ce sujet.

Maillet construit aussi des nombres décimaux quasi-périodiques qui sont des nombres transcendants (de Liouville), grâce au théorème de Roth, ces résultats peuvent être améliorés.

Le théorème de Roth avait été précédé par un théorème de Schneider (1936) qui améliorait un résultat antérieur de Siegel (1921 b).

<u>Théorème</u> 8 (Schneider 1936) :

Soit α algébrique. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, si $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$,..., $0 < q_1 < q_2 < \dots$, $(p_1,q_1) = (p_2,q_2) = \dots = 1$, sont des solutions de

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

alors

$$\lim \frac{\log q_{k+1}}{\log q_k} = +\infty .$$

Ce résultat était presque aussi utile que le théorème de Roth pour la construction de nombres transcendants. Par exemple, il suffit pour démontrer la transcendance de $\sum_{n\geqslant 1} 2^{-3^n}$.

Le théorème de Schneider a été amélioré par Cugiani, grâce au lemme de Roth.

<u>Théorème</u> 9 (Cugiani 1959) :

Soit α algébrique de degré d . Si

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < q^{-2-20d(\log\log\log q)^{-\frac{1}{2}}}$$

admet une infinité de solutions $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$,..., $0 < q_1 < q_2 < \dots$, $(p_1,q_1) = (p_2,q_2) = \dots = 1$, alors

$$\lim \frac{\log q_{k+1}}{\log q_k} = +\infty .$$

Pour une généralisation voir Mahler (1961 appendice). Ce théorème a été quelque peu renforcé depuis.

<u>Théorème</u> 10 (Mignotte 1971) :

Soit α algébrique de degré d . Si l'inégalité

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < q^{-(2+\theta(\log\log\log q)^{-\frac{1}{2}})} ,$$

avec
$$\theta = \frac{4}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\log(f+2)\log 2} , \quad 0 < \alpha < b ,$$

admet une infinité de solutions $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$,..., $0 < q_1 < q_2 <\ldots$; $(p_1,q_1) =\ldots= 1$,

alors on a

$$\overline{\lim} \frac{\log q_{k+1}}{(\log q_k)^p} = \infty$$

pour tout $p \in [1 , 2^{\frac{6-\alpha}{\alpha}} [$.

<u>Remarque</u> 5 : En utilisant des méthodes probabilistes, on peut améliorer un peu la valeur de θ .

5. <u>Généralisations du théorème de Roth</u>

Soit β un nombre algébrique, on pose $H(\beta) = H(P)$, où P désigne le polynôme minimal de β .

<u>Théorème</u> 11 (Levêque 1955, vol.2, chap.4) :

Soit α algébrique. Soit K un corps de nombres. On fixe $\varepsilon > 0$. Alors, il y a seulement un nombre fini d'éléments β de K tels que

$$|\alpha-\beta| < H(\beta)^{-2-\varepsilon} .$$

Si α et K sont réels l'exposant 2 est le meilleur possible.

Signalons seulement que ce résultat a été amélioré par Mahler (1963). Pour une discussion détaillée, voir W. Schmidt pages 22-23.

6. Conditions arithmétiques

Le premier à reconnaître l'importance d'approximations diophatiennes p-adiques fut K. Mahler.

Parmi les nombreux et importants travaux sur cette question, on peut citer : Mahler (1933 a.b.c), (1936) ; Parry (1940), (1950) ; Schneider (1950), (1957, Th.6 ch.I) ; Ridout (1957), (1958) ; Mahler (1961) ; Lang (1962) ; Mahler (1963) ; Stépanov (1967), Walliser (1969) ; Sprindzuck (1970), (1971);... .

Comme exemple nous ne citerons que le résultat suivant :

Théorème 12 (Ridout 1957) :

Soit α algébrique réel non nul et soient $p_1,\dots,p_r,q_1,\dots,q_s$ des nombres premiers distincts fixés. Supposons $\varepsilon > 0$. Alors il y a seulement un nombre fini de nombres rationnels $\frac{p}{4}$ avec

** $$p = p_1^{a_1}\dots p_r^{a_r}p' \ , \ q = q_1^{b_1}\dots q_s^{b_s}q'$$

où les a_i et b_j sont des entiers $\geqslant 0$ et où p' et q' sont des entiers non nuls et tels que

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{|p'q'||pq|^{\varepsilon}} \quad .$$

Conséquence : Le nombre $\alpha = \sum_{1}^{\infty} 2^{-2^n}$ est transcendant.

