

Algèbres de Banach

Algèbres de Groupes

Par N. Th. VAROPOULOS

Rédigé par les soins de J. P. Boudin
O. Deseguins

Table des Matières.

Chapitre 0. Introduction.

Notions sur les mesures	p. 1.
Fonctions analytiques abstraites.....	p. 8.
Topologie faible. Théorème d'Alaoglu	p. 11.
Théorème de Markoff - Kakutani	p. 12.
Notions élémentaires sur les Algèbres de Banach	p. 14.
Notions élémentaires sur les Algèbres de Groupes	p. 17.

Chapitre I. Algèbres de Banach.

Théorie de Gelfand	p. 23.
Radical d'une algèbre	p. 29.
Algèbre semi-simple	p. 30.
Topologie de Gelfand	p. 31.
Algèbres à involutions \leftrightarrow [*] Algèbres	p. 36.
Théorème de Bochner	p. 40.
Algèbres régulières \leftrightarrow Synthèse Spectrale	p. 44.

Chapitre II. Algèbres de Groupes.

Transformée de Fourier - Identification de $\mathcal{M}_{L^1(G)}$ et de \hat{G}	p. 47.
$L^1(G)$ est symétrique et semi-simple	p. 53.
Fonctions du type positif	p. 55.
Théorème d'Inversion	p. 56.
Théorème de Plancherel	p. 59.
Théorème de Pontryagin	p. 60.

CHAPITRE 0.

INTRODUCTION

Nous allons introduire de deux façons différentes la notion de "mesure" la première sera d'un emploi fondamental dans la théorie des probabilités, la deuxième au contraire est celle à laquelle nous ferons appel dans la suite du cours.

TRIBUS

Définition :

Soit A un ensemble quelconque. On dit qu'un ensemble $\mathcal{G} \subset P(A)$ est une σ -algèbre de Boole (ou tribu) si

- (i) $E \in \mathcal{G} \Rightarrow \complement_A E \in \mathcal{G}$
- (ii) $\left\{ E_i \in \mathcal{G} \right\}_{i \in \mathbb{N}} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \mathcal{G}$

On voit qu'il résulte de (i) et (ii) que $\left\{ E_i \in \mathcal{G} \right\}_{i \in \mathbb{N}} \Rightarrow \bigcap_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \mathcal{G}$

Définition :

On appelle "mesure" sur une σ -algèbre de Boole une fonction définie sur \mathcal{G} , à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}^+$ satisfaisant aux deux conditions suivantes.

- (i) $\left\{ E_i \in \mathcal{G} \right\}_{i \in \mathbb{N}}$ et 2 à 2 disjoints $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$
- (ii) $\mu \neq +\infty$

Il résulte de (i) et (ii) que $\mu(\emptyset) = 0$ en effet d'après (ii) $\exists E \in \mathcal{G}$ tel que $\mu(E) < +\infty$ alors $\mu(E \cup \emptyset) = \mu(E) = \mu(E) + \mu(\emptyset)$

Définition :

On appelle espace mesuré, un triplet (A, \mathcal{G}, μ) où A est un ensemble une tribu de parties de A , μ une mesure sur \mathcal{G} .

On dit, en outre, que l'on a un espace de probabilité si μ satisfait à la condition supplémentaire

- (iii) $\mu(A) = 1$

Exemple :

Soit $A = \mathbb{R}$, \mathcal{G} la tribu borélienne (tribu engendrée par les fermés) et F une application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante et continue, alors si on pose pour

$$I_{ab} = [a, b[, \mu_F(I_{a,b}) = F(b) - F(a)$$

et si

$$E = I_{a,b} \cup I_{c,d} \dots \cup I_{k,l}$$

où les $I_{i,j}$ sont 2 à 2 disjoint, en posant

$$\mu(E) = \sum \mu(I_{i,j})$$

On peut obtenir un espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{G}, \mu_F)$

INTEGRATION SUR UN ESPACE MESURE

Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f, \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonction ≥ 0 et $\neq +\infty$, on considère une partition \mathcal{D} des réels positifs :

$$0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq \dots (a_n \rightarrow +\infty)$$

et le nombre

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \mu[a_j \leq f < a_{j+1}]$$

où

$$[a_j \leq f < a_{j+1}] = \left\{ \omega \in \Omega \mid a_j \leq f(\omega) < a_{j+1} \right\}$$

les fonctions pour lesquelles ces ensembles forment une tribu $\subset \mathcal{G}$ sont appelées mesurables.

Dans le cas où f est mesurable son intégrale est par définition

$$\int f \, d\mu = \lim_{\mathcal{D}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} a_j \mu[a_j \leq f < a_{j+1}] \right] \in \overline{\mathbb{R}}^+$$

$\sup(a_{j+1} - a_j) \rightarrow 0$

Exemple :

Si l'on prend la mesure de l'exemple précédent, on retrouve l'intégrale de Stieltjes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dF(x)$$

Nous ne disons rien de plus sur ces espaces de probabilités qui ne nous intéresseront pas dans la suite.

MESURE DE RADON

I MESURE DE RADON SUR UN ESPACE COMPACT

Soit E un espace topologique compact, soit $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(E)$ (resp $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E)$) l'espace vectoriel des applications continues de $E \rightarrow \mathbb{C}$ (resp de $E \rightarrow \mathbb{R}$) c'est un espace vectoriel normé.

Définition :

On appelle \mathbb{C} mesure de Radon (resp \mathbb{R} mesure de Radon), toute forme linéaire et continue sur $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(E)$ (resp. $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E)$). Autrement dit c'est une forme à valeurs dans \mathbb{C} (resp. dans \mathbb{R}) satisfaisant à :

- (i) $\mu(f+g) = \mu(f) + \mu(g)$
- (ii) $\mu(\alpha f) = \alpha \mu(f) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$ (resp. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$)
- (iii) $\exists a \geq 0 \quad |\mu(f)| \leq a \|f\|$

Nous noterons $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(E)$ l'espace des mesures de Radon sur E , pour l'instant ce n'est autre que le dual topologique de $\mathcal{C}(E)$. La norme d'une mesure est tout simplement la norme dans le dual topologique.

II MESURE DE RADON SUR UN ESPACE LOCALEMENT COMPACT

Soit E un espace topologique localement compact et soit $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(E)$ (resp. $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(E)$) l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact, définies sur E à valeurs dans \mathbb{C} (resp. \mathbb{R}) c'est un espace vectoriel.

Définition :

On appelle \mathbb{C} -mesure de Radon (resp. \mathbb{R} -mesure de Radon), toute forme linéaire μ sur $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(E)$ (resp. $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(E)$) à valeurs dans \mathbb{C} (resp. dans \mathbb{R}) telle que si K est un compact la restriction de μ à $\mathcal{K}(E, K)$ (espace vectoriel des fonctions continues à support dans K) soit continue pour la topologie de la convergence uniforme.

Par conséquent :

- (i) $\mu(f+g) = \mu(f) + \mu(g)$
- (ii) $\mu(\alpha f) = \alpha \mu(f) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$ (resp. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$)
- (iii) Si K est un compact de E , si f_n est une suite de fonctions continues à support compact $\subset K$ et qui converge uniformément vers f .

$$\text{alors} \quad \mu(f_n) \longrightarrow \mu(f)$$

Nous voyons que si l'on appelle $\mathcal{M}(E)$ l'espace des mesures de Radon c'est un espace vectoriel.

PRODUIT D'UNE MESURE PAR UNE FONCTION

Soit g une fonction continue sur E et à valeurs dans \mathbb{C} (resp. \mathbb{R}). On peut montrer que l'application

$$\mathcal{K}(E) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ (resp. } \mathbb{R}\text{)}$$

$$f \longrightarrow \mu(gf)$$

est une \mathbb{C} mesure (resp. \mathbb{R} mesure) et on l'appelle mesure produit de μ par g ou encore mesure de densité g par rapport à μ : $g \, d\mu$

MESURE REELLE

Définition :

On dit qu'une \mathbb{C} mesure de Radon est réelle si

$$\mu(f) \in \mathbb{R} \quad \forall f \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(E)$$

MESURE POSITIVE

Définition :

On dit qu'une \mathbb{C} mesure de Radon est ≥ 0 si

$$\mu(f) \geq 0 \quad \forall f \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}^+}(E)$$

On démontre qu'une mesure de Radon ≥ 0 est nécessairement réelle, ainsi que le théorème suivant

Théorème 1

Toute \mathbb{C} mesure de Radon peut se mettre sous la forme $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$ où $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ sont des \mathbb{R} mesures de Radon ≥ 0 et régulières*. Nous nous intéresserons donc essentiellement dans la suite aux \mathbb{R} -mesures de Radon ≥ 0 .

NORME D'UNE MESURE

Définition :

On dit qu'une mesure de Radon est de norme finie si

$$\sup_{\|f\| \leq 1} |\mu(f)| < +\infty$$

et dans ce cas on écrit

$$\sup_{\|f\| \leq 1} |\mu(f)| = \|\mu\|$$

On peut alors montrer que si μ et ν sont ≥ 0 .

$$\|\mu + \nu\| = \|\mu\| + \|\nu\|$$

TOPOLOGIE VAGUE

Définition :

On appelle topologie vague de l'espace $\mathcal{M}(E)$ la topologie de la convergence simple de $\mathcal{M}(E)$.

Par conséquent : μ_n converge vaguement vers μ , si $\mu_n(f) \rightarrow \mu(f)$
 $\forall f \in \mathcal{K}(E)$

* On dit qu'une mesure $\mu \geq 0$ est régulière si :

$\forall E$ ensemble μ mesurable on a $\mu(E) = \inf_{Ouv \supset E} \mu(O) = \sup_{\text{compact } C \subset E} \mu(C)$

PRODUIT TENSORIEL DE MESURESThéorème :

Soient E et F , deux espaces topologiques localement compacts, λ une mesure sur E , μ une mesure sur F , il existe sur $E \times F$ une mesure γ et une seule telle que pour toute fonction $g \in \mathcal{K}(E)$ et toute fonction $f \in \mathcal{K}(F)$

$$\int_{E \times F} g(x) f(y) d\gamma(x, y) = \left(\int_E g(x) d\lambda(x) \right) \times \left(\int_F f(y) d\mu(y) \right)$$

La démonstration s'appuie sur le fait que toute fonction de $\mathcal{K}(E \times F)$ est limite de fonctions du type

$$\sum_{i=1}^n g_i(x) f_i(y)$$

où $f_i(y) \in \mathcal{K}(F)$ et $g_i(x) \in \mathcal{K}(E)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Définition :

La mesure γ s'appelle produit tensoriel des mesures μ et λ et on la note : $\gamma = \lambda \otimes \mu$.

Théorème : (Formule de Fubini)

$$\begin{aligned} \int_{E \times F} f(x, y) d(\lambda \otimes \mu) &= \int_E d\lambda(x) \int_F f(x, y) d\mu(y) \\ &= \int_F d\mu(y) \int_E f(x, y) d\lambda(x) \end{aligned}$$

IMAGE D'UNE MESURE PAR UNE APPLICATION

Soient X et Y deux espaces topologiques localement compacts. Supposons que l'on ait une mesure μ sur X et une application H de $X \rightarrow Y$. On peut penser à transporter μ par H et obtenir une mesure sur Y de la façon suivante :

$$\varphi \in \mathcal{K}(Y) \quad H\mu(\varphi) = \mu(\varphi \circ H)$$

$\varphi \circ H$ n'appartient pas toujours à $\mathcal{K}(X)$ mais lorsque H est une application propre en particulier un homéomorphisme alors $H\mu$ est bien une mesure sur Y et on l'appelle image de μ par H .

Exemple :

Si X est un groupe localement compact l'application

$$x \longmapsto a + x \quad \text{de} \quad X \longrightarrow X$$

est un homéomorphisme l'image d'une mesure μ par cet homéomorphisme n'est autre que la mesure translatée.

TOPOLOGIE FAIBLE SUR LE DUAL D'UN ESPACE VECTORIEL.

I RAPPEL.

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques ; sur l'ensemble produit $X = \prod_{i \in I} X_i$ la topologie la moins fine rendant continues les projections $pr_i : X \rightarrow X_i$ est appelée la topologie produit de celles des X_i .

II DEFINITION

Soit F un espace vectoriel sur le corps topologique et F' le dual topologique de F . On appelle topologie faible sur F' la topologie la moins fine qui rend continues toutes les formes linéaires sur F' $x \rightarrow \langle x, y \rangle$ quand y parcourt F .

Remarque 1 :

Puisque $(x_1, x_2) \in (F' \times F')$ et $x_1 \neq x_2$, entraîne qu'il existe $y \in F$ tel que $\langle x_1, y \rangle \neq \langle x_2, y \rangle$, l'application linéaire $x \rightarrow (\langle x, y \rangle)_y \in F$ de F' dans K^F est biunivoque. On voit d'après le rappel que la topologie faible de F' est la topologie induite sur $F' \subset K^F$ par la topologie produit sur K^F .

C'est donc une topologie localement convexe et séparée, définie par l'ensemble des semi-normes $x \rightarrow |\langle x, y \rangle|$ ou y parcourt F' . C'est-à-dire que les ensembles

$$W(y_1, \dots, y_n : \alpha) = \left\{ x \in F' \mid |\langle x, y_i \rangle| \leq \alpha \text{ pour } 1 \leq i \leq n \right\}$$

forment un système fondamental de voisinages de zéro.

Remarque 2 :

Si l'on considère que $F' = \mathcal{L}(E, K)$ ou $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ si $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , la topologie faible sur F' est la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{L}(E, K)$ (avec $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

Théorème d'Alaoglu.

Soit N un espace vectoriel normé et N' son dual topologique, muni de la topologie faible. Alors la boule unité de N' est compacte.

Preuve :

1) Montrons que $B = \left\{ x \in \mathbb{N}' / \|x\| \leq 1 \right\}$ est contenu dans un compact.
 $\forall n \in \mathbb{N}$, soit $\mathbb{C}_n = \left\{ z \in \mathbb{C} ; |z| \leq \|n\| \right\}$ c'est un compact de \mathbb{C} . Soit
 $\prod_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{C}_n) = C$. C'est un compact pour la topologie produit de celles des \mathbb{C}_n .
 Considérons l'application $\varphi : b \longrightarrow (|\langle b, n \rangle|)_{n \in \mathbb{N}}$ de B dans C car
 $|\langle b, n \rangle| \leq \|n\|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Elle identifie B à un sous espace de C , la topologie
 faible de B , étant, apr définition, celle induite par la "topologie produit" de C .

2) Montrons que B est fermé.

$$b \in B \Leftrightarrow \begin{cases} \forall n, n' \in \mathbb{N}, b(n + n') - b(n) - b(n') = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall \lambda \in \mathbb{C}, b(\lambda n) - \lambda b(n) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, |\langle b, n \rangle| \leq \|n\| \end{cases}$$

B est donc l'intersection d'images réciproques de zéro par des applications qui
 par définition de la topologie faible, sont continues et de C c'est donc un fermé
 et un compact, de C .

Théorème du point fixe de Markoff-Kakutani.

1) Soit E un ensemble vectoriel topologique localement convexe, et K un
 sous-ensemble de E compact, convexe, et contenu dans un voisinage de zéro.

2) Une famille quelconque $\{T_\alpha \in \mathcal{L}(E)\}_{\alpha \in A}$ telle que $\forall \alpha \in A$,

$$T_\alpha(K) \subset K \text{ et } T_\alpha \circ T_\beta = T_\beta \circ T_\alpha$$

alors il existe $k \in K$ tel que $T_\alpha(k) = k$, quelque soit $\alpha \in A$.

Preuve :

Soit

$$T = \left\{ T_\alpha^{(n)} \right\}_{(\alpha, n) \in A \times \mathbb{N}} \quad \text{ou} \quad T_\alpha^{(n)} = \frac{I + T_\alpha + \dots + T_\alpha^{n-1}}{n} \in \mathcal{L}(V)$$

et soit \tilde{T} l'ensemble de tous les produits finis (pour la loi de composition des
 applications) d'éléments de T . $\forall u \in \tilde{T}$, $u(K) \subset K$ (convexité de K) et $\forall u,$
 $\forall v \in K$, $u \circ v = v \circ u \in \tilde{T}$.

Soit $\tilde{K} = \bigcap_{u \in \tilde{T}} \{u(K)\}$. Comme $u(K) \supset u \circ v(K)$ et $v(K) \supset v \circ u(K) = u \circ v(K)$, $u(K) \cap v(K)$ contient un élément de \tilde{K} et \tilde{K} est l'ensemble des points adhérents au filtre engendré par $\{u(K)\}_{u \in \tilde{T}}$. K étant compact, $\tilde{K} \neq \emptyset$ soit $k \in \tilde{K}$
 $\forall (\alpha, n) \in A \times \mathbb{N}$, $\exists x$ tel que

$$k = \frac{I(x) + T_\alpha(x) + \dots + T_\alpha^{n-1}(x)}{n}$$

donc

$$T_\alpha(k) - k = \frac{T_\alpha^n(x) - x}{n} \in \frac{C}{n}$$

ou C est l'image de $K \times K$ par $\varphi: (x, y) \rightarrow (x - y)$ C est donc compact.

Montrons que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{C}{n}\right) = \{0\}$. Soit V un voisinage équilibré de 0 dans E , il existe un voisinage équilibré de 0 , W , tel que $W + W \subset V$. Comme C est compact, il existe un nombre fini de points $a_i \in E$ $1 \leq i \leq m$, tels que

$C \subset \bigcup_{1 \leq i \leq m} a_i + W$. Comme W est absorbant, il existe un nombre α , $0 < \alpha \leq 1$; tel que $\alpha a_i \in W$, $\forall i$, $1 \leq i \leq m$. Donc $\alpha C \subset W + \alpha W \subset W + W \subset V$, si $n > \alpha^{-1}$
 $T_\alpha(k) - k \in \frac{C}{n} \in V$, comme E est séparé, $T_\alpha(k) - k = 0$. C.Q.F.D.

Remarque :

$\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des applications linéaires continues de E dans E . En fait, il suffit ici que $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ soit une famille d'applications linéaires affines de E dans E , appliquant K dans K , dont les restrictions à K sont continues et deux à deux permutables.

ALGÈBRES DE BANACH.Définitions.

