Rappels historiques sur la théorie des nombres irrationnels et transcendants

Françoise CHANET
(Orsay 13 mars 1973)

Un nombre algébrique est une solution d'équation algébrique à coefficients entiers générale alors qu'un nombre rationnel est solution d'une équation algébrique à coefficients entiers du premier degré. La seconde notion est donc apparue beaucoup plus tôt que la première ; et les résultats sur les nombres irrationnels (= non rationnels) sont plus anciens et plus simples souvent, mais pas toujours, que les résultats analogues sur les nombres transcendants (= non algébriques).

I. Avant 1840.

Pour les Grecs il n'y a de nombres que les entiers (ceux bien sûr que nous disons maintenant strictement positifs). Néanmoins ils utilisent les "rapports d'entiers" (autrement dit les rationnels strictement positifs) toujours d'ailleurs du point de vue géométrique des "rapports de longueurs équivalents"), décrivant leurs opérations et démontrant certaines propriétés algébriques de ces opérations. La grande découverte de l'école de Pythagore (vers -500) est que la diagonale du carré n'est pas dans un "rapport d'entiers" avec son côté, en termes modernes que $\sqrt{2}$ est irrationnel. D'autre part le rapport de la circonférence au diamètre (ce que nous appelons le nombre π) n'est pas considéré comme un "rapport d'entiers" et Archimède (vers -200) en donne des approximations successives par la méthode des polygones. Ces deux résultats fondent la théorie des irrationnels. Quant aux problèmes de transcendance, du fait du caractère géométrique des mathématiques grecques, ils ne sont abordés que par le biais du fameux problème de la quadrature du cercle et de problèmes analogues de construction par la règle et le compas, dont l'impossibilité résulte en fait de l'insolubilité de certaines équations (en rationnels).

La théorie des nombres irrationnels et transcendants prend ensuite un vrai départ au 18ème siècle : elle bénéficie de la mise au point de l'algèbre formelle à partir du 15ème et de l'essor de l'analyse (fonctions exponentielles et logarithmes) à partir du 17ème. De plus sans en avoir fait de construction formelle les mathématiciens de cette époque se placent dans le corps des complexes (nombres imaginaires) au besoin. Une des première mentions des nombres transcendants est faite par Euler en 1748 dans son "Introductio in analysin infinitorum" (Oeuvres complètes-tome VIII-page 108) : "il apparaît clairement que les logarithmes rationnels proviennent des puissances de la base a. Si b n'est pas une telle puissance $\log_a(b)$ n'est même pas irrationnel car sinon (par exemple ?) on aurait avec b rationnel : $a^{\sqrt{n}} = b$ ce qui est impossible. Ces logarithmes ni rationnels ni irrationnels ont droit à l'appellation de transcendants." Quoi qu'on puisse penser des arguments d'Euler, on peut remarquer qu'il pose le problème (irrationnel dans ce contexte = algébrique réel) au sujet des logarithmes qui effectivement sont explorés jusqu'au moment présent (Baker). Vers ce milieu du 18ème siècle également se perfectionne la théorie des développements en fractions continue, très liée à l'irrationnalité puisqu'un réel est rationnel si et seulement si son développement est fini, et un peu à la transcendance puisque vers époque Lagrange montre qu'un réel est algébrique de degré 2 si et seulement si son développement est périodique. De cette manière Lambert en 1761 (C. R. Ac. Sc. Prusse) donne une démonstration à vrai dire incomplète de l'irrationnalité de π ; on peut trouver cette démonstration complétée par Legendre dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'année 1855. On peut remarquer aussi que le développement de e en fractions continue : $[2, 1, \underbrace{2, 1, 1}, \ldots, \underbrace{2n, 1, 1}, \ldots]$ trouvé "intuitivement" par Euler entraîne que e n'est ni rationnel ni même un nombre quadratique. En 1815 Fourier prouvera l'irrationnalité de e d'une manière très simple en utilisant son développement en série : $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$.

