Publications Mathématiques d'Orsay

# ALGEBRES TENSORIELLES
# ET
# ANALYSE HARMONIQUE

Par

N.Th. VAROPOULOS

année 1967-1968

Notes rédigées par Mesdames CHAUVE et LUST

Mathématiques
(Service des Publications)
Faculté des Sciences
91-ORSAY (France)

Publications Mathématiques d'Orsay

# ALGEBRES TENSORIELLES ET ANALYSE HARMONIQUE

Par

N.Th. VAROPOULOS

année 1967-1968

Notes rédigées par Mesdames CHAUVE et LUST

Mathématiques
(Service des Publications)
Faculté des Sciences
91-ORSAY (France)

## Chapitre I

### I - Produit tensoriel topologique de deux espaces vectoriels topologiques localement convexes [1]

Définition du produit tensoriel de deux espaces vectoriels $E$, $F$ sur un corps $K$.

Théorème : Soient $E$, $F$ deux espaces vectoriels. Il existe un espace vectoriel noté $E \otimes F$ unique à un isomorphisme près, et une application bilinéaire

$\pi : E \times F \longrightarrow E \otimes F$ tels que

$$\forall G \qquad \forall f \in \mathcal{B}(E \times F, G) \qquad \exists \tilde{f} \in \mathcal{L}(E \otimes F, G) \qquad f = \tilde{f} \circ \pi$$

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & G \\ E \otimes F \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

unicité : soient $E \otimes F$ et $\mathcal{E}$ répondant à la question.

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{E} \arrow[dl, shift right, "\tilde{\pi}"'] \\ E \otimes F \arrow[ur, shift right, "\tilde{P}"'] & \end{tikzcd}$$

$$P = \tilde{P} \circ \pi$$

$$\pi = \tilde{\pi} \circ P$$

d'où $\pi = \tilde{\pi} \circ \tilde{P} \circ \pi$

$$\tilde{\pi} \circ \tilde{P} = Id_{E \otimes F}$$

$E \otimes F$ et $\mathcal{E}$ sont donc isomorphes.

existence : Soit $K^{(E \times F)}$ l'espace vectoriel sur $K$ des combinaisons linéaires d'éléments de $E \times F$.

Soit $f$ une application quelconque : $E \times F \longrightarrow G$

$f$ est prolongeable en $\bar{f}$ linéaire : $\bar{f} : K^{(E \times F)} \longrightarrow G$ et ~~ce prolongement~~ est unique :

$$z = \sum_{(x,y) \in E \times F} \alpha_{xy} \, f(x,y) \qquad \alpha_{x,y} = 0 \text{ sauf en un nombre fini de points.}$$

$$\bar{f}(z) = \sum \alpha_{xy} \, f(x,y)$$

$f$ est bilinéaire si et seulement si $\bar{f}$ est nulle sur les éléments de la forme

$(\lambda x + \lambda' x', \mu y + \mu' y') - \lambda\mu(x,y) - \lambda\mu'(x,y') - \lambda'\mu(x',y) - \lambda'\mu'(x',y')$ donc

sur l'espace vectoriel $H$ où s'annulent toutes les formes bilinéaires.

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r] \arrow[dr] & K^{(E \times F)} \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\theta"] & G \\ & K^{(E \times F)}/H \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

il existe $\tilde{f}$ linéaire telle que $\bar{f} = \tilde{f} \circ \theta$. Soit $\pi$ la restriction de $\theta$ à $E \times F$. On a donc $f = \tilde{f} \circ \pi$.

<u>Remarque</u> : Dans $E \otimes F$, $(\lambda x + \mu x') \otimes y = \lambda(x \otimes y) + \mu(x' \otimes y)$

en particulier $x \otimes 0 = 0 \otimes y = 0$

$\forall z \in E \otimes F \qquad z = \sum_i x_i \otimes y_i$ la décomposition n'est pas unique.

<u>Définition du produit tensoriel topologique de deux evT localement convexes.</u> [5]

<u>Théorème</u> : $E$, $F$, $G$ evt localement convexes.

Il existe sur $E \otimes F$ une seule topologie localement convexe telle que pour tout $G$ et toute $f$ bilinéaire continue appartenant à $\mathcal{B}(E \times F, G)$ il existe $\tilde{f}$ linéaire continue appartenant à $\mathcal{L}(E \otimes F, G)$ avec $f = \tilde{f} \circ \pi$. Alors la topologie ainsi définie est la plus fine

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & G \\ E \otimes F \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

pour laquelle $\pi$ soit continue.

<u>Unicité</u> :

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\pi"'] & (E \otimes F)_{\mathcal{T}'} \arrow[dl, shift left, "\tilde{\pi}'"] \\ (E \otimes F)_{\mathcal{T}} \arrow[ur, shift left, "\tilde{\pi}"] & \end{tikzcd}$$

$\pi'$ supposée continue est l'application canonique de $E \times F$ dans $(E \otimes F)_{\mathcal{T}'}$

Donc $\tilde{\pi}'$ est continue c'est-à-dire $\mathcal{T}$ est plus fine que $\mathcal{T}'$. Inversement $\mathcal{T}'$ est plus fine que $\mathcal{T}$ donc $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ .

<u>Existence</u> : $\begin{cases} U \\ V \end{cases}$ parcourant un système fondamental de voisinage de 0 dans $\begin{cases} E \\ F \end{cases}$

$\Gamma(U \otimes V)$ enveloppe convexe équilibrée de $U \otimes V$ parcourt un système fondamental de voisinages de 0 dans $E \otimes F$ et définit une topologie localement convexe dans $E \otimes F$ .

Soit $f$ continue : $\forall W$ (voisinage convexe équilibré de 0 dans $G$)

$\exists \begin{matrix} U \\ V \end{matrix}$ (voisinage de 0 dans $\begin{matrix} E \\ F \end{matrix}$) tels que $\tilde{f}(U \otimes W) = f(U, W) \subset W$

$W$ étant convexe équilibré, $\tilde{f}(\Gamma(U \otimes V)) \subset W$

<u>C'est la topologie la plus fine pour laquelle $\pi$ est continue</u> :

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi"'] & (E \otimes F)_{\mathcal{T}} \\ (E \otimes F)_{\mathcal{T}} \arrow[ur, "\tilde{\pi} = \mathrm{Id}"'] & \end{tikzcd}$$

l'identité $\tilde{\pi}$ est continue donc provient d'une application bilinéaire continue, qui est $\pi$.

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi"'] & (E \otimes F)_{\mathcal{T}'} \\ (E \otimes F)_{\mathcal{T}} \arrow[ur, "\tilde{\pi}"'] & \end{tikzcd}$$

Soit $\mathcal{T}'$ telle que $\pi$ soit continue. Alors $\tilde{\pi}$ est continue $\Leftrightarrow \mathcal{T}'$ est moins fine que $\mathcal{T}$.

<u>Définition</u> : La topologie définie sur $E \otimes F$ est appelée topologie tensorielle projective, et $(E \otimes F)_\tau$ produit tensoriel topologique.

## II - <u>Produit tensoriel de deux espaces vectoriels normés. Définition de la norme projective</u> $(\pi)$

Soient $E$, $F$ des espaces vectoriels normés.

On va définir dans $E \otimes F$ une norme $N$ telle que pour tout espace vectoriel normé $G$ et pour toute application $f$ continue de $\mathcal{B}(E \times F, G)$ on ait $\| f \| = \| \tilde{f} \|$ et $\tilde{f}$ continue.

La topologie définie par cette norme vérifie les propriétés de la topologie projective donc lui est identique. Supposons que $N$ existe. Alors :

$\pi$ <u>a pour norme</u> 1 :

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi"'] & (E \otimes F)_N \\ (E \otimes F)_\tau \arrow[ur, "\tilde{\pi}"'] & \end{tikzcd}$$

$\tilde{\pi}$ étant l'identité, $\| \tilde{\pi} \| = 1$ entraîne $\| \pi \| = 1$ .

<u>unicité de la norme</u> :

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\pi"'] & (E \otimes F)_{N'} \arrow[dl, shift right, "\tilde{\pi}'"'] \\ (E \otimes F)_N \arrow[ur, shift right, "\tilde{\pi}"'] & \end{tikzcd}$$

$\| \pi' \| = 1$ entraîne $\| \tilde{\pi}' \| = 1$ c'est-à-dire $N' \leqslant N$

Inversement $\| \pi \| = \| \tilde{\pi} \| = 1$ entraîne $N \leqslant N'$ d'où $N = N'$

<u>existence</u> :

$$\forall x \in E \otimes F \qquad x = \sum_{\nu} e_{\nu} \otimes f_{\nu} \qquad \text{(nombre fini de termes)}$$

on prend pour norme N

$$\| x \|_{\pi} = \inf_{\text{pour toutes les décompositions de } x} \left( \sum_{\nu} \| e_{\nu} \| \; \| f_{\nu} \| \right)$$

C'est la norme induite par celle de $E \times F$ dans $E \otimes F$ qui a été définie comme espace quotient.

Soient $f$ une application bilinéaire continue, $\tilde{f}$ l'application linéaire sur $E \otimes F$ associée

$$\| \tilde{f}(x) \| = \| \sum_{\nu} \tilde{f}(e_{\nu} \otimes f_{\nu}) \| = \| \sum_{\nu} f(e_{\nu} , f_{\nu}) \| \leqslant \| f \| \sum_{\nu} \| e_{\nu} \| \; \| f_{\nu} \|$$

donc $\| \tilde{f}(x) \| \leqslant \| f \| \; \| x \|_{\pi}$ et $\| \tilde{f} \| \leqslant \| f \|$

D'autre part $\| \tilde{f}(e \otimes f) \|_{\pi} \leqslant \| \tilde{f} \|_{\pi} \leqslant \| \tilde{f} \| \; \| e \| \; \| f \|$

Donc $\| f \| \leqslant \| \tilde{f} \|$ et $\| \tilde{f} \| = \| f \|$.

<u>Définition</u> : Cette norme est appelée norme projective.

Définition du produit tensoriel de deux applications linéaires continues :

Soient $E_i$ , $F_i$ $(i = 1,2)$ des espaces vectoriels normés.

$u_i : E_i \to F_i$ des applications linéaires continues.

$u_1 \otimes u_2$ est définie par :

$$\begin{tikzcd}
E_1 \times E_2 \arrow[r, "u_1 \times u_2"] \arrow[dr, "f"] & F_1 \times F_2 \\
E_1 \otimes E_2 \arrow[r, "\tilde{f} = u_1 \otimes u_2"'] & F_1 \otimes F_2
\end{tikzcd}$$

où $f(x_1 , x_2) = u_1(x_1) \otimes u_2(x_2) = (u_1 \otimes u_2)(x_1 \otimes x_2)$.

Alors $\|f\| = \sup\limits_{\substack{\|x_1\|\leqslant 1\\ \|x_2\|\leqslant 1}} \|u_1(x_1)\otimes u_2(x_2)\| \leqslant \sup\limits_{\|x_1\|\leqslant 1}\|u_1(x_1)\| \sup\limits_{\|x_2\|\leqslant 2}\|u_2(x_2)\|$

d'après la définition de la norme projective.

$$\|f\| \leqslant \|u_1\|\,\|u_2\|$$

f est bilinéaire continue, donc $\tilde{f}$ existe et $\|\tilde{f}\| = \|u_1 \otimes u_2\| = \|f\| \leqslant \|u_1\|\,\|u_2\|$

<u>Remarque</u> : Soient $x \in E$ , $y \in F$ ($E,F$ espaces vectoriels normés). On a $\|x\otimes y\| = \|x\|\,\|y\|$.

- $\|x\otimes y\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ par définition.

- D'après le théorème de Hahn-Banach $\begin{matrix} x' \in E' \\ y' \in F'\end{matrix}$ tels que $\|x'\| = \|y'\| = 1$

et $\langle x',x\rangle = \|x\|$ $\langle y',y\rangle = \|g\|$

$$|\langle x'\otimes y' , x\otimes y\rangle| \leqslant \|x'\otimes y'\|\,\|x\otimes y\| \leqslant \|x\otimes y\|$$

or $|\langle x'\otimes y' , x\otimes y\rangle| = |\langle x',x\rangle\langle y',y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$.

<u>Proposition</u> : $\|u_1\otimes u_2\| = \|u_1\|\,\|u_2\|$.

$$\|u_1\otimes u_2\| = \sup_{\substack{\|x_1\|\leqslant 1\\ \|x_2\|\leqslant 1}} \|u_1(x_1)\otimes u_2(x_2)\| = \|u_1\|\,\|u_2\|.$$

<u>Cas où les espaces sont de Banach.</u>

1) $B_1 \otimes B_2$ muni de la norme projective est complété en $B_1 \hat{\otimes} B_2$ qui est un espace de Banach.