I Une algèbre associative, topologique, localement convexe, A, est un espace vectoriel topologique localement convexe, muni d'une application $\varphi : A \times A \rightarrow A$ appelée multiplication, et continue, soit séparément par rapport aux deux variables, soit pour la topologie produit de $A \times A$.

II Algèbre normée : l'algèbre A défini précédemment, est dite normée si sa topologie est donnée par une norme. En exprimant la continuité (pour la topologie produit de $A \times A$) de la multiplication, on obtient la relation

$$||a.b|| \leq K ||a|| \cdot ||b||$$

Pour la nouvelle norme

$$|||a||| = K ||a||$$

on a

$$|||a.b||| \leq |||a||| \cdot |||b|||$$

III Algèbres de Banach : C'est une algèbre normée complète pour la norme. On démontre (Bourbaki, § 4, n° 2, prop. 2) que dans une telle algèbre, la continuité "séparée" est équivalente à la continuité pour la topologie produit, nous ne les distinguerons donc plus par la suite. Lorsqu'une algèbre de Banach aura de plus sa multiplication commutative, elle sera dite : algèbre commutative.

Théorème :

Si I est un idéal propre fermé d'une algèbre de Banach R, l'anneau quotient $\frac{R}{I}$ est une algèbre de Banach si $X \in \frac{R}{I}$, $||X|| = \inf_{x \in X} ||x||$.

Preuve :

Voir par exemple : Gelfand, Silov et Raikov : anneaux normés commutatifs.

On appelle somme directe de deux algèbres de Banach A et B, l'algèbre de produit $A \times B$, muni de la norme $||(a, b)|| = ||a|| + ||b||$.

Exemples d'algèbres de Banach:

I K étant un espace topologique, soit $\mathcal{C}(K)$ l'ensemble des fonctions continues,
à valeurs complexes et bornées dans K, muni de la norme :

$$\|f\| = \sup_{k \in K} |f(k)|$$

la topologie induite est celle de la convergence uniforme, $\mathcal{C}(K)$ est donc une algèbre complète, i.e, de Banach, car la relation

$$\|f \cdot g\| = \sup_{k \in K} |f \cdot g(k)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

prouve la continuité de la multiplication.

II Soit D un disque fermé du plan complexe, $\overset{\circ}{D}$ son intérieur, et A l'ensemble de toutes les fonctions continues à valeur complexes et bornées dans D,
holomorphes dans $\overset{\circ}{D}$. Comme d'après un théorème de Weierstras, la limite uniforme de fonctions holomorphes est holomorphe, cette algèbre est fermée, et donc complète, pour la norme et la topologie induite de $\mathcal{C}(D)$. C'est donc une algèbre de Banach.

III L'algèbre de toutes les fonctions de $\mathcal{C}(\overset{\circ}{D})$ qui de plus sont holomorphes
c'est une algèbre de Banach (ses fonctions ne sont pas nécessairement continues, ni holomorphes, ni bornées sur D).

IV Posons $\mathbb{T} = \left\{ e^{i\theta} ; \theta \in \mathbb{R} \right\}$ le tore à une dimension.

On considère l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ développables en série de Fourier :

$$f = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \alpha_{\nu} e^{i\nu t}$$

et dont la série des coefficients de Fourier est absolument convergente.

Posons

$$\|f\|_A = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |\alpha_{\nu}|$$

montrons que les coefficients α_ν de f sont canoniques si

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \alpha_\nu e^{i\nu t} = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \beta_\nu e^{i\nu t} \Rightarrow \alpha_\nu = \beta_\nu$$

en effet

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \chi_\nu e^{i\nu t} = 0 \Rightarrow \chi_\nu = 0 \forall \nu$$

car si l'on multiplie les deux membres par $e^{i\mu t}$, $\mu \in \mathbb{Z}$, on trouve

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \nu e^{i(\nu-\mu)t} = 0$$

on peut intégrer terme à terme, à cause de la convergence uniforme, on obtient

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \chi_\nu \int_0^{2\pi} e^{i(\chi_\nu - \mu)t} = 0$$

soit $2\pi \chi_\lambda = 0$, $\forall \lambda$

On prouve par ailleurs facilement que cette espace vectoriel est stable pour la multiplication ponctuelle, que la multiplication est continue, et qu'il est complet pour cette norme. C'est donc une algèbre de Banach.

FUNCTIONS ANALYTIQUES A VALEURS DANS UNE ALGEBRE DE BANACH.

Définition :

Une fonction $x : D \rightarrow R$ ou D est un ouvert de \mathbb{C} et R un espace de Banach est dite analytique dans D si pour tout $\lambda \in D$

$$\left(\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{\|x(\lambda+h) - x(\lambda)\|}{|h|} \right) \text{ existe}$$

Remarque 1 :

Si $x : D \rightarrow R$ est analytique et si f est une forme linéaire continue sur R , $f \circ x$ est une fonction analytique dans D au sens usuel.

Cette remarque et le théorème d'Hahn-Banach vont nous permettre d'étendre à toutes les fonctions analytiques les résultats obtenus pour celles à valeurs dans \mathbb{C} .

Théorème d'Hahn-Banach :

Soit M un sous-espace d'un espace vectoriel sur \mathbb{C} normé E . f est une forme linéaire continue définie sur M . On peut prolonger f à E tout entier en conservant la linéarité, la continuité, et la norme.

Preuve : voir Naimark, Loomis, Riez et Nagy.

Corollaire I :

Si $y \in E$ et $y \neq 0$, il existe f , forme linéaire continue sur E telle que $f(y) \neq 0$.

Preuve :

Soit M le sous espace engendré par y . et f défini sur M par $f(\lambda y) = \lambda \cdot a$ ou $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ alors f est linéaire et continue et il existe \tilde{f} , linéaire et continue définie sur E telle que $\tilde{f}(y) = f(y) = a \neq 0$.

Conséquence immédiate :

Corollaire II :

Si $a \in E$ et $b \in E$, $a \neq b$, il existe f linéaire continue, telle que $f(a) \neq f(b)$.

Définition :

Si $x : D \rightarrow R$ est une fonction analytique et Γ une courbe (ou un arc de courbe) rectifiable de support inclus dans D ;

$$\int_{\Gamma} x(\lambda) d\lambda = \lim_{\max|\lambda_{k+1} - \lambda_k| \rightarrow 0} \sum_0^{n-1} x(\lambda'_k) (\lambda_{k+1} - \lambda_k)$$

ou $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des points d'une subdivision orientée de Γ , ou λ'_k vérifie $\lambda_k \leq \lambda'_k \leq \lambda_{k+1}$ et où la limite est prise au sens de la norme.

Théorème de Cauchy :

Soit $x(\lambda)$, à valeur dans un espace de Banach, une fonction analytique dans une région fermée limitée par un arc simple différentiable. Alors :

$$\int_{\Gamma} x(\lambda) d\lambda = 0$$

Preuve :

Posons $y = \int_{\Gamma} x(\lambda) d\lambda$. Si f est linéaire continue,

$$f(y) = \int_{\Gamma} f \circ x(\lambda) d\lambda = 0$$

d'après la remarque 1 et le théorème de Cauchy classique ceci étant vrai quelque soit f , d'après le théorème d'Hahn-Banach. $y = 0$ C.Q.F.D.

Formule intégrale de Cauchy.

Pour la même fonction $x(\lambda)$ que ci-dessus et pour λ intérieur au support de Γ , on a

$$x(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{x(\zeta) d\zeta}{\zeta - \lambda}$$

Preuve :

Notons $x(\lambda) = a$ ($\in R$) et $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{x(\zeta) d\zeta}{\zeta - \lambda} = b$ comme $\frac{1}{2\pi i}$ et $\frac{1}{\zeta - \lambda}$ appartiennent à \mathbb{C} , quelque soit f linéaire continue,

Définition :

Si $x : D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction analytique et Γ une courbe (ou un arc de courbe) rectifiable de support inclus dans D ;

$$\int_{\Gamma} x(\lambda) d\lambda = \lim_{\max|\lambda_{k+1} - \lambda_k| \rightarrow 0} \sum_0^{n-1} x(\lambda'_k) (\lambda_{k+1} - \lambda_k)$$

ou $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des points d'une subdivision orientée de Γ , ou λ'_k vérifie $\lambda_k \leq \lambda'_k \leq \lambda_{k+1}$ et où la limite est prise au sens de la norme.

Théorème de Cauchy :

Soit $x(\lambda)$, à valeur dans un espace de Banach, une fonction analytique dans une région fermée limitée par un arc simple différentiable. Alors :

$$\int_{\Gamma} x(\lambda) d\lambda = 0$$

Preuve :

Posons $y = \int_{\Gamma} x(\lambda) d\lambda$. Si f est linéaire continue,

$$f(y) = \int_{\Gamma} f \circ x(\lambda) d\lambda = 0$$

d'après la remarque 1 et le théorème de Cauchy classique ceci étant vrai quelque soit f , d'après le théorème d'Hahn-Banach. $y = 0$ C.Q.F.D.

Formule intégrale de Cauchy.

Pour la même fonction $x(\lambda)$ que ci-dessus et pour λ intérieur au support de Γ , on a

$$x(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{x(\zeta) d\zeta}{\zeta - \lambda}$$

Preuve :

Notons $x(\lambda) = a$ ($\in \mathbb{R}$) et $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{x(\zeta) d\zeta}{\zeta - \lambda} = b$ comme $\frac{1}{2\pi i}$ et $\frac{1}{\zeta - \lambda}$ appartiennent à \mathbb{C} , quelque soit f linéaire continue,

$$f(a) = (f \circ x)(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(f \circ x)(z) dz}{z - \lambda} = f \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{x(z) dz}{z - \lambda} = f(b)$$

d'après le théorème de Hahn-Banach, on peut conclure que $a = b$.

Développement en série de Taylor.

De la formule de Cauchy résulte que si $x : D \rightarrow R$ est analytique dans D , $x(\lambda)$ est développable en série de Taylor au voisinage de chaque point régulier. La série de Taylor étant absolument convergente dans un disque de rayon strictement positif.

A titre d'exemple (nous aurons besoin de ce résultat) déterminons le rayon du plus grand cercle de centre $\lambda = 0$ à l'intérieur duquel la fonction $(e - \lambda x)^{-1}$ existe. Cette fonction est dérivable, donc analytique dans toute les région où elle existe ; sa suite de Taylor : $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^n$ convergera absolument à l'intérieur du cercle cherché. Réciproquement la fonction $(e - \lambda x)^{-1}$ existe à l'intérieur du cercle de convergence absolue de la série, et est égale à la somme de cette série. Le cercle de convergence absolue de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^n \text{ est } |\lambda| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}}$$

que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|Z^n\|}$ existe pour tout $Z \in R$.

Théorème de Liouville :

Si une fonction $x(\lambda) : \mathbb{C} \rightarrow R$ est analytique pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, et bornée en norme, elle est constante.

Preuve : Quelque soit f linéaire continue, $f(x(\lambda))$ égale constante, d'après le théorème de Liouville classique. Mais si $x(\lambda)$ prenait deux valeurs distinctes, a et b , on aurait $f(a) = \text{constante} = f(b)$, pour toute forme f linéaire continue, ce qui est contraire au théorème d'Hahn-Banach.

ALGÈBRES DE GROUPES.

A partir d'un groupe topologique localement compact et abélien, on peut construire une Algèbre de Banach. L'étude de cette Algèbre pourra, en remontant au groupe initial donner des renseignements sur sa structure, ce qui justifie l'importance de ces algèbres particulières.

GROUPE TOPOLOGIQUEDéfinition :

On appelle groupe topologique un groupe muni d'une topologie telle que les applications :

$$x, y \longrightarrow x + y$$

et

$$x \longrightarrow -x$$

soient des applications continues.

INTEGRATION DANS LES GROUPES TOPOLOGIQUES

Nous supposons définitivement que G est un groupe topologique abélien et localement compact.

On peut alors faire une théorie de l'intégration sur G , et étudier l'espace des mesures de Radon sur G .

On s'intéressera, en particulier, aux mesures invariantes par translation.

Définition :

Soit y un élément fixe du groupe G . On appelle translatée de y , d'une mesure de Radon, l'image de cette mesure de Radon par l'application :

$$x \longrightarrow x + y \quad \forall x \in G$$

Cette image est bien une mesure de Radon car la translation est un homéomorphisme de G sur G .

Si μ est une mesure de Radon sa translatée est donc définie par :

$$\mu_y(f(x)) = \mu f(x-y) \quad \text{où } f \in \mathcal{J}(G)$$

THEOREME DE HAAR

Sur un groupe topologique localement compact il existe une seule mesure de Radon ≥ 0 non nulle, ^{et négative} définie à une constante multiplicative près, invariante par translation.

Preuve :

Nous allons démontrer l'existence d'une mesure de Radon ≥ 0 , non nulle et invariante par translation, dans le cas particulier où G est abélien et compact. La simplification viendra du fait que l'espace des mesures de Radon sur G est identique au dual topologique de $\mathcal{C}(G)$.

Appelons $\mathcal{M}(G)$ l'espace des mesures de Radon sur G . Soit

$$M_1(G) = \left\{ \mu \in \mathcal{M}(G) ; \|\mu\| \leq 1 \right\}$$

$M_1(G)$ est donc la boule unité de $\mathcal{C}(G)'$ par conséquent $M_1(G)$ est faiblement compact dans $\mathcal{M}(G)$. Soit alors

$$M_1^+(G) = \left\{ \mu \in \mathcal{M}_G ; \|\mu\| \leq 1 \text{ et } \mu(1) = 1 \right\}$$

On peut montrer et nous l'admettons que $M_1^+(G)$ est nécessairement constitué de mesures ≥ 0 . On voit que

$$M_1^+(G) = M_1(G) \cap \left\{ \mu \in \mathcal{M}(G) ; \mu(1) = 1 \right\}$$

Or $\left\{ \mu \in \mathcal{M}(G) ; \mu(1) = 1 \right\}$ est fermé pour la topologie faible puisque c'est l'image réciproque de 1 par l'application continue :

$$\mu \longrightarrow \mu(1)$$

Donc M_1^+ , étant fermé dans M_1 , est faiblement compact. D'autre part M_1^+ est convexe, en effet :

M_1 est convexe à cause de la convexité de la norme

$$\left\{ \mu \in \mathcal{M}(G) ; \mu(1) = 1 \right\} \text{ l'est aussi car si}$$

$$\mu_1(1) = \mu_2(1) = 1 \quad (\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2)(1) = \lambda_1 \mu_1(1) + \lambda_2 \mu_2(1) = 1 \quad \text{si} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

Soit alors $g \in G$, on considère \mathbb{T}_g

$$\mu \xrightarrow{\mathbb{T}_g} \mu_g$$

- (i) $\mathbb{T}_g \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(G), \mathcal{M}(G))$ en effet \mathbb{T}_g est linéaire et $\|\mu_g\| \leq \|\mu\|$ donc est continue.
- (ii) $\mathbb{T}_{g_1} \circ \mathbb{T}_{g_2} = \mathbb{T}_{g_1+g_2} = \mathbb{T}_{g_2} \circ \mathbb{T}_{g_1}$ car G est abélien
- (iii) $\forall g \in G \quad \mathbb{T}_g(M_1^+) \subset M_1^+$
en effet si $\|\mu\| \leq 1$

$$\|\mu_g\| \leq \|\mu\| \leq 1 \Rightarrow \|\mu_g\| \leq 1$$

et $\mu_g(1) = \mu(1) = 1$ si $\mu(1) = 1$

On peut donc appliquer le théorème de Markow-Rakutani et par suite

$\exists \mu \geq 0 : \|\mu\| \leq 1$ et $\mu(1) = 1$ telle que $\forall g \in G \quad \mu_g = \mu$

Définition :

On appellera mesure de Haar, la mesure ≥ 0 et invariante par translation sur (elle est définie à un facteur près). On la notera $h(g)$ ou $h(x)$.

Propriété :

La mesure de Haar est invariant par inversion, c'est-à-dire que

$$h(x) = h(-x) \text{ ou encore } \int f(x) dh(x) = \int f(-x) dh(-x)$$

Preuve :

L'application $x \rightarrow -x$ étant un homéomorphisme de G sur G ,

$h(-x)$ est bien une mesure ≥ 0 .

D'autre part $h_g(-x) = h(-x) \quad \forall g \in G$

en effet

$$\int f(x) dh_g(-x) = \int f(-x - g) dh(x) = \int f(-x) dh(x) = \int f(x) dh(-x)$$

Donc d'après le théorème de Haar $h(-x) = k h(x)$.

D'autre part soit $f(x) \in \mathcal{X}(G)$ alors $g(x) = f(x) + f(-x) \in \mathcal{X}(G)$

et

$$\begin{aligned} \int g(x) dh(-x) &= k \int g(x) dh(x) \quad \text{d'une part} \\ &= \int g(-x) dh(x) = \int g(x) dh(x) \quad \text{d'autre part.} \end{aligned}$$

Donc $k = 1 \Rightarrow \boxed{h(x) = h(-x)}$

ALGÈBRE DE GROUPE

Soit G un groupe topologique localement compact et abélien. Appelons $L^1(G, h)$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur G à valeurs dans \mathbb{C} , h -mesurables et de modules sommables (on considère que deux fonctions sont égales si elles sont égales h -presque partout). Si on pose :

$$\|f\| = \int |f(x)| dh$$

on sait que $L^1(G, h)$ est alors un espace de Banach.

On munit $L^1(G, h)$ de la multiplication suivante :

$$f_1 * f_2(x) = \int_G f_1(x-y) f_2(y) dh(y)$$

(i) L'opération est interne

en effet :

$$\begin{aligned} \int_G \left| \int_G f_1(x-y) f_2(y) dh(y) \right| dh(x) &\leq \iint |f_1(x-y)| |f_2(y)| dh(y) dh(x) \\ \text{d'après la règle de Fubini} &\leq \int_G |f_2(y)| dh(y) \times \int_G |f_1(x-y)| dh(x) \\ &\leq \int_G |f_2(y)| dh(y) \int_G |f_1(x)| dh(x) = \|f_2\| \|f_1\| \end{aligned}$$

Donc

$$\int_G |f_1 * f_2(x)| dh(x) < +\infty.$$

(ii) On a démontré en même temps que $\|f_1 * f_2\| \leq \|f_1\| \|f_2\|$.