II. De 1840 à 1920 : théorie classique.

La théorie des nombres transcendants est véritablement fondée par Liouville qui à propos de problèmes d'approximation diophantienne établit pour la première fois l'existence de nombres transcendants ; son théorème (C. R. Ac. Sc. Paris 1844) s'énonce en effet : si α est une racine réelle du polynôme P irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ de degré s, il existe une constante $c \in \mathbb{R}_+^*$ telle que quels que soient q dans $\mathbb{N}^*$ et p dans $\mathbb{N}$ on a l'inégalité : $\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \geqslant \frac{c}{q^s}$.

Si on considère donc la somme d'une série $\sum_n \frac{1}{q^{N_n}}$ où q est un entier positif et N_n une suite d'entiers telle que $\frac{N_{n+1}}{N_n}$ tende vers $+\infty$ avec n, on voit qu'elle ne vérifie la propriété de Liouville pour aucun s donc qu'elle est transcendante. (ex. $N_n = n!$). Les nombres ainsi construits -nombres de Liouville- ont été très étudiés par Maillet cf. C. R. Ac. Sc. Paris de 1901 à 1907.

Ces problèmes d'approximation continueront jusqu'à nos jours à représenter un aspect de la théorie des nombres irrationnels et transcendants, en particulier à permettre de créer des nombres transcendants autres que ceux rencontrés dans l'analyse. Rappelons le plus célèbre d'entre eux : il s'agit d'estimer $\theta(n)$ borne inférieure des $c \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout ε appartenant à $\mathbb{R}_+^*$ et tout α nombre réel algébrique de degré n l'inégalité $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{c+\varepsilon}}$ n'est vraie que pour un nombre fini de rationnels $\frac{p}{q}$. Les théorème de Liouville et de Dirichlet donnent déjà : $2 \leqslant \theta(n) \leqslant n$. Thue en 1908 trouva la majoration $\theta(n) \leqslant \frac{n}{2}+1$ améliorée au cours du 20ème siècle par Siegel, Mahler, Schneider avant que Roth en 1955 (Mathematika) ne donne le résultat définitif : $\theta(n) = 2$. Plus centrale dans la théorie est la définition de la mesure de transcendance de x nombre complexe : c'est une fonction $\Phi(x,m,H) = \min\ (|P(x)|$ où P est un polynôme à coefficients entiers de hauteur $\leqslant H$ et de degré $\leqslant m$). Bien sûr x est algébrique si et seulement si pour m et H suffisamment grands cette fonction s'annule. Majorer cette fonction est simple (principe des tiroirs) : si x est réel on a $\Phi(x,m,H) < e^{\lambda m} H^{-m}$ et sinon $\Phi(x,m,H) < e^{\lambda m} H^{-\frac{m-1}{2}}$. C'est sur le problème plus intéressant de sa minoration qu'on a commencé à travailler dès la fin du 19ème siècle. Par exemple Borel en 1899 montre que : $\Phi(e,m,H) > H^{-c(m)\log\log H}$; mais là aussi le gros des résultats fut obtenu au cours du 20ème siècle en particulier par Mahler.

Le résultat de Borel est bien sûr un raffinement du résultat fondamental d'Hermite, qui en 1873 prouve la transcendance de e. Sa démonstration et celles plus simples que Hurwitz ... donneront un peu plus tard s'appuient sur les propriétés simples de la fonction exponentielle, d'intégrabilité par exemple, et sur des combinaisons "astucieuses" donnant, e étant supposé algébrique, une quantité entière non nulle et tendant vers 0.

En 1882 Lindemann adapte cette méthode pour prouver la transcendance de π et trois ans plus tard Weierstrass (cf Mathematische Werke II p. 341 ssq) donne la généralisation connue sous le nom de théorème de Lindemann-Weierstrass : soient $a_1,\ldots,a_n$ des nombres algébriques non tous nuls et $b_1,\ldots,b_n$ des nombres algébriques deux à deux distincts ; alors $a_1e^{b_1}+\ldots+a_ne^{b_n} \neq 0$.

On en déduit un premier résultat d'indépendance algébrique : celle des puissances de e dont les exposants sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.

