UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

n° 109

Sur l'intégration des séries entières qui convergent uniformément dans le disque unité

C. A. VINOGRADOV

Traduit du russe par R. Langevin

Analyse Harmonique d'Orsay
1975

Rémi LANGEVIN
Ecole Normale Supérieure
2, Av. Pozzo di Borgo
92211 SAINT-CLOUD
Tél. 602-41-03 - ch 208

V.P. GOURARII

Sur la factorisation des séries de TAYLOR absolument convergentes et sur les intégrales de FOURIER.

En suivant V.P. HAVIN (1) nous dirons que l'ensemble H, composé de fonctions analytiques dans le disque ouvert U ou dans le demi-plan inférieur ouvert du plan complexe qui appartiennent à la classe de HARDY H^1, vérifie une f-condition, si $hI^{-1}\in H$ quelque soit la fonction h de H, et la fonction intérieure I, divisant h (c'est à dire telle que $hI^{-1}\in H^1$; pour la manière de définir les classes H^p et les fonctions intérieures et extérieures voir (2)).

Récemment est parue une série de travaux où on établit une f-condition pour une série d'espaces "standards" de fonctions analytique dans le disque((3),(4),(1),(5),(7)).

Remarquons que souvent l'existence d'une f-condition se révèle utile pour décrire des idéaux fermés (sous-espaces invariants), associés aux espaces standards[1]).

On peut dire que l'existence d'une f-condition signifie l'abscense d'interférences entre I_h et E_h , où $h= I_h.E_h$, I_h étant une fonction intérieure et E_h une fonction extérieure. Visiblement , dans un espace de fonction vérifianr de "véritable conditions de régularité", une telle interprétation existe en fait.

Autant que nous le sachions il n'existe pas encore d'exemple d'espace de fonction analytiques dans le disque U, contenu dans H^1 et ne vérifiant pas une f-condition.

Dans le présent travail on démontre que l'espace W^+, des fonctions dont la série de TAYLOR converge absolument dans le disque unité, et l'espace $\mathcal{F}L^1(R^+)$ des fonctions dont les intégrales de FOURIER convergent absolument dans le demi-plan supérieur, ne vérifient pas de f-condition.

En fait on obtient un résultat plus fort, plus précisément l'exactitude du théorème:

<u>Théorème I</u>. Il existe une fonction $f\in W^+$, c'est à dire $f(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n\zeta^n$ et $\sum |f_n|<\infty$ telle que l'on puisse la mettre sous la forme:

$$f(\zeta)=e^{\frac{\gamma}{2}\frac{\zeta+1}{\zeta-1}}h(\zeta),\ \gamma>0,\ h\in H^1, \qquad (I)$$

mais $h\notin W^+$.

<u>Théorème I'</u>. Il existe une fonction $\mathcal{F}\in \mathcal{F}L^1(R^+)$ c'est à dire:

$$\mathcal{F}(\zeta)=\int_0^\infty f(t)e^{it\zeta}dt,\ f\in L^1(R^+),\ \operatorname{Im}\zeta\geqslant 0, \qquad (2)$$

1) voir remarque I à la fin de l'article.

qui peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{F}(\tau) = e^{-\frac{\gamma i}{\tau}} \mathcal{H}(\tau), \quad \mathcal{H} \in H^1,$$

mais $\mathcal{H} \notin \mathcal{F} L^1(\mathbb{R}^+)$.

La démonstration de ces théorèmes, en fait, s'appuie sur les propriétés des idéaux primaires correspondants au point $\zeta = 0$ de l'axe réel (resp au point $\zeta = 1$) de l'algèbre de BANACH $L^1(R^+)$ (resp W_+)[1]. Dans les traveaux de l'auteur (8),(9) on trouve une description complète des idéaux primaires de l'algèbre $L^1(R^+)$, associés à un point quelconque de l'axe réel, et en particulier au point $\zeta = 0$. On peut résumer comme suit les résultats contenus dans ces travaux:

<u>Théorème A</u>. Soit $f \in L^1(R^+)$ et $\mathcal{F}$ la représentation de FOURIER de la fonction f, définie par l'égalité (2), soit de plus, $\gamma = \alpha^2/4$, $0 \leq \alpha < \infty$ .Les conditions énoncéses plus bas sont équivalentes:

1) $$\mathcal{F}(\tau) = e^{-\frac{\gamma i}{\tau}} \mathcal{H}(\tau), \qquad (3)$$

où $\mathcal{H}$ est une fonction analytique dans le demi-plan supérieur, continue et bornée dans le demi-espace fermé ;

2) $$\overline{\lim_{y \to +0}}\, y \ln |\mathcal{F}(iy)| \leq -\gamma$$

(en d'autres termes le résidu logarithmique de la fonction $\mathcal{F}$ au point $\zeta = 0$ ne dépasse pas $-\gamma$);

3) Pour toute fonction $g \in B_{1/2,\alpha}$ ($B_{1/2,\alpha}$ est l'espace des fonctions entières d'ordre 1/2 et de type inférieur ou égal à α, bornées sur le demi-axe R^+) on a l'égalité :

$$\int_0^\infty f(t) g(t)\, dt = 0;$$

4) soit :

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{f(t)}{t-z}\, dt. \qquad (4)$$

alors

$$\overline{\lim_{t \to -\infty}} \frac{\ln |\tilde{f}(t)|}{|t|^{1/2}} \leq -\alpha. \qquad (5)$$

Désignons l'ensemble des fonctions de $L^1(R^+)$ qui vérifient l'une des quatre conditions du théorème A par:

$I_\alpha = I\ (L^1(R^+)) = I_\alpha(\mathcal{F}(L^1(R^+)))$, $0 \leq \alpha \leq \infty$

---

1) Il convient ici de remarquer le fait suivant: en règle générale, les résultats positifs se rapportant à l'algèbre $L^1(R^+)$ exigent de surmonter des difficultés techniques plus grandes que les résultats analogues concernant W^+, tandis que la situation est inverse en ce qui concerne les contre-exemples dans ces algèbres. Nous montrerons plus tard que le théorème I est une simple conséquense du théorème I', bien que l'on puisse aussi démontrer séparément le théorème I et que sa démonstration soit plus simple.

