# Théorème de Lindemann-Weierstrass

Alain MACADRE
(Orsay 6 mars 1973)

## I - Contexte historique

En 1748 Euler conjecture l'existence de nombres transcendants en considérant les logarithmes de nombres rationnels.

En 1844 Liouville donne une propriété des nombres transcendants et en montre l'existence.

En 1873 Hermite montre que $e$ est transcendants par une nouvelle méthode indépendante des travaux de Liouville.

En 1882 Lindemann, en utilisant cette méthode, montre que si $\alpha$ est algébrique non nul, alors $e^{\alpha}$ est transcendant ; donc que $\pi$ est transcendant.

En 1885 Weierstrass améliore le théorème de Lindemann et montre que si $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont des nombres algébriques distincts, alors $e^{b_1}, e^{b_2}, \ldots, e^{b_n}$ sont linéairement indépendants sur les nombres algébriques.

Ce théorème est équivalent au théorème suivant

Théorème : Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ des nombres algébriques, $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Alors $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_s}$ sont algébriquement indépendants.

La démonstration de Lindemann Weierstrass a été améliorée par Siegel et c'est cette démonstration que nous allons exposer.

## II - Notations et rappels

1) Si $K$ est un corps de nombres (i.e. une extension algébrique de $\mathbb{Q}$) on note par $I_K$ l'anneau des entiers algébriques de $K$.

2) Soit $a \in K$. On appelle dénominateur de $a$ un entier naturel $d$ tel que $da \in I_K$. Soit $d(a)$ le plus petit dénominateur de $a$ et soient $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ (si $n = [K:\mathbb{Q}]$) les plongements de $K$ dans $\mathbb{C}$. On note

$$\|a\| = \max_{i=1,\ldots n} |\sigma_i(a)|$$

$$\text{taille } a = t(a) = \max[\operatorname{Log} \|a\| , \log d(a)] .$$

La taille vérifie l'inégalité suivante :

$$-[K:\mathbb{Q}] \operatorname{Log} d(a) - ([K:\mathbb{Q}]-1)t(a) \leqslant \operatorname{Log}|\sigma_i(a)| \qquad \text{(Ref (1)(2))} .$$

3) Si $P \in K[X]$ on note par $\|P\|$ le maximum des valeurs absolues des coefficients et de leurs conjugués de $P$.

4) Lemme de Siegel. Il existe une constante $c_k > 0$ ayant la propriété suivante :

Soient $r$ et $n$ deux entiers $n > r \geqslant 1$ et $a_{ij}$ $(1 \leqslant i \leqslant r , 1 \leqslant j \leqslant n)$ des éléments de $K$. Soit $d_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ un dénominateur commun positif de $a_{ij}$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$ ; soit $d = \max_{1 \leqslant i \leqslant r} d_i$ et $A = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \|a_{ij}\|$.

Alors il existe $n$ éléments $x_1, \ldots, x_n$ de $K$ entiers sur $\mathbb{Z}$ non tous nuls, tels que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \qquad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant r$$

et

$$\max_{j=1,\ldots n} \|x_j\| \leqslant c_K + c_K(c_K\, ndA)^{\frac{r}{n-r}} \qquad \text{(Ref (1) ou (4))} .$$

5) Domination. Soient $P$ et $Q$ deux polynômes à une variable

$$P = \Sigma\, a_{(\nu)} z^{\nu} \qquad \text{où} \quad a_{\nu} \in \mathbb{C}$$

$$Q = \Sigma\, b_{\mu}\, z^{\mu} \qquad \text{avec} \quad b_{\mu} \text{ réel} \geqslant 0 \text{ .}$$

On dit que $Q$ domine $P$ et on note

$$P < Q$$

si pour tout $(\nu)$ on a $|a_{\nu}| < b_{(\nu)}$ .

Une propriété est que $DP < DQ$ où $D$ est la dérivation. (Ref (1))

## III - Démonstration

Rappelons tout d'abord le théorème à démontrer

Théorème de L.W : Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ des nombres algébriques, $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Alors $e^{\alpha_1},\ldots,e^{\alpha_s}$ sont algébriquement indépendants.