2) Toute application linéaire continue sur $B_1\otimes B_2$ se prolonge en application linéaire continue sur $B_1 \hat{\otimes} B_2$ , de même norme.

3) en particulier $u_1\otimes u_2 : B_1\otimes B_2 \to C_1\otimes C_2$

se prolonge en $u_1 \hat{\otimes} u_2 : B_1\hat{\otimes} B_2 \to C_1\hat{\otimes} C_2$

Proposition : Soient $B_1$, $B_2$ deux espaces de Banach,

tout élément $x$ appartenant à $B_1 \hat{\otimes} B_2$ admet quel que soit $\varepsilon' > 0$ une décomposition $x = \sum_1^{\infty} b_\alpha^1 \otimes b_\alpha^2$ telle que

$$\|x\|_\pi \leq \sum_1^{\infty} \|b_\alpha^1\| \, \|b_\alpha^2\| \leq \|x\|_\pi + \varepsilon'$$

si $x \in B_1 \otimes B_2$ c'est la définition de $\|x\|_\pi$.

Soit $x \in B_1 \hat{\otimes} B_2$.

$\exists\, x_1 \in B_1 \otimes B_2$ $\quad \|x - x_1\| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad$ et $\|x_1\| \leq \|x\|(1+\varepsilon)$

$\exists\, x_2 \in B_1 \otimes B_2$ $\quad \|x - x_1 - x_2\| \leq \frac{\varepsilon}{2^2}$ $\quad$ et $\|x_2\| \leq \|x - x_1\|(1+\varepsilon)$

$\exists\, x_n \in B_1 \otimes B_2$ $\quad \|x - x_1 \ldots - x_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$ $\quad$ et $\|x_n\| \leq \|x - x_1 \ldots - x_{n-1}\|(1+\varepsilon)$

Alors $\|x_2\| \leq \varepsilon$

$$\forall n \qquad \|x_n\| \leq \frac{(1+\varepsilon)\varepsilon}{2^{n-1}} \leq \frac{\varepsilon}{2^{n-2}}$$

La série $(x_n)$ est absolument convergente, donc convergente, vers $x$.

$\forall n$ $\quad x_n$ admet un développement fini : $x_n = \sum_1^{m_n} b_i^1 \otimes b_i^2$ tel que

$$\|x_n\| \leq \sum_1^{m_n} \|b_i^1\| \, \|b_i^2\| \leq \|x_n\|(1+\varepsilon)$$

$$\text{d'où } \; x = x_1 + x_2 + \ldots$$

$$= \sum_1^{m_1} + \sum_1^{m_2} + \ldots$$

$$\sum_1^{\infty} \|x_n\| \leq \sum_1^{m_1} \|b_i^1\| \, \|b_i^2\| + \sum_1^{m_2} + \ldots \leq (1+\varepsilon)\Big(\sum_1^{\infty} \|x_n\|\Big) \in (1+\varepsilon)(\|x_1\| + 2\varepsilon)$$

$$\leq (1+\varepsilon)\|x\|\Big(1 + \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{\|x\|}\Big) \leq \|x\| \, [1+\varepsilon'] \quad \text{en posant } \; \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{3 + \frac{2}{\|x\|}}.$$

## III - Produit tensoriel de deux algèbres

Soient $E$, $F$ deux algèbres.

$E \otimes F$ a été défini comme espace vectoriel. Il reste à y définir une multiplication. La multiplication est une application bilinéaire de $\left(E \otimes F \,,\; E \otimes F\right)$ dans $E \otimes F$. Il suffit de la définir sur les éléments décomposables.

$\underline{(x \otimes y)(x' \otimes y') = xx' \otimes yy'}$

on vérifie la bilinéarité et l'associativité.

Exemple : $\mathcal{M}_p(K) \otimes \mathcal{M}_q(K) \approx \mathcal{M}_{pq}(K)$ matrices d'ordre $p$ sur $K$.

Cas de deux algèbres de Banach :

$x$ et $x' \in B_1 \hat{\otimes} B_2$ $\qquad x = \sum_1^\infty b_j^1 \otimes b_j^2$ avec $\sum \|b_j^1\| \, \|b_j^2\| < \infty$

$\qquad x' = \sum_1^\infty b'^1_j \otimes b'^2_j$

Donc $xx'$ admet pour décomposition $\sum_1^\infty (b_j^1 \; b'^1_j) \otimes (b_j^2 \quad b'^2_j)$

$= (\sum_1^\infty b_j^1 \otimes b_j^2) \quad (\sum_1^\infty b'^1_j \otimes b'^2_j)$

$\underline{\|xx'\|_\pi \leq \|x\| \; \|x'\|}$

<u>Exemple</u> 1 $K_1$, $K_2$ compacts

$\mathcal{C}(K_i)$ muni de la topologie de la convergence uniforme est une algèbre de Banach.

On définit $V(K) = \mathcal{C}(K_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K_2)$.

<u>Exemple</u> 2 Soient $G_1$ et $G_2$ des groupes localement compacts.

<u>Théorème</u> : $L^1(G_1) \hat{\otimes} L^1(G_2)$ est isométriquement isomorphe à $L^1(G_1 \times G_2)$.

[cf. séminaire Schwartz 1953-54. Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques].

<u>Exemple</u> 3 Soient $G_1$ et $G_2$ des groupes localement compacts.

On définit les algèbres de groupes $A(G_i) = \mathcal{F} L^1(\hat{G}_i)$ ; le dual $\hat{G}_i$ de $G_i$ étant aussi localement compact, $L^1(\hat{G}_1) \hat{\otimes} L^1(\hat{G}_2) = L^1(\hat{G}_1 \times \hat{G}_2)$

D'où $A(G_1) \hat{\otimes} A(G_2) = A(G_1 \times G_2)$ car $\|\mathcal{F} f\|_{A(G)} = \|f\|_{L^1(G)}$ (cf chap III).

Propriétés des produits tensoriels d'algèbres de Banach.

Théorème : Soient $B_1$ $B_2$ deux algèbres de Banach.

$$\mathfrak{M}_{B_1 \hat{\otimes} B_2} = \mathfrak{M}_{B_1} \times \mathfrak{M}_{B_2}$$

Soient $M_1$ un caractère de $B_1$

$M_2$ $B_2$

$M_1 \times M_2$ est une forme bilinéaire continue sur $B_1 \times B_2$ donc définit $\tilde{M} = M_1 \otimes M_2$ élément du dual de $B_1 \hat{\otimes} B_2$

$M_1 \times M_2$ est une forme multiplicative sur $B_1 \times B_2$ donc $\tilde{M}$ l'est sur $B_1 \otimes B_2$ et par continuité sur $B_1 \hat{\otimes} B_2$, c'est-à-dire $\tilde{M} \in \mathfrak{M}_{B_1 \hat{\otimes} B_2}$

$$\mathfrak{M}_{B_1} \times \mathfrak{M}_{B_2} \subset \mathfrak{M}_{B_1 \hat{\otimes} B_2}$$

Réciproquement soit $M \in \mathfrak{M}_{B_1 \hat{\otimes} B_2}$

on pose $M_1(b_1) = M(b_1 \otimes 1_{B_2})$ $\qquad M_1 \in \mathfrak{M}_{B_1}$

et $M_2(b_2) = M(1_{B_1} \otimes b_2)$ $\qquad M_2 \in \mathfrak{M}_{B_2}$

$$M(b_1 \otimes b_2) = M_1(b_1)\, M_2(b_2)$$

$$\mathfrak{M}_{B_1} \times \mathfrak{M}_{B_2} \supset \mathfrak{M}_{B_1 \hat{\otimes} B_2}$$

Définition : Une algèbre de Banach $B$ est régulière si $\forall K \subset \mathfrak{M}_B$ $K$ fermé

$\forall M \in \mathfrak{M}_B - K$

$\exists b \in B$ tel que $\left.\begin{array}{l}\hat{b}(K) = 0 \\ \hat{b}(M) \neq 0\end{array}\right\}$ où $\hat{b}$ est l'image de $b$ par l'homomorphisme de Gelfand.

<u>Théorème</u> : Si $B_1$ et $B_2$ sont des algèbres de Banach régulières, $B_1 \hat{\otimes} B_2$ est régulière.

Soit $K \subset \mathfrak{M}_{B_1 \hat{\otimes} B_2} = \mathfrak{M}_{B_1} \times \mathfrak{M}_{B_2}$ $K$ compact

Les projections de $K$ sur $\mathfrak{M}_{B_1}$ et $\mathfrak{M}_{B_2}$ sont des compacts $K_1$ et $K_2$.

$M \notin K \qquad M = (M_1 , M_2)$

$\exists b_i \in B_i \qquad \hat{b}_i(M_i) \neq 0 \qquad \hat{b}_i(K_i) = 0 \qquad i = 1,2$

$\widehat{(b_1 \otimes b_2)} = \hat{b}_1 \, \hat{b}_2$ vérifie $\hat{b}_1 \, \hat{b}_2(K) = 0$

$\hat{b}_1 \, \hat{b}_2(M) \neq 0$ .

IV - <u>Définition de la norme injective $\varepsilon$ dans un produit tensoriel d'espaces vectoriels normés</u>

- d'après la construction de $E \otimes F$ il y a identité entre les formes bilinéaires continues sur $E \times F$ et les formes linéaires continues sur $E \otimes F$ .

- (cf. Bourbaki evt chap. IV p. 113). Soit $E$ un espace vectoriel normé, $E'$ son dual $\forall x \in E \qquad \|x\| = \sup\limits_{\substack{x' \in E' \\ \|x'\| \leq 1}} |\langle x', x \rangle|$

- Dans $E \otimes F$ on a donc

$$\|x\|_\pi = \sup_{\substack{B \in \mathcal{B}(E \times F, \mathbb{C}) \\ \|\tilde{B}\| = \|B\| \leq 1}} |\tilde{B}(x)|$$

---

- Soient $f_1 \in E'$ $\quad f_2 \in F'$ $\quad$ l'application $f : (x,y) \longrightarrow f_1(x) \times f_2(y)$

$E \times F \longrightarrow \mathbb{C}$

est une forme bilinéaire continue, associée à $\tilde{f} = f_1 \otimes f_2$

c'est-à-dire $\mathcal{B}(E \times F, \mathbb{C}) \simeq (E \otimes F)' \supset E' \otimes F'$

Définition : Dans $E \otimes F$ on définit la norme

$$\underline{\|x\|_\varepsilon} = \sup_{\substack{f_i \in E_i' \\ \|f_i\| \leq 1}} |f_1 \otimes f_2(x)| \leq \underline{\sup^*_{\substack{f_1 \otimes f_2 \in E_1' \otimes E_2' \\ \|f_1 \otimes f_2\| \leq 1}}} |f_1 \otimes f_2(x)|$$

Donc $\underline{\|x\|_\varepsilon \leq \|x\|_\pi}$

Cas où les espaces vectoriels sont de Banach :

On définit le complété de $E \otimes F$ pour la norme injective : noté~~e~~ $\underline{E \hat{\otimes} F}$

Proposition : Soient $E_i$, $F_i$ des espaces vectoriels normés $(i = 1,2)$ et $v_i : E_i \longrightarrow F_i$ des applications linéaires continues. On a défini $v_1 \otimes v_2 : E_1 \otimes E_2 \longrightarrow F_1 \otimes F_2$. Alors $v_1 \otimes v_2$ est continue pour la topologie injective. Elle se prolonge donc en application linéaire continue de $E_1 \hat{\otimes} E_2$ dans $F_1 \hat{\otimes} F_2$ et $\underline{\|v_1 \otimes v_2\|_\varepsilon = \|v_1\| \, \|v_2\|}$.

Démonstration :
1º
$$\|v_1 \otimes v_2\|_\varepsilon = \sup_{\substack{x \in E_1 \otimes E_2 \\ \|x\|_\varepsilon \leq 1}} \|v_1 \otimes v_2(x)\|_\varepsilon$$

$$= \sup_{\substack{\|x\|_\varepsilon \leq 1 \\ y_i' \in F_i' \quad \|y_i'\| \leq 1}} |< v_1 \otimes v_2(x) , y_1' \otimes y_2' >| = \sup |< x , {}^T v_1(y_1') \otimes {}^T v_2(y_2') >|$$

$$\|{}^T v_1(y_1')\| \leq \|{}^T v_1\| \, \|y_1'\| \leq \|{}^T v_1\| = \|v_1\|$$

Donc
$$\|v_1 \otimes v_2(x)\|_\varepsilon \leq \|v_1\| \, \|v_2\| \sup_{x_i' \in E_i' \, \|x_i'\| \leq 1} |< x , x_1' \otimes x_2' >| = \|v_1\| \, \|v_2\| \, \|x\|_\varepsilon$$

$$\|v_1 \otimes v_2\|_\varepsilon \leq \|v_1\| \, \|v_2\|$$

2º D'autre part
$$\|v_1 \otimes v_2\|_\varepsilon \geq \sup_{\|x_i\|_\varepsilon \leq 1} \|v_1 \otimes v_2 (x_1 \otimes x_2)\| = \sup \|v_1(x_1) \otimes v_2(x_2)\|$$

$$= \sup_{\|x_1\|_\varepsilon \leq 1} \|v_1(x_1)\| \sup_{\|x_2\|_\varepsilon \leq 1} \|v_2(x_2)\| = \|v_1\| \, \|v_2\|$$

## V - La propriété d'approximation dans les espaces de Banach

Soient $E$ et $F$ des espaces de Banach.