Théorème B. L'ensemble $I_{\alpha}, \alpha<\alpha<\infty$, est totalement ordonné par l'inclusion ($I_\alpha \subset I_\beta$ pour $\alpha < \beta$) et forme une chaine maximale d'idéaux primaire de l'algèbre $L^1(R^+)$ corespondants au point $\zeta=0$, c'est à dire contenus dans l'idéal maximal I_0 de toutes les fonctions $f \in L^1(R^+)$ telles que $\mathcal{F}(0)=0$.

Rappelons qu'une chaine d'idéaux primaires, contenus dans un même idéal maximal M est dite maximale si tout idéal primaire contenu dans M , coincide avec l'un des idéaux de la chaine.

On peut obtenir une caractérisation analogue des idéaux primaires de l'algèbre W^+ correspondants à un point du cercle unité[1]). Sans perdre de généralité choisissons un point du cercle unité, prenons le point $\zeta=1$. Les théorèmes suivants sont vrais:

Théorème A'.Soit $f(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n \zeta^n \in W^+$ c'est à dire $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n| < \infty$. Les conditions énumérées ci-dessous sont équivalentes:

1) $$f(\zeta) = e^{\frac{\gamma}{2}\frac{\zeta+1}{\zeta-1}} h(\zeta), \qquad (6)$$

où h appartient à l'espace A(U) des fonctions analytiques dans le disque unité ouvert U et continues sur son adhérence

2) $$\overline{\lim_{x\to 1-0}} (1-x) \ln |f(x)| \leq -\gamma;$$

3) Pour toute suite $\{g_n\}_0^\infty \in b_{1/2,\alpha}(Z^+)$

(On désigne par $b_{1/2,\alpha}(Z^+)$ le sous-espace de $l^\infty(Z^+)$, composé des restrictions à l'ensemble Z^+ des nombres entiers positifs des fonctions de l'espace $B_{1/2,\alpha}$) on a l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n = 0; \qquad (7)$$ [2]

4) soit

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n-z}. \qquad (8)$$

alors

$$\overline{\lim_{t\to -\infty}} \frac{\ln|\tilde{f}(t)|}{|t|^{1/2}} \leq -\alpha. \qquad (8)'$$

---

1)En particulier c'est traité dans le travail (10), où l'on décrit les idéaux primaires de l'algèbre W^+.

2) comme auparavant $\gamma = \alpha^2/4$, $0 \leq \alpha < \infty$

Théorème B'. L'ensemble $\{I_\alpha\}$, $0<\alpha<\infty$ des fonctions qui vérifient l'une des quatre conditions du théorème A' est une chaine d'idéaux maximaux de l'algèbre W^+ associés au point $\zeta=1$, totalement ordonnée par l'inclusion.

Démonstration du théorème Il n'est pas difficile d'obtenir la démonstration des théorèmes A' et B' en copiant la démonstration des théorèmes A et B. Cependant nous préciserons quelques éléments de la démonstrations du théorème A'. Nous employerons justement ce théorème dans la suite.

1)⇔2) vient immédiatement du fait que l'algèbre A(U) vérifie une f-condition.

2) ⇔ 3) pour démontrer cette équivalence remarquons que les conditions 2) ou 3) qui sont vérifiées par la fonction $f(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n\zeta^n$, $|\zeta|<1$ sont aussi vérifiées par la fonction $\zeta^m f(\zeta)=\sum_{n=m}^{\infty} f_{n-m}\zeta^n$ c'est à dire que l'égalité (7) peut être réécrite sous la forme :

$$\sum_{n=m}^{\infty} f_{n-m}\, g_n = h_m, \qquad (9)$$

où $h_m=0$ pour $m\geq 0$.

Montrons d'abord que 2) et 3) sont équivalents si on suppose de plus que $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}\in \ell^1(Z^+)$. Pour cela, en posant $g(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n\zeta^{-n}$, $h(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty} h_n\zeta^n$, $|\zeta|=1$, réécrivons l'égalité (9) sous la forme

$$f(\zeta)g(\zeta)=h(\zeta) \quad \text{ou} \quad g(\zeta)=\frac{h(\zeta)}{f(\zeta)}, \quad |\zeta|=1.$$

La dernière égalité signifie que la fonction g, qui est analytique à l'intérieur du disque unité U, se prolonge à U comme $h(\zeta)/f(\zeta)$. Il reste maintenant à employer le théorème bien connu de FABER (théorème du type VIGUERTA-LO), (cf (II), théorème I.3.II) en vertu duquel g est aussi analytique dans tout le plan achevé privé du point $\zeta=1$ de plus si $\{g_\alpha\}_{n=0}^{\infty}$ sont les restrictions à Z^+ de fonctions entières d'ordre 1/2 et de type α alors $g(1/1-\zeta)$ est une fonction entière d'ordre 1 et de type $\alpha^2/4$. Montrons maintenant que de l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n=0, \quad \forall\{g_n\}_{n=0}^{\infty}\in b_{1/2,\alpha}(Z^+)\cap \ell^1(Z^+)$$

il en resulte que

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n=0, \quad \forall\{g_n\}_{n=0}^{\infty}\in b_{1/2,\alpha}(Z^+). \qquad (10)$$