Le point essentiel de la démonstration que nous allons donner est de montrer le lemme suivant :

Lemme fondamental : Si $K$ est un corps de nombres, si $\beta_1,\ldots,\beta_m$ sont des éléments de $K^*$ tous distincts et si $\alpha \in K^*$, alors le rang de

$$e^{\alpha\beta_1},\ldots,e^{\alpha\beta_m}$$

sur $K$ est $\geqslant \frac{m}{2[K:\mathbb{Q}]}$.

Ce lemme est suffisant. En effet

A) Nous allons supposer démontré tout d'abord ce lemme fondamental et montrer comment le théorème de L.W. s'en déduit.

Soit $K = \mathbb{Q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$.

Posons $f_1(\nu) = e^{\alpha_1\nu},\ldots,f_s(t) = e^{\alpha_s t}$.

Supposons que le théorème de L.W. ne soit pas vrai. Alors il existe un polynôme $g$, à coefficients dans $K$, non tous nuls, de degré $d$ tel que l'on ait

$$g(f_1(\alpha),\ldots,f_s(\alpha)) = 0$$

pour $\alpha = 1$.

Le nombre de monômes

$$f_1^{\nu_1}\ldots f_s^{\nu_s} \quad \text{avec} \quad \nu_1 +\ldots+ \nu_s \in \nu$$

est $m_\nu = \Gamma_{s+1}^{\nu} = C_{\nu+s}^{\nu}$ .

Or $f_1^{\nu_1} \ldots f_s^{\nu_s} = e^{(\nu_1\alpha_1 + \ldots + \nu_s d_s)t}$

et on peut prendre pour $\beta_1, \ldots, \beta_m$ les combinaisons linéaires $\nu_1\alpha_1 + \ldots + \nu_s\alpha_s$ avec $\nu_1 + \ldots + \nu_s \leqslant \nu$ où $\nu$ est un nombre que l'on prendra suffisamment grand. (On a donc $m = m_\nu$).

Mais si $g(f_1(\alpha), \ldots, f_s(\alpha)) = 0$ on a aussi

$$f_1^{\mu_1}(\alpha) \ldots f_s^{\mu_s}(\alpha) \cdot g(f_1(\alpha), \ldots, f_s(\alpha)) = 0 \quad \text{pour} \quad \mu_1 + \ldots + \mu_s \leqslant \nu - d \ .$$

On obtient ainsi $m_{\nu-d}$ relations pour les

$$m_\nu \text{ nombres } f_1^{\nu_1}(\alpha) \ldots f_s^{\nu_s}(\alpha) \quad (\nu_1 + \ldots + \nu_s \leqslant \nu) \ .$$

Ces relations sont évidemment indépendantes puisque entre deux relations distinctes, les monômes ne sont pas tous les mêmes.

D'après le lemme fondamental, on doit avoir

$$m_\nu - m_{\nu-d} \geqslant \frac{m_\nu}{2[K:\mathbb{Q}]}$$

ce qui donne après division par $m_\nu$

$$1 - \frac{1}{2[K:\mathbb{Q}]} \geqslant \frac{m_{\nu-d}}{m_\nu} \ .$$

Or
$$\frac{m_{\nu-d}}{m_\nu} = \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-d+1)}{(\nu+1)(\nu+s-1)\ldots(\nu+s-d+1)}$$

que l'on peut rendre aussi proche que l'on veut de 1 en prenant $\nu$ assez grand . D'où une contradiction. Le polynôme $g$ n'existe donc pas et le théorème de L.W. est démontré.

Il nous suffit donc de démontrer le lemme fondamental.

B) Démonstration du lemme fondamental.

La démonstration se fait en plusieurs pas.

Dans toute la suite, nous noterons

$$E_j(z) = e^{\beta_j z}$$

nous considérerons $m$ comme donné évidemment et $n$ comme un paramètre. Les constantes $c, c_1, c_2$ dépendent ainsi de $\beta_i$ et $m$.

1er pas : On construit une nouvelle fonction

$$F_1(z) = P_1(z)F_1(z)+\ldots+P_m(z)F_m(z)$$

où $P_1,\ldots,P_m$ sont des polynômes à coefficients dans $I_K$ et telle que $F_1$ ait un zéro d'ordre élevé au point $z=0$.