Problème : Sur $E \otimes F$ la topologie $\pi$ est plus fine que la topologie $\varepsilon$.

L'application identique $i \quad (E \otimes F)_\pi \longrightarrow (E \otimes F)_\varepsilon$ est donc continue. Elle se prolonge en application continue

$$E \hat{\otimes} F \xrightarrow{i} E \hat{\hat{\otimes}} F$$

Cette application est-elle injective ?

$(P_1)$ On dira que le Banach $E$ vérifie $(P_1)$ si quel que soit le Banach $F$, $i$ est injective : $E \hat{\otimes} F \xrightarrow{i} E \hat{\hat{\otimes}} F$

La topologie $\pi$ dans $E \hat{\otimes} F$ est la topologie induite par le dual $(E \hat{\otimes} F)'$

La topologie $\varepsilon$ est induite par $E' \underset{\pi}{\otimes} F'$.

$$\left.\begin{array}{l} E \hat{\otimes} F \xrightarrow{i} E \hat{\hat{\otimes}} F \\ (E \hat{\otimes} F)' \xleftarrow{{}^t i} E' \underset{\pi}{\otimes} F' \end{array}\right\} \begin{array}{l} i \text{ étant linéaire continue pour les topologies } \pi \text{ et } \varepsilon, \\ \text{on a } \operatorname{Im}({}^t i) = (\operatorname{Ker} i)^0 \end{array}$$ [cf. Bourbaki evt. chap. II p. 97]

donc $(P_1) \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} i = \{0\} \Longleftrightarrow (\ker i)^0 = (E \hat{\otimes} F)' \Longleftrightarrow \overline{E' \otimes F'} = (E \hat{\otimes} F)'$

$(P_1)$ équivaut à $(P_2)$ :

$(P_2)$ Pour la topologie faible de $(E \hat{\otimes} F)'$, $(E \hat{\otimes} F)' = \overline{E' \otimes F'}$

Remarque : on peut voir directement que $(P_2)$ entraîne $(P_1)$ :

Soit $x \neq \{0\} \qquad x \in E \hat{\otimes} F$

$$\Longleftrightarrow \|x\|_\pi \neq 0 \Longleftrightarrow \exists \tilde{B} \in (E \hat{\otimes} F)' \qquad \tilde{B}(x) \neq 0$$

d'après $(P_2)$ $\exists e \in E' \otimes F'$, $e = \sum_{i=1}^{i=n} e_j \otimes f_j \qquad e(x) \neq 0$

donc $\|x\|_\varepsilon \neq 0$ c'est-à-dire $i(x) \neq 0$.

<u>Définition</u> : Un espace de Banach $E$ vérifie la propriété d'approximation s'il vérifie $(P_1)$ ou $(P_2)$ pour tout espace de Banach $F$.

<u>Définition</u> : Un Banach $E$ admet une base de Schauder s'il existe une famille

$(P_3)$ $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'endomorphismes continus de $E$, $A$ étant une famille filtrante, telle que :

(i) $\sup\limits_{\alpha} \|T_\alpha\| < \infty$

(ii) $\forall_\alpha$, $T_\alpha$ est de rang fini, c'est-à-dire $\dim T_\alpha(E) < \infty$

(iii) $(T_\alpha)$ converge faiblement vers $Id_E$.

<u>Théorème : Si un Banach $E$ admet une base de Schauder, il vérifie la propriété d'approximation.</u>

Soient $F$ un Banach et $B \in Bil(E \times F)$

On définit une famille $(B_\alpha)$ : $B_\alpha(x,y) = B(T_\alpha(x),y)$; d'après (ii)

$$T_\alpha(x) = \sum_1^n x_i \; e_i$$

$$B(T_\alpha(x),y) = \sum_1^n x_i \; B(e_i \;,y) = \sum_1^n e_i^*(T_\alpha(x)) \times B(e_i \;,y)$$

On pose $B(e_i \;,y) = B_i(y)$ $\quad B_i \in F'$

$$\text{et} \quad \tilde{B}_\alpha = \sum_1^n e_i^* \otimes B_i \in E' \otimes F'$$

d'après (iii) $\forall x \in E \quad T_\alpha(x) \longrightarrow x$

$B$ étant continue, $B_\alpha(x,y) \longrightarrow B(x,y) \qquad \forall x,y \in E \times F$

$\forall z \in E \otimes F \qquad \tilde{B}_\alpha(z) \longrightarrow \tilde{B}(z)$

donc $\forall z \in E \hat{\otimes} F \qquad \tilde{B}_\alpha(z) \longrightarrow \tilde{B}(z) \qquad \tilde{B} \in (E \otimes F)'$

ce qui démontre (P ).

<u>Exemple</u> :

Soient deux compacts $K_1$ , $K_2$ .

$\mathcal{C}(K_1) \otimes \mathcal{C}(K_2)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K_1 \times K_2)$.

<u>Proposition</u> : <u>Dans $\mathcal{C}(K_1) \otimes \mathcal{C}(K_2)$ donc dans $\mathcal{C}(K_1) \hat{\hat{\otimes}} \mathcal{C}(K_2)$ la norme injective est égale à la norme de la convergence uniforme dans $\mathcal{C}(K_1 \times K_2)$.</u>

Soit $u \in \mathcal{C}(K_1) \otimes \mathcal{C}(K_2)$ (on note $\mathfrak{M}_{\mathcal{C}(K)}$ = spectre de $\mathcal{C}(K)$).

$$\|u\|_\infty = \sup_{\chi_i \in \mathfrak{M}_{\mathcal{C}(K_i)}} |\langle u, \chi_1 \otimes \chi_2\rangle| \leqslant \|u\|_\varepsilon = \sup_{\substack{\|\mu\| \leqslant 1 \\ \mu_i \in \mathcal{C}(K_i)}} |\langle u, \mu_1 \otimes \mu_2\rangle| = \sup_{\chi_i \in \mathfrak{M}(K_i)} |\langle u, \chi_1 \otimes \chi_2\rangle|$$

car la boule unité de $\mathcal{C}(K_i)'$ est l'enveloppe convexe fermée faible des caractères de $\mathcal{C}(K_i)$. (Théorème de Krein Millman Bourbaki evt II § 7 n° 1)

$\mathcal{C}(K_1) \hat{\hat{\otimes}} \mathcal{C}(K_2)$ est donc le complété de $\mathcal{C}(K_1) \otimes \mathcal{C}(K_2)$ pour la norme uniforme et s'identifie à $\mathcal{C}(K_1 \times K_2)$. (Théorème de Stone Weierstrass).

<u>Proposition</u> : <u>$\mathcal{C}(K)$ est un espace de Banach possédant une base de Schauder.</u>

Toute fonction continue $\varphi$ sur un compact $K$ est uniformément continue et il existe un recouvrement ouvert fini de $K$ tel que l'oscillation de $\varphi$ sur chaque ouvert soit arbitrairement petite. Soit $(\alpha_i)$ une partition de l'unité associée à un tel recouvrement

$$u_\alpha : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K)$$

$$\varphi \rightsquigarrow \sum_i \varphi(\xi_i)\alpha_i \qquad \xi_i \text{ fixé } \in \operatorname{supp} \alpha_i$$

Les $\{u_\alpha\}$ associés à une famille filtrante de recouvrements ouverts finis forment une base de Schauder

L'application identique $\mathcal{C}(K_1)\hat{\otimes}\mathcal{C}(K_2) \longrightarrow \mathcal{C}(K_1)\hat{\hat{\otimes}}\mathcal{C}(K_2)$ est donc injective, ainsi que $\mathcal{C}(K_1)\hat{\otimes}\mathcal{C}(K_2) \longrightarrow \mathcal{C}(K_1 \times K_2)$.

<u>Définition</u> : Une algèbre de Banach $B$ est semi-simple si l'homomorphisme de Gelfand y est injectif c'est-à-dire si :

$$\forall x \in B \quad x \neq 0 \quad \exists \chi \in \mathfrak{M}_B \quad \chi(x) \neq 0 .$$

<u>Théorème</u> : Soient $B_1$ $B_2$ deux algèbres de Banach semi-simples dont l'une vérifie la propriété d'approximation $(P_2)$. $B_1 \hat{\otimes} B_2$ est une algèbre semi-simple.

Soit $x \in B_1\hat{\otimes} B_2 \quad x \neq 0 \quad x = \sum_\alpha b_\alpha^1 \otimes b_\alpha^2$

$\Longleftrightarrow \|x\|_\pi \neq 0$

$\Longleftrightarrow \exists B \in \mathrm{Bil}(B_1 \times B_2) \quad \tilde{B}(x) \neq 0$

D'après la propriété d'approximation $\tilde{B}$ est limite d'éléments de $B_1' \otimes B_2'$ de la forme $\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \beta_\nu^1 \otimes \beta_\nu^2 \quad \beta_\nu^1 \in B_1' \quad \beta_\nu^2 \in B_2'$ donc $\exists \beta_\nu^1 \ \exists \beta_\nu^2 \quad \beta_\nu^1 \otimes \beta_\nu^2\,(x) \neq 0$.

à $\beta_\nu^1$ on associe $\bar{\beta}_\nu^1 : B_1 \times B_2 \longrightarrow B_2$

$$b_1 , b_2 \rightsquigarrow \beta_\nu^1(b_1) b_2$$

$\bar{\beta}_\nu^1(x) = \sum_\alpha \beta_\nu^1(b_\alpha^1) b_\alpha^2$ est $\neq 0$ car $\beta_\nu^2\left[\bar{\beta}_\nu^1(x)\right] = \beta_\nu^1 \otimes \beta_\nu^2(x) \neq 0$

$B_2$ étant semi-simple, $\exists \chi_2 \in \mathfrak{M}_{B_2} \quad \chi_2\left[\bar{\beta}_\nu^1(x)\right] \neq 0$

$\chi_2\left[\bar{\beta}_\nu^1(x)\right] = \sum_\alpha \beta_\nu^1(b_\alpha^1)\chi_2(b_\alpha^2) = \langle \beta_\nu^1 \otimes \chi_2 , x \rangle \neq 0$

en faisant le même raisonnement pour $\beta_\nu^2$ on obtient $\langle \chi_1 \otimes \chi_2 , x \rangle \neq 0$.

Remarque : $\mathscr{C}(K)$ est semi-simple et admet une base de Schauder. $\mathscr{C}(K_1) \hat{\otimes} \mathscr{C}(K_2)$ est donc semi-simple. La transformation de Gelfand est l'injection canonique dans $\mathscr{C}(K_1 \times K_2)$.

## VI - Le problème de synthèse

Soit $R$ une algèbre de Banach régulière semi-simple.

Soit $E$ un compact de son spectre $\mathfrak{M}_R$.

Définitions :
$$I(E) = \{ r \in R \mid \hat{r}^{-1}(0) \supset E \} = \{ r \in R \mid \forall \chi \in E ,\ \chi(r) = 0 \}$$
$$= \ker E .$$

$I(E)$ est une intersection d'idéaux maximaux donc est un idéal fermé de $R$.

$$I_0(E) = \{ r \in R \mid \hat{r}^{-1}(0) \text{ est un voisinage de } E \}.$$

On considère l'ensemble des idéaux $\mathcal{J}$ de $R$ tels que hull $\mathcal{J} = E$ (hull $\mathcal{J}$ est l'ensemble des caractères de $R$ dont le noyau contient $\mathcal{J}$). On démontre [cf. [11] Varopoulos - Algèbres de Banach, algèbres de groupes] que $I(E)$ en est le plus grand élément, $I_0(E)$ le plus petit.

$$\text{soit } J(E) = \overline{I_0(E)}$$

Définition : $E$ est dit de synthèse si $J(E) = I(E)$.