Remarque 6 : Soit $\mathfrak{R}_i$ l'ensemble des nombres non nuls tels que l'inégalité (6) admette une infinité de solutions de la forme **, le théorème de Ridout montre que ces nombres sont transcendants. Fraenkel (1962) a démontré que $\mathfrak{R}_i$ est de mesure nulle. Pour l'existence et la construction de certains nombres transcendants obtenus de cette manière voir Fraenkel (1964).

Pour des exemples de nombres transcendants obtenus par des théorèmes d'approximation, voir Kempner (1916 a.b.c) ; Blumberg (1916), (1926) ; Tschkaloff (1921 a.b) ; Izumi (1927), (1928) ; Itihara et Oishi (1933) ; Schneider (1950).

Voici quelques exemples dont on trouvera les démonstrations dans le livre de Schneider.

<u>Proposition</u> 3 : Pour x rationnel non nul, la série entière

$$\alpha = \sum_{\nu \geqslant 0} a^{-c^\nu} d_\nu x^\nu$$

prend des valeurs transcendantes quand a, c et les d sont entiers, $a \geqslant 2$, $c \geqslant 2$, $|d_\nu| < D^\nu$ où D est un nombre > 0, une infinité de d_ν étant de plus supposés non nuls.

<u>Proposition</u> 4 : La série de Fredholm $\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{2^\nu}$ prend des valeurs transcendantes pour $x = \frac{p}{q} \neq 0$ avec $|x| < q^{-(\frac{1}{2}+\varepsilon)}$, $\varepsilon > 0$.

<u>Proposition</u> 5 (Mahler 1937 a.b) :

Si $f(k)$ est un polynôme non constant, à valeurs entières, positif pour $k \geqslant 1$ et si on désigne par α le nombre dont le développement décimal est obtenu en plaçant, l'un après l'autre, à droite de la virgule, les entiers $f(1), f(2), \ldots$ écrits en base dix, alors α est transcendant sans être un nombre de Liouville.

<u>Exemple</u> : $\alpha = 0,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\ldots$.

Baker (1964) a montré que les nombres obtenus par la proposition 5 ne sont pas des U-nombres. Il a montré aussi qu'en général la connaissance de la mesure d'irrationnalité d'un nombre ne permet pas de dire si c'est un S-nombre un T-nombre ou un U-nombre.

Le théorème (10) admet des généralisations "arithmétiques" qui permettent d'améliorer certains des résultats précédents. Signalons une de ses conséquences :

<u>Proposition</u> 6 : Soit $g \geqslant 2$ un entier fixé. Soit (θ_n) une suite de réels de l'intervalle $]0,1[$. Soit w_n une suite de réels positifs qui tendent vers l'infini. Soit ν_n une suite d'entiers qui vérifient

$$\nu_1 \geqslant 3 \text{ ,...., } \nu_{n+1} \geqslant \nu_n\left(1 + \frac{w_n}{\sqrt{\log \log \nu_n}}\right) .$$

Soit a_n une suite infinie d'entiers positifs, premiers avec g , qui vérifient

$$a_{n+1} \leqslant g^{\theta_n(\nu_{n+1}-\nu_n)} .$$

Si on suppose que la suite $(1-\theta_n)w_n$ tend vers l'infini et qu'il existe $p > 1$ tel que $(1-\theta_n)\nu_n^p$ tende vers l'infini alors le nombre

$$\alpha = \Sigma\, a_n\, g^{-\nu_n}$$

est transcendant.