Plus précisément nous allons montrer le

Lemme 1 : Etant donné l'entier $n > 0$, on peut trouver des polynômes $P_j \in I_K[z]$ non tous nuls tels que

(i) $d^o P_j < 2n$ et $\|P_j\| \leqslant c^n n^{2n}$

(ii) la fonction $F_1$ a un zéro d'ordre $\geqslant (2m-1)n$ en $0$

(iii) si $$F_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{z^\nu}{\nu!}$$

alors $|a_\nu| < c^\nu c^n n^{2n}$.

Posons $P_j(z) = p_{j,0} + p_{j,1}z+\ldots+p_{j,2n-1}z^{2n-1}$.

Nous avons $2n.m$ inconnues qui sont les $p_{j\mu}$.

D'autre part ou doit avoir

$$a_\nu = 0 \quad \text{pour} \quad \nu = 0, 1,\ldots,(2m-1)\,n-1$$

ce qui donne $(2m-1)n$ équations.

Ecrivons ces équations. Nous désignerons par $\Gamma$ le cercle de centre 0 et de rayon 1 parcouru dans le sens positif. On a

$$\frac{a_\nu}{\nu!} = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{F_1(z)}{z^{\nu+1}}\,dz = \sum_{\substack{j=0,1,\dots m\\ \mu=0,1,\dots m-1}} \left[p_{j\mu}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma z^{\mu-\nu-1}\, e^{\beta_j\cdot z}dz\right)\right] .$$

D'où

$$\sum_{\substack{j=0,1\dots m\\ \mu=0,1\dots 2n-1}} p_{j\mu}\, c_{j,\mu,\nu} = 0 \qquad \text{pour } \nu = 0,1\dots,(2m-1)n-1$$

où $c_{j,\mu,\nu} = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu-\mu < 0 \\ \dfrac{\beta_j^{\nu-\mu}}{(\nu-\mu)!} & \text{sinon} \end{cases}$

On a donc $c_{j,\mu,\nu} \in K$ et l'on voit que

$$\operatorname*{Max}_{j,\mu,\nu} |c_{j,\mu,\nu}| \leqslant c_1^n .$$

De même un dénominateur des $c_{j,\mu,\nu}$ sera majoré par $c_2^n . n^{2n}$ .

Appliquons le lemme de Siegel. On peut trouver les $p_{j,\mu}$ non tous nuls, dans $I_K$ tels que

$$\|p_{j\mu}\| \leqslant c_3^n\, n^{2n} \qquad \text{pour } j = 0,\dots m \text{ et } \mu = 0,1\dots,2n-1 .$$

On a donc

$$\|p_j\| < c_3^n\, n^{2n} .$$

Les coefficients de $F_1$ vérifient (ref (3))

$$a_\nu = \frac{\nu!}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{F_1(z)}{z^{\nu+1}}\, dz$$

(où $a_\nu = 0$ pour $\nu = 0,1\dots,(2m-1)n-1$)

et on obtient encore

$$\sum_{\substack{j=0,\ldots,m \\ \mu=0,1\ldots(2n-1)}} (\nu!)p_{j\mu}\, c_{j\mu,\nu} = a_\nu$$

mais cette fois ci on n'a plus $\nu < (2m-1)n-1$ .

On a $$|\nu!\, c_{j,\mu,\nu}| \leqslant \frac{\beta_j^{\nu-\mu}}{(\nu-\mu)!}\cdot\nu! \leqslant c_1^n\, c_5^\nu \;.$$

On a donc

$$|a_\nu| < c_4^\nu\, c_5^n\, n^{2n}$$

et pour une certaine constante $c$ on a

$$\|p_j\| \leqslant c^n\, n^{2n} \quad \text{et} \quad |a_j| \leqslant c^\nu\, c^n\, n^{2n}$$

2è pas : Au premier pas on a obtenu une forme linéaire $F_i(z)$ avec des polynômes en $z$ qui approche zéro. Dans ce deuxième pas on va obtenir d'autres formes d'approximation en dérivant. Et ces formes vont être indépendantes.