En fait soit $g_n=G(n)$, $\forall n\in Z^+$, $G\in B_{1/2,\alpha}$. Soit ψ n'importe quelle fonction de $B_{1/2,\alpha}$ qui vérifie $\lim_{t\to 0}\psi(t)/t^2=1$. Pour $0<\varepsilon<1$ posons :

$$G_\varepsilon(t)=G[(1-\varepsilon)t]\,\frac{\psi(\varepsilon t)}{(\varepsilon t)^2}. \qquad (11)$$

Alors $G_\varepsilon \in B_{1/2,\alpha}$, et de plus

$$\{G_\varepsilon(n)\}_{n=0}^{\infty} \in b_{1/2,\alpha}(\mathbb{Z}^+)\cap \ell^1(\mathbb{Z}^+)$$

et, par conséquent, comme on l'a déja démontré :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n G_\varepsilon(n) = 0.$$

En faisant tendre ε vers 0 dans la dernière égalité, en se servant de la définition (II) de la fonction $G_\varepsilon(t)$, nous obtenons (10). Passons maintenant à la démonstration de l'équivalence 3) $\Leftrightarrow$ 4).

3) $\Rightarrow$ 4): soit G une fonction quelconque de $B_{1/2,\alpha}$, alors pour tout nombre complexe z la fonction $\frac{G(t)-G(z)}{t-z}$ appartient aussi à $B_{1/2,\alpha}$, il est clair que :

$$\left\{\frac{G(n)-G(z)}{n-z}\right\}_{n=0}^{\infty} \in b_{1/2,\alpha}(\mathbb{Z}^+)$$

et :

$$0 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{G(n)-G(z)}{n-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n G(n)}{n-z} - G(z)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n-z}.$$

De même, l'égalité

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i\, G(z)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_n G(n)}{n-z},$$

est vraie, parceque en choisissant par exemple $G(z) = \operatorname{Cos} \alpha\sqrt{z}$ on en tire rapidement l'affirmation 4).

4) $\Rightarrow$ 3) : employons le lemme suivant.

<u>Lemme I</u>. Soit ϕ une fonction analytique dans la demi-bande $\Pi=\{z : |\operatorname{Im} z|<h, \operatorname{Re} z>0\}$ du plan complexe C^1, supposons de plus que ϕ admette une limite en chaque point à distance finie du bord Γ de la demi-bande Π et que la limite appartienne à $L^1(\Gamma)$. Si à l'intérieur de la demi-bande la fonction ϕ vérifie les inégalités

$$\overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{\ln|\Phi(z)|}{|z|^{1/2}} < \infty \tag{I2}$$

$$\overline{\lim_{t\to-\infty}} \frac{\ln|\Phi(t)|}{|t|^{1/2}} \leq 0, \tag{I3}$$

alors sa limite vérifie l'égalité

$$\int_\Gamma \Phi(z)\,dz = 0. \tag{I4}$$

Pour la démonstration du lemme I, le plus simple est d'envoyer par une application conforme l'intérieur de Π sur le demi-espace $\operatorname{Im} w > 0$ du plan complexe à l'aide de la fonction $w(z)$ (dont l'inverse est $z = z(w)$)de sorte que le rayon négatif soit envoyé sur le rayon $\operatorname{Re} w = 0$ du demi-espace $\operatorname{Im} w > 0$, et de regarder la fonction $\psi(w)=\phi(z(w))z'(w)$. Il n'est pas difficile de vérifier que grace à (12), (13) la fonction $\psi(z)$, dans le demi-espace $\operatorname{Im} w > 0$, vérifie les inégalités

$$\overline{\lim_{|w|\to\infty}} \frac{\ln|\psi(w)|}{|w|} < \infty \qquad (15)$$

$$\overline{\lim_{v\to+\infty}} \frac{\ln|\psi(iv)|}{v} \leq 0 \qquad (16)$$

Remarquons aussi que la limite de $\psi(w)$ sur l'axe réel existe et appartient à L^1. Les inégalités (15) et (16) permettent alors, en appliquant le principe de PHRAGMEN-LINDELOF et le théorème bien connu de PALEY-WIENER de montrer que $\psi \in H^1$ dans le demi-espace $\operatorname{Im} w > 0$, c'est à dire que: $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(u)du = 0$ .L'égalité (14) est ainsi démontrée.

Supposons que la fonction $\tilde{f}(z)$, définie par la formule (8), vérifie la condition (9) et que $\{g_n\}_{n=0}^{\infty} \in b_{\psi_z,d}(Z^+)$. Montrons que

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n = 0. \qquad (17)$$

Pour le montrer introduison de nouveau la fonction G_ε définie par la formule (11). Il est clair que pour un $\varepsilon>0$ fixé la fonction $\tilde{f} G_\varepsilon$ vérifie toutes les conditions du lemme I et , il faut croire,

$$\int_\Gamma \tilde{f}(z) G_\varepsilon(z) dz = 0 \qquad (18)$$

(nous conservons les notations du lemme I et posons h=1). La fonction $\tilde{f} G_\varepsilon$ est analytique dans le rectangle $\Pi_n = \{z : |\operatorname{Im} z| < 1, \ -1 \leq \operatorname{Re} z \leq n+\frac{1}{2}\}$. , sauf peut-être en un nombre fini de points entiers z= 0,1,...n, où elle peut avoir des poles. C'est pourquoi, si l'on désigne par Γ_n le bord de du rectangle Π_n, en remettant sous la forme (8) la fonction $\tilde{f}$ et en orientant comme on imagine la frontière Γ_n, on peut écrire l'égalité

$$\int_{\Gamma_n} \tilde{f}(z) G_\varepsilon(z) dz = \sum_{k=0}^{n} f_k G_\varepsilon(k). \qquad (19)$$