Terminons ce paragraphe par un résultat concernant l'approximation des nombres algébriques par des nombres rationnels dont le dénominateur sont de la forme $u!$. Kasch (1953) a obtenu un résultat sur cette question. J'ai aussi obtenu, sans connaître l'exitence du travail de Kasch, un énoncé un peu différent à ce sujet. A l'intersection des deux, on trouve le résultat suivant

<u>Théorème</u> 13 (Kasch 1953) :

Soit α algébrique. Supposons $\varepsilon > 0$ fixé. Si les inégalités

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{1+\varepsilon}}$$

admettent une infinité de solutions de la forme $q_k = (u_k)!$, $(p_k, q_k) = 1$, alors on a

$$\overline{\lim} \frac{\log q_{k+1}}{\log q_k} = +\infty \text{ .}$$

Kasch obtient par exemple la transcendance du nombre

$$\alpha = \sum_{\nu>0} \frac{1}{(2^n)!} \text{ .}$$

III - <u>Approximations simultanées des nombres irrationnels</u>

1. <u>Théorème</u> 14 (Dirichlet 1842) :

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ des nombres réels non tous rationnels. Alors, il y a une infinité de ℓ-uples $(\frac{p_1}{q}, \dots, \frac{p_\ell}{q})$ avec $q > 0$ et $\text{p.g.c.d}(q, p_1, \dots, p_\ell) = 1$ tels que

$$\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{1}{q^{1+\frac{1}{\ell}}} \text{ .}$$

Pour une discussion très intéressante et de nombreux détails voir la monographie de W. Schmidt, §6.

2. Approximations simultanées des nombres algébriques par des rationnels

Théorème 15 (W. Schmidt 1970) :

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ des nombres algébriques réels tels que $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ soient linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, et supposons $\varepsilon > 0$. Alors, il n'y a qu'un nombre fini d'entiers q tels que

$$q^{1+\varepsilon}\|\alpha_1 q\| \ldots \|\alpha_\ell q\| < 1 .$$

Voir aussi Schmidt (1965), (1967), Wirsing (1971).

Corollaire : Les hypothèses étant celles du théorème ci-dessus, le système

$$\left|\alpha_i - \frac{p}{q}\right| < q^{-1-\frac{1}{\ell}-\varepsilon} , \quad i = 1, \ldots, \ell ,$$

n'a qu'un nombre fini de solutions.

Exemple : Le théorème de Schmidt m'a permis de démontrer en particulier le résultat suivant : Si F_n désigne le n-ième nombre de Fibonacci alors

$$\alpha = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n!\, F_{2^n}}$$

est transcendant.

Conclusion :

Nous nous contenterons de recopier la conclusion du chapitre I du livre de Schneider. "Nous avons tenté dans ce chapitre, de tracer une voix méthodique pour reconnaître des nombres transcendants, qui sont définis par certains processus de passages à la limite convergeant bien. Il va de soi que, nous limitant aux théorèmes d'approximations généraux, nous ne pouvions d'aucune façon prétendre à un aperçu complet des résultats connus. Il semble pourtant raisonnable de pousser plus avant l'édification d'une telle méthode, d'abord en essayant d'améliorer encore les théorèmes d'approximation, puis en considérant des processus de convergence moins bons et en procédant à toute généralisation qui semble féconde pour les applications".

Références

Certaines des références ne sont pas citées dans le texte. Pour des bibliographies très complètes portant sur des sujets plus vastes voir la monographie de W. Schmidt, le long article de Fel'dman et Shidlovski (plus de 400 références!), les livres de Koksma, Perron, Cassels, Gel'fond et Schneider ainsi que la thèse de Cijsouw.

A. BAKER (1962) Continued fractions of transcendental numbers. Mathematika 9, 1-8.
(1964a) Rational approximations to certain algebraic numbers. Proc. London Math. Soc. (3) 14, 385-398.
(1964b) Rational approximations to $\sqrt[3]{2}$ and other algebraic numbers. Quart. J. Math. Oxford Sci. (2) 15, 375-383.
(1964c) On mahler's classification of transcendental numbers. Acta Math. 111, 97-120.
(1965) On some diophantine inequalities involving the exponential function. Can. J. Math. 17, 616-626.
(1973) A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms. Acta Arith.

G. BARON et E. BRAUNE (1970) Zür transzendenz von Lückenreihen mit ganzalgebraischen Koeffizienten und algebraischem Argument, Compositio Math., 22, 1-6.

F. BERNSTEIN (1912) Über eine Anwendung der Mengenlehre auf ein aus der Theorie der säkularen Störungen herrühendes Problem. Math. Ann. 71, 417-439.

H. BLUMBERG (1916) On a theorem of Kempner concerning transcendental numbers. Bull. Amer. Math. Soc., 22, 438-439.
(1926) Note on a theorem of Kempner concerning transcendental numbers. Bull. Amer. Math. Soc., 32, 351-356.