(iii) Le produit que convolution est bilinéaire, cela résulte de la linéarité de l'intégrale.

(iv) $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$

en effet

$$\int_G f_1(x-y) f_2(y) dh(y) = \int_G f_1(z) f_2(x-z) dh(z) = f_2 * f_1(x)$$

(v) Le produit de convolution est associatif, cela résulte du paragraphe suivant.

PRODUIT DE CONVOLUTION DE MESURES

Nous allons introduire d'une autre manière le produit de convolution dans $L^1(G, h)$, qui montrera directement l'associativité.

Soient μ et γ deux mesures de Radon sur G , de masses totales finies.

On sait définir sur $G \times G$, la mesure $\mu \otimes \gamma$ (voir introduction).

On considère l'application

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ x, y &\longrightarrow x + y \end{aligned}$$

On prend l'image de $\mu \otimes \gamma$ par cette application, on montre que c'est bien une mesure de Radon sur G , que l'on appelle produit de convolution de μ et γ et que l'on note $\mu * \gamma$. Soit alors $f \in L^1(G, h)$, on peut lui associer une mesure de Radon de masse totale finie, qui est la mesure $f dh$ sa masse totale est $\int |f| dh < +\infty$.

Etant donné, f et $g \in L^1(G, h)$, si l'on considère les mesures : $f dh$ et $g dh$ on peut en faire le produit de convolution.

Nous allons montrer que $f dh * g dh = (f * g)dh$.

En effet : soit $\varphi \in \mathcal{JC}(G)$

$$\begin{aligned} \int_G \varphi(z)(f dh * g dh) &= \iint \varphi(x + y) f(x) g(y) dh(x) dh(y) \\ &= \int f(x) dh(x) \int \varphi(x + y) g(y) dh(y) \quad \text{d'après Fubini} \\ &= \int f(x) dh(x) \int \varphi(y) g(y - x) dh(y) \\ &= \iint \varphi(y) f(x) g(y - x) dh(x) dh(y) \\ &= \int \varphi(y) dh(y) \int f(x) g(y - x) dh(x) \\ &= \int \varphi(x) \left[(f * g)dh \right] \end{aligned}$$

Alors l'associativité de $f * g$ résulte de l'associativité du produit de convolution de mesures, qui elle est immédiate.

Finalement, on voit que $L^1(G, h)$ est muni d'une structure d'Algèbre de Banach commutative, une telle algèbre est appelée algèbre de Groupe.

Remarque :

On voit également que les mesures de masses totales finies sur G , constituent une algèbre de Banach.

CHAPITRE I.

ALGÈBRES DE BANACH.

THEORIE DE GULFAND.

Soit R une algèbre de Banach commutative et unitaire.

SPECTRES

Définition :

Soit $x \in R$ on appelle spectre de x l'ensemble $\sigma(x) \subset \mathbb{C}$ des nombres complexes λ tels que $x - \lambda e$ ne soit pas inversible (e est l'unité de R).

Proposition :

Si $x \in R$ tel que $\|x - e\| < 1$ alors x est inversible.

Preuve :

On peut écrire $x = e - (e - x) = e - y$ avec $y = e - x$. Considérons alors la série $Z = e + y + y^2 + \dots + y^n + \dots$. Cette série converge en norme puisque $\|y\| < 1$ donc elle converge car R est un espace de Banach.

On a en outre

$$\|Z\| \leq \frac{1}{1 - \|y\|}$$

On vérifie en faisant le produit terme à terme que $Z \cdot x = e$. Donc Z est bien l'inverse de x .

Corollaire :

$\sigma(x)$ est borné dans \mathbb{C} et \subset dans le disque $|Z| \leq \|x\|$.

En effet $x - \lambda e = \lambda \left(\frac{x}{\lambda} - e\right)$.

D'après le théorème précédent $\frac{x}{\lambda} - e$ est inversible si $\|\frac{x}{\lambda}\| < 1$ donc si $|\lambda| > \|x\|$ par suite $x - \lambda e$ le sera aussi. Ceci implique que $\sigma(x)$ est contenu dans l'ensemble de \mathbb{C} défini par $|Z| \leq \|x\|$ C.Q.F.D.

Proposition :

L'ensemble \mathcal{U} des éléments inversibles de R est ouvert et $x \rightarrow x^{-1}$ est une application continue de \mathcal{U} dans \mathcal{U} .

Preuve :

Soit x_0 un élément inversible

soit $x = x_0 + h$ avec $\|h\| < \|x_0^{-1}\|^{-1}$

alors $x = x_0(e + x_0^{-1}h)$

Or $\|x_0^{-1} h\| < 1$ par hypothèse.

Donc $e + x_0^{-1} h$ est inversible donc x aussi et

$$x^{-1} = x_0^{-1} (e + x_0^{-1} h)^{-1}$$

on a en outre

$$\|x^{-1} - x_0^{-1}\| \leq \frac{\|x_0^{-1}\| \|x - x_0\|}{1 - \|x_0^{-1}\| \|x - x_0\|}$$

Ce qui montre d'une part que \mathcal{U} est ouvert puisqu'à chaque fois qu'il contient un point il contient une boule ayant pour centre ce point, d'autre part que $x \rightarrow x^{-1}$ est une application continue de \mathcal{U} dans \mathcal{U} .

Corollaire :

$\sigma(x)$ est fermé dans \mathbb{C} donc compact.

En effet considérons l'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lambda \rightarrow x - \lambda e$$

c'est une application continue donc l'image réciproque de \mathcal{U} est un ouvert. Par suite $\sigma(x)$ qui en est le complémentaire est bien fermé.

$\sigma(x)$ est donc compact puisqu'il est fermé et borné dans \mathbb{C} .

Définition :

On appelle fonction résolvante de x la fonction définie sur

$\Gamma(x) = \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ dont la valeur en λ est $(x - \lambda e)^{-1}$ on la note $x(\lambda)$.

Théorème :

$\lambda \rightarrow x(\lambda)$ est analytique et bornée quand $\lambda \rightarrow \infty$

Preuve :

Que $x(\lambda)$ soit une fonction continue de λ est une conséquence immédiate de la continuité du passage à l'inverse. Pour démontrer que $x(\lambda)$ est analytique, nous aurons besoin de la formule suivante :

$$(x - \lambda_1 e)^{-1} - (x - \lambda_2 e)^{-1} = (\lambda_1 - \lambda_2) x(\lambda_1) x(\lambda_2)$$

démontrons ceci :

$$\begin{aligned} (x - \lambda_2 e) x(\lambda_1) &= \left((x - \lambda_1 e) - (\lambda_2 - \lambda_1 e) \right) x(\lambda_1) \\ (x - \lambda_2 e) \cdot x(\lambda_1) &= \left((x(\lambda))^{-1} - (\lambda_2 - \lambda_1 e) \right) x(\lambda_1) \\ (x - \lambda_2 e) x(\lambda_1) &= e - (\lambda_2 - \lambda_1) x(\lambda_1) \end{aligned}$$

d'où

$$x(\lambda_2) (x - \lambda_2 e) x(\lambda_1) = x(\lambda_2) - (\lambda_2 - \lambda_1) x(\lambda_1) x(\lambda_2)$$

soit

$$x(\lambda_1) - x(\lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2) x(\lambda_1) x(\lambda_2)$$

ce qui est la formule demandée, on en déduit immédiatement

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{x(\lambda_1) - x(\lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} = \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} x(\lambda_1) x(\lambda_2) = x(\lambda_1)^2$$

ceci étant donnée la continuité de l'inverse ; d'autre part,

$$x(\lambda) = (x - \lambda e)^{-1} = \left(\lambda \left(\frac{x}{\lambda} - e \right) \right)^{-1} = \lambda^{-1} \left(\frac{x}{\lambda} - e \right)^{-1} \quad \text{si } \lambda \rightarrow \infty, x(\lambda) \rightarrow 0. \quad (-e) = 0.$$

Corollaire :

$$\sigma(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Preuve :

Si $\sigma(x) = \emptyset$ pour un $x \in \mathbb{R}$, $x(\lambda)$ est analytique dans \mathbb{C} tout entier ($\Gamma(x) = \mathbb{C}$), et bornée. On déduit donc du théorème de Liouville que $x(\lambda)$ est une constante, ce qui est absurde.

Théorème de Gelfand-Mazur.

Une algèbre de Banach qui est un corps est algébriquement isomorphe au corps des complexes.

Preuve :

Toute algèbre de Banach R contient le sous-espace de dimension

1 $\left\{ \lambda e \right\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$ nous allons montrer que si R est un corps l'application

$\lambda \rightarrow \lambda.e$ de \mathbb{C} dans R est surjective en effet $\forall x \in R$, il existe λ

(évidemment unique) tel que $x = \lambda e$, sinon $(x - \lambda e)$ serait différent de zéro,

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$, donc inversible, ce qui signifierai $\sigma(x) = \emptyset$ $\varphi : \lambda \rightarrow \lambda.e$ est donc

surjective, et trivialement injective d'autre part, $\lambda + \mu \rightarrow \lambda.e + \mu.e$

Rappel sur les idéaux maximaux.

- un idéal M de R est maximal lorsque $M' \supseteq M$ entraîne, si M' est un idéal, $M' = R$ ou $M' = M$.
- le quotient de R par M est alors un corps.

Lemme :

Un idéal maximal est fermé.

Preuve :

La continuité des opérations montre que la fermeture de I est un idéal

C'est un idéal propre car si \mathcal{O} est l'ensemble des éléments inversibles de R (\mathcal{O} est ouvert) $I \subset R \setminus \mathcal{O}$ qui est fermé, donc $\bar{I} \subset R \setminus \mathcal{O}$ et est aussi propre. Comme $\bar{I} \supset I$, $\bar{I} = I$ puisque I est maximal.

Théorème :

Si M est un idéal maximal de R , $\frac{R}{M} \simeq \mathbb{C}$

Preuve :

$\frac{R}{M}$ est un corps puisque M est maximal ; c'est une algèbre de Banach puisque M est fermé. On applique donc le théorème de Gelfand-Mazur.

Définition :

On appelle spectre de R et on note \mathcal{M}_R l'ensemble des idéaux maximaux de R .

Définition de la représentation de Gelfand.

1) Pour tout $M \in \mathcal{M}_R$, notons h_M l'homomorphisme canonique de R sur $\frac{R}{M} \simeq \mathbb{C}$

2) Pour tout $x \in R$, notons \hat{x} la fonction qui envoie $M \in \mathcal{M}_R$ dans $h_M(x)$.

3) Notons $\mathcal{F}(\mathcal{M}_R)$ l'algèbre des fonctions définies sur \mathcal{M}_R à valeur dans \mathbb{C} . $\hat{x} \in \mathcal{F}(\mathcal{M}_R)$.

4) Notons Γ la fonction qui envoie $x \in R$ dans \hat{x}

$\Gamma : R \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{M}_R)$ est appelée la représentation de Gelfand.

$$\left(\Gamma(x) \right) (M) = h_M(x) = \hat{x} (M)$$

Théorème :

Γ est un homomorphisme d'algèbre.

Preuve :

$$\Gamma(x_1 + x_2) M = h_M(x_1 + x_2) = h_M(x_1) + h_M(x_2) = \Gamma(x_1) M + \Gamma(x_2) M$$

ceci, $\forall M \in \mathcal{M}_R$ donc $\Gamma(x_1 + x_2) = \Gamma(x_1) + \Gamma(x_2)$ de même, le fait que h_M soit, $\forall M \in \mathcal{M}_R$, un homomorphisme d'algèbre, entraîne les égalités :

$$\Gamma(x_1 x_2) = \Gamma(x_1) \Gamma(x_2) ; \Gamma(\lambda x_1) = \lambda \Gamma(x_1) ; \Gamma(e) = 1$$

Théorème :

$$\left\{ \hat{x}(M) : M \in \mathcal{M}_R \right\} = \sigma(x)$$

Preuve :

On a, en effet, les équivalences évidentes suivantes :

$$\sigma(x) \Leftrightarrow \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (x - \lambda e) \text{ non inversible} \right\} \Leftrightarrow (x - \lambda e) \text{ appartient à un idéal maximal } M \text{ de } R \Leftrightarrow \hat{x} = (\lambda e) \Leftrightarrow \lambda = x(M).$$

Corollaire :

$\|\Gamma(x)\| = \sup_{M \in \mathcal{M}_R} |\hat{x}(M)| \leq \|x\|$ d'après le théorème précédent et parce que le spectre est contenu dans le disque $|z| \leq \|x\|$.

RAYON SPECTRAL.

Définition :

$$\text{Rayon spectral de } x = \sup_{M \in \mathcal{M}_R} |\hat{x}(M)| = \|x\|_{sp}.$$

C'est donc par définition le rayon du plus petit cercle qui contient le spectre. Nous savons déjà que $\|x\|_{sp} \leq \|x\|$, mais nous allons chercher une estimation exacte de ce rayon.

Proposition :

$$\|x\|_{sp} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

Nous allons démontrer à la fois que cette limite existe et qu'elle est égale au rayon spectral.

Preuve :

$$\text{On a } \forall M \in \mathcal{M}_R : \|x\| \geq |\hat{x}(M)|$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } M \in \mathcal{M}_R \quad \|x^n\| \geq |\hat{x}(M)|^n$$

$$\text{d'où } \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } M \in \mathcal{M}_R \quad \sqrt[n]{\|x^n\|} \geq |\hat{x}(M)|$$

soit $\forall n \in \mathbb{N} \sqrt[n]{\|x^n\|} \geq \|x\|_{sp}$

ceci montre que $\underline{\lim} \sqrt[n]{\|x^n\|} \geq \|x\|_{sp}$

D'autre part considérons $x - \lambda e = \lambda \left(\frac{x}{\lambda} - e \right) = \frac{1}{\mu} (\mu x - e)$ avec $\mu = \frac{1}{\lambda}$.

On sait que l'application $\lambda \rightarrow (x - \lambda e)^{-1}$ est analytique sur le complémentaire du spectre par conséquent l'application $\mu \rightarrow \mu(\mu x - e)^{-1}$ est analytique dans l'inverse du complémentaire du spectre et aussi à l'origine. Son développement à l'origine est

$$\mu \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n x^n$$

Son rayon de convergence est

$$R = \frac{1}{\underline{\lim} \sqrt[n]{\|x^n\|}}$$

or ce rayon est toujours \geq à la distance de l'origine à la plus proche singularité cette plus proche singularité est à une distance $\geq \frac{1}{\|x\|_{sp}}$ par définition.

Donc

$$\|x\|_{sp} \geq \underline{\lim} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

D'où finalement

$$\underline{\lim} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leq \|x\|_{sp} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

ceci entraîne que

$$\underline{\lim} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \underline{\lim} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \|x\|_{sp}$$

On a donc bien démontré que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$ existe et que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \|x\|_{sp}$$

RADICAL D'UNE ALGÈBRE.

Reprenons l'homomorphisme $\Gamma : R \rightarrow \mathcal{F}_R(\mathcal{M}_R)$.

Définition :

On appelle radical de R le noyau de $\Gamma = \ker \Gamma$. Donc par définition

$$\text{Ker } \Gamma = \left\{ x \in R : \|x\|_{sp} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} = 0 \right\}$$

De même

$$x(M) = 0 \forall M \in \mathcal{M}_R \Leftrightarrow x \in M \forall M \in \mathcal{M}_R \Leftrightarrow x \in \bigcap_{M \in \mathcal{M}_R} M$$

donc on a aussi
$$\text{Ker } \Gamma = \bigcap_{M \in \mathcal{M}_R} M$$

La radical d'une algèbre peut être très grand.

Exemple :

Soit R un espace de Banach on peut le munir d'une structure d'algèbre triviale en posant $x_1 \cdot x_2 = 0 \quad \forall x_1 \text{ et } x_2 \in R$. Cette algèbre n'a pas d'unité mais on peut la plonger dans une algèbre de Banach unitaire $R + 1 \mathbb{C}$ (voir début du cours). Or il est facile de voir que R est un idéal maximal de $R + 1 \mathbb{C}$ donc $\text{Ker } \Gamma \subset R$.

D'autre part si $(b, 0) \in R + 1 \mathbb{C}$ $[\Gamma(b, 0)]^2 = \Gamma(0, 0)^2 = 0$ donc $\Gamma(b; 0) = 0$ d'où finalement $\text{Ker } \Gamma = R$.

ALGÈBRE SEMI SIMPLE.

Définition :

On dit qu'une algèbre est semi simple si son radical se réduit à l'élément zéro.

Dans ce cas Γ est injective.

Théorème :

Si R est une algèbre telle que $\text{Ker } \Gamma \neq 0$, le quotient $R / \text{Ker } \Gamma$ est une algèbre semi-simple.

Preuve :

$\text{Ker } \Gamma = \bigcap_{M \in \mathcal{M}_R} M$ donc $\text{Ker } \Gamma$ est un idéal fermé. On sait alors que $R / \text{Ker } \Gamma$ est une algèbre de Banach. Or l'homomorphisme canonique de R sur $R / \text{Ker } \Gamma$ établit une bijection entre \mathcal{M}_R et $\mathcal{M}_{R / \text{Ker } \Gamma}$, en effet l'image d'un idéal maximal de R , par l'homomorphisme est un idéal maximal de $R / \text{Ker } \Gamma$ et inversement.

Ceci entraîne que $\bigcap_{M \in \mathcal{M}_R} M \xrightarrow{\Gamma} \bigcap_{M \in \mathcal{M}_R} M / \text{Ker } \Gamma$ par l'homomorphisme.

Or $\bigcap_{M \in \mathcal{M}_R} M = \text{Ker } \Gamma$.

Donc $\bigcap_{M \in \mathcal{M}_R} M / \text{Ker } \Gamma = 0$

Ceci montre bien que $R / \text{Ker } \Gamma$ est une algèbre semi-simple. L'étude des algèbres non semi-simples n'est donc pas d'une importance fondamentale, on les utilise en général pour donner des contre exemples.

TOPOLOGIE DE GUELFAND.

Soit R une algèbre de Banach unitaire et considérons son spectre. Nous allons munir ce spectre d'une topologie, de la façon suivante. Soit $M \in \mathcal{M}_R$ on peut lui associer une application de $R \rightarrow \mathbb{C}$ $x \rightarrow \hat{x}(M)$

qui possède les propriétés suivantes :

- (i) elle est linéaire
- (ii) elle est multiplicative
- (iii) elle est continue de norme ≤ 1 et ; $\hat{e}(M) = 1$

Inversement : Soit \tilde{M} une forme linéaire $R \rightarrow \mathbb{C}$, multiplicative et telle que $\tilde{M}(1) = 1$.