Plus précisément démontrons le

Lemme 2 : Soient les $E_j$, $P_j$, $F_1$ définis au premier pas. Soit $F_{k+1} = D^k F_1$ (où $D$ est la dérivation) (et $k = 1, 2, \ldots$).

Posant $F_k = P_{k,1}\, E_1 + \ldots + P_{k,m}\, E_m$ où les $P_{kj}$ sont des polynômes. Alors le rang de la matrice $(P_{k,j})$ $(k,j = 1, 2, \ldots m)$ est égal à $m$ .

Posant $$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_m \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix}$$

On a

$$F = PE \quad \text{où} \quad P = (P_{k,j}) \; (k = j = 1, 2 \ldots m) \;.$$

On a d'autre part

$$D^kF_1 = (D+\beta_1)^k P_1 . E_1 + \ldots + (D+\beta_m)^k P_m . E_m$$

Ainsi
$$P = \begin{bmatrix} P_1 & \cdots\cdots & P_m \\ (D+\beta_1)P_1 & \cdots\cdots & (D+\beta_m)P_m \\ (D+\beta_1)^{m-1}P_1 & \cdots & (D+\beta_m)^{m-1}P_m \end{bmatrix}$$

Soit $\Delta = \det P$ .

Appelons $u_1 z^{d_1}, \ldots, u_m z^{d_m}$ les monômes de plus haut degré de respectivement $P_1, \ldots, P_m$ .

Alors le terme de plus haut degré de $\Delta(z)$ est

$$\begin{vmatrix} u_1 & \cdots\cdots & u_m \\ \beta_1 u_1 & \cdots\cdots & \beta_m u_m \\ \beta_1^{m-1} u_1 & \cdots & \beta_m^{m-1} u_m \end{vmatrix} z^{d_1+\ldots+d_m}$$

le terme de plus haut degré peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \beta_1 & \cdots\cdots & \beta_m \\ \beta_1^{m-1} & \cdots\cdots & \beta_m^{m-1} \end{vmatrix} u_1 u_2 \ldots u_m z^{d_1+\ldots+d_m}$$

Le déterminant qui apparaît dans le coefficient du monôme de plus haut degré est un déterminant de Van der Monde qui n'est pas nul à cause des hypothèses faites sur les $\beta_i$ .

$\Delta_{(z)}$ a donc son monôme de plus haut degré qui n'est pas nul, donc $\Delta_{(z)} \not\equiv 0$ et le lemme 2 est montré.

<u>3è pas</u> : La matrice $(P_{kj}(z))$ $(k,j = 1,2,\ldots m)$ a pour rang $m$. Mais pour un nombre quelconque $\xi \neq 0$, la matrice $(P_{k,j}(\xi))$ $(k,j=1,2\ldots m)$ n'a pas obligatoirement pour rang $m$. Nous allons montrer dans ce troisième pas que si nous prenons suffisamment de dérivées on aura une matrice $(P_{kj}(\xi))$ $(j=1,2\ldots m,\ k=1,2\ldots\ ?)$ de rang $m$.

Pour cela montrons tout d'abord que

1) Si $\xi$ est un nombre complexe non nul, il ne peut être un zéro de $\Delta$ d'ordre $> n$.

En effet on a $d^o\Delta \leqslant (2n-1)m$.

Soit $\tilde{P}$ la matrice transposée des mineurs de $P$.

On a $\tilde{P}\,P = \Delta I$.

Comme $F = PE$, on en déduit que $\Delta E = \tilde{P}F$.

Comme $\text{ord}_o F_j \geqslant (2m-1)n-m$ et comme aucune des composantes de $E$ ne s'annule pour $z = 0$, on en déduit que $\text{ord}_o\Delta \geqslant (2m-1)n-m$.

$\Delta(z)$ est donc un polynôme de plus haut degré $\leqslant (2n-1)m$ et de plus bas degré $\geqslant (2m-1)n-m$.

On en déduit que

$$\text{ord}_\xi\Delta \leqslant (2n-1)m-(2m-1)n+m .$$

D'où $\text{ord}_\xi\Delta \leqslant n$ pour $\xi \neq 0$.