E. BOMBIERI (1958) Sull' approssimazione di numeri algebrici medianti numeri algebrici. Bull. Un. Mat. Ital. (3) 351-354.

E. BOREL (1909) Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. Rend. Cir. Mat. Palermo 27, 247-271.

A. BRAUER (1929a) Uber diophantische Gleichungen mit endlich vielen Losungen. J. Reine Angew. Math., 160, 70-99.
(1929b) Uber die Approximation algebraischen Zahlen durch algebraischen Zahlen. Jber dtsch. Math. Ver. 38, 47.

A.D. BRYUNO (1964) The expansion of algebraic numbers in continued fractions (Russe) Sh. Vyschisl. Mat. i Mat. Fiz., 4, 211-221.

P. BUNDSCHUH (1971) Irrationalitätsmasse für e^a, $a \neq 0$ rational oder Liouville Zahl, Math. Ann. 192, 229-242.

H. CABANNES (1944) Application des fractions continues à la formation de nombres transcendants, Revue Sci., 82, 365-367.

J.W.S. CASSELS (1957) An introduction to diophantine approximation. Cambridge Tracts 45, Cambridge University Press.

P.L. CIJSOUW(1972) Transcendence measures. Acad. Service, Dodaarslann 95, Vinkeveen, The Netherlands.

H. COHN (1946) Note on almost algebraic numbers. Bull. Amer. Math. Soc. 52, 1042-1045.

M. CUGIANI (1947) Nuova osservazione sopra un vecchio theorema di Liouville. Bull. Uni. Mat. Ital., 2, 125-128.
(1959a) Sull'approssimabilità di un numero algebrico mediante numeri algebrici di un corpo assegnato, Bull. Un. Mat. Ital, 14, 151-162.
(1959b) Sulla approssimabilità dei numeri algebrici mediante numeri razionali, Ann. Mat. Pura Appl. 48, 135-145.

H. DAVENPORT (1937) Note on a result of Siegel. Acta Arith.2, 262-265.
(1968) A note on Thue's theorem. Mathematika 15, 76-87.

H. DAVENPORT et K.F. ROTH (1955) Rational approximations to algebraic numbers. Mathematika 2, 160-167.

L.G.P. DIRICHLET (1842) Verallzemcinerung eines satzes aus der Lehre oon den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen S.B. Preuss Akad. Wiss. 93-95.

F.J. DYSON (1947) The approximation to algebraic numbers by rationals. Acta Math. 79, 225-240.

N.J. FEL'DMAN (1962) On transcendental numbers having approximations of a given type. Uspekhi Mat. Nauk 17 (5), 145-151.
(1971) An effective sharpening of a theorem of Liouville. Izv. Akad. Nauk. SSSR Sci. Mak. 35, 973-990.

N.I. FEL'DMAN et A.B. SHIDLOVSKII (1967) The development and the present stage of the theory of transcendental numbers. Russian Math. Surveys 22, 1-79.

A.S. FRAENKEL (1962a) A class of transcendental numbers. Internal Congress Mathematicians, Stockholm, Abstracts of short communications, 26.
(1962b) On a theorem of Ridout in the theory of Diophantine approximations, Trans. Amer. Math. Soc., 105, 84-101.
(1964) Transcendental numbers and a conjecture of Erdös and Mahler. J. London Math. Soc., 39, 405-416.

A. O. GEL'FOND (1933) On necessary and sufficient criteria for the transcendence of numbers. Moskov. Gos. Univ. Ucl. Zap, 1, 6-8.

(1935) On the approximation of transcendental numbers by algebraic numbers. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 2, 177-182.

(1949) The approximation of algebraic numbers by algebraic numbers and the theory of transcendental numbers. Uspekhi Mat. Nauk, 4 (4), 19-49 = Amer. Math. Soc. Transl. (1), 2 (1962), 81-124.

(1952) Transtsendentuye : algebraicheskie chisla, Gosudarsto. Izdat. Tekn. Teor. Lit. Moscow = Transcendental and algebraic numbers, Dover, New York 1960.

(1957) The problem of approximating algebraic numbers by rationals, Matem. prosv., 2, 35-50.