Le noyau de cette forme linéaire est un idéal propre. Et tout idéal plus grand que ce noyau a pour image \mathbb{C} tout entier c'est donc l'algèbre toute entière, par conséquent le noyau est un idéal maximal. Appelons M cet idéal maximal et montrons que \tilde{M} et la forme linéaire associée à M sont identiques.

En effet si $x \in R \exists y \in M : x + y = x(M) e$

$$\text{alors } \langle x + y, \tilde{M} \rangle = \langle x, \tilde{M} \rangle = x(M)$$

$$\text{donc } \langle x, \tilde{M} \rangle = x(M) \text{ C.Q.F.D.}$$

On peut donc identifier le spectre R à l'ensemble des formes linéaires multiplicatives et transformant l'unité en l'unité. On vient de voir que ces formes sont nécessairement continues et de norme ≤ 1 . Cet ensemble est donc un sous ensemble de la boule unité de R' défini par les conditions supplémentaires

- (i) $\forall x_1$ et $x_2 \in R \quad \langle x_1 \cdot x_2, x' \rangle - \langle x_1 \cdot x' \rangle \langle x_2 \cdot x' \rangle = 0$
(ii) $\langle e, x' \rangle = 1.$

Ce qui montre que si on munit le spectre de la topologie induite par la topologie faible de R' , on obtient un sous ensemble fermé dans la boule unité de R' , or la boule unité étant compacte, on obtient un ensemble compact.

Définition :

La topologie de Gelfand sur \mathcal{M}_R est par définition la topologie induite par la topologie faible de R' . C'est donc une topologie compacte.

On remarque alors que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_R & \longrightarrow & C \\ M & \longrightarrow & \hat{x}(M) \end{array}$$

est continue pour la topologie de Gelfand $\forall x$. On peut d'ailleurs donner une définition équivalente.

Définition :

C'est la topologie la moins fine sur \mathcal{M}_R telle que $\hat{x}(M)$ soit continue $\forall x$.

ALGÈBRES NON UNITAIRES

Soit R une algèbre de Banach non unitaire, plongeons là dans l'algèbre de Banach unitaire $\tilde{R} = R + 1 C$.

On peut faire une théorie de Gelfand sur cette algèbre. Le problème est de transporter les propriétés sur R . On sait déjà que $R \in \mathcal{M}_{\tilde{R}}$ mais la restriction de R de la forme linéaire associée est $\equiv 0$.

Par contre soit $M \neq R$ et $\in \mathcal{M}_{\tilde{R}}$, la restriction à R de l'homomorphisme associé n'est plus $\equiv 0$

Réciproquement : Etant donné un homomorphisme de $R \longrightarrow C$ multiplicatif et $\neq 0$, on peut le plonger en un homomorphisme de \tilde{R} sur C de la façon suivante :

$$\tilde{H}(x + \lambda_1) = H(x) + \lambda$$

On vérifie bien que c'est un homomorphisme multiplicatif $\neq 0$ donc on peut associer un élément de $\mathcal{M}_{\tilde{R}}$. On a donc une bijection entre l'ensemble $\mathcal{M}_{\tilde{R}} \setminus R$

et l'ensemble des homomorphismes réguliers de R sur \mathbb{C} .

Définition :

Le spectre de R est par définition l'ensemble $\mathcal{M}_R \setminus R$ des idéaux réguliers.

C'est encore un espace topologique si on prend la topologie de Gelfand mais il est seulement localement compact puisque c'est le complémentaire d'un point dans un compact.

Exemple de Spectres d'algèbres de Banach.

I. Soit R , l'algèbre de Banach $\mathcal{C}(K)$ déjà définie.

Théorème :

\mathcal{M}_R est homéomorphe à K .

Preuve :

1) nous allons tout d'abord identifier bijectivement \mathcal{M}_R et K .

- $\mathcal{M}_R \supseteq K$, en effet, si $k \in K$, l'application $\check{k} : x \mapsto x(k)$ de R dans \mathbb{C} , vérifie $\check{k}(xy) = \check{k}(x) \cdot \check{k}(y)$, $\check{k}(x + y) = \check{k}(x) + \check{k}(y)$; $\check{k}(e) = 1$.

De plus, elle est continue, car si x_n est une suite d'éléments de R tels que

$\|x_n - y\|$ tende vers zéro quand n tend vers l'infini, alors l'égalité $\|x_n - y\| = \sup_{k \in K} |x_n(k) - y(k)|$ montre que, $\forall k$, $x_n(k)$ tend vers $y(k) = \check{k}(y)$. \check{k} est donc un caractère, i.e. un élément de \mathcal{M}_R , déterminé de façon unique par k .

- $\mathcal{M}_R \subseteq K$, réciproquement étant donné h un caractère associé à un idéal M , montrons que l'on peut trouver $k \in K$ tel que $h = \check{k}$. Pour cela il suffit de montrer qu'il existe k tel que $x(k) = 0$, $\forall x \in M$. Alors h et \check{k} auront le même noyau, donc $h = \check{k}$. Si k n'existait pas, on aurait, $\forall t \in K$, un $x_t \in M$ tel que $x_t(t) \neq 0$ et d'après la continuité de x_t , $|x_t(v)| > \delta_t > 0$ dans un voisinage de t , $V(t)$. On peut recouvrir K avec un nombre fini de tels voisinages, puisque K est compact.

Soit $(V_{t_i})_{i=1}^n$ ce recouvrement. Considérons la fonction

$$x(v) = \sum_{i=1}^n x_{t_i}(v) \cdot \overline{x_{t_i}(v)} = \sum_{i=1}^n |x_{t_i}(v)|^2$$

elle appartient à M et $x(v) > \min \delta_{t_i}^2 > 0$, donc $x^{-1} \in R$, ce qui contredit le fait que $x \in M$ puisque M est un idéal propre.

Nous avons démontré la surjectivité de la fonction $k \mapsto \check{k}$ pour l'injectivité il faut montrer que $\forall k \in K$, il existe x_1 et $x_2 \in R$ tels que $x_1(k) \neq x_2(k)$ ce qui découle de la normalité du compact K et du théorème d'Ury Sohn.

2) Montrons que les deux topologies coïncident.

Soit \hat{x} une fonction sur le spectre \mathcal{M}_R . Elle est continue pour la topologie de Gelfand. D'autre part, $\hat{x}(k) = \check{k}(x) = x(k)$ mais $x(k)$ est continue comme fonction appartenant à $\mathcal{C}(K)$ donc la topologie de K est plus fine que celle de \mathcal{M}_R . Ces deux topologies étant compactes elles sont identiques.

II. Soit $\mathcal{C}_0(K)$ l'algèbre de toutes les fonctions continues définies sur K , à valeur dans \mathbb{C} , tendant vers zéro à l'infini, K étant localement compact. C'est une algèbre de Banach sans unité. On montre de la même façon que $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_0(K)} \simeq K$

III. Soient $D_1(a, b)$ les fonctions n fois continûment différentiables définies sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$, à valeur dans \mathbb{C} , $\|f\| = \sum_{\nu=0}^n \frac{1}{\nu!} \|f^{(\nu)}\|$ on peut montrer que $\mathcal{M}_{D_n} = [a, b]$.

IV. Soit W l'espace de toutes les fonctions complexes de variable réelle développables en série trigonométrique absolument convergente, muni de la norme

$$\|x(t)\| = \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int} \right\| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|$$

Soit M un idéal maximal de W , a un nombre complexe et $e^{it} \in W$ tel que $M(e^{it}) = a$ comme $e^{-it} = (e^{it})^{-1}$, $M(e^{-it}) = a^{-1}$ or $|a| \leq \|e^{it}\|$ et

$|a^{-1}| \leq \|e^{-it}\|$ comme $\|e^{it}\| = 1 = \|e^{-it}\|$ et que, dans \mathbb{C} ,

$|a^{-1}| = |a|^{-1}$, on a $|a| = 1$, i.e., $a = e^{it_0}$. Ainsi, M , qui est com-

posé de toutes les fonctions $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$ qui s'annulent en t_0 . Si donc une série de W est différente de zéro pour tout t , elle n'appartient à aucun idéal maximal et par conséquent elle est inversible.

ALGÈBRES à INVOLUTIONS. *ALGÈBRES DE BANACH.Définitions :

On appelle involution une fonction i d'une algèbre R sur \mathbb{C} dans elle-même vérifiant :

$$(i) \quad i^2 = 1$$

$$(ii) \quad i(\lambda x + \mu y) = \bar{\lambda} i(x) + \bar{\mu} i(y)$$

$$(iii) \quad i(xy) = i(y) i(x) \quad \text{on note } i(x) = x^*$$

on appelle algèbre involutive une algèbre sur \mathbb{C} munie d'une involution.

Si de plus, $\|x^*\| = \|x\|$, on dira que l'algèbre involutive est une *algèbre (star-algèbre).

Dans une algèbre involutive, les éléments x tels que $x^* = x$ sont dits autoconjugués ou hermitiques.

Exemples : $\forall x \in R, x x^*$ est autoconjugué.

0 est autoconjugué, e est autoconjugué.

Exemples d'algèbres involutives :

1) $\mathbb{C}(K)$ ou $x^*(k) = \overline{x(\frac{1}{k})}$ (on a $\|x^*\| = \|x\|$).

2) une algèbre de groupe $L^1(G)$ ou $f^*(g) = \overline{f(-g)}$ (on a encore $\|f^*\| = \|f\|$).

3) $H^\infty = \left\{ \begin{array}{l} \text{les fonctions holomorphes} \\ \text{bornées et continues à l'intérieur du cercle unité} \\ \text{de } \mathbb{C} \end{array} \right\}$ ou $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$

Définitions :

Les sommes $\sum_{j=1}^N x_j x_j^*$ d'éléments d'une *algèbre R sont appelées éléments positifs de R . L'ensemble des éléments positifs de R forme un cône c'est-à-dire une ensemble stable pour la multiplication par un élément de \mathbb{R}^+ et pour l'addition.

On dira qu'une forme $f \in R'$ est positive (on note $f \gg 0$ lorsque $f(x x^*) \in \mathbb{R} \geq 0, \forall x \in R$).

Une involution sera dite alors symétrique si $x^*(M) = \overline{x(M)}$ l'algèbre à involution sera dite alors symétrique.

On définit $i : \text{Spec } R \rightarrow \text{Spec } R$ telle que $i(M) = M^*$ vérifiant pour tout x , $\hat{x}(M^*) = \overline{\hat{x}(M)}$ si R est symétrique, on peut écrire $\overline{\hat{x}(M^*)} = \hat{x}^*(M) = \hat{x}(M)$ donc $\hat{x}(M^*) = \hat{x}(M)$ et $M^* = M$. i induit l'identité sur une algèbre symétrique.

Exemple d'algèbre symétrique :

$C(K)$ en effet $\hat{x}^*(k) = \overline{\hat{x}(k)} \forall k \in K$.

ETUDE DES FORMES POSITIVES

Soit R une * Algèbre unitaire f une forme ≥ 0 sur R c'est-à-dire :

$$f(x x^*) \geq 0 \quad \forall x \in R$$

Propriétés de f .

1°) $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $x, y \in R$:

$$\lambda \bar{\lambda} f(x x^*) + \lambda \bar{\mu} f(x y^*) + \mu \bar{\lambda} f(y x^*) + \bar{\mu} \mu f(y y^*) \geq 0$$

en effet si l'on pose $Z = \lambda x + \mu y$; $f(Z Z^*) \geq 0$ d'où

$$\boxed{\lambda \bar{\lambda} f(x x^*) + \lambda \bar{\mu} f(x y^*) + \mu \bar{\lambda} f(y x^*) + \bar{\mu} \mu f(y y^*) \geq 0} \quad (1)$$

2°) $f(e) \geq 0$

En effet $x^* e^* = x^* \forall x$ donc $e^* = e$ par suite $f(e e^*) \geq 0$ donc $f(e) = f(e e^*) \geq 0$

$$\boxed{f(e) \geq 0} \quad (2)$$

3°) $x \in R$ $f(x) = \overline{f(x^*)}$.

Prenons tout d'abord un élément hermétique : $x = x^*$ si dans (1) on fait $x = x^*$, $y = e$ et $\lambda = \mu = 1$ on obtient $f(x) \in \mathbb{R}$. Soit maintenant $x \in R$, on peut l'écrire

$$x = \frac{x + x^*}{2} + i \left(\frac{x - x^*}{2i} \right)$$

Or $\frac{x + x^*}{2}$ et $\frac{x - x^*}{2i}$ sont hermétiques.

Donc

$$f(x) = f\left(\frac{x+x^*}{2}\right) + i f\left(\frac{x-x^*}{2i}\right) \quad \text{où} \quad f\left(\frac{x+x^*}{2}\right) \quad \text{et} \quad f\left(\frac{x-x^*}{2i}\right) \in \mathbb{R}$$

Ce qui montre bien que :

$$\overline{f(x)} = f(x^*) \quad (3)$$

4°) Inégalité de Schwartz.

$$\text{D'après (3)} \quad f(x y^*) = \overline{f(y x^*)}.$$

D'autre part, en faisant $\mu = 1$ dans (1), on obtient :

$$\lambda \bar{\lambda} f(x x^*) + \lambda f(x y^*) + \bar{\lambda} \overline{f(x y^*)} + f(y y^*) \geq 0$$

Posons

$$f(x y^*) = |f(x y^*)| e^{i\theta} \quad \text{et} \quad \lambda = t e^{-i\theta} \quad t \in \mathbb{R}$$

On a alors

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad t^2 f(x x^*) + 2t |f(x y^*)| + f(y y^*) \geq 0$$

D'où

$$\overline{|f(x y^*)|^2} \leq f(x x^*) f(y y^*) \quad (4)$$

$$5°) \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad |f(x)| \leq f(e) \|x\|.$$

Soit t un élément hermitique de norme ≤ 1 .

$$t = t^* \quad \text{et} \quad \|t\| \leq 1$$

Considérons l'élément

$$(e - \lambda t)^{1/2} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \lambda^j t^j \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

où les α_j sont les coefficients du développement en série de $\sqrt{1-x}$.

Cette série converge normalement pour $|\lambda| \leq 1$ donc converge pour $|\lambda| \leq 1$ puisque \mathbb{R} est un banach.

On vérifie facilement que si l'on pose

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \lambda^j t^j \quad \text{avec} \quad |\lambda| \leq 1$$

on a $y^2 = e - \lambda t$.

Une involution sera dite alors symétrique si $x^*(M) = \overline{x(M)}$ l'algèbre à involution sera dite alors symétrique.

On définit $i : \text{Spec } R \longrightarrow \text{Spec } R$ telle que $i(M) = M^*$ vérifiant pour tout x , $\hat{x}(M^*) = \overline{\hat{x}(M)}$ si R est symétrique, on peut écrire $\overline{\hat{x}(M^*)} = \hat{x}(M) = \hat{x}(M)$ donc $\hat{x}(M^*) = \hat{x}(M)$ et $M^* = M$. i induit l'identité sur une algèbre symétrique.

Exemple d'algèbre symétrique :

$C(K)$ en effet $\hat{x}^*(k) = \overline{\hat{x}(k)} \forall k \in K$.

ETUDE DES FORMES POSITIVES

Soit R une * Algèbre unitaire f une forme ≥ 0 sur R c'est-à-dire :

$$f(x x^*) \geq 0 \quad \forall x \in R$$

Propriétés de f .

1°) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $x, y \in R$:

$$\lambda \bar{\lambda} f(x x^*) + \lambda \bar{\mu} f(x y^*) + \mu \bar{\lambda} f(y x^*) + \mu \bar{\mu} f(y y^*) \geq 0$$

en effet si l'on pose $Z = \lambda x + \mu y$; $f(Z Z^*) \geq 0$ d'où

$$\boxed{\lambda \bar{\lambda} f(x x^*) + \lambda \bar{\mu} f(x y^*) + \mu \bar{\lambda} f(y x^*) + \mu \bar{\mu} f(y y^*) \geq 0} \quad (1)$$

2°) $f(e) \geq 0$

En effet $x^* e^* = x^* \forall x$ donc $e^* = e$ par suite $f(e e^*) \geq 0$ donc $f(e) = f(e e^*) \geq 0$

$$\boxed{f(e) \geq 0} \quad (2)$$

3°) $x \in R$ $f(x) = \overline{f(x^*)}$.

Prenons tout d'abord un élément hermétique : $x = x^*$ si dans (1) on fait $x = x^*$, $y = e$ et $\lambda = \mu = 1$ on obtient $f(x) \in \mathbb{R}$. Soit maintenant $x \in R$, on peut l'écrire

$$x = \frac{x + x^*}{2} + i \left(\frac{x - x^*}{2i} \right)$$

Or $\frac{x + x^*}{2}$ et $\frac{x - x^*}{2i}$ sont hermétiques.

Prenons en particulier $\lambda = 1$ $y \in e - t$.

On a : $y = y^*$ puisque $t = \mathbb{E}^*$

donc $f(e - t) = f(y y^*) \geq 0$

par suite $f(e) \geq f(t)$

on aurait de même pour $t = - t^*$

$$f(e) \geq f(t)$$

Par conséquent $\forall t : \|t = t^*\| \leq 1$ on a $|f(t)| \leq f(e)$ (5).

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$ quelconque et tel que $\|x\| \leq 1$.

On a $(x x^*)^* = x x^*$ et $\|x x^*\| \leq 1$. D'autre part $f(x) = f(x e^*)$

Donc d'après (4) et (5) :

$$|f(x)|^2 = |f(x e^*)|^2 \leq f(x x^*) f(e) \leq f^2(e)$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{|f(x)| \leq f(e) \|x\|} \quad (6)$$

Ce résultat montre que toute forme ≥ 0 sur une * Algèbre de Babanch est nécessairement continue.