2) Le nombre $n$ va nous donner le nombre de dérivées à prendre. Montrons le

<u>Lemme</u> 3 : Pour tout nombre complexe $\xi \neq 0$, la matrice $(P_{kj}(\xi))$ $(k=1,2,\ldots m+n$ et $j=1,2\ldots m)$ a pour rang $m$.

Soit $P_{(k)} = [P_{k,1} \dots P_{k,m}]$ .

On a donc

$$P_{(k)} = [(D+\beta_1)^{k-1} P_1 \dots (D+\beta_1)^{k-1} P_m] .$$

Posant

$$D+Q = \begin{bmatrix} (D+\beta_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (D+\beta_m) \end{bmatrix}$$

on obtient l'égalité

$$^tP_{(k+1)} = (D+Q)^k \, {}^tP_{(1)} .$$

D'autre part on a $\tilde{P}P = \Delta I = {}^tP . {}^t\tilde{P} = {}^t\tilde{P} . {}^tP$ .

Puisque $^tP = [({}^tP_{(1)}) \dots ({}^tP_{(m)})]$

on obtient

$$(D+Q)^{\mu} \, {}^tP = [({}^tP_{(1+\mu)}) \dots ({}^tP_{m+\mu})] .$$

Soit $r = \operatorname{ord}_{\xi}\Delta$ . (Alors $r \leqslant n$).

Appliquons $(D+Q)^r$ à $\Delta I$

$$(D+Q)^r(\Delta I) = (D+Q)^r({}^t\tilde{P} . {}^tP) = \sum_{\mu=0}^{r} C_{\mu}[(D+Q)^{\mu} \, {}^tP]$$

où $C_{\mu}$ sont des matrices de polynômes.

Faisant $z = \xi$ on obtient

$$D^r\Delta(\xi)I = \sum_{\mu=0}^{r} C_{\mu}(\xi).[{}^tP_{(1+\mu)}(\xi) \dots {}^tP_{(m+\mu)}(\xi)]$$

A gauche on a une matrice scalaire non nulle.

A droite apparaissent les colonnes

$$\begin{bmatrix} P_{k,1}(\xi) \\ \vdots \\ P_{k,m}(\xi) \end{bmatrix}$$

avec $k \leqslant m+r \leqslant m+n$ .

Le rang de ces colonnes est par conséquent égal au moins à $m$ et le lemme 3 est montré.

Finalement, dans ce troisième pas nous avons trouvé une matrice $P_{kj}(\xi)$ qui est régulière.

<u>4è pas</u> : Nous allons montrer que les fonctions $F_k$ ne sont pas "trop grandes".

<u>Lemme</u> 4 : Soit $k \leqslant m+n$ . Si $n > c(\alpha)$ alors

$$|F_k(\alpha)| \leqslant c_5^n \, n^{3n} \, n^{-(2m-2)n}$$

$$\|P_{kj}(\alpha)\| \leqslant c_5^n \, n^{3n} \quad \text{et} \quad \operatorname{den} P_{kj}(\alpha) \leqslant c_5^n \; .$$

Montrons tout d'abord la première inégalité. Soit $N = (2m-1)n$ et posons

$$G_k(z) = \frac{F_k(z)}{z^{N-k+1}}$$

$G_k$ est une fonction entière.

Choisissons $\alpha$ tel que $|\alpha| < N$ . Appliquons le principe du maximum à la fonction $G_k$ sur le cercle de centre 0 et de rayon $N$ . On obtient

$$|G_k(\alpha)| \leqslant |G_k|_N$$

$$|G_k|_N = \left| \frac{(D+\beta_1)^{k-1} P_1(z)}{z^{N-k+1}} \, e^{\beta_1 z} + \ldots + \frac{(D+\beta_m)^{k-1} P_m(z)}{z^{N-k+1}} \, e^{\beta_m z} \right| \leqslant$$

$$\leqslant m \, c_{51}^N \, \operatorname*{Max}_j \left| \frac{(D+\beta_j)^{k-1} P_j(z)}{z^{N-k+1}} \right|_N \; .$$

Or

$$\operatorname*{Max}_j \left| \frac{(D+\beta_j)^{k-1} P_j(z)}{z^{N-k+1}} \right|_N \leqslant \frac{2n\ c_{52}^n\ n^n\ \operatorname*{Max}_j \|P_j\|}{N^{N-2n+2-k}}$$

le $n^n$ du numérateur provenant des entiers $(2n-1)(2n-2)\ldots$ obtenus par dérivation) (ref (3)).