Posons $\Gamma_n' = \Gamma \cap \Gamma_n$ et remarquons que chacune des intégrales suivantes

$$\int_{\Gamma_n - \Gamma_n'} \tilde{f}(z) G_\varepsilon(z) dz \qquad et \qquad \int_{\Gamma - \Gamma_n'} \tilde{f}(z) G_\varepsilon(z) dz$$

tend vers 0 quand $n \to \infty$. Pour tout $\eta>0$ il existe un entier $N(\eta)$ tel que pour $n>N(\eta)$ les égalités suivantes soient simultanément satisfaites:

$$\left|\int_{\Gamma_n - \Gamma_n'} \tilde{f}(z) G_\varepsilon(z) dz\right| < \eta/2 \qquad (20)$$

$$\left|\int_{\Gamma - \Gamma_n'} \tilde{f}(z) G_\varepsilon(z) dz\right| < \eta/2. \qquad (21)$$

Des inégalités (20) et (21) ,en tenant compte de l'égalité (18) on tire que pour $n > N(\eta)$

$$\left|\int_{\Gamma_n} \tilde{f}(z) G_\varepsilon(z)\, dz\right| < \eta.$$

En vertu de (19) pour tout $n > N(\eta)$ on a l'inégalité $\left|\sum_{k=0}^{n} f_k G_\varepsilon(k)\right| < \eta$ .Après avoir fait tendre n vers l'infini dans la dernière inégalité on obtient que $\left|\sum_{k=0}^{\infty} f_k G_\varepsilon(k)\right| < \eta$ Comme η est quelconque nous avons

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k G_\varepsilon(k) = 0. \qquad (22)$$

Pour obtenir l'égalité (17) il reste à faire tendre ε vers 0 dans (22).

Démonstration des théorèmes I et 2. Il nous reste à démontrer qu'il existe une fonction $f \in W^+$, qui admette une représentation de la forme (6), mais la fonction h qui figure dans cette représentation et qui, comme nous l'avons déjà remarqué, appartient à A(U), n'appartient pas à W^+. Réécrivons l'égalité (6) sous la forme

$$e^{-\frac{\gamma}{2}\frac{\tau+1}{\tau-1}} f(\tau) = h(\tau), \quad |\tau| < 1 \qquad (23)$$

Soit

$$e^{\frac{\gamma}{2}\frac{\tau+1}{1-\tau}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{\tau^n}, \quad |\tau| > 1 \qquad (24)$$

$$h(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \tau^n, \quad |\tau| < 1. \qquad (25)$$

Alors, comme nous l'avons déjà vu, (cf supra) on peut tirer de la condition (23) l'égalité suivante
$$h_m = \sum_{n=m}^{\infty} f_n g_{n-m}, \quad m = 1, 2, \ldots, \qquad (26)$$

où $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ est la suite des coefficients de TAYLOR de la fonction f, qui appartiennent, comme on le déduit du théorème B' et de la condition (6), à l'idéal primaire I_α de l'algèbre W^+. Les suites $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ et $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ sont définies à l'aide des formules (24) et (25). Les égalités (23) ou (26) signifient que la suite $\{g_n\}_0^{\infty}$ défini un opérateur linéaire de type **convolution** qui envoie I_α dans A(U).

Si nous supposions que W^+ vérifie une f-condition, nous devrions conclure que cet opérateur envoie I_α dans $l^1(Z^+)$. On vérifie immédiatement que cet opérateur est fermé, et,bien sur, borné. Nous allons montrer qu'en même temps cet opérateur n'est pas borné.Remarquons qu'un opérateur de la forme (26) qui envoie $l^1(Z^+)$ dans $l^1(Z^+)$ est borné si et seulement si $\{g_n\}_0^{\infty} \in l^1(Z^+)$. Dans notre cas la suite $\{g_n\}_0^{\infty}$, qui, certes, appartient à $l^2(Z^+)$, n'appartient pas à l'espace $l^1(Z^+)$; plus précisément, le lemme suivant est vrai.

Lemme 2. On a l'égalité:

$$g_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\,\frac{1}{n^{3/4}}\cos\left(\alpha\sqrt{n}+\frac{\pi}{4}\right)+g_n^*, \tag{27}$$

$n=1,2,\ldots,$ où $\{g_n^*\}_{n=1}^{\infty}\in l^1(\mathbb{Z}^+)$

Démonstration. Elle consiste en une adaptation de la méthode de la phase stationnaire à l'intégrale

$$g_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1} e^{\frac{\gamma}{2}\frac{1+\tau}{1-\tau}}\,\tau^{n-1}d\tau=2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\exp\left\{i\left[\frac{\gamma}{2}\mathrm{ctg}\,t+2nt\right]\right\}dt\right\}. \tag{28}$$

La partie principale du developpement asymptotique de cette intégrale,pour n grand, a pour support les bornes de l'intervalle $t=0,t=\pi/2$ et le point,appelé stationnaire, de l'intervalle $(0,\pi/2)$ défini par l'égalité $\mathrm{Sin}^2t=\gamma/4n$ (cf par exemple, (12)).

En fait, la contribution des points $t=0$, $t=\pi/2$ est un $O(1/n^N)$, pour tout entier N (N aussi grand que l'on voudra) (pour le point t=0 c'est évident), et nous obtenons

$$g_n=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\gamma}{n}}\,\mathrm{Re}\left\{e^{2i\sqrt{\gamma n}}\frac{\sqrt{2}}{(\gamma n)^{1/4}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i)\right\}+O\left(\frac{1}{n^{5/4}}\right)$$

Le lemme est démontré.