Lemme : Soient $B_1$, $B_2$ deux espaces de Banach ayant une base de Schauder, $F_1$, $F_2$ deux sous espaces fermés de $B_1$ et $B_2$ tels que $B_1/F_1$, $B_2/F_2$ aient une base de Schauder,

Soit $p_i : B_i \longrightarrow B_i/F_i$ la projection canonique ;

$$p_1 \hat{\otimes} p_2 : B_1 \hat{\otimes} B_2 \longrightarrow B_1/F_1 \hat{\otimes} B_2/F_2$$

Alors $\qquad \ker p_1 \hat{\otimes} p_2 = \overline{B_1 \otimes F_2 + F_1 \otimes B_2}$

Soit $\tilde{p} = Id_{B_1} \hat{\otimes} p_2 : B_1 \hat{\otimes} B_2 \longrightarrow B_1 \hat{\otimes} B_2/F_2$

on a $B_1 \otimes F_2 \subset \ker \tilde{p}$

Soit $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ une base de Schauder de $B_1$

On définit $U_\alpha = T_\alpha \hat{\otimes} Id_{B_2}$

(i) $\sup_\alpha \|T_\alpha\| < \infty$

(ii) $\dim T_\alpha(B_1) < \infty$

(iii) $T_\alpha \longrightarrow Id_{B_1}$ faiblement

D'après le théorème de Banach-Steinhaus, (i) et (iii) entraînent :

$$T_\alpha \longrightarrow Id_{B_1} \quad \text{pour la convergence en norme.}$$

Donc $\quad U_\alpha \longrightarrow Id(B_1 \hat{\otimes} B_2)$ pour la convergence en norme

car $\|T_\alpha \hat{\otimes} Id_{B_2} - Id_{B_1} \hat{\otimes} Id_{B_2}\| \leq \|T_\alpha - Id_{B_1}\| \; \|Id_{B_2}\|$

Soient $x \in \ker \tilde{p}$ et $x_\alpha = U_\alpha(x)$ : $(x_\alpha) \longrightarrow x$

D'après (ii) $x_\alpha = \sum_1^n b_i^1 \otimes b_i^2$

$\tilde{p}(x_\alpha) = \tilde{p} \circ U_\alpha(x) = U_\alpha \circ \tilde{p}(x) = 0$ donc $x_\alpha \in B_1 \otimes F_2$

D'où $\overline{B_1 \otimes F_2} = \ker \tilde{p}$.

En appliquant deux fois ce résultat on obtient le lemme.

<u>Théorème</u> : Soient $R_1$, $R_2$ deux algèbres de Banach régulières, semi-simples, unitaires ; $E_1$ et $E_2$ deux compacts de synthèse de $\mathfrak{M}_{R_1}$ et $\mathfrak{M}_{R_2}$. On suppose que $R_i$ et $R_i/_{I(E_i)}$ ont des bases de Schauder.

Alors $E = E_1 \times E_2$ est un compact de synthèse de l'algèbre $R = R_1 \hat{\otimes} R_2$.

– $R_1 \hat{\otimes} R_2$ est régulière et semi-simple, son spectre est $\mathfrak{M}_{R_1} \times \mathfrak{M}_{R_2}$. On peut y définir des ensembles de synthèse.

Soit $\mathcal{H} = R_1 \otimes I(E_2) + I(E_1) \otimes R_2 \subset R_1 \hat{\otimes} R_2$.

hull $\mathcal{H} = \left\{(\chi_1, \chi_2) \mid \chi_1(R_1)\chi_2(I(E_2)) + \chi_1(I(E_1))\chi_2(R_2) = 0\right\} = E_1 \times E_2 = E$

donc $\overline{\mathcal{K}} \supset J(E)$ .

$$\mathcal{K} = R_1 \otimes J(E_2) + J(E_1) \otimes R_1 \qquad \text{(car } E_1 \text{ et } E_2 \text{ sont de synthese)}$$

$$\overline{\mathcal{K}} = \overline{R_1 \otimes I_o(E_2) + I_o(E_1) \otimes R_2}$$

si $r = p_1 \otimes r_2 + r_1 \otimes p_2 \in R_1 \otimes I_o(E_2) + I_o(E_1) \otimes R_2$ ,

$\hat{r}^{-1}(0) \supset \mathcal{V}(E_1) \times \mathcal{V}(E_2)$ c'est-à-dire est un voisinage de E

D'où $\overline{\mathcal{K}} \subset J(E)$ et finalement $\overline{\mathcal{K}} = J(E)$ .

D'après le lemme, $J(E) = \ker p_1 \hat{\otimes} p_2$ $(p_i : R_i \longrightarrow R_i/_{I(E_i)})$

Donc $R/_{J(E)}$ s'identifie à $R_1/_{I(E_1)} \hat{\otimes} R_2/_{I(E_2)}$

L'algèbre $R_i/_{I(E_i)}$ a pour spectre $E_i$ et est semi-simple :

Soit $r \in R_i/_{I(E_i)}$ $\hat{r}(E) = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in E \ \hat{r}(\chi) = 0 \Longleftrightarrow r = 0$

Donc $R_1/_{I(E_1)} \hat{\otimes} R_2/_{I(E_2)} = R/_{J(E)}$ est semi-simple. Son spectre est E .

Soit $r \in R$ , $\dot{r} \in R_{/J}$ .

$$r \in I(E) \Longleftrightarrow \hat{r}(e) = 0 \ \ \forall e \in E \Longleftrightarrow \hat{\dot{r}}(e) = 0 \ \ \forall e \in E \Longleftrightarrow \dot{r} = 0 \Longleftrightarrow r \in J(E)$$

E est de synthèse

Chapitre II

## Morphismes d'algèbres tensorielles

Problème : Soient $K_i$ et $K'_i$ des espaces topologiques $i = 1,2$, des applications $p_i$ continues : $K_i \to K'_i$ (on peut toujours les supposer surjectives) considérons $\check{p}_i : \mathcal{C}(K'_i) \to \mathcal{C}(K_i)$ et $V(K) = \mathcal{C}(K_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K_2)$

$K = K_1 \times K_2$

$\check{p} = \check{p}_1 \otimes \check{p}_2 \; V(K') \to V(K)$

Si $p_i$ $i = 1,2$ est surjective alors $\check{p}_i$ est une isométrie

Le problème qui se pose : p est-il une isométrie ?

### I - Généralités sur les espaces de Banach : Notion d'inverse approximée

Soient B et C deux banach et $T \in (B,C)$

1. Définition :

T a un inverse approximé si on peut trouver une famille $T_{\alpha}$, $\alpha \in A$ : $\mathcal{L}(C,B)$ telle que :

a) $\forall_{\alpha} \in A \; \|T_{\alpha}\| \leqslant 1$

b) $T_{\alpha} \circ T \to I\delta(B)$ soit $\forall x \in B \; T_{\alpha} \circ T(x) \underset{\alpha \to \infty}{\to} x$

2. Remarque (1) :

Si $\|T\| \leqslant 1$ alors a) et b) entraînent que $\|T\| = 1$ .

Donc les fonctions $T$ pour lesquelles on parlera d'inverse approximée ne diminuent pas la norme.

<u>Exemple</u> : Considérons l'injection canonique $T$ de $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ espace des fonctions continues sur le tore dans $L^{\infty}(\mathbb{T})$ espace des classes de fonctions complexes mesurables (au sens de Haar) et bornées muni de la norme

$$\|f\|_{\infty} = \operatorname{Sup} |f(s)|$$

en mesure

<u>Théorème</u> : <u>Il n'existe pas</u> $S$ <u>telle que</u> $S_o T = I\mathscr{S}$ (en effet $T$ n'est pas bijective). <u>Cependant, il existe une inverse approximée définie par</u>

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{T_n} : L^{\infty}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathscr{C}(\mathbb{T}) \qquad T_n(f) = f * e_n$$

$e_n$ $n \in \mathbb{N}$ <u>étant une unité approximative de</u> $L^{\infty}(\mathbb{T})$.

Notons que puisque $e_n$ est continue $T_n(f)$ l'est aussi

<u>Démonstration</u> :

$T_n(f) = f * e_n$ donc pour tout $x \in \mathbb{T}$ $[T_n(f)](x) = \int_{\mathbb{T}} f(x-t)e_n(t)dt$

$$\text{donc} \quad |T_n(f)(x)| \leq \|f\|_{L^{\infty}(\mathbb{T})} \times \int_{\mathbb{T}} e_n(t)dt$$

et puisque $\int_{\mathbb{T}} e_n(t)dt$ est égal à 1 par définition d'une unité approximative

$$\text{on a} \quad \|T_n(f)\| \leq \|f\| \quad \text{soit} \quad \|T_n\| \leq 1$$

D'autre part $T_n \circ T \longrightarrow \mathrm{Id}\ \mathscr{C}(\mathbb{T})$ :

$A(x) = [T_n \circ T(f)](x) - f(x) = \int_{\mathbb{T}} f(x-t)e_n(t)dt - f(x) \int_{\mathbb{T}} e_n(t)dt$

Alors $|A(x)| = |\int_{\mathbb{T}} [f(x-t)-f(x)]\, e_n(t)dt|$

Or $f$ est uniformément continue sur $\mathbb{T}$ donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \text{ tel que } \|t\|_{\mathbb{T}} < \eta \implies |f(x-t)-f(x)| < \varepsilon$$

$$|A(x)| \leqslant \int_{\mathbb{T}} \varepsilon\, e_n(t)dt \quad |A(x)| \leqslant \varepsilon$$

D'où $T_n \circ T(f) \longrightarrow f$

Ce résultat est valable pour un groupe compact quelconque (même démonstration)

3. Remarque (2)

Soit $\pi_i : B_i \longrightarrow H_i \quad i = 1,2 \quad B_i, H_i$ Banach $\pi_i \in \mathscr{L}(B_i, H_i)$.

on suppose que $\pi_i$ possède un inverse approximé $\pi_i^{(\alpha_i)}$ avec $\alpha_i \in A_i$ et que $\|\pi_i\| \leqslant 1$.

D'après la remarque (1) alors $\pi_i$ est une isométrie

Donc $B_i$ est identifié à un sous espace de $H_i$

Considérons $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2 : B_1 \otimes B_2 \longrightarrow H_1 \otimes H_2$

Alors $\|\pi_1 \otimes \pi_2\| \leqslant \|\pi_1\| \times \|\pi_2\|$

Donc $\pi$ vérifie $\|\pi\| \leqslant 1$

D'autre part $\pi$ possède un inverse approximé : il suffit de considérer la famille $\pi_\alpha = \pi_1^{(\alpha_1)} \otimes \pi_2^{(\alpha_2)}$ où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in A_1 \times A_2$

Donc $\pi$ est une isométrie

Application aux algèbres tensorielles : soient $G_1$ et $G_2$ deux groupes compacts $\mathscr{C}(G_1) \hat{\otimes} \mathscr{C}(G_2) \xrightarrow{I} L^\infty(G_1) \hat{\otimes} L^\infty(G_2)$

L'injection canonique I est une isométrie (en effet $\pi_1$ et $\pi_2$ ont des inverses approximés comme dans la remarque (1))

4. <u>Remarque</u> (3) :

On peut noter qu'on n'a pas vraiment besoin de la "struture de groupe" en effet

Soit $K = I = [0,1]$

$[0,1]$ ne peut pas être muni d'une structure de groupe

$[0,1]$ peut être plongé dans le groupe $\mathbb{R}$

Considérons $T : \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathcal{B}([0,1])$

où $\mathcal{B}([0,1])$ désigne l'espace des fonctions boréliennes bornées sur $[0,1]$ muni de la norme $\|f\| = \operatorname{Sup} |f(x)|$.

On rappelle qu'une fonction $f : E \longrightarrow E'$ $E$ et $E'$ métrisables est dite borélienne si pour tout fermé $F'$ de $E'$ $f^{-1}(F')$ est un borélien de $E$

$T$ : injection canonique de $\mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathcal{B}([0,1])$

$T$ n'admet pas d'inverse et $\|T\| = 1$

Cependant $T$ possède un inverse approximé

On va poser $T_n(f) = \tilde{f} * e_n$ où $e_n$ est une unité approximative et $\tilde{f}$ un prolongement de $f$ borélienne sur $[0,1]$ qui nous fasse sortir de l'intervalle

$\tilde{f}$ pourra être par exemple un prolongement par symétrie.

On pose alors $T_n(f) = \tilde{f} * e_n$ au lieu de $f * e_n$ afin que $T_n(f)$ soit bien une fonction continue sur $[0,1]$ et non simplement continue sur un intervalle plus petit.