D. GIGLI (1923) Dei numeri trascendenti, 68p., Pavia

E.M. GRUBE (1965) Some p-adic and g-adic version of Roth's theorem, Dissert, Abstr. USA, 25, n°12, 7292.

R. GÜTING (1961) Approximation of algebraic numbers by algebraic numbers, Mich. Math. J., 8, 149-159.

(1963) On Mahler's function θ_n, Mich. Math. J., 10, 161-179.

(1965) Über der Zusammenhang zwischen rationalen Approximationen und Kettenbrüchen wicklungen Math.2, 90, 382-387.

G.H. HARDY et E.M. WRIGHT (1938) The theory of Numbers. Oxford, 4e édition, 1960.

H. HASSE (1939a) Simultane Approximation algebraischer Zahlen durch algebraische Zahlen, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Fachgruppe I, N.F.I., 209-212.

(1939b) Simultane Approximation algebraischer Zahlen durch algebraischen Zahlen, Monatsh. Math. Phy., 48, 205-225.

A. HURWITZ (1891) Über die augenäherte Darstellung der Inationalzahlen durch rationale Brüche. Math. Ann. 39, 279-284.

S. HYYRÖ (1965a) Über Approximation algebraischen Zahlen durch rationale, Ann. Univ. Turker. Sci. A I, 84, 1-12.

(1965b) Über rationale Näherungswerte algebraischer Zahlen, Ann. Acad. Sci. Fenn. Sci. A I, Math n° 376, 1-16.

O.S. IÇEN (1956) Eine weitere Verallgemeinerung eines Schneiderschen Algebraizitätskriteriums, Rev. Fac. Sci. Univ. Istambul Sci. A, 21, 155-187.

(1957) Eine Verallgemeinerung und Ubertragung der Schneiderschen Algebraizitätskriterein ins p-adische urit Anwendung auf einen Transzendenzbeweis ins p-adischen, J. Reine Angew. Math., 198, 28-55.

T. ITIHARA et K. OISHI (1933) On transcendental numbers, Tôhoku Math. J., 37, 209-221.

S. IZUMI (1927) On transcendental numbers, Proc. Imp. Acad. Jap., 3, 300-391.

(1928) On transcendental numbers, Tôhoku Math. J., 29, 250-253.

L.C. KAPPE (1966) Zur Approximation von e^{α}, Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötcös Sct. Math., 9, 3-14.

F. KASCH (1953) Zur Annäherung algebraischer Zahlen durch arithmetisch charakterisierte rational Zahlen, Math. Nachr., 10, 85-98.

A.J. KEMPNER (1916a) On transcendental numbers, Bull. Amer. Math. Soc., 22, 282-285.
(1916b) Generalization of a theorem on transcendental numbers, Bull. Amer. Math. Soc., 23, 59, 64-65.
(1916c) On transcendental numbers, Trans. Amer. Math. Soc. 17, 476-482.

A.Y. KHINTCHINE (1926) Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen. Math. Z., 24, 706-714.
(1964) Continued fractions, Chicago Univ. Press.

J.F. KOKSMA (1936) Diophantische Approximationen. Ergebnisse d. Math. u. Grenzgeb. 4, Springer Verlag, Berlin
(1939) Über die Mahlersche Klasseneinteilung der tranzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen, Mh. Math. Phys, 48, 176-189.

O. KOLBERG (1963) A class of power series with transcendental sums for algebraic values of the variable, Arbok. Univ. Bergen Mat.-Naten. Ser. 1962, n° 18, 1-6.

R.O. KUZ'MIN (1930) On diophantine approximations to algebraic irrationals, Dokl. Akad. Nauk SSSR (A), n°8, 185-188.

S. LANG (1962) Diophantine Geometry. Interscience tracts in pure and applied math. 11, S. Wiley and Sons : New York-London.
(1965a) Report on diophantine approximations, Bull. Soc. Math. de France, 93, 117-192.
(1965b) Asymptotic approximation to quadratic irrationalities, Ann. 5 Math., 87, 481-487.
(1965c) Asymptotic approximation etc (II). Ibid., 488-496.
(1966a) Asymptotic diophantine approximation, Proc. of the Nat. Acad. of Sci., 55, 31-34.
(1966b) Introduction to diophantine approximations, Addison-Wesley Publ. Co. : Reading, Mass.
(1971) Transcendental numbers and diophantine approximations, Bull. Ann. Math. Soc., 77, 635-677.