Continuons la démonstration du théorème I.Ensuite nous exhiberons facilement une fonction $f\in I_\alpha$, pour laquelle la fonction h correspondante (cf (6)) n'appartient pas à W^+.En pensant au developpement des résultats qui vont suivre dans cet article nous préférons donner d'abord une démonstration liée à la construction effective d'une réserve assez riche de fonctions de I_α [1].Pour simplifier, bornons nous au cas $\alpha=\pi/2$. Montrons d'abord le lemme suivant.

Lemme 3. Soit $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ une suite quelconque appartenant à $l^1(Z^+)$. Posons $b_{-k}=b_k$, $k\in Z^+$ et notons $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ la représentation de RIESZ-TITCHMARSH de la suite $\{b_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{b_n}{n-k+\frac{1}{2}};\quad k=0,\pm1,\ldots. \tag{29}$$

Alors, si $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}\in l^1(Z^+)$, la fonction f,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n z^n,$$

dont les coefficients de TAYLOR sont définis par les égalités

$$f_n=\begin{cases}0, & n\neq k^2,\ k\in\mathbb{Z},\\ (-1)^k b_k, & n=4k^2,\ k\in\mathbb{Z},\ k>0,\\ (-1)^k a_k, & n=(2k-1)^2,\ k\in\mathbb{Z},\ k>0\\ \frac{b_0}{2}, & n=0\end{cases} \tag{30}$$

1)à ce sujet cf la remarque 2 à la fin de l'article.

appartient à l'idéal primaire $I_{\pi/2}$ de l'algèbre W^+.

Démonstration. Construisons une fonction entière φ de degré fini, ne dépassant pas $\pi/2$, telle que

$$\varphi(2k)=(-1)^k b_k, \quad \forall k\in \mathbb{Z}.$$

Comme $\{b_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in l^1(Z)$ (cf par exemple (13)) la fonction φ définit une seule série d'interpolation de LAGRANGE, dont les noeuds d'interpolation se trouvent aux points $2k$, $k \in Z$, c'est à dire:

$$\varphi(z)=\frac{2\sin\frac{\pi}{2}z}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{b_k}{z-2k}, \quad z\in\mathbb{C}^1.$$

De la dernière égalité découle rapidement que:

$$\varphi(2n-1)=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}(2n-1)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{b_k}{2n-1-2k}= \qquad \frac{1}{\pi}(-1)^n\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{b_k}{k-n+\frac{1}{2}}=(-1)^n a_n.$$

Comme la fonction φ est paire, ($b_k=b_{-k}$, $k\in Z^+$), $\varphi(\sqrt{z})$ est une fonction entière d'ordre 1/2, et de type inférieur ou égal à $\pi/2$. En utilisant le fait que la fonction φ détermine de façon unique sa série d'interpolation de LAGRANGE dont les noeuds se trouvent en tous les points entiers (remarquons que $\varphi(n)\in l^2(Z)$) il n'est pas difficile de se convaincre de la véracité des egalités

$$\frac{\pi\varphi(\sqrt{z})}{2\sqrt{z}\sin\pi\sqrt{z}}=\frac{\varphi(0)}{2z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\varphi(n)}{z-n^2} \qquad =\frac{b_0}{2z}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k b_k}{z-4k^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}a_k}{z-(2k-1)^2}.$$

En tenant compte de (30) la dernière égalité peut se réécrire sous la forme:

$$-\frac{\pi\varphi(\sqrt{z})}{2\sqrt{z}\sin\pi\sqrt{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n}{n-z}.$$

On voit de même, en employant la formule (8) que la fonction $\tilde{f}$ vérifie la conditiom (8)', où $\alpha=\pi/2$. Il reste à employer les théorèmes A' et B'.

En n'utilisant que ce que nous avons déjà démontré du lemme 3, nous contruisons immédiatement une suite f_m d'éléments de I_α, $f_m=\{f_{m,n}\}_{n=0}^{\infty}$ bornée en norme dans $l^1(Z^+)$, pour laquelle il existe une suite $h_m=\{h_{m,n}\}_{n=1}^{\infty}$, définie par les formules (6) , non bornée en norme dans $l^1(Z^+)$. Pour cela fixons un nombre m appartenant à Z^+, et choisissons la suite $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ du lemme 3 de sorte que

$$b_k=0,\ \forall k,\ k\neq 0,\ k\neq m;\ b_m=1,\ b_0=-2. \qquad (31)$$

En utilisant la formule (29) nous trouvons que:

$$a_k = \frac{2m^2}{\pi[m^2(k-\frac{1}{2})^2](k-\frac{1}{2})}. \qquad (32)$$

Construisons l'élément f_m de l'idéal $I_{\pi/2}$ dont les coordonnées $f_{n,m}$ vérifient les formules (30). Il n'est pas difficile de vérifier que

$$\sum_{k=0}^{\infty}|f_{m,k}| = |\tfrac{b_0}{2}| + \sum_{k=1}^{\infty}(|b_k|+|a_k|) = 2+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2m^2}{|m^2-(k-\frac{1}{2})^2|(k-\frac{1}{2})} < 6(1+\ln m) = C_m, \quad m>2.$$

De même l'élément $f = 1/C_m \cdot f'_m$ appartient à $I_{\pi/2}$ et

$$\| f_m \|_{\ell^1} \leq 1. \qquad (33)$$

Pour évaluer la nome de l'élément $h_m = \{h_{m,k}\}_{k=1}^{\infty}$ où

$$h_{m,\ell} = \sum_{n=\ell}^{\infty} f_{m,n}\, g_{n-\ell}$$

remarquons d'abord que, grâce au lemme 2 $g_n = g'_n + g''_n$, où

$$g'_n = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\sqrt{n}+\frac{\pi}{4})}{2n^{3/4}}, \qquad n>1, \qquad (34)$$

tandis que $\{g''_n\}_{n=0}^{\infty} \in l^1(Z+)$. Décomposons de façon analogue $h_{m,l}$ sous la forme $h_{m,l} = h'_{m,l} + h''_{m,l}$, $\ell \geq 1$ où

$$h''_{m,\ell} = \sum_{n=\ell}^{\infty} f_{m,n}\, g''_{n-\ell}$$

et

$$\sum_{\ell=1}^{\infty}|h''_{m,\ell}| \leq \sum_{n=0}^{\infty}|f_{m,n}|\sum_{n=0}^{\infty}|g''_n| \leq \|\{g''_n\}_{n=0}^{\infty}\|_{\ell^1}.$$