$\tilde{f}$ est bornée : $\operatorname{Sup} |\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{B}([0,1])}$ et borélienne sur un intervalle contenant $[0,1]$

Par un calcul analogue à celui de la remarque (1) on montre que

$\|T_n\| \leq 1$ et que $T_n \circ T(f) \longrightarrow f$ pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1])$

En conséquence : d'après la remarque (2) si $T$ est l'injection canonique de $\mathcal{C}[0,1]$ dans $\mathcal{B}[0,1]$ Alors $\|T\| \leq 1$ et $T$ possède un inverse approximé

D'où $T \otimes T : \mathcal{C}[0,1] \otimes \mathcal{C}[0,1] \longrightarrow \mathcal{B}[0,1] \otimes \mathcal{B}[0,1]$ possède un inverse approximé et est de norme $\leq 1$

Donc $T \otimes T$ réalise un plongement isométrique de $\mathcal{C}[0,1] \otimes \mathcal{C}[0,1]$ dans $\mathcal{B}[0,1] \otimes \mathcal{B}[0,1]$

## II - <u>Etude du problème posé</u>

Soient $K_i$ $i = 1,2$ 2 compacts métrisables

$G_i$ $i = 1,2$ 2 groupes compacts métrisables

$p_i : K_i \longrightarrow G_i$ une surjection continue $\check{p}_i : \mathcal{C}(G_i) \longrightarrow \mathcal{C}(K_i)$

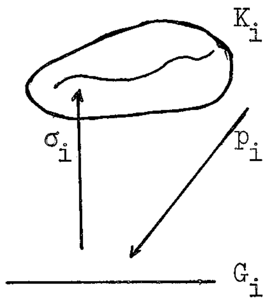
$\check{p}_i(f) = f \circ p_i$

Considérons $\check{p} = \check{p}_1 \otimes \check{p}_2 : \mathcal{C}(G_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(G_2) \longrightarrow \mathcal{C}(K_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K_2)$

<u>Théorème</u> $\left[\ \check{p}\right.$ est un morphisme isométrique d'algèbres de Banach

<u>en effet</u> : $\check{p}$ est trivialement un morphisme d'algèbres

Montrons que $\check{p}$ est une isométrie : Ici $K_i$ et $G_i$ sont des espaces métrisables. Dans ces conditions, on sait [3] qu'il existe un ensemble borélien dans $K_i$ qui rencontre chaque classe d'équivalence (associée à la surjection $p_i$) en un point et un seul.




D'où la définition de la section borélienne $\sigma_i$ associée à l'application surjective $p_i$ $\qquad p_i \circ \sigma_i = I\delta(G_i)$

$$\mathscr{C}(G_i) \xrightarrow{\check{p}_i} \mathscr{C}(K_i) \xrightarrow{\bar{p}_i} L^\infty(G_i)$$

$$\mathscr{C}(G_i) \xrightarrow{\pi_i} L^\infty(G_i) \qquad L^\infty(G_i) \xrightarrow{\pi_i^{(n)}} \mathscr{C}(G_i)$$

on a $\check{p}_i(f) = f \circ p_i$

$\bar{p}_i(g) = g \circ \sigma_i$

D'où $\bar{p}_i \circ \check{p}_i(f) = f \circ p_i \circ \sigma_i = f$

$$\|\check{p}_i\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \|f \circ p_i\|_{\mathscr{C}(K_i)}$$

Or $\|f \circ p_i\|_{\mathscr{C}(K_i)} = \sup_{x \in K_i} |f \circ p_i(x)| \leqslant \|f\|$ Donc $\|\check{p}_i\| \leqslant 1$

D'autre part $\check{p}_i$ possède un inverse approximé

On sait par des considérations analogues à celles de la remarque 1 que

$\pi_i = \bar{p}_i \circ p_i$ injection canonique de $\mathscr{C}(G_i)$ dans $L^\infty(G_i)$ admet un inverse approximé $\pi_n^{(i)}$ tel que $\pi_n^{(i)}(h) = h * e_n^i$ où $e_n^i$ est une unité approximative dans $L^\infty(G_i)$

$\pi_n^{(i)} \circ \bar{p}_i$ est un inverse approximé de $\check{p}_i$ :

a) $\underline{\| \pi_n^{(i)} \circ \overline{p_i} \| \leq 1}$ en effet $\| \pi_n^{(i)} \circ \overline{p_i} \| \leq \| \pi_n^{(i)} \| \, \| \overline{p_i} \|$

Or $\| \overline{p_i} \| = \sup\limits_{\|f\| \leq 1} \| f \circ \sigma_i \|_\infty$ et $\| f \circ \sigma_i \|_\infty = \sup\limits_x | f \circ \sigma_i(x) | \leq \| f \|$

Donc $\| \overline{p_i} \| \leq 1$

D'autre part $\pi_n^{(i)}$ est l'inverse approximé de $\pi_i$ donc $\| \pi_n^{(i)} \| \leq 1$

b) $\underline{(\pi_n^{(i)} \circ \overline{p_i}) \circ \check{p}_i \longrightarrow I\delta \ \mathcal{C}(G_i)}$

Ceci est évident par construction :

$$\pi_n^{(i)} \circ \overline{p_i} \circ \check{p}_i = \pi_n^{(i)} \circ \pi_i \longrightarrow I\delta$$ puisque $\pi_n^{(i)}$ est l'inverse approximé de $\pi_i$

<u>Conclusion</u> :

$\| \check{p}_i \| \leq 1$ et $\check{p}_i$ possède un inverse approximé

D'où $\check{p}_i$ est une isométrie et $p = \check{p}_1 \otimes \check{p}_2$ est aussi une isométrie

## III - <u>Etude d'un exemple : plongement isométrique de</u> $\mathcal{C}(\mathbb{T}) \hat{\otimes} \mathcal{C}(\mathbb{T})$ <u>dans</u> $\mathcal{C}(D_\infty) \hat{\otimes} \mathcal{C}(D_\infty)$

### 1. <u>Définition de</u> $D_\infty$

Soit $\mathbb{Z}(2)$ groupe à deux éléments que nous noterons 0 et 1 ou $\pm 1$ selon la commodité

Par définition $D_\infty = \prod\limits_{j=1}^{\infty} \mathbb{Z}_j(2) = \left\{ \underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_j, \ldots) \quad \alpha_k = 0 \text{ ou } 1 \right\}$

$D_\infty$ est compact métrisable totalement discontinu (s'il est muni de la topologie produit)

En effet :

$\mathbf{Z}_j(2)$ est muni de la topologie discrète

$\mathbf{Z}_j(2)$ est compact et totalement discontinu (évident)

Il est métrisable $\delta_j(0,0) = 0 \quad \delta_j(0,1) = 1 \quad \delta_j(1,1) = 0$

D'où $D_\infty$ muni de la topologie produit est un groupe compact (théorème de Tychonoff) métrisable

$$\Delta(0,\underline{\alpha}) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j \frac{(0,\alpha_j)}{2^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{2^j} \qquad \alpha_j = 0 \text{ ou } 1$$

On sait d'après un résultat de topologie que $\Delta(0,\underline{\alpha})$ est compatible avec la topologie produit.

D'autre part si on examine les ouverts de l'espace produit on voit que $D_\infty$ est totalement discontinu et sans point isolé.

2. <u>Etude du plongement</u>

On sait que : quel que soit K compact métrisable, il est homéomorphe à un sous espace du cube $[0,1]^{\mathbb{N}}$ donc il existe une surjection $D_\infty \longrightarrow K$

On veut démontrer que $\mathcal{C}(\mathbf{T}) \hat{\otimes} \mathcal{C}(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathcal{C}(D_\infty) \hat{\otimes} \mathcal{C}(D_\infty)$ est une isométrie.

$$\begin{tikzcd} D_\infty \arrow[r, "\delta"'] \arrow[rr, bend right] & I = [0,1]_d \arrow[r, "\rho"'] & \mathbf{T} \end{tikzcd} \qquad \delta(\underline{\alpha}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{2^j} \qquad \alpha_j = 0 \text{ ou } 1$$

(développement binaire d'un nombre)

d est surjective ; elle est presque biunivoque, à un ensemble dénombrable près.

La section borélienne associée à d est évidente ici (on utilise le développement binaire d'un nombre) en conséquence

$$\check{d} \otimes \check{d} \text{ est une isométrie } : \mathcal{C}(\mathbb{T}) \hat{\otimes} \mathcal{C}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathcal{C}(D_\infty) \hat{\otimes} \mathcal{C}(D_\infty)$$

IV - Etude du morphisme $\check{p}$

Comment se transportent par $\check{p}$ les problèmes de synthèse et de calcul symbolique ?

1. Position du problème pour le calcul symbolique

a) définition du calcul symbolique

Soit $\Phi$ définie sur un ensemble $D_\Phi$ du plan complexe

On dit que $\Phi$ opère dans une classe de fonctions $H$ si $\forall f \in H$ à valeurs dans $D_\Phi$ la fonction composée $\Phi \circ f$ appartient à H.

Soit $B$ une algèbre de Banach

$\mathfrak{M}_B$ son spectre alors $\hat{B}(\mathfrak{M}_B) \underset{\longrightarrow}{\subset} \mathcal{C}(\mathfrak{M}_B, \mathbb{C})$

Le calcul symbolique sur $B$ est la recherche des fonctions $\Phi$ qui opèrent sur $\hat{B}(\mathfrak{M}_B)$

Si $K$ est une partie du plan complexe le calcul symbolique sur $K$ est

$$[\mathcal{C}(K)] = \left\{ \Phi \in \mathcal{C}(K, \mathbb{C}) \text{ tq } \begin{bmatrix} \forall f \in B \\ \hat{f}(\mathfrak{M}_B) \subset K \end{bmatrix} \Longrightarrow \Phi \circ \hat{f} \in \hat{B} \right\}$$

b) problème posé : (il sera abordé plus tard)

Soit $K$ un compact et soit $B(K) \subset \mathcal{C}(K)$ une algèbre de Banach de fonctions sur $K$, unitaire, régulière, symétrique dont le spectre puisse s'identifier à $K$

Soit $\Phi : F \subset \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\forall f \in B(K)$ $f(K) \subset F$ alors $\Phi \circ f \in B(K)$

Alors si $B'(K')$ est une sous algèbre de $B(K)$, $\Phi$ opère-t-il aussi sur $B'(K')$ ?

On abordera dans la suite du cours le cas particulier des algèbres tensorielles et d'une sous algèbre donnée par un morphisme

2. Problème de synthèse dans une sous algèbre

Soient $R_1$ et $R_2$ deux algèbres de Banach régulières unitaires telles que

$\exists\theta$ $\theta : R_1 \longrightarrow R_2$ injection isométrique de $R_1$ dans $R_2$

Soit $\check{\theta} : \mathfrak{M}_{R_2} \longrightarrow \mathfrak{M}_{R_1}$

Soit $E_1$ un fermé de $\mathfrak{M}_{R_1}$ on définit $E_2 = \check{\theta}^{-1}(E_1)$

a) Proposition :

$$\left[\begin{array}{l} I^{R_1}(E_1) = \left\{r \in R_1 \;/\; \hat{r}(E_1) = 0\right\} = I^{R_2}(E_2) \cap R_1 = \theta^{-1}\left[I^{R_2}(E_2)\right] \\ \text{Mais en général on a seulement } J^{R_1}(E_1) \subset \theta^{-1}\left[J^{R_2}(E_2)\right] \end{array}\right.$$

En effet : $r \in J^{R_1}(E_1) \Longleftrightarrow \exists (r_n) \in I_o^{R_1}(E_1)$ $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} r$

$$r_n \in I_o^{R_1}(E_1) = \left\{\rho \in R_1 \;/\; \hat{\rho}^{-1}(0) \text{ est un voisinage de } E_1\right\}$$
$$= I_o^{R_2}(E_2) \cap R_2 = \theta^{-1}\left[I_o^{R_2}(E_2)\right]$$

c'est-à-dire $\theta(r_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta(r)$ dans $R_2$ (car $\theta$ est isométrique)

et $r \in \theta^{-1}\left[J^{R_2}(E_2)\right]$

b) Une condition suffisante pour que $J^{R_1}(E_1) = \theta^{-1}\left[J^{R_2}(E_2)\right]$

Définition : L'opérateur $\theta$ a un inverse approximé local s'il existe une famille $\theta_\alpha$ $\alpha \in A$ telle que $\theta_\alpha : R_2 \longrightarrow R_1$ et

1) $\|\theta_\alpha\| \leqslant 1$ $\forall \alpha \in A$

2) $\theta_\alpha \circ \theta \longrightarrow I\delta_{R_1}$ au sens de la convergence simple dans $R_1$

3) $\forall r_2 \in R_2$ le compact Supp $\widehat{\theta_\alpha(r_2)}$ tend vers le compact $\check{\theta}(\mathrm{Supp}\ \hat{r}_2)$ au sens suivant : on dit que $K_\alpha \longrightarrow K \in \mathfrak{M}_{R_1}$ si pour tout ouvert $\Omega \supset K$ il existe $A_\Omega \subset A$ tel que $\forall \alpha \notin A_\Omega$ $K_\alpha \subset \Omega$

<u>exemple</u> : Dans le cas des algèbres tensorielles on peut toujours avoir un inverse approximé local

En reprenant les notations de (II, § II) on va étudier le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}(G_1 \times G_2) \arrow[r, shift left, "\omega"] & L^\infty(G_1 \times G_2) \arrow[l, shift left, "\omega_n"] \\
V(G) \arrow[u, "J"] \arrow[d, shift left, "\check{P}"] \arrow[r, shift left, "\pi"] & L^\infty(G_1) \hat{\otimes} L^\infty(G_2) \arrow[u, "J'"'] \arrow[l, shift left, "\pi_n"] \\
V(K) \arrow[u, shift left, "\check{P}_n"] \arrow[ur, "\bar{P}"'] &
\end{tikzcd}$$

<u>Notations</u> :

- $\pi$, p, $\bar{p}$ réalisant les plongements isométriques déjà étudiés
- J le plongement à norme décroissante de $\mathscr{C}(G_1) \hat{\otimes} \mathscr{C}(G_2)$ dans $\mathscr{C}(G_1 \times G_2)$ (cf. chapitre I : norme projective $\geqslant$ norme injective)
- J' le plongement à norme décroissante de $L^\infty(G_1) \hat{\otimes} L^\infty(G_2)$ dans $L^\infty(G_1 \times G_2)$

- $\omega$ : $\mathscr{C}(G_1 \times G_2) \longrightarrow L^\infty(G_1 \times G_2)$. On sait comme au (II , I , 2) déterminer un inverse approximé $\omega_n = f * e_n$ où $e_n$ $n \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est une unité approximative.