W.J. LEVEQUE (1955) Topics in number theory, Addison-Wesley Publ. Co : Reading Mass.
(1951) Note on the transcendence of certain series, Proc. Amer. Math. Soc., 2, 401-403.

B. LEVI (1923) Seri numeri di Liouville e sur un corps non numerabile di numeri reali, AHi. Accad. naz. Lincei, Rend. (5) 32, 600-603.

J. LIOUVILLE (1844a) Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques, C. R. Acad. Sci. Paris, 18, 883-885.
(1844b) Nouvelle démonstration d'un théorème sur les irrationnelles algébriques inséré dans le compte rendu de la dernière séance, C. R. Acad. Sci. Paris, 18, 910-911.

(1851) Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnels algébriques, J. Math. Pures Appl. (1), 16, 133-142.

K. MAHLER (1931) Ein Beweis der Thue-Siegelschen Satzes über die Approximation algebraischen Zahlen für binomische Gleichungen, Math. Ann., 105, 267-276.
(1932a) Zur Approximation der Exponentialfunction und der logarithmus I et II, J. Reine Angew. Math., 166, 118-136 et 137-150.
(1932b) Über das Mass der Menge aller S. Zahlen, Math. Ann., 106, 131-139.
(1933a) Zur Approximation algebraischen Zahlen, I. Über den grossten Primteiler linärer Formen, Math. Ann., 107, 691-730..
(1933b) Zur Approximation algebraischen Zahlen, II. Uber die Anzahl der Darstellungen ganzer Zahlen durch binärer Formen, Math. Ann., 108, 37-55
(1933c) Zur Approximation algebraischen Zahlen, III. Über die mittlere Auzahl der Darstellungen grosser Zahlen durch binäre Formen, Acta Math., 62, 31-166.
(1936) Ein Analogon zu einem Schneiderscher Satz, Nederl. Akad. Wetersch. Proc. Ser. A, 39, 633-640 et 729-737.
(1937a) Arithmetische Eigenschaften einer Klasse von Dezimalbruchen, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, 40, 421-428.
(1937b) Über die Dezimalbruchenwicklung gewisser Irrationalzahlen, Math. B. Zutphen 6, 22-36.
(1949a) On the theorem of Liouville in fields of positive characteristic, Canad. J. Math., 1, 397-400.
(1949b) On Dyson's improvement of the Thue-Siegel theorem, Niderl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, 52, 1175-1184 = Indag. Math., 11, 449-458.
(1949c) On the continued fractions of quadratic and cubic irrationals, Ann. Math. Pura Appl., 30, 147-172.
(1951) On the generating functions of the integers with a missing digit, J. Indian Math. Soc., A 15, 33-40.
(1957) On the fractional parts of the powers of a rational number, II, Mathematika, 4, 122-124.
(1960) On a theorem by E. Bombieri, Nederl. Akad. Weteusch. Proc. Ser.A, 63 = Indag. Math., 22, 245-253 + 23 (1961) 161.
(1961) Lectures on diophantine approximations. Part.1 g-adic numbers and Roth's theorem. Univ. of Notre Dame Press. Notre Dame, Ind.
(1963) On the approximation of algebraic numbers by algebraic integers, J. Austral. Math. Soc., 1, 408-434.
(1965) Arithmetic properties of lacunary power series with integral coefficients, J. Austral. Math. Soc., 5, 56-64.
(1967) Applications of some formulae by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms, Math. Ann., 161, 200-227.

E. MAILLET (1904) Sur les nombres quasi-rationnels et les fonctions arithmétiques ordinaires ou continues quasi-périodiques, C. R. Acad. Sci. Paris, 138, 410-411.
(1906a) Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions, 274p., Paris, Gauthier-Villars.
(1906b) Sur la classification des irrationnelles, C. R. Acad. Sci. Paris, 143, 26-28.
(1907a) Sur les fractions continues arithmétiques et les nombres transcendants, J. Math. Pures Appl., (6) 3, 299-336.

(1907b) Sur les équations indéterminées en nombres transcendants de Liouville. Mem. Acad. Sci. Toulouse, (1) 7, 1-3.
(1907c) Sur les fractions continues arithmétiques et les nombres transcendants, C. R. Acad. Sci. Paris, 144, 1020-1022.