A cause de cela il suffir de démontrer que

$$\sum_{\ell=1}^{\infty}|h'_{m,\ell}| \to \infty \qquad \text{quand} \qquad m \to \infty$$

Pour $\ell = 4m^2-p,\ 0 \leq p < 4m-1$ grâce à (30), (31) et (32) nous avons

$$h'_{m,\ell} = h'_{m,4m^2-p} = \sum_{n=4m^2-p+1}^{\infty} f_{m,n}\, g'_{n-4m^2+p} =$$

$$= \sum_{q=0}^{\infty} f_{m,(2m+q)^2}\, g'_{(2m+q)^2-4m^2+p} =$$

$$= f_{m,4m^2}\, g'_p + \sum_{s=1}^{\infty} f_{m,(2m+2s-1)^2}\, g'_{(2m+2s-1)^2-4m^2+p}.$$

En utilisant (32) et (33) on peut mettre la dernière égalité sous la forme

$$h'_{m,\ell} = h'_{m,4m^2-p} =$$

$$= \frac{1}{C_m}\left[(-1)^m g_p + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+s+1} 2m^2 g'_{(2m+2s-1)^2-4m^2+p}}{[m^2-(m+s-\frac{1}{2})^2](m+s-\frac{1}{2})}\right. \tag{35}$$

Montrons que

$$\sum_{p=0}^{\sqrt{m}} |h_{m,4m^2-p}| > \frac{m^{\frac{1}{4}}}{2C_m}$$

Pour cela évaluons le second terme de l'expression de $h'_{m,l}$,

$\ell = 4m^2-p,\ \ 0 \le p \le \sqrt{m}\ ,\ \ m>2:$

$$\frac{2m^2}{\pi C_m}\left|\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+s+1} g'_{(2m+2s-1)^2-4m^2+p}}{[m^2-(m+s-\frac{1}{2})^2](m+s-\frac{1}{2})}\right| \le \quad \le \frac{m^2}{\pi C_m} \frac{|\cos(\frac{\pi}{2}\sqrt{(2m+2s-1)^2-4m^2+p}+\frac{\pi}{4}|}{[(m+s-\frac{1}{2})^2-m^2](m+s-\frac{1}{2})[(2m+2s-1)^2-4m^2+p]^{3/4}} \le$$

$$\le \frac{m^2}{\pi C_m}\left(\frac{1}{(m+\frac{1}{4})^{7/4}(m+\frac{1}{2})2^{3/2}} \qquad + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{2^{3/2}(2sm+s^2-m-s+\frac{1}{4})^{7/4}(m+s-\frac{1}{2})}\right) <$$

$$\le \frac{m^2}{2\sqrt{2}C_m}\left(\frac{1}{m^{11/4}} + \sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{(s^2+ms)^{7/4}(m+s)}\right) \quad < \frac{m^2}{2\sqrt{2}C_m}\left(\frac{1}{m^{11/4}} + \int_1^{\infty}\frac{du}{(m+u)^{11/4}\ u^{7/4}}\right) =$$

$$= \frac{m^2}{2\sqrt{2}C_m}\left(\frac{1}{m^{11/4}} + \frac{1}{m^{7/2}}\int_{\frac{1}{m}}^{\infty}\frac{dv}{(1+v)^{11/4}\ v^{7/4}}\right) < \frac{m^2}{2\sqrt{2}C_m}\left(\frac{1}{m^{11/4}} + \frac{4}{3}\ \frac{m^{3/4}}{m^{7/2}(1+\frac{1}{m})^{11/4}}\right) <$$

$$< \frac{m^2}{2\sqrt{2}C_m}\cdot\frac{7}{3m^{11/4}} < \frac{1}{C_m\ m^{3/4}}.$$

Le premier terme vaut, en valeur absolue

$$\frac{1}{2C_m}\ \frac{|\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{p}|}{p^{3/4}},\quad 1 \le p < 4m-1.$$

Donc, grâce à (36)

$$\sum_{p=1}^{\sqrt{m}} |h_{m,4m^2-p}| > \frac{1}{2C_m}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{|\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{p}|}{p^{3/4}} - \frac{1}{C_m m^{3/4}} \quad > \frac{1}{2C_m}\sum_{p=1}^{\sqrt{m}}\frac{\cos^2\frac{\pi}{2}\sqrt{p}}{p^{3/4}} - \frac{1}{C_m m^{3/4}} > \tag{37}$$

$$> \frac{1}{4C_m}\sum_{p=1}^{\sqrt{m}}\frac{1}{p^{3/4}} + \frac{1}{4C_m}\sum_{p=1}^{\sqrt{m}}\frac{\cos\pi\sqrt{p}}{p^{3/4}} - \frac{1}{C_m m^{3/4}}.$$

mais

$$\frac{1}{4C_m}\sum_{p=1}^{\sqrt{m}}\frac{1}{p^{3/4}} > \frac{1}{4C_m}\int_1^{\sqrt{m}}\frac{dp}{p^{3/4}} = \frac{m^{\frac{1}{8}}-1}{C_m}. \tag{38}$$