6°)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq f(e) \|x x^*\|^{1/2} = f(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \|(x x^*)^n\|^{1/2n}$$

Preuve :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| = |f(x e^*)| \leq f(e)^{1/2} f(x x^*)^{1/2} \quad \text{d'après (4)}$$

En particulier si l'on fait $x = y y^*$ on obtient :

$$|f(y y^*)| \leq f(e)^{1/2} \left[f(y y^*)^2 \right]^{1/2}$$

D'où

$$|f(x)| \leq f(e)^{1/2+1/4} \left[f(x x^*)^2 \right]^{1/4}$$

En itérant le procédé on obtient la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq f(e)^{1/2+1/4+\dots+1/2^n} \times \left(f[(x x^*)^{2^{n-1}}] \right)^{1/2^n}$$

Soit

$$|f(x)| \leq f(e)^{1/2+1/4+\dots+1/2n} \times f(e)^{1/2n} \times \left(\left\| (x \ x^*)^{2^{n-1}} \right\|^{1/2^{n-1}} \right)^{1/2} \quad \text{d'après (6)}$$

en passant à la limite sur n , on obtient :

$$|f(x)| \leq f(e) \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| (x \ x^*)^{2^n} \right\|^{1/2^n} \right]^{1/2}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{|f(x)| \leq f(e) \left(\left\| x \ x^* \right\|_{sp} \right)^{1/2}} \quad (7)$$

THEOREME DE BOCHNER

Le but est de chercher l'expression générale des formes ≥ 0 sur une * Algèbre unitaire et symétrique.

\mathcal{M}_R étant compact, on peut étudier les mesures de Radon sur \mathcal{M}_R , qui sont tout simplement les formes linéaires et continues sur $\mathbb{C}(\mathcal{M}_R)$.

Soit μ une telle mesure de Radon supposée ≥ 0 , et considérons l'application

$$F_\mu \text{ de } R \longrightarrow \mathbb{C} \text{ définie par } F_\mu(x) = \int_{\mathcal{M}_R} \hat{x}(M) d\mu(M)$$

C'est bien une forme linéaire sur R puisque ce n'est autre que $\mu \circ \Gamma$, nous allons vérifier qu'elle est ≥ 0 :

en effet
$$F_\mu(x \ x^*) = \int_{\mathcal{M}_R} \hat{x}(M) \hat{x}^*(M) d\mu(M)$$

mais comme R est symétrique $\hat{x}^*(M) = \overline{\hat{x}(M)}$ donc

$$F_\mu(x \ x^*) = \int_{\mathcal{M}_R} |\hat{x}(M)|^2 d\mu(M) \geq 0 \text{ puisque } \mu \geq 0.$$

Nous allons démontrer la réciproque: \mathcal{M}_R

Théorème :

Si R est une * Algèbre symétrique unitaire, toute forme ≥ 0 sur R s'exprime de la façon suivante :

$$F(x) = \int_{\mathcal{M}_R} \hat{x}(M) d\mu(M)$$

où μ est ≥ 0 et parfaitement déterminée.

Preuve :

a) Unicité

Considérons $\Gamma(R) \subset \mathbb{C}(\mathcal{M}_R)$ comme R est symétrique c'est une sous

* Algèbre de $\mathbb{C}(\mathcal{M}_R)$, d'autre part :

(i) si $M_1 \neq M_2 \exists x \in R : \hat{x}(M_1) \neq \hat{x}(M_2)$ en effet soit $x_1 \in M_1$ et $\notin M_2$ on a $\hat{x}_1(M_1) = 0$ et $\hat{x}_1(M_2) \neq 0$.

(ii) $\forall M \in \mathcal{M}_R \exists x \in R : \hat{x}(M) \neq 0$.

Par suite, d'après le théorème de Stone-Waerstrase $\Gamma(R)$ est dense dans $\mathbb{C}(\mathcal{M}_R)$.

Soient alors μ_1 et $\mu_2 \geq 0$ telle que :

$$\forall x \in R : \int_{\mathcal{M}_R} \hat{x}(M) d\mu_1(M) = \int_{\mathcal{M}_R} \hat{x}(M) d\mu_2(M).$$

Alors, $\mu_1 - \mu_2$ est une mesure de Radon nulle sur $\Gamma(R)$, donc nulle sur $\mathbb{C}(\mathcal{M}_R)$ puisque $\Gamma(R)$ est dense dans $\mathbb{C}(\mathcal{M}_R)$. Ce qui démontre l'unicité.

b) Existence

Soient maintenant F une forme ≥ 0 sur R et H le sous ensemble des éléments hermitiques de R : c'est une sous algèbre de Banach réelle car H n'est pas stable par la multiplication par un nombre complexe.

$\Gamma(H)$ est donc une sous algèbre de $\mathbb{C}_R(\mathcal{M}_R)$ qui sépare les points, en effet :

(i) $\forall M_1 \neq M_2 \exists h \in H : \hat{h}(M) \neq \hat{h}(M_2)$ on raisonne par l'absurde en utilisant le fait que $x = h_1 + i h_2$.

(ii) $\forall M \in \mathcal{M}_R \exists h \in H : \hat{h}(M) \neq 0$ (même procédé)

(iii) $\hat{h}(M) = \overline{\hat{h}(M)}$ car $\hat{h}(M) = \hat{h}^*(M) = \hat{h}(M)$

Donc d'après le théorème de Stone Waerstrass $\Gamma(H)$ est dense dans $C_R(\mathcal{M}_R)$.

Etudions la restriction de F à H , soit $F|_H$:

- 1) $F|_H$ est réelle car $F(h) = F(h^*) = \overline{F(h)}$ d'après (3)
- 2) $F(h) \leq F(e) \|hh^*\|_{sp}^{1/2} \leq F(C) \|h\|_{sp}$.

Donc

$$|F(h)| \leq F(e) \sup_{M \in \mathcal{M}_R} |\hat{h}(M)|$$

ceci montre que $F(h) = 0 \quad \forall h \in \text{Ker } \Gamma$, donc on peut considérer que F est une forme linéaire sur $\Gamma(H)$ et l'inégalité précédente montre qu'elle est continue.

Or $\Gamma(H)$ est dense dans $C_R(\mathcal{M}_R)$ dont on peut prolonger F en une \mathbb{R} mesure de Radon sur $C_R(\mathcal{M}_R)$.

Par conséquent :

$$\exists \mu' \in M_R(\mathcal{M}_R) : F(h) = \int_{\mathcal{M}_R} \hat{h}(M) d\mu'(M) \quad \forall h \in H.$$

Or $x \in \mathbb{R}$ peut s'écrire : $x = h_1 + i h_2$ où h_1 et $h_2 \in H$. Donc

$$F(x) = \int_{\mathcal{M}_R} \hat{h}_1(M) d\mu'(M) + i \int_{\mathcal{M}_R} \hat{h}_2(M) d\mu'(M).$$

Or il existe une \mathbb{C} - mesure de Radon et une seule telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \int_{\mathcal{M}_R} \hat{h}_1(M) d\mu'(M) + i \int_{\mathcal{M}_R} \hat{h}_2(M) d\mu'(M) = \int_{\mathcal{M}_R} \hat{x}(M) d\mu(M)$$

Reste à montrer que $\mu \geq 0$: raisonnons par l'absurde, on suppose que

$$\exists f \in C_R^+(\mathcal{M}_R) = \int_{\mathcal{M}_R} f d\mu \neq 0$$

posons $\sqrt{f} = \varphi$

Puisque $\Gamma(H)$ est dense dans $C_R(\mathcal{M}_R)$:

$$\exists \left\{ h_n \in H \right\}_{n=1}^{\infty} : \hat{h}_n \longrightarrow \varphi \text{ uniformément sur } \mathcal{M}_R$$

alors $(h_n \hat{h}_n^*) \longrightarrow f$ uniformément

$$F(h_n \hat{h}_n^*) = \int (h_n \hat{h}_n^*)(M) d(M) \geq 0$$

Donc la limite de $F(h_n \hat{h}_n^*)$ ne peut être que ≥ 0 par suite $\int f d\mu \geq 0$
C.Q.F.D.

Définitions :

I. Une algèbre R est dite régulière si pour toute partie K de \mathcal{M}_R fermée, et tout $M \in \mathcal{M}_R$ et $M \notin K$, il existe $x \in R$ tel que $\hat{x}(M) = 1$ et $x(k) = 0$ $k \in K$. (on obtient des définitions équivalentes en remplaçant 1 par tout nombre complexe non nul).

II. Quelque soit I un idéal de R , on appelle $h(I)$ (Hull de I) l'ensemble des éléments de \mathcal{M}_R qui, comme idéaux maximaux de R , contiennent I .

$I, h(I)$ n'est pas vide (théorème de Krull) et d'autre part, $h(I) = \bigcap_{x \in I} \hat{x}^{-1}(0)$, est fermé puisque les \hat{x} sont continues.

III. Quelque soit F un sous-ensemble de \mathcal{M}_R , on appelle $k(F)$, (ker de F) l'intersection en tant qu'idéaux maximaux de R , des éléments de F . $k(F)$ est donc fermé. $k(\mathcal{M}_R) =$ radical de R .

Problème de la synthèse spectrale.

Il s'agit de savoir dans quelles conditions l'égalité $k(h(I)) = I$ est vraie. Il est évident, puisque $k(h(I))$ est fermé, que I doit l'être. Ce n'est pas suffisant :

Contre exemple :

Soit \mathbb{T} le tore, et $D_1(\mathbb{T})$ l'ensemble des applications continûment différentiables sur \mathbb{T} , muni de la norme $\|f\|_{D_1} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$ et d'une structure d'algèbre de Banach. Soit

$$I = \left\{ f \in D_1(\mathbb{T}) \mid f(0) = f'(0) = 0 \right\} \text{ alors } h(I) = \bigcap_{x \in I} \hat{x}^{-1}(0) = \{0\}$$

et $k(h(I)) = \left\{ f \in D_1(\mathbb{T}) \mid f(0) = 0 \right\} \supsetneq I$

une autre manière de poser le problème est de se demander si un idéal est déterminé par ses zéros.

Remarques :

Dans tous les cas, $k(h(I)) \supsetneq I$ donc si $\tilde{I} \in h(k(h(I)))$, $\tilde{I} \in h(I)$.

Mais si $\tilde{J} \in h(I)$, $k(h(I))$ est l'intersection de \tilde{J} avec tous les autres idéaux maximaux contenant I , donc $\tilde{J} \supset k(h(I))$, $\tilde{J} \in h(k(h(I)))$ donc $h(k(h(I))) = h(I)$.

Théorème :

Si R est une algèbre régulière, $h(k(F)) = \bar{F}$, $\forall F$ une partie de \mathcal{M}_R .

Preuve :

$h(k(F))$ est fermé, donc $h(k(F)) \supset \bar{F}$, car évidemment, $h(k(F)) \supset F$ si $M \in \mathcal{M}_R$ et $M \notin \bar{F}$ alors $M \notin h(k(F))$. En effet si $M \in h(k(F))$, $M \supset k(F)$ ce qui équivaut à dire que $\bar{x}(M) = 0$, $\forall x \in k(F)$, ou encore que $\hat{x}(M) = 0$, $\forall x$ tel que $\hat{x}(F) = \{0\}$, à fortiori tel que $\hat{x}(\bar{F}) = \{0\}$ mais comme $M \notin \bar{F}$, et que l'algèbre est régulière, $\exists x$ tel que $\hat{x}(\bar{F}) = \{0\}$ et $\hat{x}(M) = 1$ ce qui contredit l'hypothèse et démontre le théorème.

La réciproque de ce théorème, énoncé comme suit :

"si R n'est pas une algèbre régulière, il existe une partie F de \mathcal{M}_R telle que $h(k(F)) \supset \bar{F}$ et $h(k(F)) \neq \bar{F}$ " est vraie, sa démonstration est laissée au lecteur.

Lemme :

R étant une algèbre régulière, soit F une partie fermée de \mathcal{M}_R ; alors $\mathcal{M}_{R/k(F)} = F$.

Preuve :

Il suffit de remarquer que $\mathcal{M}_{R/I}$ est une partie de \mathcal{M}_R fermée des idéaux maximaux de R contenant I donc $\mathcal{M}_{R/k(F)} = h(k(F)) = F$.

Théorème :

Si R est une algèbre régulière avec unité, I un idéal de R , F une partie fermée de \mathcal{M}_R telle que $h(I) \cap F = \emptyset$, il existe $x \in R$ tels que $\hat{x}(I) = \{0\}$ et $\hat{x}(M) = 1 \quad \forall M \in F$.

Preuve :

Considérons I' , l'image de I par l'homomorphisme canonique ϕ de R dans $R/k(F)$. Si $I' \neq R/k(F)$, il existe un idéal M' maximal dans $R/k(F)$

contenant I' . Donc $M' \in \mathcal{M}_{R/kF}$ c'est-à-dire à F d'après le lemme. Comme évidemment $M' \in h(I)$, ceci est impossible ($h(I) \cap F = \emptyset$) donc $I' = R/k(F)$, donc $\exists e' \in I'$ et $\lambda x \in T$ tels que, $\varphi(x) = e'$, $\hat{x}(M) = 1 \quad \forall M \in F$ C.Q.F.D.

Théorème :

Soit R une algèbre régulière semi-simple et $E \subset \mathcal{M}_R$ un sous-ensemble compact du spectre alors, il existe $I(E)$ et $I_0(E)$, respectivement un plus grand et un plus petit élément dans l'ensemble des idéaux J tels que $h(J) = E$.

Preuve :

$I(E) = k(E)$ car on a bien $h k E = E$ et si $hJ = E$, $k(E) = k h J \supseteq J$.

$$I_0(E) = \left\{ x \in R \mid \exists \Omega_x \text{ ouvert de } \mathcal{M}_R, \Omega_x \supset E, \text{ et } \hat{x}(\omega) = 0 \text{ si } \omega \in \Omega_x \right\} .$$

En effet :

1) on vérifie immédiatement que cet ensemble est un idéal.

2) $h(I_0(E)) = E$ car ; $h(I_0) \supset E$; en effet $\hat{x} \equiv 0$ sur $\Omega_x \Rightarrow \hat{x} \equiv 0$ sur $E \subset \Omega_x$, et $h(I_0) \subset E$ car si $m \notin E$, par définition des algèbres régulières, il existe $x \in I_0(E)$ tel que $\hat{x}(m) \neq 0$. (Comme tout espace compact est régulier, il existe Ω ouvert, $E \subset \Omega$, et $m \notin \bar{\Omega}$).

3) Tout idéal J dont le hull est E contient $I_0(E)$ soit $x \in I_0(E)$, et $\Omega_x \supset E$ l'ouvert correspondant, posons $C_x = \mathcal{M}_R \setminus \Omega_x$. C_x est compact et $h J \cap C = \emptyset$. On a vu dans un précédent théorème que l'on pouvait trouver y tel que $\hat{y}(M) = 1 \quad \forall M \in C_x$ posons alors $z = x - xy$. Si $M \in \Omega_x$, $\hat{z}(M) = \hat{x}(M) - \hat{x}(M) \hat{y}(M) = 0$ si $M \in C_x$, $\hat{z}(M) = \hat{x}(M) - \hat{x}(M) = 0$ donc $\hat{z} \equiv 0$. L'algèbre étant semi-simple, $z = 0$ donc $x = xy$ mais $xy \in J$ donc

$$\forall x \in I_0(E), x \in J ; I_0(E) \subset J. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Remarque : L'idéal $I_0(E)$ n'est pas nécessairement fermé, alors que $I(E)$ l'est puisque $I(E) = k(E)$. On notera $\overline{I_0(E)} = J(E)$. Lorsque $I(E) = J(E)$, E sera dit ensemble de synthèse.

CHAPITRE II.

ALGÈBRES DE GROUPES.

ALGÈBRES DE GROUPE.CARACTÈRE D'UN GROUPE.Définition :

Soit G un groupe topologique localement compact on appelle caractère toute application continue $G \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}$ telle que :

$$(i) \quad \forall g \in G \quad |\chi(g)| = 1$$

$$(ii) \quad \chi(g_1 \pm g_2) = \chi(g_1) \times \chi(g_2)^{\pm 1}$$

On note par \hat{G} l'ensemble des caractères de G , on le munit d'une structure de groupe abélien en définissant le produit de deux caractères par

$$\chi_1 \cdot \chi_2(g) = \chi_1(g) \times \chi_2(g).$$

On appelle parfois \hat{G} le groupe dual de G .

Exemple :

On voit facilement que si $G = \mathbb{T}$ les caractères sont les applications

$$e^{i\theta} \longrightarrow e^{in\theta}$$

Donc $\hat{G} \cong \mathbb{Z}$

De même si $G = \mathbb{R}$ les caractères sont les applications

$$r \longrightarrow e^{i\theta r} \quad \text{où } \theta \in \mathbb{R}$$

Donc $\hat{G} \cong \mathbb{R}$.

SPECTRE D'UNE ALGÈBRE DE GROUPE.

Soit G un groupe localement compact et abélien. Considérons $L^1(G)$: c'est une algèbre de Banach commutative, avec ou sans unité, (on démontre d'ailleurs que $L^1(G)$ a une unité si et seulement si G est discret). De toute façon on peut parler du spectre de $L^1(G)$ dans le premier cas il est compact dans le deuxième cas il est seulement localement compact.

Le premier but de cette étude est d'avoir l'identification

$$\mathcal{N}_{L^1(G)} \cong \hat{G}$$

TRANSFORMATION DE FOURIER.

Soit $f(g) \in L^1(G)$, on appelle transformée de Fourier de f , l'application de $\hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(g) \chi(g) dh(g)$$

où $dh(g)$ est la mesure de Haar sur G cette intégrale existe car si

$$f(g) \in L^1(G), \quad f(g) \cdot \chi(g) \in L^1(G).$$

Propriété :

On, a la formule

$$\boxed{(\widehat{f * g})(\chi) = \hat{f}(\chi) \cdot \hat{g}(\chi).}$$

En effet :

$$\begin{aligned} (\widehat{f * g})(\chi) &= \int_G \chi(g) dh(g) \int_G f(g - \gamma) g(\gamma) dh(\gamma) \\ &= \iint f(g - \gamma) g(\gamma) \chi(g) dh(g) dh(\gamma) \\ &= \int g(\gamma) dh(\gamma) \int f(g - \gamma) \chi(g) dh(g) \\ &= \int g(\gamma) dh(\gamma) \int f(g) \chi(g + \gamma) dh(g) \\ &= \int g(\gamma) \chi(\gamma) dh(\gamma) \int f(g) \chi(g) dh(g) \\ &= \hat{f}(\chi) \cdot \hat{g}(\chi) \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Théorème 1 :

Il existe une application de $\hat{G} \rightarrow \mathcal{M}_{L^1}(G)$.