Ce théorème de Lindemann-Weierstrass semble un point final dans cette direction de recherche utilisant les valeurs aux points algébriques des fonctions vérifiant des équations différentielles à coefficients algébriques. C'est pourquoi Hilbert dans sa fameuse liste de problèmes du Congrès international de Paris 1900 considère le 7ème : étudier la transcendance de a^b, a et b algébriques et b irrationnel comme très difficile, de l'ordre de difficulté de l'hypothèse de Riemann p.e. En fait à peine plus de trente ans après ce problème est résolu grâce à de nouvelles méthodes impliquant une connaissance plus profonde des fonctions analytiques. Mentionnons enfin qu'à la fin du 19ème siècle Cantor a donné la plus élégante méthode de démonstration de l'existence de nombres transcendants : l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable alors que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ a la puissance du continu.

II. Depuis 1920 : résolution du 7ème problème de Hilbert etc...

Vers 1920 des mathématiciens (Polya, Gel'fond,...) étudient les fonctions analytiques prenant des valeurs entières aux points entiers (de $\mathbb{Z}$, $Z[i]$), en particulier du point de vue de leur croissance. Ainsi Gel'fond en utilisant une méthode d'interpolation prouve-t-il dès 1929 que si a et b sont algébriques $\neq 0,I$ b étant irrationnel quadratique, a^b est transcendant. Ce résultat est amélioré par Kuzmin, puis Böhle ; et en 1934 Gel'fond et Schneider indépendamment démontrent leur célèbre théorème : si a est algébrique et différent de $0,I$, si b est algébrique irrationnel, alors a^b est transcendant.

La conjecture d'Euler est ainsi justifiée presque deux siècles plus tard. C'est le point de départ de nombreux travaux, spécialement des écoles russe et allemande. Ainsi dès 1933 Mahler étend aux exponentielles p-adiques (sa démonstration ainsi que celle du théorème principal sera améliorée par Lang). Gel'fond en 1934 trouve un premier résultat sur les mesures de transcendance des a^b (qui sera amélioré par son école) : analogue à celui de Borel. Schneider se consacre de 1934 à 1937 aux fonctions elliptiques sur lesquelles il obtient de beaux résultats dont on peut donner quelques exemples : -la longueur d'une ellipse à axes algébriques est transcendante- -la fonction $\wp$ de Weierstrass prend des valeurs transcendantes aux points algébriques- etc... et en 1941 $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ est transcendant pour tous p et q rationnels.

Siegel entreprend une étude arithmétique des valeurs aux points algébriques d'une assez grande classe de fonctions entières, les E-fonctions : [si α appartient à K corps de nombres de degré h sur $\mathbb{Q}$, on note $|\bar{\alpha}| = \max(|\alpha_i|\ \alpha_p \ldots \alpha_j$ conjugués de $\alpha)]$. Une fonction entière $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{z^n}{n!}$ est une E-fonction si :

(1) tous les c_n appartiennent à un certain corps de nombres de d° fini

(2) pour tout ε de $\mathbb{R}_+^*$ $|\bar{c}_n| = \underset{n \to +\infty}{\mathcal{O}} (n^\varepsilon)$

(3) il existe une suite de q_n entiers positifs tels que pour tous n et k le nombre $q_n c_k$ est un entier algébrique et que pour tout ε de $\mathbb{R}_+^*$ on ait : $q_n = \underset{n \to +\infty}{\mathcal{O}} (n^\varepsilon)$.

Ces E-donctions forment un anneau fermé pour la dérivation, l'intégration et la multiplication par un nombre algébrique. Elles comprennent les polynômes à coefficients algébriques, e^z, $\cos z$, $J_\lambda(z)$ fonction de Bessel. C'est d'ailleurs sur des fonctions très proches des J_λ que Siegel établit son premier théorème en 1929, dont une conséquence est la transcendance de la fraction continue : $[1, 2, 3, \ldots, n, \ldots]$. Voici le théorème général de Siegel (1949) :

Si $f_1, \ldots, f_n$ sont des E-fonctions solutions du système linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}(Z)$ d'équations différentielles : $y'_k = \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i}\, y_i$ $k = 1, \ldots, m$ telles que les $\frac{(m+N)!}{N!m!}$ produits de puissances de ces fonctions : $f_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot f_m^{k_m}$ $k_1 + \ldots + k_m \leqslant N$ forment un système normal de E-fonctions, alors les valeurs de $f_1, \ldots, f_m$ en un α point algébrique non nul et non pôle sont algébriquement indépendantes.