Il reste à évaluer la somme

$$S = \sum_{p=1}^{\sqrt{m}} \frac{\cos \pi\sqrt{p}}{p^{3/4}}.$$

Commençons par séparer cette somme en deux $S = S_1 + S_2$,

$$S_1 = \sum_{0<p\leq m^{\delta}} \frac{\cos \pi \sqrt{p}}{p^{3/4}}$$

où $\frac{1}{3} < \delta < \frac{1}{2}$,

$$S_2 = \sum_{m^{\delta}<p\leq m^{1/2}} \frac{\cos \pi\sqrt{p}}{p^{3/4}}$$

La première sévalue immédiatement

$$|S_1| \leq \sum_{0<p\leq m^{\delta}} \frac{1}{p^{3/4}} < 4\, m^{\delta/4}$$

pour évaluer la seconde somme S_2 utilisons le lemme de VAN DER cf (14) ou(15). Nous obtenons alors

$$|S_2| \leq 2C_1 m^{\frac{3-6\delta}{8}},$$

où C_1 est une constante. En choisissant $\delta = 3/8$,nous arrivons à

$$|S| \leq |S_1| + |S_2| \leq C_2 m^{3/32}. \tag{39}$$

En réunissant les évaluations (38) et (39) nous obtenons finalement à l'aide de l'inégalité (37) que pour m assez grand

$$\| h_m \|_{\ell^1} \geq \sum_{p=0}^{\sqrt{m}} > \frac{m^{\frac{1}{4}}}{2C_m} = \frac{m^{\frac{1}{4}}}{12(1+\ln m)}$$

Cette dernière inégalité démontre le théorème I.

En remplaçant la démonstration du théorème I par un raisonnement un peut plos complexe on peut construire directement une fonction f de W^+, qui vérifie l'égalité (6), mais telle que la fonction h associée n'appartient pas à W^+. D'ailleurs, on peut pour cette construction se passer de la représentation de RIESZ-TITCHMARSH.

Exemple : la fonction f, définie par l'égalité

$$f(z) = \frac{\pi}{2}\Gamma^2\left(\frac{3}{8}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\,\Gamma(k+\frac{3}{8})}{(k+\frac{3}{8})\,\Gamma(k+\frac{5}{8})}\, z^{(8k+3)^2}, \quad |z|<1,$$

appartient à W^+, puisque $\frac{\Gamma(k+\frac{3}{8})}{(k+\frac{3}{8})\Gamma(k+\frac{5}{8})} = O\left(\frac{1}{k^{5/4}}\right)$, et se met sous la forme

$$f(z) = h(z)e^{\frac{\gamma}{2}\frac{z+1}{z-1}}, \quad |z|<1, \tag{40}$$

où $\gamma = \frac{\pi^2}{256}$, $h \in A(\mathbb{U})$

mais $$h \notin W^+. \tag{41}$$

Pour démontrer l'égalité (40) il suffit d'employer le théorème A' en remarquant que la fonction $\tilde{f}$ définie par l'égalité (8) se calcule facilement:

$$\tilde{f}(z) = \frac{\Gamma(\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{z})\Gamma(\frac{3}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{z})}{4iz},$$

et donc que

$$\overline{\lim_{t\to-\infty}} \frac{\ln|\tilde{f}(t)|}{|t|^{1/2}} = \frac{\pi}{8}.$$

La démonstration de (41) se fait par une cuisine analogue à celle employée aux pages 6,7,8(de l'article de C.A. VINOGRADOV,N.D.T.)

<u>Démonstration du théorème I'</u>. Montrons qu'il existe une application $W^+ \longrightarrow \mathcal{F}(L^1(R^+))$, telle que chaque fonction de la forme (6) de W^+ soit associée à une foction de la forme (3) de $\mathcal{F}(L^1(R^+))$. Alors si $h \notin W^+$, $\mathcal{H} \notin \mathcal{F}(L^1(R^+))$.

On peut construire comme suit cette application.

Soit $f \in W^+$. Posons

$$\mathcal{F}(x) = \frac{2\sin\frac{x}{2}}{x} e^{i\frac{x}{2}} f(e^{ix}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Il est clair que $\mathcal{F}$ est la représentation de FOURIER d'une fonction de $L^1(R^+)$ égale à f_n dans l'intervalle (n,n+1).On vérifie rapidement que si $f \in I_\alpha(W^+)$, $\mathcal{F} \in I_\alpha(\mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^+))$

En supposant que $$\mathcal{F}(x) = e^{-\frac{\gamma i}{x}}\mathcal{H}(x),$$

où $\mathcal{H} \in \mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^+)$ et $$f(e^{ix}) = h(e^{ix})e^{\frac{\gamma}{2}\frac{e^{ix}+1}{e^{ix}-1}},$$

on arriive à l'égalité

$$h(e^{ix}) = \frac{e^{-\frac{\gamma i}{x} + \frac{\gamma i}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}} \cdot \frac{2\sin\frac{x}{2}}{x}} \mathcal{H}(x). \qquad (42)$$

Nous dirons qu'une fonction $\mathcal{F}$ (resp f) apartient à $\mathcal{F}L^1(R^+)$,(resp W) au point $x \in R$, si pour un voisinage de ce point elle est la restriction d'une fonction de $\mathcal{F}\, L^1(R)$, (resp W). Le lemme suivant est bien connu:

Lemme 4. Supposons que $\mathcal{F}(x) = f(e^{ix})$ sur un intervalle quelquonque (a,b) de l'axe réel. Pour que $\mathcal{F}$ appartienne à $\mathcal{F}\, L^1(R^+)$ au point $x_0 \in (a,b)$ il faut et il suffit que $f(e^{ix})$ appartienne à W au point $x_0 \in (a,b)$.

La démonstration de ce lemme est facile et nous l'omettrons.