On a donc

$$\operatorname*{Max}_j \left| \frac{(D+\beta_j)^{k-1} P_j(z)}{z^{N-k+1}} \right|_N \leqslant \frac{c_{53}^n\ n_n^{2n}\ n^n}{[(2m-1)n]^{(2m-1)n-2n+2-m-n}}$$

$$\leqslant c_{54}^n\ n^{3n-(2m-2)n} .$$

D'où

$$|F_k(\alpha)| \leqslant c_{55}^n\ n^{3n}\ n^{(2m-2)n}\ |\alpha|^{N-k} .$$

Soit

$$|F_k(\alpha)| \leqslant c_{56}^n\ n^{3n}\ n^{-(2m-2)n} .$$

Pour la deuxième inégalité la démonstration se fait par récurrence. On a

$$P_j(z) < c^n\ n^{2n}(1+z)^{2n-1}$$

et par récurrence il est facile de voir que

$$(D+\beta_j)^k P_j < c_{57}^n\ n^{3n}(1+z)^{2n-1} .$$

Prenant $z = \alpha$, on obtient : $\|P_{kj}(\alpha)\| \leqslant c_{58}^n\ n^{3n}$.

Pour la troisième égalité, la démonstration se fait aussi par récurrence : on montre que

$$\mathrm{den}(D+\beta_j)^k P_j(z) \leqslant (\mathrm{den}\ \beta_j)^k\ \mathrm{den}\ P_j .$$

Prenant $z = \alpha$ on obtient

$$\mathrm{den}\ P_{kj}(\alpha) \leqslant c_{59}^n .$$

Prenant alors $c_5$ supérieur à $c_{56}$, $c_{58}$ et $c_{59}$ on a le résultat cherché. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le lemme final.

<u>5è pas</u> : (pas final). De l'indépendance linéaire des fonctions $E_1,\dots E_m$ sur les polynômes nous allons déduire une borne inférieure du rang des nombres $E_1(\alpha)\dots,E_m(\alpha)$ sur $K$.

<u>Lemme fondamental</u> : Le rang de $E_1(\alpha),\dots,E_m(\alpha)$ sur $K$ est $\geqslant \frac{m}{2[K:Q]}$.

On a, si on appelle $r$ ce rang

$$\mathcal{E} = E_1(\alpha).K + E_2(\alpha)K +\dots+ E_m(\alpha).K = E_{e_1}(\alpha).K \oplus\dots\oplus E_{e_r}(\alpha).K .$$

D'après le lemme 3 on sait qu'il existe une matrice $\mathcal{P}(\alpha)$ régulière, donc une matrice bijective de $K^m$ dans $K^m$. L'image par $\mathcal{P}(\alpha)$ d'un sous espace vectoriel de dimension $r$ est un sous espace vectoriel de dimension $r$.

Or $\mathcal{P}(\alpha)$ transforme

$$(E_1(\alpha),\dots,E_m(\alpha) \quad \text{en} \quad (F_{k_1}(\alpha),\dots,F_{k_m}(\alpha))$$

où $k_1,\dots,k_m$ sont inférieurs à $m+n$.

Donc $(F_{k_1}(\alpha),\dots,F_{k_m}(\alpha))$ a un rang égal à $r$. Il existe donc $m-r$ relations entre ces nombres. Il y a donc $m-r$ combinaisons linéaires égales à 0 de ces nombres, donc $m-r$ combinaisons linéaires égales à 0 des $E_i(\alpha)$.

On peut écrire, en prenant même $\lambda_{ij} \in I_K$ (en multipliant les égalités par les dénominateurs adequats)

$$\begin{cases} 0 = \lambda_{11} \quad E_1(\alpha) +\dots+ \lambda_{1m}\, E_m(\alpha) \\ \\ 0 = \lambda_{m\,r,1}\, E_1(\alpha) +\dots+ \lambda_{m-r,m}\, E_m(\alpha) \\ F_{k_1} = P_{k_{1},1}\, E_1(\alpha) +\dots+ P_{k_m,1}\, E_m(\alpha) \\ F_{k_r} = P_{k_r,1}\, E_1(\alpha) +\dots+ P_{k_r,1}\, E_m(\alpha) \end{cases}$$

et la matrice des coefficients des $E_i(\alpha)$ est régulière.