– alors définissons un inverse approximé de $\pi$ :

C'est $\pi_n$ tel que $\boxed{J \circ \pi_n = \omega_n \circ J'}$

–on en déduit un inverse approximé pour $\check{p}$ noté $\check{p}_n$

on a $\bar{p} \circ \check{p} = \pi$ alors $\boxed{\check{p}_n = \pi_n \circ \bar{p}}$

$p_n$ <u>est-il un inverse approximé local</u> ?

Pour voir cela il suffit de vérifier la condition suivante :

$\forall f \in V(K)$ alors le compact $\mathrm{Supp}\left[\widehat{\check{p}_n(f)}\right]$ tend vers le compact $(\check{\check{p}})(\mathrm{Supp}\ \hat{f})$

On note que $(\check{\check{p}})$ transposée de $\check{p}$ c'est $p$ (évident)

D'autre part : $J$ peut être identifié à la représentation de Gelfand de $V(K)$

en conséquence :

$$\widehat{\check{p}_n(f)} = (J \circ \check{p}_n)(f) = (J \circ \pi_n \circ \bar{p})(f) = (\omega_n \circ J' \circ \bar{p})(f)$$

et en identifiant $\hat{f}$ à $f$ on se ramène à démontrer

$$\forall f \in V(K) \quad \text{alors} \quad \mathrm{Supp}[(\omega_n \circ J' \circ \bar{p})(f)] \longrightarrow p[\mathrm{Supp}(f)]$$

Pour cela on va utiliser le lemme suivant :

<u>Lemme</u> : $\left\| \begin{array}{l} \forall f \in V(K) \\ \\ \forall g \notin p\ \mathrm{Supp}(f) \end{array} \right.$ alors $[J' \circ \bar{p}(f)](g) = 0$

<u>en effet</u> :

Si $g \notin p[\mathrm{Supp}(f)]$ alors puisque $p$ est surjective

$\exists k \in K_1 \times K_2$ tel que $g = p(k)$ avec $k \notin \mathrm{Supp}(f)$

c'est-à-dire $f(k) = 0$

Considérons l'isométrie $\bar{p} : f \longrightarrow \bar{p}(f)$

A l'aide de $\bar{p}$ on associe à la valeur de $f$ en $k$ la valeur de $\bar{p}(f)$ en $g = p(k)$ et comme $f(k) = 0$ et que $\bar{p}$ est une isométrie

$$\bar{p}(f)(g) = 0$$

D'où puisque $J'$ ne change pas le support

$$[J' \circ \bar{p}(f)](g) = 0$$

<u>Conséquence</u> : $\forall f \in V(K)$ et $g$ telle que $g \notin p(\mathrm{Supp}\ f)$ on a

$$[(\omega_n \circ J' \circ \bar{p})(f)](g) = 0 \quad \text{Donc} \quad \mathrm{Supp}\ \widehat{\check{p}_n(f)} \subset p(\mathrm{Supp}\ f)$$

et alors $\mathrm{Supp}\ \widehat{\check{p}_n(f)} \longrightarrow p(\mathrm{Supp}\ f)$

<u>Proposition</u> : [Si $\theta$ a un inverse approximé local alors $J^{R_1}(E_1) = \theta^{-1} J^{R_2}(E_2)$

Il suffit de montrer que $J^{R_1}(E_1) \supset \theta^{-1}\left[J^{R_2}(E_2)\right]$

$r \in \theta^{-1}\left[J^{R_2}(E_2)\right] \Longleftrightarrow \theta(r) \in J^{R_2}(E_2) \Longleftrightarrow \exists y_n,\ y_n \in I^{R_2}(E_2)$ tq $y_n \longrightarrow \theta(r)$

$\|\theta_\alpha(y_n) - r\| \leq \|\theta_\alpha(y_n) - \theta_\alpha \circ \theta(r)\| + \|\theta_\alpha \circ \theta(r) - r\|$

$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad \exists A_\alpha$ tq $\alpha \notin A_\alpha \quad \|\theta_\alpha \circ \theta(r) - r\| < \frac{\varepsilon}{2}$ d'après définition -2-

On fixe $\alpha$ alors $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad \exists N \qquad n \geq N \Longrightarrow \|\theta_\alpha \circ \theta(r) - \theta_\alpha(y_n)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ d'après définition -1-

Pour que $r \in J^{R_1}(E_1)$ il suffit de montrer qu'à partir d'un certain rang les $\theta_\alpha(y_n) \in Io^{R_1}(E_1)$ donc que le noyau de $\widehat{\theta_\alpha(y_n)}$ est un voisinage de $E_1$ ou que le support compact de $\widehat{\theta_\alpha(y_n)}$ est disjoint de $E_1$

Or le support de $\hat{y}_n$ est disjoint de $E_2$ donc $\check{\theta}(\mathrm{Supp}\ \hat{y}_n)$ est disjoint de $E_1$

D'autre part :

Supp $\widehat{\theta_\alpha(y_n)} \longrightarrow \check{\theta}(\text{Supp } \hat{y}_n)$ donc Supp $\widehat{\theta_\alpha(y_n)}$ est disjoint de $E_1$ à partir d'un certain rang

- <u>Intérêt de cette proposition</u>

Lorsque $J^{R_1}(E_1) = \theta^{-1}\left[J^{R_2}(E_2)\right]$,

comme on a toujours

$$I^{R_1}(E_1) = \theta^{-1}\left[I^{R_2}(E_2)\right],$$

On remarque que $J^{R_1}(E_1) \neq I^{R_1}(E_1) \Longrightarrow J^{R_2}(E_2) \neq I^{R_2}(E_2)$

Donc s'il y a défaut de synthèse dans la "petite" algèbre $R_1$ (i.e., s'il existe un fermé $E$ de $\mathfrak{M}_{R_1}$ Lq $J^{R_1}(E) \neq I^{R_1}(E)$) alors il y a aussi défaut de synthèse dans $R_2$.

## Chapitre III

### Lien avec l'Analyse Harmonique : Réalisation d'une algèbre de restriction sous la forme d'une algèbre tensorielle

Rappelons les définitions de $A(G)$ et de $A(E)$

Soit $G$ un groupe topologique localement compact commutatif

$\hat{G}$ groupe dual ou groupe des représentations continues de $G$ dans le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 ou groupe des caractères

$\hat{G}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact est un groupe topologique localement compact.

On désigne par $A(G)$ l'algèbre des fonctions continues sur $G$ transformées de Fourier de fonctions sommables sur $\hat{G}$ pour la mesure de Haar

$$A(G) = \mathcal{F} L^1(G)$$

$$f \in L^1(\hat{G}) \qquad \mathcal{F} f = \hat{f} \qquad \hat{f}(x) = \int_{\hat{G}} f(\chi)(-x,\chi)\, d\chi \qquad \chi \in \hat{G}$$

$$\|\hat{f}\|_{A(G)} = \|f\|_{L^1}$$

$A(E)$ ou algèbre de restriction :

Soit $E$ un fermé de $G$

$$A(E) = \left\{\varphi \text{ à valeurs complexes telles que } \varphi = \hat{f}_{/E} \quad f \in L^1(\hat{G})\right\}$$

$A(E)$ est isométrique à $A(G)_{/\mathcal{J}(E)}$ où $\mathcal{J}(E)$ est l'idéal des éléments de $A(G)$ nuls sur $E$

$$\|\varphi\|_{A(E)} = \inf \left\{ \|f\|_{L^1} \quad \varphi = \hat{f}/_E \right\}$$

## I – Définitions et propriétés de parties remarquables dans un groupe

### 1. Ensemble de Helson :

Soit $G$ un groupe localement compact abélien

$E$ compact $E \subset G$

$E$ est de Helson $\Longleftrightarrow A(E) = \mathscr{C}(E,\mathbb{C})$ et les normes sont équivalentes (résultat de la théorie générale des algèbres de Banach)

Plus précisément

$\|f\|_\infty \leq \|f\|_{A(E)}$ car la transformation de Fourier fait décroître la norme

Donc dire que les normes sont équivalentes c'est dire : il existe $k > 0$ tel que

$$\|f\|_\infty \leq \|f\|_{A(E)} \leq k \|f\|_\infty$$

### 2. Ensemble de Kronecker

$G$ groupe localement compact abélien

$E$ compact $\subset G$

E de Kronecker $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \text{toute fonction continue sur } E \text{ de module } 1 \text{ peut être} \\ \text{approchée uniformément sur } E \text{ par des} \\ \text{caractères de } G \end{cases}$

Propriété : Un ensemble compact de Kronecker est de Helson

( cf autre demonstration dans [4] )

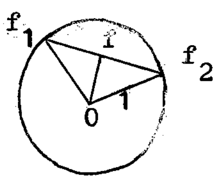
<u>Démonstration</u> : Nous allons utiliser le résultat suivant de Banach

Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $U$ et $V$ leurs boules unités, $u$ application linéaire de $E$ dans $F$ telle que $u(U)$ soit une partie partout dense de $V$ alors $u$ est un homomorphisme métrique de $E$ <u>sur</u> $F$.

Ici nous allons seulement faire la démonstration dans le cas où $G$ compact, car alors $\hat{G}$ est discret : il suffit donc de pouvoir démontrer que toute fonction continue de $[\mathcal{C}(E)]_1$ boule unité de $\mathcal{C}(E)$ peut s'écrire comme série absolument sommable de caractères.

Soit $f \in [\mathcal{C}(E)]_1$ si $f$ ne s'annule pas on peut toujours considérer

$$f = \frac{f_1+f_2}{2} \quad \text{avec} \quad \|f_1\| = \|f_2\| = 1 \quad (f_1, f_2) \quad \text{unique}$$




Par hypothèse $f_1$ et $f_2$ peuvent être approchées uniformément sur $E$ par des caractères de $G$ donc $f$ peut être approché uniformément par des combinaisons linéaires de caractères.

Si $f$ s'annule, alors on approche par des fonctions qui ne s'annulent pas

<u>Remarque</u> : pour un Kronecker $E$ compact on a donc $A(E)$ isomorphe et isométrique à $\mathcal{C}(E)$

3. <u>Ensemble indépendant</u> : la terminologie n'est pas bien fixée à ce sujet. Nous allons donner et comparer plusieurs définitions

a) sur $\mathbb{R}$ d'abord, considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$

$X \subset \mathbb{R}$    $X$ indépendant $\Longleftrightarrow$ $X$ système libre sur $\mathbb{Q}$

Il est clair que cette définition ne peut pas convenir pour un groupe abélien quelconque. Nous dirons donc :

b) Soit $G$ un groupe abélien

$$X \subset G \quad X \text{ indépendant} \Longleftrightarrow \left( \begin{array}{l} \sum\limits_{\alpha \in A} n_\alpha x_\alpha = 0 \Longleftrightarrow \forall_\alpha \ n_\alpha = 0 \\ \text{card } A < + \infty \\ n_\alpha \in \mathbb{Z} \end{array} \right)$$

Alors les $X \subset \mathbb{R}$ indépendants au sens a) et au sens b) coïncident.

Cependant, à l'aide de cette deuxième définition, on ne peut rien dire sur l'indépendance dans un groupe qui a beaucoup de torsion :

Dans un module $E$ sur un anneau intègre $A$ on appelle sous module de torsion de $E$, le sous module de $E$ formé des éléments non libres.