Preuve :

Soit χ un élément de \hat{G} on lui fait correspondre l'application de

$$\begin{array}{ccc} L^1(G) & \xrightarrow{\Gamma_\chi} & \mathbb{C} \\ f & \longrightarrow & \hat{f}(\chi) = \int_G f(g) \chi(g) dh(g). \end{array}$$

C'est une forme linéaire.

Elle est multiplicative d'après la propriété précédente.

Elle n'est pas identiquement nulle car $\chi(g) \neq 0 \forall g$ donc la mesure $\chi(g) dh(g)$

n'est pas nulle.

Par suite à Γ_χ on peut associer un élément de $\mathcal{M}_{L^1(G)}$

C.Q.F.D.

Théorème 2 :

Il existe une application de $\mathcal{M}_{L^1(G)} \longrightarrow \hat{G}$.

Preuve :

Soit $M \in \mathcal{M}_{L^1(G)} \quad \exists b \in L^1(G) : b(M) = 1 = M(b)$ posons $b_g(G) = b(G - g)$.

Soit alors $\chi(g) = M(b_g)$ et montrons que c'est bien un caractère

(i) $\chi(g)$ est continue. En effet

$$|\chi(g) - \chi(g_0)| = |M(b_g) - M(b_{g_0})| = |M(b_g - b_{g_0})| \leq \|b_g - b_{g_0}\|_{L^1(G)}$$

or $\|b_g - b_{g_0}\|_{L^1(G)} \longrightarrow 0$ lorsque $g \longrightarrow g_0$ donc $\chi(g) \longrightarrow \chi(g_0)$ lorsque $g \longrightarrow g_0$.

(ii) $\chi(g_1 + g_2) = \chi(g_1) \cdot \chi(g_2)$. En effet :

$$\begin{aligned} \chi(g_1 + g_2) &= M(b_{g_1+g_2}) = M(b_{g_1+g_2}) M(b) = M(b_{g_1+g_2} * b) = M(b_{g_1} * b_{g_2}) \\ &= M(b_{g_1}) \cdot M(b_{g_2}) = \chi(g_1) \cdot \chi(g_2). \end{aligned}$$

(iii) $\forall g \in G \quad |\chi(g)| = 1$

En effet : $|\chi(g)| = |M(b_g)| \leq \|b_g\|_{L^1} = \|b\|_{L^1} = 1$.

Donc les $\chi(g)$ sont en module bornés par 1.

Or $|\chi(ng)| = |\chi(g)|^n$ ce qui montre que $|\chi(g)| \leq 1$ en passant à l'inverse on aurait de même $|\chi(g)| \geq 1$ d'où $|\chi(g)| = 1$ C.Q.F.D.

Il s'agit maintenant de démontrer que les deux applications sont inverses l'une de l'autre.

Théorème 3 :

Si $\hat{G} \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{M}_{L^1(G)} \xrightarrow{B} \hat{G}$ on a $B \circ \Gamma = I$.

Preuve :

$$\text{Soit } \hat{f}(x) = M(f) = \int_G f(\gamma) \chi(\gamma) d\mu(\gamma)$$

$$\text{Soit } b \text{ tel que } M(b) = 1 = \int_G b(\gamma) \chi(\gamma) d\mu(\gamma)$$

$$\begin{aligned} \text{alors } \chi'(g) &= \int_G b(\gamma - g) \chi(\gamma) d\mu(\gamma) = \int_G b(\gamma) \chi(\gamma + g) d\mu(\gamma) \\ &= \chi(g) \int_G b(\gamma) \chi(\gamma) d\mu(\gamma) = \chi(g) \end{aligned}$$

Donc $B \circ \Gamma = I$

C.Q.F.D.

Théorème 4 : $\Gamma \circ B = I$

Preuve :

$$\begin{aligned} \text{Soient } a \in L^1(G), M \in \mathcal{M}_{L^1(G)} \text{ et } b \in L^1(G) : M(b) = 1 \\ M(a) = M(a) M(b) = M(a * b) = M \left[\int_G a(\gamma) b(g - \gamma) d\mu(\gamma) \right] \\ = M \left[\int_G a(\gamma) b_\gamma(g) d\mu(\gamma) \right] \\ = \int_G a(\gamma) B(M)(\gamma) d\mu(\gamma) = \Gamma \circ B(M).(a). \end{aligned}$$

Donc $\Gamma \circ B = I$

C.Q.F.D.

Ceci montre que Γ et B sont bijectives et que B est la bijection réciproque de Γ , on a montré en plus que B ne dépendait pas de la fonction $b \in L^1(G)$ telle que $M(b) = 1$.

On a donc déjà une identification algébrique de $\mathcal{M}_{L^1(G)}$ et de \hat{G} .

TOPOLOGIE DE \hat{G} .

On munit \hat{G} de la topologie de convergence uniforme sur tout compact.

On peut montrer que cette topologie est compatible avec la structure de groupe pour \hat{G} . Donc \hat{G} est un groupe topologique.

Nous allons montrer que c'est la topologie de Gelfand si l'on identifie \hat{G} à $\mathcal{M}_{L^1(G)}$.

Appellons τ_G la topologie de \hat{G}

τ_G la topologie de Gelfand sur $\mathcal{M}_{L^1(G)}$.

Théorème 5 : $\tau_C \geq \tau_G$

Preuve :

Il faut montrer que l'application :

$$\chi \longrightarrow \int_G f(g) \chi(g) dh(g)$$

est continue pour chaque $f \in L^1(G)$.

$$\text{Soit } f \in L^1 \quad \hat{f}(\chi) = \int_G f(g) \chi(g) dh(g) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists K \text{ compact de } G : \\ \int_{G \setminus K} |f| dh \leq \varepsilon/4$$

$$\text{Or } \hat{f}(\chi) - \hat{f}(\chi_0) = \int f(g) [\chi(g) - \chi_0(g)] dh(g) \\ = \int_K f(g) [\chi(g) - \chi_0(g)] dh(g) + \int_{G \setminus K} f(g) [\chi(g) - \chi_0(g)] dh(g).$$

$$\text{Or } \int_{G \setminus K} |f(g) [\chi(g) - \chi_0(g)]| dh(g) \leq \varepsilon/2$$

Or d'après la définition de τ_C : $\exists \mathcal{V}(\chi_0)$ voisinage de χ_0 tel que :

$$|\chi(g) - \chi_0(g)| \leq \frac{\varepsilon}{2 \int_K |f(g)| dh(g)} \quad \forall g \in K \text{ et } \forall \chi \in \mathcal{V}(\chi_0)$$

Donc $\exists \mathcal{V}(\chi_0)$: $|\hat{f}(\chi) - \hat{f}(\chi_0)| \leq \varepsilon \quad \forall \chi \in \mathcal{V}(\chi_0)$ d'où $\tau_C \geq \tau_G$

Théorème 6 : $\tau_G \geq \tau_C$

Preuve :

Nous allons tout d'abord démontrer un lemme.

Lemme :

Soit l'application de $G \times \hat{G} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(g, \chi) \longrightarrow \chi(g)$$

si on met sur \hat{G} la topologie de Gelfand et sur $G \times \hat{G}$ la topologie produit, alors cette application est continue.

Preuve :

Soient $M_0 \in \mathcal{M}_{L^1}(G)$ et $\xi_0 \in G$

$\exists b \in L^1(G) = b(M_0) = 1$ et comme $b(M)$ est continue sur $\mathcal{M}_{L^1(G)}$.

Donc $\exists \mathcal{V}_{M_0}$ voisinage de M_0 pour $\tau_G : b(M) > 1/2 \quad \forall M \in \mathcal{V}_{M_0}$.

Alors $\chi_{g_0} = b_g(M_0)$

$$\chi(g) = \frac{b_g(M)}{b(M)} \quad \text{pour } M \in \mathcal{V}_{M_0}$$

$$\text{Donc } |\chi(g) - \chi_{g_0}| = \left| \frac{b_g(M)}{b(M)} - \frac{b_{g_0}(M_0)}{b(M_0)} \right|.$$

Comme $b(M) \rightarrow b(M_0)$ lorsque $M \rightarrow M_0$, il suffit d'étudier $|b_g(M) - b_{g_0}(M_0)|$.

$$\text{Or } |b_g(M) - b_{g_0}(M_0)| \leq |b_g(M) - b_{g_0}(M)| + |b_{g_0}(M) - b_{g_0}(M_0)|.$$

Mais $\exists \mathcal{V}'_{M_0}$ voisinage de M_0 dans $\tau_G : |b_{g_0}(M) - b_{g_0}(M_0)| \leq \varepsilon/2 \quad \forall M \in \mathcal{V}'_{M_0}$

$\exists \mathcal{V}''_{g_0}$ voisinage de g_0 dans $G : ||b_g - b_{g_0}|| \leq \varepsilon/2 \quad \forall g \in \mathcal{V}''_{g_0}$

et comme $|b_g(M) - b_{g_0}(M)| \leq ||b_g - b_{g_0}||$ on a bien

$$|b_g(M) - b_{g_0}(M_0)| \leq \varepsilon \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Revenons maintenant au théorème : il faut montrer que si $\chi \rightarrow \chi_{g_0}$ pour τ_G , alors $\chi \rightarrow \chi_{g_0}$ uniformément sur tout compact.

Cela résultera du lemme suivant :

Lemme :

Soit E un espace localement compact, soit $\mathcal{F}(E)$ un sous ensemble d'applications continues de $E \rightarrow \mathbb{C}$, on suppose que $\mathcal{F}(E)$ est muni d'une topologie telle que l'application $(x, f) \rightarrow f(x)$ est continue. Alors c'est une topologie plus fine que la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Preuve :

Soit f_0 un élément de $\mathcal{F}(E)$ et soit K un compact de E , étant $x_i \in K \exists \mathcal{V}'_i(f_0)$ et $\mathcal{V}''_i(x_i)$ tels que :

$$|f(x) - f_0(x_i)| \leq \varepsilon/2 \quad \forall f \in \mathcal{V}'_i(f_0) \quad \text{et } \forall x \in \mathcal{V}''_i(x_i)$$

on peut recouvrir K à l'aide d'un nombre fini de ces voisinages.

Soient $\mathcal{V}_1^n, \mathcal{V}_2^n, \dots, \mathcal{V}_n^n$ ces voisinages et prenons $\mathcal{V}^n(f_0) = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{V}_i^n$
 c'est un voisinage de f_0 .

Or $|f(x) - f_0(x)| \leq |f(x) - f_0(x_i)| + |f_0(x_i) - f_0(x)| \leq \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{V}^n(f_0)$

Donc $\forall \varepsilon \exists \mathcal{V}^n(f_0) : \forall f \in \mathcal{V}^n(f_0) |f(x) - f_0(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in K \quad \text{C.Q.F.D.}$

Des deux lemmes précédents on en déduit que $\tau_G \geq \tau_C$. Par suite $\tau_G = \tau_C$.

On a donc une identification algébrique et topologique entre \hat{G} et $\mathcal{M}_{L^1(G)}$

PROPRIETES DE $L^1(G)$

a) $L^1(G)$ est symétrique :

On vérifie que $f^*(g) = \overline{f(-g)}$ définit une involution dans $L^1(G)$ or

$$f^*(\chi) = \int_G \overline{f(-g)} \chi(g) dh(g) = \int_G \overline{f(g)} \chi(-g) dh(g)$$

$$= \int_G \overline{f(g) \chi(g)} dh(g) = \overline{f(\chi)}$$

Donc $L^1(G)$ est symétrique.

On vérifie facilement que c'est involution se prolonge sur $L^1(G) + 1 \mathbb{C}$ et qu'alors $L^1(G) + 1 \mathbb{C}$ est symétrique.

b) $L^1(G)$ est semi-simple :

Pour le démontrer nous allons étudier certaines formes ≥ 0 sur $L^1(G)$
 Soient $f \in L^1(G)$ et $x \in L^2(G)$.

On démontre (voir Guelfand) que $x * f \in L^2(G)$ or $L^2(G)$ est un espace de Hilbert, on peut donc former $F_x(f) = \langle x * f, x \rangle_{L^2}$.

On voit facilement que $F_x(f)$ est une forme ≥ 0 sur $L^1(G)$ en effet

$$F_x(f * f^*) = \langle x * f * f^*, x \rangle_{L^2} = \langle x * f, f * x \rangle_{L^2} \geq 0$$

on vérifie aussi que si l'on pose $F_x(e) = \langle x, x \rangle_{L^2}$ alors F_x est une forme ≥ 0 sur $L^1(G) + e \mathbb{C}$.

On peut donc appliquer le théorème de Bochner et

$$F_x(f) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\chi) d\mu_x(\chi) \quad \text{où } d\mu_x \text{ est une mesure de}$$

Radon ≥ 0 de masse totale finie et $d\mu_x \neq 0$ si $F_x \neq 0$.

Montrons alors que si $f \in L^1(G)$ et $f \neq 0$ alors $\exists Z \in L^2(G)$ tel que $F_Z(f) \neq 0$ si $f \neq 0 \quad \exists x \in L^2(G) = x * f \neq 0$ alors
 $\exists y \in L^2(G) : \langle x * f, y \rangle \neq 0$ mais

$$\langle x * f, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\theta^4=1} \theta \times \langle (x + \theta y) * f, x + \theta y \rangle$$

donc il y a au moins un des termes du deuxième membre qui n'est pas nul. Donc :

$$\exists Z \in L^2(G) : \langle Z * x, Z \rangle \neq 0$$

Donc
$$F_Z(f) = \int_G \hat{f}(\chi) d\mu_Z(\chi) \neq 0$$

Donc
$$\hat{f}(\chi) \neq 0$$

On a ainsi montré que si $f \in L^1(G)$ et $f \neq 0$ alors $\hat{f}(\chi) \neq 0$ ce qui montre bien la semi-simplicité, et ainsi l'unicité de la transformée de Fourier.

PROPRIETES DES CARACTERES.

Soit $\mathcal{M}(G) = \left\{ \text{mesures de Radon sur } G \text{ de masse totale finie} \right\}$ c'est une algèbre de Banach munie du produit de convolution. Mais on ne connaît pas d'identification du spectre. On peut tout de même définir la transformée de Fourier par

$$\hat{\mu}(\chi) = \int_G \chi(s) d\mu$$

là encore il y a unicité en effet :

supposons $\hat{\mu}(\chi) \equiv 0$ et soit $f \in L^1(G)$ on peut montrer que $f * \mu = g$ où $g \in L^1(G)$.

Or
$$(f * \mu)(\chi) = \hat{f}(\chi) \times \hat{\mu}(\chi) = 0 \quad \forall f$$

Donc $(f * \mu)(\chi) \equiv 0 \Rightarrow f * \mu = 0$ car $L^1(G)$ est semi-simple. Par suite $f * \mu = 0 \quad \forall f \in L^1 \Rightarrow \mu = 0$.

Théorème :

Si $g_1 \neq g_2 \quad \exists \chi \in \hat{G} : \chi(g_1) \neq \chi(g_2)$

Preuve :

Raisonnons par l'absurde : supposons $\chi(g_1) = \chi(g_2) \quad \forall \chi \in \hat{G}$
 considérons δ_{g_1} et δ_{g_2} les mesures de Dirac en g_1 et g_2

$$\hat{\delta}_{g_1}(\chi) = \chi(g_1)$$

$$\hat{\delta}_{g_2}(\chi) = \chi(g_2)$$

on aurait donc $\hat{\delta}_{g_1}(\chi) = \hat{\delta}_{g_2}(\chi) \quad \forall \chi \in \hat{G}$ d'après ce qui précède cela entraîne

$\delta_{g_1} = \delta_{g_2}$ ce qui est impossible.

Conséquence :

Si on considère $\left\{ \sum_{\chi \in F} \alpha_\chi \chi(g) \right\}$ avec $F \subset \hat{G}$
 $\left\{ \chi \in F \text{ fini} \right\}$

C'est une algèbre stable par involution et qui sépare les points donc d'après le théorème de Stone-Waerstrass $\left\{ \sum \alpha_\chi \chi(g) \right\}$ est dense dans $\mathbb{C}(G)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

FONCTIONS DU TYPE ≥ 0 .

Définition :

On dit qu'une fonction $p(g) \in L^\infty(G)$ est du type ≥ 0 si :

$$F(f) = \int_G f(g) p(g) dh(g)$$

est une forme ≥ 0 sur $L^1(G)$.

On démontre que si $p(g)$ est continue, cette forme ≥ 0 est prolongeable à une forme ≥ 0 sur $L^1(G) + i\mathbb{C}$, on a alors en appliquant le théorème de Bochner

$$\int_G f(g) p(g) dh(g) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\chi) d\mu_F(\chi) = \int_G f(g) dh(g) \int_{\hat{G}} \chi(g) d\mu_F(\chi)$$

Donc $p(g) = \int_{\hat{G}} \chi(g) d\mu_F(\chi)$ où $d\mu_F$ est une mesure de Radon ≥ 0 de masse totale finie.

Exemple :

Si $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ on voit facilement que $f^* * f$ est du type ≥ 0 et continue.

THEOREME D'INVERSION.

Théorème :

Soit $B(G) = [P]$ la fermeture linéaire des fonctions de $L^\infty(G)$, continues et du type ≥ 0 . Si $f \in B(G) \cap L^1(G)$, alors $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$ et il existe une normalisation de la mesure de Haar sur \hat{G} , telle que

$$\forall f \in B(G) \cap L^1(G) : f(g) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\chi) \chi(-g) d\hat{\mu}_G(\chi)$$

où $d\hat{\mu}_G(\chi)$ est la mesure en question.

Preuve :

Soit $f \in B(G) \cap L^1(G)$.

Puisque $f \in B(G) \exists \mu_f \in \mathcal{M}(\hat{G})$ unique telle que

$$f(g) = \int_{\hat{G}} \chi(g) d\mu_f(\chi)$$

Soit $g \in B(G) \cap L^1(G)$ montrons que $\hat{f}(\bar{\chi}) d\mu_g = \hat{g}(\bar{\chi}) d\mu_f$.