Soit $\delta$ son déterminant. On a, en résolvant le système par rapport à $E_1(\alpha)$

$$\delta E_1(\alpha) = B_1 F_{k_1}(\alpha) + \dots + B_r F_{kr}(\alpha)$$

où $B_1, \dots B_r$ sont les mineurs de $\delta$ relatifs à la première colonne.

D'après le lemme 4 on a

$$\begin{cases} \text{taille}(\delta) \leqslant 3nr \log n + O(n) \\ \text{den } \delta \leqslant O(n) \end{cases}$$

et on obtient aussi

$$|B_j|, \dots, |B_r| \leqslant c_{12}^n n^{3n(r-1)}$$

$$\text{et} \qquad |F_k(\alpha)| < c_{14}^n n^{3n} n^{-(2m-2)n}$$

D'où

$$\begin{aligned} \text{Log } \delta &\leqslant 3n(r-1)\text{Log } n + 3n \text{ Log } n - (2m-2)n \text{ Log } n + O(n) \\ &\leqslant 3nr \text{ Log } n - (2m-2)n \text{ Log } n + O(n) . \end{aligned}$$

Appliquant l'inégalité sur la taille, divisant par $n \text{ Log } n$ et prenant $n$ assez grand, on obtient

$$(2m-2) \leqslant 3r[K : \mathbb{Q}] .$$

D'où le lemme fondamental.

IV - Extension du théorème de L.W.

En regardant quelles sont les propriétés de la fonction exponentielle utilisée, Shidlovsky a réussi à généraliser le théorème de L.W. aux E-fonctions.

Une E fonction est une fonction qui admet un développement en série de la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{z^n}{n!}$$

où $\alpha_n \in K$ ($K$ corps de nombres) et satisfait

E1 $\|\alpha_n\| \leqslant c^n$ pour une certaine constante $c$ (ou mieux $\leqslant O(n^{\varepsilon n})$ pour tout $\varepsilon > 0$).

E2 Il existe une suite de nombres $d_n \in \mathbb{Z}$, $d_n > 0$ tq $d_n$ est un dénominateur pour $\alpha_k$ $(k = 0,\dots n)$ et $d_n \leqslant c^n$ (ou mieux $O(n^{\varepsilon n})$).

Exemple de E-fonction : La fonction de Bessel

$$J_o(z) = \Sigma \frac{z^{2n}}{(n!)2} .$$

La difficulté dans l'extension du théorème de L.W. est de démontrer le lemme 2 pour les E-fonctions.

Le théorème de L.W. Shidlovsky est

Soient $f_1,\dots,f_s$ des E-fonctions, algébriquement indépendantes sur $K(z)$ et qui satisfont des équations différentielles linéaires du type

$$X' = QX$$

où $x$ est un vecteur colonne et $Q$ une matrice carrée de fonctions rationnelles de $K(z)$. Soit $\alpha \in K^*$ et $\alpha$ distinct des pôles des fonctions de $Q$. Alors les valeurs

$$f_1(\alpha),\ldots,f_s(\alpha) \text{ sont algébriquement indépendantes.}$$

Application de ce théorème

- fonctions exponentielles bien sûr
- fonctions de Bessel solution de l'équation

$$y'' + \frac{1}{z}\, y' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{z^2}\right) y = 0$$

où $\lambda$ appartient à un corps de nombres.

## Bibliographie

[1] LANG. Introduction to transcendental numbers (Addison and Wesley).

[2] LANG. Algebra (Addison and Wesley).

[3] Laurent SCHWARTZ. Cours d'analyse (Herrmann).

[4] Th. SCHNEIDER. Introduction aux nombres transcendants (Gauthier-Villars.

A. MACADRE
I.U.T. de Reims
rue des Crayènes
51100 REIMS