A. MARKOFF (1879) Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. Math. Ann. 15, 381-409.

M. MIGNOTTE (1971) Approximations diophatiennes et nombres transcendants, Séminaire Delange-Pisot-Poitou 1970.71, n° 22, 18p.
(1972) Une généralisation d'un théorème de Cugiani-Mahler, Acta Arith., XXII, 57-67.

D. MORDOUCHAY-BOLTOWKOJ (1934) Sur les nombres transcendants dont les approximations successives sont définies par des équations algébriques, Rec. Math. Soc. Math. Moscou, 41, 221-232 (en russe, résumé en français).
(1935) Uber einige Eigenschaften der tranzendenten Zahlen, Tôhoku Math. 5, 40, 99-127.

J.VON NEUMANN et B. TUCKERMAN (1955) Continued expansion of $2^{1/3}$, Math. Tables Aids Comp., 9, 23-24.

I. NIVEN (1956) Irrational numbers, John Wiley, New-York (1963) Diophantine approximations, New-York, Interscience.

C.F. OSGOUD (1966a) A method in diophantine approximation, Acta Arith., 12, 111-130
(1966b) Some theorems on diophantine approximation, Trans. Amer. Math. Soc., 123, 64-87.

C.J. PARRY (1940) The p-adic generalisation of the Thue-Siegel theorem, J. London Math. Soc., 15, 293-305.
(1950) On the p-adic generalisation of the Thue-Siegel theorem, Acta Math., 83, 1-100.

L.G. PECK (1961) Simultaneous rational approximations to algebraic numbers, Bull. Amer. Math. Soc., 67, 197-201.

A. PERNA (1913) Intorno ai numeri transcendenti di Liouville, Ann. Inst. Tech. Napoli, 30, 1-11.
(1914) Sui numeri transcendenti in generale e sulla lococonstruzione in base al criterio di Liouville, Giorn. Matem. Battaglini, 52, 305-365.

O. PERRON (1913) Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig und Berlin ; 3e edition, 1954, Suttgart, B.G. Teubner.
(1921a) Irrationalzahlen. Berlin und Leipzig
(1921b) Über Diophantische Approximationen. Math. Ann., 83, 77-84.
(1932) Über mehrhrfach transzendente Erweiterungen der natürlichen Rationalitätsbereiches. Sitzunsber. Bayer. Akad. Wiss. H2, 79-86.

G. POITOU (1953) Sur l'approximation des nombres complexes par les nombres des corps quadratiques imaginaires, etc., Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris, (3), 70, 199-265.

A. PURI (1945) Transcendence of decimals, Math. Student, 12, 88-90.

K. RAMACHANDRA (1966) Approximation of algebraic numbers, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. KI., 45-52.

R.M. REDHEFFER (1953) Power series and algebraic numbers, Amer. Math. Monthly, 60, 25-27.

R.D. RICHTMYER, M. DEVANY and N. METROPOLIS (1962) Continued expansions of algebraic numbers. Numerische Math., 4, 68-84.

D. RIDOUT (1957) Rational approximations to algebraic numbers. Mathematika. 4, 125-131.
(1958) The p-adic generalization of the Thue-Siegel-Roth theorem. Mathematika, 5, 40-48.

G. RODRIGUEZ (1964) Approssimabilità di irrazionali p-adici mediante numeri razionali, Rend. Ist. Lomb. Cl. Sci. (A), 98, 691-708.
(1965) Approssimabilità di irrazionali p-adici mediante numeri razionali, II. Bull. Uni. Mat. Ital. (3), 20, 232-244.

K.F. ROTH (1955) Rational approximations to algebraic numbers. Mathematika 2, 1-20 + Corrigendum, p. 168.

A. SCHINZEL (1967) Review of a paper by Hyyrö, ZentralblaltMath., 137, 257-258.
(1968) An improvement of Runge's Theorem on diophantine equations. Commentarii Pontif. Acad. Soc., 2, n°20.