$E$, module de torsion $\Longleftrightarrow \forall x \in E \quad \exists a \in A \quad a \neq 0$ tel que $ax = 0$

La torsion d'un groupe est celle du groupe envisagé comme $\mathbb{Z}$-module

par exemple dans $D_\infty = \prod\limits_{j=1}^{\infty} \mathbb{Z}_j(2)$ aucun $x \in D_\infty$ n'est indépendant car $2x = 0$

c) $G$ groupe abélien :

$$X \subset G \quad X \text{ indépendant} \Longleftrightarrow \left( \begin{array}{l} \sum\limits_{\alpha \in A} n_\alpha x_\alpha = 0 \Longleftrightarrow n_\alpha x_\alpha = 0 \ \forall_\alpha \\ \text{card } A < + \infty \\ n_\alpha \in \mathbb{Z} \end{array} \right)$$

Nous ne nous servirons pas de la formulation c) mais de conditions moins fortes cependant suffisantes

Nous utiliserons donc d'une part l'indépendance au sens b) et aussi la p-indépendance au sens suivant :

d) G abélien

$$X \subset G \quad X \text{ est } p \text{ indépendant} \quad \Longleftrightarrow \quad \left( \sum_{\substack{n_\alpha \in Z \\ \alpha \in A \\ \text{card } A < +\infty}} n_\alpha x_\alpha = 0 \Longrightarrow n_\alpha = 0 \bmod p \right)$$
$$p \text{ premier}$$

On remarque que la forme d) est suffisante pour qu'il existe des $x$, p-indépendants dans $D_\infty$

<u>Propriété</u> : Dans un groupe abélien localement compact G
Tout ensemble de Kronecker est indépendant

<u>Démonstration</u> : Soit $k_i$ : $i = 1,2\ldots n$ un ensemble fini quelconque de points de K tels que $\sum_1^n n_i k_i = 0$

Alors pour tout caractère $\chi$ sur G on a $\chi(\sum_1^n n_i k_i) = 1$

$$\text{Soit } \prod_{i=1}^n [\chi(k_i)]^{n_i} = 1$$

Or K est de Kronecker.

Pour toute fonction f continue de module 1 on a

$$\prod_{i=1}^n f(k_i)^{n_i} = 1$$

Ce qui ne peut être réalisé que si $n_i = 0 \; \forall i$

Donc K est indépendant.

On remarque que le Kronecker $K$ ne contient pas d'élément d'ordre fini. En conséquence dans les groupes d'ordre borné, il n'y a pas d'ensembles de Kronecker. On va alors définir les ensembles de type $K_p$

4. Ensemble $E$ de type $K_p$ :

On note $\mathbf{Z}(p)$ le sous groupe cyclique d'ordre $p$ (premier) du tore.

$$\mathbf{Z}(p) = \left\{ \exp 2i\pi j/_q \qquad 0 \leq j \leq q-1 \right\}$$

$E \subset G$ est dit de type $K_p$ $p \geq 2 \iff \mathscr{C}(E, \mathbf{Z}(p)) = \hat{G}/E$

où $\hat{G}_{/E}$ = ensemble des restrictions à $E$ des caractères de $G$.

On peut remarquer, en appliquant le raisonnement utilisé dans la démonstration précédente que les ensembles de type $K_p$ sont des ensembles indépendants (au sens III, I.3 d) et contiennent uniquement des éléments d'ordre $p$.

Propriété : Un ensemble $E$ compact de type $K_p$ est de Helson

Démonstration : analogue à celle du III, I, 2

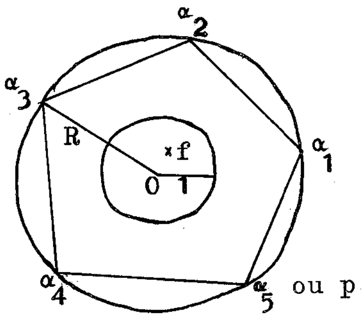
Nous ne ferons la démonstration que dans le cas où $G$ est compact

Soit $f \in [\mathscr{C}(E)]_1$ (boule unité de $\mathscr{C}(E)$) et soit la boule de $\mathscr{C}(E)$ de rayon $R$ plus grand que $1$ telle que $f$ appartienne à la fermeture convexe de l'ensemble constitué par les applications $\alpha_j$ : homomorphismes de $G$ dans $R \times \mathbf{Z}(p)$

Alors $f = \sum \lambda_j \alpha_j$ où $\lambda_j > 0$ sur $E$

$\sum \lambda_j = 1$

Les $\alpha_j$ sont, à une constante multiplica-




tive près R , des caractères de G

$\alpha_j = R \times \chi_j \quad \chi_j$ caractère

en conséquence $\mathcal{C}(E)$ et A(E) sont

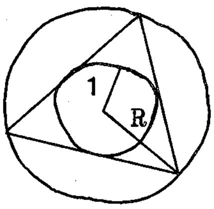
isomorphes

<u>Ils ne sont pas isométriques</u> :

La plus grande valeur de R que l'on puisse rencontrer correspond au cas où

il n'y a que trois fonctions $\alpha_j$

La fermeture convexe des $\alpha_j$ est alors un triangle et si l'on veut que toute




la boule unité de $\mathcal{C}(E)$ soit dedans il

faut prendre $R \geq 2$

Ceci entraîne : $\forall R \geq 2 \quad \|f\|_{A(E)} \leq R$

D'où $\|f\|_{A(E)} \leq 2$

Or $\|f\|_{\infty} \leq 1$ D'où

$$\frac{1}{2} \|f\|_{A(E)} \leq \|f\|_{\infty} \leq \|f\|_{A(E)}$$

5. <u>Etude des ensembles finis indépendants</u>

<u>Théorème</u> : Soit un ensemble fini E indépendant dans G localement compact abélien

a) Si tout $x \in E$ est d'ordre infini E est un Kronecker.

b) Si tout $x \in E$ est d'ordre fini p alors E est de type $K_p$.

<u>Démonstration</u> : Soit $E = \{x_1, x_2 \ldots x_k\}$ et $H$ le sous groupe de $G$ engendré par $E$ i.e l'ensemble des combinaisons linéaires

$$\sum n_i x_i, \ n_i \in \mathbf{Z}$$

Soit $f$ une fonction quelconque définie sur $E$ et à valeurs dans $\mathbf{T}$

Soit $\Phi$ l'extension de $f$ à $H$ par linéarité :

$$\Phi(x_i) = f(x_i)$$

Or $\forall x \in H \ x = \sum n_i x_i$ et ce développement est unique

$$\text{on pose } \ \Phi(x) = \Phi(\sum n_i x_i) = \prod [f(x_i)]^{n_i}$$

$\mathbf{T}$ est divisible (un groupe abélien $D$ est divisible si $\forall x \in D$ et $\forall n \neq 0 \ \exists y \in D$ tq $n\,y = x$)

Dans ce cas là on sait que l'on peut étendre $\Phi$ en un homomorphisme que nous noterons toujours $\Phi$ de $G$ tout entier dans $\mathbf{T}$.

(Démonstration analogue à celle du théorème de Hahn Banach)

$\Phi$ est donc un caractère (peut-être non continu) de $G$

Nous allons utiliser la notion de compactifié de Bohr d'un groupe abélien localement compact ([4] p. 31)

On sait que l'ensemble $\Gamma$ de tous les caractères continus d'un groupe est partout dense dans l'ensemble des caractères $\bar{\Gamma}$ (continus ou non) ;

L'ensemble de tous les caractères $\bar{\Gamma}$ muni de la topologie de la convergence simple est appelé compactifié de Bohr de $\Gamma$

Donc il existe un caractère $\chi$ continu de $G$ tel que

$$|\Phi(x) - \chi(x)| < \varepsilon \quad \text{sur } E$$

<u>Envisageons les deux cas suivants</u> :

a) Si tout $x \in E$ est d'ordre infini : Puisque l'ensemble de définition est fini $f$ est continue sur $E$ et il existe un caractère $\chi$ continu de $G$ qui approxime $f$ uniformément sur $E$. Donc $E$ est un Kronecker

b) Si tout $x \in E$ est d'ordre fini $p$ :

$\forall x \quad px = 0$

Or $\Phi$ est un homomorphisme donc $\Phi(px) = 1 = [f(x)]^p$

Donc ici $f$ prend ses valeurs dans $\mathbf{Z}(p)$.

Or ici puisque tout caractère $\chi$ est un homomorphisme continu

$\forall x \in E \quad \chi(px) = 1$ donc $\chi_{/E}$ prend ses valeurs dans $\mathbf{Z}(p)$

Donc à condition de choisir $\varepsilon$ suffisamment petit, le caractère $\chi$ est égal à $f$ sur $E$.

Donc $E$ est un ensemble de type $K_p$

## II - <u>Existence d'ensembles de Kronecker parfaits</u>

<u>Définition d'un ensemble de Cantor</u> $E$

On démontre en topologie que les trois propriétés suivantes

1) $E$ métrisable

2) $E$ totalement discontinu

3) $E$ parfait (c'est-à-dire compact sans point isolé)

caractérisent un espace topologique $E$ à un homéomorphisme près.

Exemple : $E$ est réalisé par $D_\infty = \prod_{j=1}^{\infty} Z_j(2)$ ou par l'ensemble "triadique" de Cantor ou par $D_p$ $p$ entier $\geq 2$ $D_p = \prod_{j=1}^{\infty} Z_j(p)$ où $Z(p)$ est le sous groupe cyclique de $T$ d'ordre $p$.

On cherche des ensembles de Cantor qui soient ou de Kronecker, ou de type $K_p$

On va montrer qu'on peut en trouver dans tout groupe non discret localement compact abélien.

Plus précisément : $G$ groupe localement compact est un I-groupe si et seulement si tout voisinage de 0 contient un élément d'ordre infini

Théorème :

1) Tout I-groupe localement compact abélien contient un ensemble de Cantor qui est un Kronecker

2) Si $G$ localement compact abélien non discret et si $G$ n'est pas un I-groupe alors $G$ contient un ensemble de Cantor de type $K_p$ pour un $p$ convenable.

Démonstration : Voir [4] page 100.

Remarque : 1) D'après la fin du I tout ensemble fini indépendant est ou bien un Kronecker ou bien un ensemble de type $K_p$.

D'où des exemples très simples de Kronecker et d'ensembles de type $K_p$.

2) Pour l'assertion 2) du théorème on notera d'après [4] que tout groupe répondant aux hypothèses contient un ensemble $D_p$ pour un $p$ particulier et que c'est dans $D_p$ qu'on cherche l'ensemble de type $K_p$.

III - Application : réalisation d'une algèbre de restriction

Soit $G$ un groupe compact abélien qui s'écrit $G = G_1 \times G_2$

Soient $E_i \subset G_i$ $i = 1,2$ $E_i$ de Kronecker ou de type $K_p$

Si $(x,y) \in E = E_1 \times E_2 \longrightarrow x+y \in E_1+E_2$ est bijective, $E_1 \times E_2 = E_1+E_2 \subset G$

Alors $A(E)$ et $A(E_1) \hat{\otimes} A(E_2)$ sont isométriques (voir démonstration plus loin dans un cas plus général)

Application : On a vu que tout groupe localement compact abélien non discret contient un Kronecker de Cantor ou bien un Cantor de type $K_p$

Plaçons nous dans le 1er cas : $E_1$ et $E_2$ de Kronecker

$E_1$ et $E_2$ sont réalisés par $D_\infty$ et puisque tout Kronecker est de Helson $A(E_i) = \mathcal{C}(E_i, \mathbb{C})$ $E = E_1 \times E_2$

$$D'\text{où } A(E) = \mathcal{C}(D_\infty) \hat{\otimes} (D_\infty) = V(D_\infty)$$

Dans le 2ème cas : Si $E_i$ est un Cantor de type $K_p$ alors

$$A(E_i) = \mathcal{C}(E_i) \quad \text{et} \quad A(E_1 \times E_2) = \mathcal{C}(E_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(E_2) = V(E)$$

Donc pour tout groupe compact abélien (au moins dans le cas où il se met sous la forme $G_1 \times G_2$) il existe une algèbre de restriction qui se réalise en $V(E)$

On pourra par l'étude de $V(E)$ tirer des renseignements sur $A(G)$.

IV - Cas général

On voudrait se débarrasser de la condition : $G$ est sous la forme $G_1 \times G_2$.