La fonction $h(e^{ix})$ appartient visiblement à W en tout point $x \neq 2\cdot k$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ .Comme les fonctions

$$\frac{\exp\left(-\frac{\gamma i}{x} + \frac{\gamma i}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)}{\frac{2\sin\frac{x}{2}}{x}\, e^{i\frac{x}{2}}} \quad \text{et } \mathcal{H} \quad \text{appartiennent à } \mathcal{F}\, L^1(R) \text{ au point } x = 0$$

l'égalité (42) implique que la fonction $h(e^{ix})$ appartient à $\mathcal{F}\, L^1(R)$ au point $x = 0$. Le lemme 4 implique que $h(e^{ix})$ appartient à W au point $x = 0$. Le théorème bien connu de WIENER (cf par exemple(16)) implique que $h(e^{ix}) \in W$, mais $h \in A(U)$, et il est clair que $h \in W^+$. Le théorème I' est démontré.

Remarque I. L'exemple des espaces W^+ et $L^1(R^+)$ montre entre autre que la synthèse spectrale ne dépend pas toujours de la présence d'une f-condition. Dans les articles (8)-(10), déjà cités, on démontre que l'on a en un point une synthèse spectrale pour les espaces $L^1(R^+)$ et W^+. Un résultat plus fort est démontré dans (17). Les théorèmes I et I' témoignent (nous nous permettons une certaine liberté de forme) de l'absence dans ces espaces de f-condition en un point.

Remarque 2. Soit ϕ la famille de toutes les fonctions, analytiques dans tout le plan complexe, et dont la restriction au demi-axe réel positif est dans H^1. Alors les fonctions

$$e^{i\alpha\sqrt{x}}\phi^{+}(x) - e^{-i\alpha\sqrt{x}}\phi^{-}(x),$$

où $\phi^{+}(x)$ et $\phi^{-}(x)$ sont les limites supérieures et inférieures de la fonction $\phi(z)\in\phi$ aux points de R^+, forment un ensemble dense dans l'idéal primaire $I\,(L^1(R^+))$. Nous ne connaissons pas de résultat analogue pour W^+. (cf lemme 3).

Remarque 3. De toute évidence on vérifie un résultat plus fort que ceux contenus dans les théorèmes I ou I'. Plus précisément on a l'affirmation suivante, que nous donnons dans le cas de W^+. Soit

$$f=\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\in \ell^1(\mathbb{Z}^+),\quad g=\{g_n\}_{n=0}^{\infty}\in \ell_{1/2,\alpha}(\mathbb{Z}^+)$$

(Il suffit peut-être de supposer que $g\in \ell^{\infty}(\mathbb{Z}^+)$. Alors

$$h=\{h_m\}_{m=1}^{\infty}\ ,\quad h_m=\sum_{n=m}^{\infty} f_n\, g_{n-m}$$

appartient à $\ell^1(\mathbb{Z}^+)$ pour tout élément $f\in I_\alpha(W^+)$ ($\alpha>0$ étant fixé), si et seulement si $g\in \ell^1(\mathbb{Z}^+)$.

Je dois beaucoup à V.I. MATSAEV et V.P. HAVIN pour des discussions fructueuses.

BIBLIOGRAPHIE

1. HAVIN V.P. Sur la factorisation des foctions analytiques, dont la limite au bord est lisse. Zap; nautch. semin. LOMI, 1971 22, 202-205.
2. HOFFMAN K. Espaces de Banach de fonctions analytiques, M. IL. 1963.
3. CARLESON L. Une formule de représentation pour les intégrales de Dirichlet, Math. Z. 1960, 73, N°2, 190-196.
4. KORENBLJUM . B.I., KOROLEVITCH V.S. Sur les fonctions analytiques régulières dans le cercle et lisse sur son bord, Matem. zam., 1970 7, N°2, 165-172.

6. VINOGRADOV S.A., CHIROKOV N.A. Sur la factorisation des fonctions à dérivée dans H^p, Zap. nautch. semin. LOMI, 1971,22,8-27.
7. CHAMOIAN F.A. Division par une fonction intérieure dans un espace de fonctions analytiques dans le cercle quelconque, Zap. nautch. semin. LOMI, 1971, 22, 206-208.
8. GOURARII V.P. Analyse spectrale de fonction bornées sur le demi-axe, Théorie des fonctions, analyse fonctionelle et ses applications 1967, I, t.3, 210-231.
10. FELDMAN G.M. Idéaux primaires de l'algèbre W^+, théorie des fonction analyse fonctionelle et ses applications, 1970, t.11,108-118.
11. BIEBERBACH . Prolongement analytique, M. Nauka, 1967.
12. ERDEII A. Décomposition asymptotique, M., IL, 1962.
13. LEVIN B.I. répartition des racines de fonctions entières, Gosteckizdat, M. 1956.
14. TITCHMARSH E.K. Théorie de la fonction zèta de Riemann, M. IL, 1963
15 HUA LO-GEN La méthode des sommes trigonométriques et ses applications en théorie des nombres, M., Mir, 1964.
16 ZYGMUND A. Serie trigonométriques (T.I., Mir, 1965. TRADUCTION NDT)
17. GOURARII V.P. Synthèse spectrale pour des fonctions bornées sur le demi-axe, analyse fonctionelle et ses applications, 1969, 3, t.4, 34-48.

<u>Remarque du rédacteur</u>. Après avoir pris connaissance du manuscript de cet article, N.A. CHIROKOV a répondu positivement à la seconde question de l'auteur, en utilisant les considérations contenues dans cet article. De plus, en répondant à la question S.A. VINOGRADOV, S.V. HRUCHEV et N.A. CHIROKOV ont démontré l'affirmation suivante: il existe une fonction analytique sur tout le plan complexe sauf au point 1, $f=S_\gamma F$, telle que $f \in W^+$, $F \in H^1$, mais $F \notin W^+$.