W.M. SCHMIDT (1962) Simultaneous approximation and algebraic independence of numbers. Bull. Am. Math. Soc., 68, 475-478.
(1965) Über simultane Approximation algebraischer Zahlen durch rationale. Acta Math., 114, 159-206.
(1967) On simultaneous approximation of two algebraic numbers by rationals. Acta Math., 119, 27-50.
(1970) Simultaneous approximation to algebraic numbers by rationals. Acta Math., 125, 189-201.
(1971) Approximation to algebraic numbers. Enseign. Math., XVII, 187-253 = Monographie n° 19 de l'Enseign. Math., Imprimerie Kundig, Genève, 1972.

TH. SCHNEIDER (1935) Zur Approximation algebraischer Zahlen, Einladung 11, Deutschen Phys. Math. Tag., Stuttgart, 22.
(1936) Über die Approximation algebraischer Zahlen, J. Reine Angew. Math., 175, 182-192.
(1949) Über eine Dysonche Verschärfung des Satzes-thueschen Stazes. Arch. Math., 1, 288-295.
(1950) Zur Annäherung der algebraischen Zahlen durch rationale, J. Reine Angew. Math. 188, 115-128.
(1957) Einführung in die tranzendenten Zahlen, Springer, Berlin traduction française : Introduction aux nombres transcendants, Gauthier-Villars, Paris, 1959.

C.L. SIEGEL (1921a) Approximation algebraischer Zahlen. Math. Zeitscher., 10, 173-213.

(1921b) Über Nührungswerte algebraischer Zahlen. Math. Ann., 84, 80-99.

(1929) Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen. Abh. d. Preuss Akad. Wiss, Math. Phys. Kl., n° 1.

(1970) Eine Erläuterungen zu Thues Untersuchen über Annäherungswerte algebraischer Zahlen und diophantische Gleichungen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl., Nr. 8.

TH. SKOLEM (1960) A new version of some considerations of A. Thue, Math. Scand., 8, 71-80.

V.G. SPRINDZUCK (1970) An effective estimate of rational approximations to algebraic numbers (en Russe), Dokl. Akad. Nauk Belsmookoj SSR, 14, n° 8, 681-684.

(1971a) An improvement of the estimate of rational approximations to algebraic numbers (Russian). Dokl. Akad. Nauk Belsmookoj SSR, 15, n° 2, 101-104.

(1971b) On the greatest prime divisor of a binary form (Russian) Ibid., n° 5, 389-391.

(1971c) Rational approximations to algebraic numbers (Russian) Istvestia Akad. Nauk SSR, 5.

S.A. STEPANOW (1967) The approximation of an algebraic number by algebraic numbers of a special form (Russian). Vestnick Moskov. Univ., Ser. I, Math. Meh., 22, n° 6, 78-86.

E.G. STRAUS (1962) A remark on the p-adic Roth theorem, Internat. Congr. Mathem. Stockholm.

A. THUE (1908) Bemerkungen über gewisse Näherungsbrüche algebraischer Zahlen. Über rationale Annäherungswerte der reellen Wurzel der ganzen Funktion dritten Grades x^3-ax-b. On en general i store hele tal uløsbar ligning. Skrifter udgione of Videnskabs-Selskabet i Christiania.

(1909) Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen. Journal of Math., 135 284-305.

L. TSCHAKALOFF (1921a) Arithmetische Eigenschaften der unendlichen Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} a^{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}}$. Math. Amer., 80, 62-74.

(1921b) Arithmetische Eigenschaften der unendlichen Reihe, II Math. Ann., 84, 100-114.

S. UCHIYAMA (1959a) On the Thue-Siegel. Roth theorem, I, Proc. Japan Acad., 35, 413-416.

(1959b) On the Thue-Siegel. Roth theorem, II, Proc. Japan Acad., 35, 525-529.

(1960) On the Thue-Siegel. Roth theorem, III, Proc. Japan Acad., 36, 1-2.

R. WALLISER (1969) Zur Approximation algebraischer Zahlen durch arithmetisch charakterisierte algebraische Zahlen. Arch. Math (Basel), 20, 384-391.

G.C. WEBBER (1944) Transcendence of certain continued fractions, Bull. Amer. Math. Soc., 50, 736-740.

E. WIRSING (1961) Approximation mit algebraischen Zahlen beschränhten Grades. J. Reine Angew. Math., 206, 67-77.
(1971) On approximations of algebraic numbers by algebraic numbers of bounded degree. Proc. of Symp. in Pure Math., XX, (1969 Number Theory Institute) 213-247.