En effet soit $h \in L^1(G)$

$$\begin{aligned} h * f(o) &= \int_G h(-\gamma) f(\gamma) dh(\gamma) = \int_G h(-\gamma) \left[\int_{\hat{G}} \chi(\gamma) d\mu_f(\chi) \right] dh(\gamma) \\ &= \int_{\hat{G}} d\mu_f(\chi) \int_G h(\gamma) \chi(-\gamma) dh(\gamma) \\ &= \int_{\hat{G}} \hat{h}(\bar{\chi}) d\mu_f(\chi) \end{aligned}$$

En particulier, pour les fonctions du type $h(\gamma) = h' * g(\gamma)$, où $h' \in L^1(G)$.

On aura

$$h * f(o) = \int_{\hat{G}} \hat{h}'(\bar{\chi}) \hat{g}(\bar{\chi}) d\mu_f(\chi) = \int_{\hat{G}} \hat{h}'(\bar{\chi}) \hat{f}(\bar{\chi}) d\mu_g(\chi)$$

Mais les transformées de Fourier sont denses dans $\mathcal{C}_0(\hat{G})$ car $L^1(G)$ est symétrique, donc

$$\hat{g}(\bar{x}) \, d\mu_f(x) = \hat{f}(\bar{x}) \, d\mu_g(x)$$

Soit alors $\psi(x) \in \mathcal{K}(\hat{G})$ posons ;

$$T(\psi) = \int_{\hat{G}} \frac{\psi(x)}{\hat{g}(\bar{x})} \, d\mu_g(x) \quad \text{où } g \in L^1(G) \cap B(G)$$

et $\text{supp}(\hat{g}(\bar{x})) \supset \text{supp } \psi$ on démontre qu'une telle fonction existe.

Montrons que $T(\psi)$ est indépendant de g .

Soit f une fonction ayant les mêmes propriétés que g . Alors

$$T(\psi) = \int_{\hat{G}} \frac{\psi(x) \hat{f}(\bar{x})}{\hat{g}(\bar{x}) \hat{f}(\bar{x})} \, d\mu_g(x) = \int_{\hat{G}} \frac{\psi(x)}{\hat{f}(\bar{x})} \, d\mu_f(x)$$

d'après ce qui précède donc $T(\psi)$ est bien défini.

C'est manifestement une mesure de Radon .

Montrons que c'est une mesure invariante par translation c'est-à-dire que

$$\forall x_0 \in \hat{G} \quad T(\psi_{x_0}) = T(\psi).$$

Posons

$$f^{x_0}(g) = \chi_{x_0}(g) f(g) = \int_{\hat{G}} \chi_{x_0}(g) \chi(g) \, d\mu_f(x) = \int_{\hat{G}} \hat{\chi}(g) \, d\mu_f\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

On voit donc que

$$d\mu_{f^{x_0}}(x) = d\mu_f(x \bar{x}_0) = d\mu_f\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

D'autre part

$$\hat{f}^{x_0}(x) = \int \chi_{x_0}(g) f(g) \chi(g) \, dh(g) = \hat{f}(x \bar{x}_0)$$

Or si

$$T(\psi) = \int_{\hat{G}} \frac{\psi(x)}{\hat{g}(\bar{x})} \, d\mu_g(x)$$

pour calculer $T(\psi_{x_0})$ on prend la fonction $\hat{g}^{x_0}(x)$ ce qui donne

$$\begin{aligned} T(\psi_{x_0}) &= \int_{\hat{G}} \frac{\psi(x \bar{x}_0)}{\hat{g}^{x_0}(\bar{x})} \, d\mu_{\bar{x}_0}(x) \\ &= \int_{\hat{G}} \frac{\psi(x \bar{x}_0)}{\hat{g}(x_0 \bar{x})} \, d\mu_g(x \bar{x}_0) = T(\psi). \end{aligned}$$

Donc T est une mesure de Radon invariante par translation. Resté à montrer que $T \neq 0$.

$$\text{Or } T(\psi \hat{f}(x)) = \int_{\hat{G}} \frac{\psi(x) \hat{f}(\bar{x})}{\hat{f}(\bar{x})} d\mu_g(x) = \int_{\hat{G}} \psi(x) d\mu_f(x).$$

Or $d\mu_f$ est $\neq 0$ donc $\exists \psi \in \mathcal{K}(G)$ telle que

$$\int_{\hat{G}} \psi(x) d\mu_f(x) \neq 0$$

mais $\psi \hat{f}(\bar{x}) \in \mathcal{K}(G)$ et $T(\psi \hat{f}(\bar{x})) \neq 0$.

Donc $T \neq 0$.

Par suite T est la mesure de Haar sur \hat{G} nous l'appellons mesure bien normalisée on la notera par $dh_{\hat{G}}$.

Montrons maintenant que $\hat{f}(x) \in L^1(\hat{G})$. Or

$$T(\hat{f}(x)) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(x) dh_{\hat{G}}(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\bar{x}) d\mu_f(x)$$

Or $d\mu_f$ est de mesure ^{de masse} totale finie donc $\int_{\hat{G}} d\mu_f(x)$ existe.

Donc $T(\hat{f})$ existe ce qui montre que $\hat{f}(x) \in L^1(\hat{G})$. En outre on a

$$\int_{\hat{G}} \psi(x) \hat{f}(\bar{x}) dh_{\hat{G}}(x) = \int_{\hat{G}} \psi(x) d\mu_f(x) \quad \forall \psi \in \mathcal{K}(\hat{G})$$

Donc

$$\hat{f}(\bar{x}) dh_{\hat{G}}(x) = d\mu_f(x)$$

Or

$$\begin{aligned} f(g) &= \int_{\hat{G}} \chi(g) d\mu_f(x) = \int_{\hat{G}} \chi(g) \hat{f}(\bar{x}) dh_{\hat{G}}(x) \\ &= \int_{\hat{G}} \bar{\chi}(g) \hat{f}(x) dh_{\hat{G}}(x) \end{aligned}$$

d'où

$$f(g) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(x) \chi(-g) dh_{\hat{G}}(x)$$

Ce qui achève la démonstration.

THEOREME DE PLANCHEREL .Théorème :

La restriction à $L^1(G) \cap L^2(G)$ de la transformation

$$f(g) \longrightarrow \hat{f}(\chi) = \int_G f(g) \chi(g) dh_G$$

se prolonge en une isométrie de $L^2(G)$ sur $L^2(\hat{G})$.

Preuve :

Soit $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ et $\chi = f^* * f$. On sait que $\chi \in L^1$ est du type ≥ 0 et continue.

Donc $\chi \in L^1(G) \cap B(G)$ par suite d'après le théorème d'inversion :

$$\chi(g) = \int_{\hat{G}} \hat{\chi}(\chi) \chi(-g) dh_{\hat{G}}(\chi)$$

donc

$$\chi(o) = \int_{\hat{G}} \hat{\chi}(\chi) dh_{\hat{G}}(\chi)$$

mais

$$\hat{\chi}(\chi) = \hat{f}^*(\chi) * \hat{f}(\chi) = \overline{\hat{f}(\chi)} \cdot \hat{f}(\chi)$$

Or

$$\chi(o) = \int_G \overline{f(g)} f(g) dh_G = \|f\|_{L^2(G)}^2$$

Ce qui montre que

$$\int_{\hat{G}} \overline{\hat{f}(\chi)} \hat{f}(\chi) dh_{\hat{G}}(\chi) = \|f\|_{L^2(G)}^2$$

Donc $\hat{f}(\chi) \in L^2(\hat{G})$ et $\|\hat{f}\|_{L^2(\hat{G})} = \|f\|_{L^2(G)}$

Ceci montre que si l'on met sur $L^1(G) \cap L^2(G)$ la norme de $L^2(G)$ l'application $f \longrightarrow \hat{f}$ applique $L^1 \cap L^2 \longrightarrow L^2(\hat{G})$ et conserve les normes.

Or c'est une application linéaire et continue de $L^1(G) \cap L^2(G)$ dans $L^2(\hat{G})$ donc elle est uniformément continue et comme $L^1(G) \cap L^2(G)$ est dense dans $L^2(G)$ elle se prolonge en une application de $L^2(G)$ dans $L^2(\hat{G})$ qui conserve les normes.

Reste à montrer que l'image de $L^2(G)$ est $L^2(\hat{G})$.

L'image est un sous espace formé de $L^2(G)$ soit $\psi \in L^2(\hat{G})$ un élément orthogonal à ce sous espace, c'est-à-dire :

$$\forall f \in L^2(G) \quad \int_{\hat{G}} \hat{f}(\chi) \psi(\chi) \, dh_G(\chi) = 0$$

mais si $f(g) \in L^2(G)$ $f(g + g_0) \in L^2(G)$ donc $\forall g_0 \in G$ on aura :

$$\int_{\hat{G}} \hat{f}(\chi) \psi(\chi) \chi(g_0) \, dh_G(\chi) = 0$$

montrons maintenant un lemme :

Lemme :

Si $\psi(\chi) \in L^1(\hat{G})$ et si $\forall g \in G$

$$\int_{\hat{G}} \psi(\chi) \chi(g) \, dh_{\hat{G}} = 0$$

alors $\psi = 0$.

Preuve : Soit $\varphi \in L^1(G)$ on a encore

$$\int_{\hat{G}} \psi(\chi) \hat{\varphi}(\chi) \, dh_{\hat{G}} = 0 \quad \forall \varphi \in L^1(G)$$

Or les transformées de Fourier sont denses dans $\mathcal{C}_0(G)$ donc la mesure

$\int_{\hat{G}} \psi(\chi) \, dh_{\hat{G}}$ est nulle. Donc $\psi = 0$ C.Q.F.D.

En appliquant le lemme à

$$\int_{\hat{G}} \hat{f}(\chi) \psi(\chi) \chi(g_0) \, dh_G(\chi) = 0$$

On obtient $\hat{f} \cdot \psi = 0 \quad \forall f \in L^2(G)$. Donc $\psi = 0$

Donc l'image de $L^2(G)$ par la transformation de Fourier étendue est $L^2(\hat{G})$.

C.Q.F.D.

THEOREME DE PONTRYAGIN.

Soit G groupe abélien localement compact.

On sait que \hat{G} muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact est localement compact puisqu'il est identifiable topologiquement au spectre de $L^1(G)$.

Donc \hat{G} est un groupe topologique localement compact et abélien, on part donc étudier \hat{G} .

Théorème :

$\hat{\hat{G}}$ s'identifie topologiquement et algébriquement à G .

Preuve :

Considérons l'application $P : g \longrightarrow \dot{g} : \dot{g}(\chi) = \chi(g)$ montrons que \dot{g} est un caractère de \hat{G} :

- (i) $|\dot{g}(\chi)| = |\chi(g)| = 1$
- (ii) $|\dot{g}(\chi_1 \chi_2) = \chi_1 * \chi_2(g) = \chi_1(g) * \chi_2(g) = \dot{g}(\chi_1) * \dot{g}(\chi_2)$
- (iii) Si $\chi \longrightarrow \chi_0$ dans $\hat{G} \Rightarrow \chi(g) \longrightarrow \chi_0(g)$ dans \mathbb{C} car la convergence uniforme sur tout compact entraîne la convergence simple.

Donc P est une application de G dans \hat{G} .

1) P est homomorphisme.

En effet $(g_1 * g_2)(\chi) = \chi(g_1 + g_2) = \chi(g_1) \chi(g_2) = \dot{g}_1(\chi) \dot{g}_2(\chi) = \dot{g}_1 * \dot{g}_2(\chi)$.

2) P est injective.

En effet si $g_1 \neq g_2 \exists \chi \in \hat{G} : \chi(g_1) \neq \chi(g_2)$ donc $\dot{g}_1 \neq \dot{g}_2$.

3) P est continue de G dans \hat{G} .

Supposons que $g_n \longrightarrow g_0$ dans G , soit K un compact de \hat{G} alors $\chi(g_n) \longrightarrow \chi(g_0)$ uniformément sur K d'après un des théorèmes d'Ascoli.

Donc $\dot{g}_n(\chi) \longrightarrow \dot{g}_0(\chi)$ uniformément sur K . Ce qui veut bien dire que $\dot{g}_n \longrightarrow \dot{g}_0$ dans \hat{G} .

4) P^{-1} est continue de $P(G)$ dans G en mettant sur $P(G)$ la topologie induite par \hat{G} .

Il faut montrer que $\forall N$ voisinage de 0 dans G , $\exists N^*$ voisinage de 0 dans \hat{G} tel que $P^{-1}(N^* \cap P(G)) \subset N$.

Or $\exists f \in \mathcal{C}_0(G) : \int f(g) f(-g) dh = 1$ et que $f * f^*(g) = 0 \forall g \notin N$ car $\text{sup}(f * g) \subset \text{sup}(f) + \text{sup}(g)$.

Posons $h = f^* * f$ c'est une fonction continue du type ≥ 0 .

Donc $\exists \mu_h \in \mathcal{M}(\hat{G}) : h(g) = \int_{\hat{G}} \chi(g) d\mu_h(\chi)$ d'autre part

$h(o) = f * f^*(o) = \int f(g) f(-g) dh(g) = 1$ mais $h(g) = h \circ P^{-1}(\hat{g}) = F(\hat{g})$.

Mais F s'étend à \hat{G} tout entier en posant :

$$F(\hat{g}) = \int_{\hat{G}} \hat{g}(\chi) d\mu_h(\chi)$$

F est encore continue et $F(0) = 1$.

Donc $\exists N^*$ voisinage de 0 dans $\hat{G} : F(\hat{g}) > 0 \quad \forall \hat{g} \in N^*$.

Mais alors si $\hat{g} \in N^* \cap P(G)$ on aura $F(\hat{g}) > 0 \Rightarrow g \in N$ c'est-à-dire que $P^{-1}(N^* \cap P(G)) \subset N$. C.Q.F.D.

Par conséquent $P(G)$ est un sous groupe localement compact de \hat{G} pour la topologie induite par \hat{G} .

5) $P(G)$ est fermée dans \hat{G} .

Cela résulte du lemme suivant :

Lemme :

Si G est un groupe localement compact et si H est un sous groupe localement compact de G , H est fermé.

Preuve :

On peut toujours supposer $\bar{H} = G$.

Supposons donc H dense dans G et $H \subsetneq G$.

Alors $G \setminus H$ est aussi dense dans G . Soit donc $h \in H$, il existe une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $G \setminus H$ qui tend vers h . De même pour chaque n il existe une suite $\{h_{nm}\}_{m \in \mathbb{N}}$ d'éléments de H qui tend vers le point à l'infini de H donc la suite diagonale $\{h_{nn}\}$ tend à la fois vers h et le point à l'infini de H ce qui est impossible.

Donc $H = \bar{H}$

Par conséquent $P(G)$ est fermé.

$$6) P(G) \equiv \hat{G}.$$

Raisonnons par l'absurde.

Soit $x \notin P(G)$, $\in \hat{G}$ alors $\exists N$ voisinage de x inclus dans $\hat{G} \setminus P(G)$.

Mais $\exists \varphi_1 \neq 0$ et $\varphi_2 \neq 0 \in L^2(\hat{G})$ telle que

$$\text{supp}(\varphi_1 * \varphi_2) \subset N \quad \varphi_1 * \varphi_2 \neq 0.$$

D'après le théorème de Plancherell, $\exists \theta_1$ et $\theta_2 \in L^2(\hat{G})$ tels que

$$\varphi_1 = \hat{\theta}_1 \quad \varphi_2 = \hat{\theta}_2$$

Toujours d'après Plancherell $\theta = \theta_1 \theta_2 \in L^1(G)$ alors si l'on pose

$$\begin{aligned} f(\mathcal{G}) &= \int_{\hat{G}} \hat{\mathcal{G}}(\chi) \theta(\chi) \, d\mathbf{h}_{\hat{G}}(\chi) \\ &= \hat{\theta}(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

donc f est nulle sur $P(G)$ or sur $P(G)$ f s'écrit :

$$f(\mathcal{G}) = \int_{\hat{G}} \chi(\mathcal{G}) \theta(\chi) \, d\mathbf{h}_{\hat{G}}(\chi) = 0$$

donc d'après le lemme démontré à l'occasion du théorème de Plancherell $\theta(\chi) = 0$

ce qui est en contradiction avec le fait que $\hat{\theta} = \varphi_1 * \varphi_2$ n'est pas nulle.

C.Q.F.D.

PSEUDO - MESUREDéfinition.

Soit B une algèbre de Banach, B' son dual topologique.

On appelle pseudo-mesure, un élément S de B' . On note encore B' par $PM(B)$.

Cette appellation est justifié par le fait que lorsque :

$$B = \mathcal{C}(K) \quad B' \text{ est l'espace des mesures sur } K$$

$$B = D_1(\mathbb{T}) \quad (\text{espace des fonctions continuellement dérivables sur } \mathbb{T})$$

$$B' = \mathcal{D}'_1 \quad \text{espace des distributions d'ordres } \leq 1 \text{ sur } \mathbb{T}.$$

Cette définition devient intéressante en étudiant les problèmes de synthèse spectrale lorsque B est régulière, unitaire et semi-simple.

ALGÈBRE NORMALEDéfinition.

Une algèbre normale est une algèbre qui possède la propriété suivante :

$$\begin{aligned} \text{si } K_1 \text{ et } K_2 \text{ sont deux compacts de } \mathcal{M}_B \text{ avec } K_1 \cap K_2 = \emptyset \\ \exists x \in B : \begin{cases} \hat{x}(k_1) = 0 & \forall k_1 \in K_1 \\ \hat{x}(k_2) = 1 & \forall k_2 \in K_2 \end{cases} \end{aligned}$$

On voit donc que toute algèbre normale et unitaire est régulière. On a la réciproque partielle suivante :

Théorème.

Si B est une algèbre unitaire, semi-simple et régulière, elle est normale.

Preuve :

Soient K_1 et K_2 deux compacts de \mathcal{M}_B avec $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ puisque B est régulière et semi-simple il existe un plus grand idéal I tel que $h(I) = K_1$ (voir polycopié p.46) cet idéal est $I(K_1) = \left\{ x \in B ; \hat{x}^{-1}(0) \supset K_1 \right\}$

Mais alors $h(I) \cap K_2 = \emptyset$ donc d'après le théorème de la page 45 il existe $x \in I(K_1) : \hat{x}(k_2) = 1 \quad \forall k_2 \in K_2$ mais d'après la définition de $I(K_1)$, $\hat{x}(k_1) = 0 \quad \forall k_1 \in K_1$. Ce qui démontre bien la normalité.