Si les équations sont affines sur $\mathbb{Q}(\mathbb{Z})$ on a une équivalence entre la $\mathbb{Q}$-indépendance algébrique des valeurs en α et la $\mathbb{Q}(Z)$-indépendance algébrique des F_j. Citons encore un résultat de Shidlovskii (1953) dans cet ordre d'idées :

on considère pour λ rationnel non entier négatif la fonction :

$\varphi_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)}$ et $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ des nombres $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants ; alors les nombres $\varphi_\lambda(\alpha_1),\ldots,\varphi_\lambda(\alpha_n)$ sont algébriquement indépendants. C'est une généralisation de Lindemann-Weierstrass.

Avant de passer aux résultats les plus récents il faut évoquer au moins une partie de l'oeuvre considérable accomplie dans la théorie des nombres transcendants par Kurt Mahler -déjà cité- depuis 1930. Un des plus connus est sa classification des nombres transcendants datant de 1932 : pour un nombre ξ on définit avec a et n entiers positifs $w_n(a,\xi) = \min_{\substack{|a_i|\leqslant a \\ \sum_{i=0}^{n} a_i\xi_i \neq 0}} \left(\left|\sum_{i=0}^{n} a_i\, \xi^i\right|\right)$ puis à n fixé $w_n(\xi) = \limsup_a \frac{\mathrm{Log}\frac{1}{w_n(a)}}{\mathrm{Log}\ a}$ et enfin $w(\xi) = \limsup \frac{w_n}{n}$. On appelle alors $\mu(\xi)$ le premier n éventuellement infini pour lequel w_n devient infini. On remarque que $w(\xi)$ et $\mu(\xi)$ ne peuvent pas être simultanément finis et on pose

ξ est un A-nombre	si	$w = 0$	$\mu = +\infty$
ξ est un S-nombre	si	$0 < w < +\infty$	$\mu = +\infty$
ξ est un T-nombre	si	$w = +\infty$	$\mu = +\infty$
ξ est un U-nombre	si	$w = +\infty$ et	$\mu < +\infty$.

ξ est algébrique si et seulement si c'est un A-nombre. Les nombres transcendants se répartissent donc en S-, T-, et U-nombres. Le théorème de Mahler dit que deux nombres de classe différente sont algébriquement indépendants. Il établit aussi que les nombres de Liouville sont des U-nombres $(w = 1)$, que e est un S-nombre, que π est un S-nombre ou un T-nombre. Depuis bien d'autres résultats ont été acquis. En 1937 Mahler à partir d'un résultat de Schneider paru l'année précédente prouve que si P est un polynôme prenant des valeurs entières aux points entiers un nombre écrit en base q : $x = \overline{0, P(1) \quad P(n)\ldots}$ est transcendant non de Liouville. Il s'occupe aussi d'approximation, en particulier précise les mesures de transcendance de $\operatorname{Log} \alpha$, e , π (voir aussi les travaux de Popken et Feld'man).

Le plus important des résultats récents est sans doute le théorème de Baker (1966) : soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ des nombres algébriques dont les logarithmes sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants ; alors les nombres $1, \operatorname{Log} \alpha_1,\ldots,\operatorname{Log} \alpha_m$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Baker, puis Stark et Feld'man ont donné des minorations précises des formes linéaires de logarithmes.

De nombreuses conjectures ont été faites récemment dont la plus globale est celle de Schanuel : si $x_1,\ldots,x_n$ sont des nombres $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps $\mathbb{Q}(x_1,\ldots,x_n,e^{x_1},\ldots,e^{x_n})$ est supérieur ou égal à n . Pour finir nous rappelons que nombre de problèmes d'énoncé élémentaire ne sont pas résolus : la constante d'Euler est-elle irrationnelle ?

Quelle est la nature arithmétique de $e\pi$, $e+\pi,\ldots,\pi^{\pi}$, $e^{e},\ldots,2^{e}$ même et plus généralement e et π sont-ils algébriquement indépendants ?

Bibliographie

Fel'dman, N.I., and Shidlovskii, A.B.- The development and present state of the theory of transcendental numbers. Russian Mathematical Surveys, vol. 22 n° 3 (1967) p. 1-79.