Théorème. $L^1(G)$ est une algèbre normale.

Preuve :

Nous allons même démontrer un peu plus ce qui permettra d'affirmer que $L^1(G)$ est aussi régulière.

Soient F un ensemble fermé de \hat{G}
 K un compact de \hat{G}

$$\exists f \in L^1(G) : \begin{cases} \hat{f}(x) = 0 & \forall x \in F \\ \hat{f}(k) = 1 & \forall k \in K. \end{cases}$$

En effet il existe Ω voisinage ouvert de l'origine de \hat{G} , relativement compact et symétrique tel que

$$(\Omega + \Omega + K) \cap F = \emptyset.$$

Soient $\xi_{\Omega+K}$ et ξ_{Ω} les fonctions caractéristiques de $\Omega + K$ et Ω . Elles appartiennent à $L^2(\hat{G})$ et

$$\xi_{\Omega+K} * \xi_{\Omega} \in \mathcal{F}(L^2(G)) = \left\{ \text{ensemble des transformées de Fourier} \right\}$$

en effet

$$\mathcal{F}(\xi_{\Omega+K} * \xi_{\Omega}) = \frac{\hat{\xi}_{\Omega+K}}{\in L^2(\hat{G})} \times \frac{\hat{\xi}_{\Omega}}{\in L^2(\hat{G})} \in L^1(\hat{G}) = L^1(G)$$

Mais

$$\begin{aligned} \xi_{\Omega+K} * \xi_{\Omega}(k) &= \int_{\hat{G}} \xi_{\Omega+K}(k-t) \xi_{\Omega}(t) dt = \int_{\Omega} \xi_{\Omega+K}(k-t) dt \\ &= \text{mesure de } \Omega \text{ si } k \in K \\ &= 1 \text{ si on prend } \frac{\xi_{\Omega}}{\mu(\Omega)} \end{aligned}$$

enfin $\text{supp}(\xi_{\Omega+K} * \xi_{\Omega}) \subset K + \Omega + \Omega$

$$\text{donc } \xi_{\Omega+K} * \xi_{\Omega}(x) = 0 \text{ si } x \in F \quad \text{C.Q.F.D.}$$

PARTITION DE L'UNITÉ.

Définition.

Soient K un espace topologique ; $\Phi = \left\{ \Omega_{\alpha} \right\}_{\alpha \in A}$ une famille d'ouverts telle que $\bigcup_{\alpha \in A} \Omega_{\alpha} = K$, on dit que $\left\{ f_{\alpha} \right\}_{\alpha \in A}$ est une partition de l'unité associée à Φ si :

- (1) $f_\alpha : K \xrightarrow{\text{continue}} \mathbb{R}^+$
- (2) $\text{supp } f_\alpha \subset \Omega_\alpha$
- (3) $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha \equiv 1$

On a alors le théorème suivant pour les algèbres normales.

Théorème.

Soit B une algèbre normale.

Pour tout compact K de \mathcal{M}_B et tout recouvrement fini d'ouverts $\{\Omega_\alpha\}$ de K , il existe des partitions de l'unité de K associées, où les f_α sont des transformés de Gelfand.

Preuve :

Soient K un compact de \mathcal{M}_B et Ω_α un recouvrement ouvert fini de K . Nous allons tout d'abord démontrer un lemme :

Lemme.

$\forall \alpha$ il existe $C_\alpha \subset \Omega_\alpha$ tel que C_α soit compact et $\cup C_\alpha = K$.

Preuve :

Soit $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ les ouverts tels que $\bigcup_{i=1}^n \Omega_i = K$ nous allons construire $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_n$ ouverts tels que $\overline{\mathcal{O}_j} \subset \Omega_j$ et $\bigcup_{j=1}^n \mathcal{O}_j = K$.

Il suffit pour cela de les construire de façons inductives, de telle sorte que si $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_p$ sont les p premiers, on ait

$$\overline{\mathcal{O}_j} \subset \Omega_j \quad \text{pour } j \leq p$$

et

$$\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2, \dots, \cup \mathcal{O}_p \cup \Omega_{p+1} \dots \cup \Omega_n = K.$$

On construit \mathcal{O}_{p+1} de la façon suivante :

$$\text{soit } \mathcal{O}_{p+1} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \dots \cup \mathcal{O}_p \cup \Omega_{p+2} \dots \cup \Omega_n$$

alors $[\mathcal{O}_{p+1} \subset \Omega_{p+1}$ et est compact on peut donc trouver \mathcal{O}_{p+1} ouvert tel que

$$[\mathcal{O}_{p+1} \subset \mathcal{O}_{p+1} \subset \overline{\mathcal{O}_{p+1}} \subset \Omega_{p+1}$$

puisque K est normal.

$$\text{Mais alors } \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \dots \cup \mathcal{O}_p \cup \mathcal{O}_{p+1} \cup \Omega_{p+2} \dots \cup \Omega_n = K$$

C.Q.F.D.

Comme B est normale $\forall \alpha \exists f_\alpha$ telle que

$$\hat{f}_\alpha(x) = 1 \quad \forall x \in C_\alpha$$

$$\text{supp } \hat{f}_\alpha \subset \Omega_\alpha$$

Considérons la fonction

$$\Phi = \prod_{\alpha=1}^n (1 - \hat{f}_\alpha) \equiv 0 \quad \text{par construction.}$$

Donc si on prend $\Theta = 1 - \Phi \equiv 1$.

Mais Θ peut aussi s'écrire : $\Theta = \Phi_1 + \Phi_2, \dots, + \Phi_n$

où Φ_1 est le terme obtenu en développant Φ et en prenant tous les termes qui contiennent \hat{f}_1 , c'est une transformée de Gelfand qui a son support dans Ω_1

Φ_2 est le terme obtenu en prenant tous les termes restants qui contiennent \hat{f}_2 , c'est une transformée de Gelfand qui a son support dans Ω_2 , etc...

Les Φ_α constituent une partition de l'unité cherchée.

SUPPORT D'UNE PSEUDO MESURE.

Soit B une algèbre normale, unitaire et semi-simple.

Soit $S \in B' = \text{PM}(B)$, considérons la famille \mathcal{F} des fermés F tel que si $x \in B$: $\text{supp } \hat{x} \cap F = \emptyset \Rightarrow \langle S, x \rangle = 0$.

Lemme.

La famille \mathcal{F} est stable par intersection.

Preuve: Soient d'abord F_1 et $F_2 \in \mathcal{F}$

Soit $x \in B$ tel que $\text{supp } \hat{x} \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$ alors $[F_1, F_2]$ et $[\text{supp } \hat{x}]$ est un recouvrement ouvert de \mathcal{N}_B qui est compact puisque B est unitaire.

Comme B est normale

$$\exists \hat{x}_1 = \text{supp } \hat{x}_1 \subset [F_1]$$

$$\exists \hat{x}_2 = \text{supp } \hat{x}_2 \subset [F_2]$$

$$\exists \hat{x}_3 = \text{supp } \hat{x}_3 \subset [\text{supp } \hat{x}]$$

$$\text{et } \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3 = 1$$

Par suite $\hat{x} = x(\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3) = \hat{x}\hat{x}_1 + \hat{x}\hat{x}_2 + \hat{x}\hat{x}_3$. Mais $\hat{x}\hat{x}_3 \equiv 0$ par construction.

D'autre part, B est semi-simple donc $x = \hat{x}\hat{x}_1 + \hat{x}\hat{x}_2$

$$\text{alors } \langle S, x \rangle = \langle S, \hat{x}\hat{x}_1 \rangle + \langle S, \hat{x}\hat{x}_2 \rangle = 0$$

Mais $\text{supp } \hat{x}\hat{x}_1 \cap F_1 = \emptyset \Rightarrow \langle S, \hat{x}\hat{x}_1 \rangle = 0$

$\text{supp } \hat{x}\hat{x}_2 \cap F_2 = \emptyset \Rightarrow \langle S, \hat{x}\hat{x}_2 \rangle = 0$

Par suite $\langle S, x \rangle = 0$ donc $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

La famille \mathcal{F} est donc stable par intersection finie. Soit maintenant $x \in B$
 $\text{supp } \hat{x} \cap (\bigcap F_\alpha) = \emptyset$ où $F_\alpha \in \mathcal{F}$.

Comme \mathcal{A}_B est compact il existe déjà un nombre fini F_1, F_2, \dots, F_n d'éléments de \mathcal{F} tels que $\text{supp } \hat{x} \cap (\bigcap_{i=1}^n F_i) = \emptyset$ et d'après ce qui précède $\langle S, x \rangle = 0$
 C.Q.F.D.

Définition.

On appelle support de S le plus petit élément de \mathcal{F} c'est-à-dire $\bigcap F$ où $F \in \mathcal{F}$.

SYNTHESE SPECTRALE.

Soit B une algèbre normale, unitaire et semi-simple.

Si E est un compact de \mathcal{M}_B on sait qu'il existe (p 46) un plus grand idéal fermé et un plus petit idéal fermé tel que $h(J) = E$.

Ce sont respectivement $I(E) = h(E)$
 $J(E) = \overline{I_0(E)} = \left\{ \overline{x \in B : \text{supp } x \cap E = \emptyset} \right\}$

On voit alors que si $S \in \text{PM}(B)$

$$\text{supp } S \subset E \Leftrightarrow (x \in J(E) \Rightarrow \langle S, x \rangle = 0).$$

Par conséquent

$$\text{PM}(E) = \left\{ S \in \text{PM}(B) : \text{supp } S \subset E \right\} = J(E)^\perp.$$

On a alors l'équivalence suivante

$$\left\{ I(E) = J(E) \right\} \Leftrightarrow \left\{ \forall S : \text{supp } S \subset E, \forall x \in I(E) \Rightarrow \langle S, x \rangle = 0 \right\} = Q$$

l'implication $\left\{ I(E) = J(E) \right\} \Rightarrow Q$ est évidente.

Supposons maintenant Q réalisée, cela signifie que $\text{PM}(E) \subset I(E)^\perp$ c'est-à-dire

$$J(E)^\perp \subset I(E)^\perp$$

or on a toujours $J(E) \subset I(E)$ donc $J(E)^\perp \supset I(E)^\perp$ par suite $J(E)^\perp = I(E)^\perp$

et d'après le théorème de Hahn-Banach : $J(E) = I(E)$ Q peut encore s'écrire

$$Q = \left\{ \forall S : \text{supp } S \subset E, \forall x \in B : \hat{x}^{-1}(0) \supset E \Rightarrow \langle S, x \rangle = 0 \right\}$$

en effet $I(E) = \left\{ x \in B : \hat{x}^{-1}(0) \supset E \right\}$.

On a alors les définitions suivantes :

1) E est un ensemble de synthèse si et seulement si

$$\forall x \in B \text{ et } S \in \mathcal{P}\mathcal{M}(B) \text{ on a } Q \Leftrightarrow I(E) = J(E)$$

2) $S \in \mathcal{P}\mathcal{M}(B)$ est dite synthésable si et seulement si

$$\forall x \in B : \hat{x}^{-1}(0) \supset \text{supp } S \Rightarrow \langle S, x \rangle = 0$$

3) $x \in B$ est dit synthésable si

$$\forall S \in \mathcal{P}\mathcal{M}(B) : \text{supp } S \subset \hat{x}^{-1}(0) \Rightarrow \langle S, x \rangle = 0$$

On voit que 3) $\Leftrightarrow x \in J(\hat{x}^{-1}(0))$.

On voit aussi que

2) $\Leftrightarrow I(\text{supp } S) \stackrel{L}{\supset} S \Leftrightarrow S \subset$ fermeture faible des mesures discrètes sur le $\text{supp } S$.

A toute mesure sur \mathcal{M}_B on peut associer canoniquement une pseudo mesure sur

B par la formule

$$\langle \hat{x}, \hat{\mu} \rangle = \int_{\mathcal{M}_B} \hat{x}(M) d\mu(M)$$

Il est facile de voir que $\text{supp } \hat{\mu} = \text{supp } \mu$.

Théorème.

Toute mesure est synthésable.

Preuve :

Cela résulte du fait que si une fonction continue à support compact s'annule sur le support d'une mesure, son intégrale par rapport à cette mesure est nulle.

ETUDE DU CAS DES ALGÈBRES DE GROUPES.

G sera dans la suite \mathbb{R}^n ou \mathbb{T}^n .

Considérons $L^1(\hat{G})$ on peut l'identifier à $A(G) = \mathcal{F}(L^1(\hat{G}))$ où \mathcal{F} représente la transformation de Fourier, à condition de mettre sur $A(G)$ la norme de $L^1(\hat{G})$.

C'est-à-dire que si $\varphi \in A(G)$ $\|\varphi\|_{A(G)} = \|\hat{\psi}\|_{L^1(\hat{G})}$ où $\varphi = \hat{\psi}$

En fait il faudrait prendre $\widehat{L^1(G)} = L_1(G) + 1 \mathbb{C}$ et $A(G \cup \infty)$ mais nous n'étudions que les pseudo mesures à support compact ne contenant pas le point à l'infini.

Le spectre de $A(G) \cong L_1(\hat{G})$ est G (théorème de Pontrjagin). Soit $\mathcal{D}(G)$ l'espace des fonctions à support compact sur G indéfiniment dérivables muni de la topologie canonique $\mathcal{D}(G) \subset A(G)$ algébriquement et topologiquement.

Donc $PM(G) \subset \mathcal{D}'(G)$ (espace des distributions) et le support de $S \in PM(G)$ s'identifie au support de S en tant que distribution.

TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UNE PSEUDO-MESURE.

Soit $S \in PM(G)$ de support compact

(i) $\varphi(g) \in A(G)$
 (ii) $\varphi(g)$ de support compact
 $\forall \varepsilon \exists \varphi(g)$ telle que

(iii) $\varphi(g) \equiv 1$ sur un voisinage du support de S

(iv) $\|\varphi\|_{A(G)} \leq 1 + \varepsilon$

Remarque. (iv) est assez difficile à démontrer dans le cas général, mais il ne sera pas essentiel dans la suite.

Posons alors $\hat{S}(\chi) = \langle S, \varphi \chi \rangle$

$\hat{S}(\chi)$ est bien définie car $\varphi \chi \in A(G)$ (c'est la transformée de Fourier de ψ_χ).

Lemme.

$\hat{S}(\chi)$ est indépendante de φ satisfaisant (i) (ii) (iii).

Preuve :

Soit φ' satisfaisant (i), (ii), (iii)

$$\langle S, \varphi \chi \rangle - \langle S, \varphi' \chi \rangle = \langle S, (\varphi - \varphi') \chi \rangle$$

Mais $\text{supp}(\varphi - \varphi') \cap \text{supp } S = \emptyset$.

$$\text{Donc } \langle S, (\varphi - \varphi') \chi \rangle = 0 \Rightarrow \langle S, \varphi \chi \rangle = \langle S, \varphi' \chi \rangle$$

Définition.

La fonction $\hat{S}(\chi)$ définie précédemment est appelée transformée de Fourier de S .

Si μ est une mesure à support compact sur G , sa transformée de Fourier en tant que mesure s'identifie à sa transformée de Fourier en tant que pseudo-mesure.

Propriétés de $\hat{S}(\chi)$.

1) $\hat{S}(\chi)$ est une fonction continue de χ . Car $\hat{S}(\chi) = \langle S, \varphi \chi \rangle = \langle S, \psi_\chi \rangle$.

Or $\langle S, \psi_\chi \rangle$ dépend continûment de ψ_χ par définitions et on sait que ψ_χ dépend

$$2) \sup_{\chi \in \hat{G}} |\hat{S}(\chi)| \leq \|S\|_{PM(G)} \|\varphi \chi\|_{A(G)} = \|S\|_{PM(G)} \|\psi_\chi\|_{L^1(\hat{G})} = \|S\|_{PM(G)} \|\psi\|_{L^1(\hat{G})}$$

$$\|\psi\|_{L^1(\hat{G})}$$

En utilisant ensuite la propriété (iv) on aura $\sup_{\chi \in \hat{G}} |\hat{S}(\chi)| \leq \|S\|_{PM}$

3) Si $f \in L^1(\hat{G})$ $\langle S, \hat{f} \rangle = \langle S, \hat{f} \varphi \rangle$ pour tout φ satisfaisant à (i), (ii), (iii) (évident).

4) $\langle S, \hat{f} \varphi \rangle = \int f(\chi) \hat{S}(\chi) d\chi \quad \forall \varphi$ satisfaisant (i), (ii), (iii).

$$\begin{aligned} \text{En effet } \langle S, \hat{f} \varphi \rangle &= \langle S, \int_{\hat{G}} f(\chi) \chi(g) \varphi(g) d\chi \rangle \\ &= \int_{\hat{G}} f(\chi) \langle S, \chi(g) \varphi(g) \rangle d\chi \\ &= \int_{\hat{G}} f(\chi) \hat{S}(\chi) d\chi \end{aligned}$$

Théorème.

La C.N.R. pour qu'une distribution à support compact soit une pseudo mesure est que sa transformée de Fourier soit bornée.

Preuve.

La transformée de Fourier d'une distribution T à support compact se définit par $\hat{T}(\chi) = \langle T, \varphi_\chi \rangle$ où φ satisfait à (i), (ii), (iii) et est indéfiniment dérivable. On montre encore que $\hat{T}(\chi)$ est continue mais $\hat{T}(\chi)$ n'est pas toujours bornée.

La condition nécessaire est évidente à cause de la propriété 2) .

Condition suffisante : supposons

que $\hat{T}(\chi)$ soit bornée alors on peut définir sur $\mathcal{D}(G)$ une forme linéaire et continue pour la topologie de $A(G)$ en posant

$$\langle S_T, \theta \rangle = \int_{\hat{G}} \lambda(\chi) \hat{T}(\chi) d\chi \quad \text{où } \theta = \hat{\lambda}$$

On a bien $|\langle S_T, \theta \rangle| \leq \sup_{\chi \in \hat{G}} |\hat{T}(\chi)| \|\theta\|_{A(G)}$

D'autre part $\langle S_T, \theta \rangle = \langle T, \theta \rangle$.

Donc d'après le théorème de Hahn-Banach S_T se prolonge en une pseudo mesure de $A(G)$ C.Q.F.D.