Soit $G$ un groupe compact abélien

Théorème : a) Soient $K_i$ $i = 1, 2, \ldots n$

$K_i \subset G$, $K_i$ Kronecker (ou de type $K_p$)

1) deux à deux disjoints

2) $K = \bigcup_1^n K_i$ Kronecker (ou de type $K_p$)

b) Soient $G_p(K_j)$ = groupe engendré par $K_j$

$$G_p(K_j) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (n\, K_j - n\, K_j) \quad \text{avec} \quad n\, X = \{x_1 + \ldots + x_n \in G \,/\, x_j \in X\}$$

c) Soient $E_j \subset G_p(K_j)$ tels que 1) $E_j$ compact

2) $E_j \subset \bigcup_1^{N_j} (n\, K_j - n\, K_j)$

Alors $A(E_1 + E_2 + \ldots + E_n)$ est isométriquement isomorphe à

$$A(E_1) \hat{\otimes} A(E_2) \hat{\otimes} \ldots A(E_n)$$

Nous allons aborder le cas où $K_i$ est de Kronecker. Le cas où $K_i$ est de type $K_p$ est parallèle.

Remarque : La notion de Kronecker est dans un certain sens une indépendance topologique.

On utilise cette notion en b)

L'hypothèse c) 2) n'est pas capitale mais elle évite des ennuis topologiques.

<u>Démonstration</u> :

$$\tilde{E} = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \longleftrightarrow E = E_1 + E_2 + \cdots E_n$$

est biunivoque.

En effet : $G_p(K_i)$ et $G_p(K_j)$ pour $i \neq j$ ont une intersection réduite à $\{0\}$

Tout élément commun s'écrirait $\sum n_\ell k_\ell^{(i)} = \sum n_p k_p^{(j)}$ et comme $K_i \cup K_j$ est de Kronecker donc indépendant il vient $n_p = n_\ell = 0$

en conséquence $G_p(K_1) + G_p(K_2) + \cdots + G_p(K_n) \longleftrightarrow G_p(K_1) \times G_p(K_2) \times \cdots G_p(K_n)$ est biunivoque et identifie $E_1 \times E_2 \times \cdots E_n$ avec $E_1 + \cdots + E_n$.

<u>1ère étape de la démonstration</u> : $A(E_1 + E_2 + \cdots E_n) \xrightarrow{\subset} A(E_1) \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} A(E_n) = \mathcal{Q}(\tilde{E})$

Soit $f \in A(G)$, alors puisque $\hat{G}$ est discret $f = \sum_{\chi \in \hat{G}} \alpha_\chi \chi$

On définit une application $\lambda$ de $A(G)$ dans $\mathcal{Q}(\tilde{E})$ :

On la définit d'abord sur les caractères

$$\lambda(\chi) = \chi_{/E_1} \otimes \chi_{/E_2} \otimes \cdots \otimes \chi_{/E_n}$$

où $\chi_{/E_i}$ désigne la restriction de $\chi$ à $E_i$

On a ainsi une application de norme 1.

On l'étend à $A(G)$ par linéarité.

$$\begin{tikzcd} A(G) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & A(G)/\mathcal{J}(E) = A(E) \arrow[dl, "\dot{\lambda}"] \\ \mathcal{Q}(\tilde{E}) & \end{tikzcd}$$

or $\lambda$ <u>est nulle sur</u> $\mathcal{J}(E)$ :

en effet $\mathcal{J}(E)$ étant l'idéal des fonctions nulles sur $E$ on a :

$f \in \mathcal{J}(E)$ alors pour $e \in E$ $f(e) = \sum\limits_{\chi} \beta_\chi \chi(e) = 0$

Or $e \in E$ donc $e = e_1 + \ldots + e_n$

$$\lambda[f(e)] = \sum \beta_\chi \lambda[\chi(e)]$$

Or les caractères sont multiplicatifs donc

$$\lambda[\chi(e)] = \chi(e_1) \times \chi(e_2) \ldots \times \chi(e_n) = \chi(e_1 + e_2 + \ldots e_n)$$

D'où $\lambda f(e) = 0$ pour tout $e \in E$ donc $\forall f \in \mathcal{J}(E)$ $\lambda(f) = 0$

Soit $\dot{\lambda}$ l'application injective associée à $\lambda$ par le passage au quotient

$A(G) \longrightarrow A(G)/_{\mathcal{J}(E)}$

$\dot{\lambda}$ fait décroître la norme :

en effet : $\dot{\lambda}$ est l'application qui à $\tilde{f} \in A(E_1 + E_2 + \ldots E_n)$ associe

$F \in \mathfrak{A}(E_1 \times \ldots \times E_n)$ ; $\tilde{f}$ est une classe d'équivalence de fonctions de $A(G)$

$$F(e_1, \ldots e_n) = \tilde{f}(e_1 + \ldots + e_n) \qquad \tilde{f} = \sum_{\chi \in \hat{G}} \alpha_\chi \chi$$

$F \in \mathfrak{A}(\tilde{E})$

$$F(e_1, e_2, \ldots e_n) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \alpha_\chi \chi(e_1 + \ldots + e_n) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \alpha_\chi \chi(e_1) \chi(e_2) \ldots \chi(e_n)$$

$\forall \epsilon > 0$ il existe un développement de $\tilde{f}$ tel que $\sum |\alpha_\chi| \leq \|\tilde{f}\|_{A(E)} + \epsilon$

D'autre part $\|F\|_{\mathfrak{A}(\tilde{E})}$ est telle que $\|F\|_{\mathfrak{A}(\tilde{E})} \leq \sum |\alpha_\chi|$

D'où $\|F\|_{\mathfrak{A}(\tilde{E})} \leq \|\tilde{f}\|_{A(E)}$ $\dot{\lambda}$ fait décroître la norme

<u>2ème étape de la démonstration</u> : $\dot{\lambda}$ est surjective et isométrique

On va utiliser le théorème de Banach énoncé au I , 2 .

Ici pour démontrer que $\dot{\lambda}$ est surjective et isométrique il suffit de démontrer que l'image par $\mathring{\lambda}$ de la boule unité de $A(E)$ est dense dans la boule unité de $\mathcal{A}(\tilde{E})$ (densité par rapport à la topologie de $\mathcal{A}(\tilde{E})$.)

Or un élément de la boule unité de $\mathcal{A}(\tilde{E})$ est un produit tensoriel de la forme $F = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j^{(1)} \otimes \dots \otimes f_j^{(n)}$ où $f_j^{(i)}$ appartient à la boule unité de $A(E_i)$

avec $\sum |\lambda| \leqslant 1+\varepsilon$ $\varepsilon$ dépendant du développement de $F$

Il suffit de savoir approcher un monome $\lambda_j f_j^{(1)} \otimes \dots \otimes f_j^{(n)}$ par une image par $\mathring{\lambda}$ d'un élément de la boule unité de $A(E)$.

Il suffit même de savoir approcher les monomes de la forme suivante :

$$1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes f_j^{(i)} \otimes 1 \dots \otimes 1$$

$1$ étant la notation représentant la fonction constante et égale à $1$ et $f_j^{(i)}$ étant toujours un élément quelconque de la boule unité de $A(E_i)$

On se ramène ensuite au cas précédent en faisant le produit dans l'algèbre tensorielle.

On remarque que $f_j^{(i)}$ élément de la boule unité de $A(E_i)$ s'écrit :

$$f_j^{(i)} = \sum_{\chi \in G} \alpha_\chi \, \chi/_{E_i} \qquad \sum |\alpha_\chi| \leqslant 1+\varepsilon$$

où $\chi/_{E_i}$ désigne la restriction du caractère $\chi$ à $E_i$

Il suffira donc d'approcher $\xi = 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes \chi/_{E_i} \otimes 1 \dots \otimes 1$

Il faut donc approcher $\xi$ par un élément de la forme $\Psi/_{E_1} \otimes \Psi/_{E_2} \otimes \dots \otimes \Psi/_{E_n}$

où $\psi$ est un caractère de $G$.

<u>Cas particuliers</u> : 1) $E_1 = K_1$ Kronecker compact

$E_2 = K_2$ Kronecker compact

$K_1 \cup K_2$ Kronecker

Dans ce cas précis on sait que $A(K_i)$ et $\mathcal{C}(K_i)$ sont isomorphes isométriquement de même que

$$A(K_1 \cup K_2) \quad \text{et} \quad (K_1 \cup K_2) \qquad (\text{cf I-2})$$

On veut approcher $\chi_{/K_1} \otimes 1$ :

Considérons la fonction $\psi$ continue sur $K_1 \cup K_2$ telle que $\psi$ et $\chi$ coïncident sur $K_1$ et $\psi$ soit constante et égale à 1 sur $K_2$

Alors $\|\psi\| = 1$

Puisque $K_1 \cup K_2$ est un Kronecker, $\psi$ de norme 1 est approchable par des caractères uniformément sur $K_1 \cup K_2$.

Or ici approcher dans la norme uniforme ou dans la norme de $A(K_1 \cup K_2)$ c'est la même chose

D'où $\exists\, \theta$, caractère tel que

$$\|\psi - \theta\|_{A(K_1 \cup K_2)} < \varepsilon$$

Dans ce cas simple on peut même approcher directement $\chi_{/K_1} \otimes \tau_{/K_2}$

où $\chi$ et $\tau$ sont des caractères de $G$.

en effet on considère alors la fonction $\Phi$ continue qui coïncide avec $\chi$

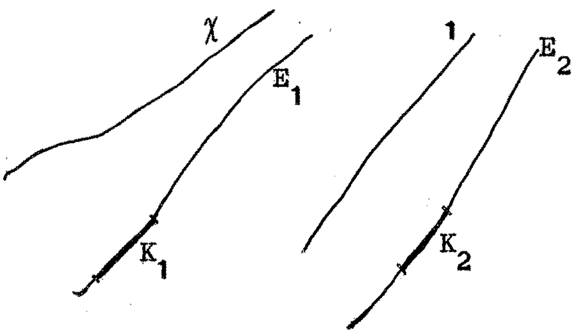
sur $K_1$ et avec $\tau$ sur $K_2$ $\|\Phi\| = 1$ et $\Phi$ est approchable par des caractères.

2) $E_1$ est compact de type $K_p$

$E_2$ est compact de type $K_p$

Alors $E_1$ et $E_2$ sont de Helson et $A(E_i)$ et $\mathcal{C}(E_i)$ sont isomorphes et de métriques équivalentes. On trouverait les mêmes résultats

3) Cas général : pour la simplicité de l'exposé on se limite à deux ensembles $E_1$ et $E_2$




On veut approcher $\chi_{/E_1} \otimes 1$ par un caractère dans la norme de $\mathcal{A}(E_1 \times E_2)$

Soit $\psi$ la fonction continue coïncide avec $\chi$ sur $E_1$ et qui vaut $1$ sur $E_2$

D'après 1) on sait approcher (dans la norme uniforme et sur $K_1 \cup K_2$ uniquement) $\psi$ par le caractère $\theta$.

Mais ici on sait que $E_i \subset \bigcup_{n=1}^{N_i} (n\, K_i - n\, K_i)$

D'où $\forall x \in E_1$ $\quad x = \sum k_j^{(1)} \qquad k_j^{(1)} \in K_1$

En conséquence

$$\psi(\sum k_j^{(1)}) = \chi(\sum k_j^{(1)}) = \pi\, \chi(k_j^{(1)})$$

$\psi$ est toujours de norme 1. On saura donc l'approcher uniformément sur

$E_1 \cup E_2$ par des caractères.

Or on a besoin d'approcher $\psi$ en norme de $A(E_1 \cup E_2)$ ; on utilisera la proposition suivante qui sera démontrée chap. IV page 5 page 5

<u>Proposition</u> : Soit $E$ un compact d'un groupe abélien compact $G$

$\forall \varepsilon > 0 \ \{ \exists \eta > 0$ tel que $\forall \chi_1, \chi_2$ tq $\| \chi_{1/E} - \chi_{2/E} \|_\infty \leqslant \eta$

alors $\| \chi_1 - \chi_2 \|_{A(E)} \leqslant \varepsilon$

# Chapitre IV

## Problème de la synthèse spectrale

Soit B une algèbre de Banach commutative unitaire, régulière, semi-simple. PM(B), espace des pseudo-mesures sur B désigne le dual de B.

<u>Support d'une pseudo-mesure</u> $S \in PM(B)$ [10]

Soit $\sigma$ la famille des fermés F de $\mathfrak{M}_B$ tels que

$$\forall x \in B \qquad \text{Supp } \hat{x} \cap F = \emptyset \Longrightarrow \langle S, x \rangle = 0$$

On démontre que $\sigma$ est stable par intersection.

Le support de S est $\bigcap\limits_{\sigma} F$, c'est le plus petit élément de $\sigma$.

Si S est une distribution, $\bigcap\limits_{\sigma} F$ est aussi son support en tant que distribution.

<u>Définition</u> : Soit E un fermé de $\mathfrak{M}_B$.

PM(E) désigne l'ensemble des pseudo-mesures de B dont le support est inclus dans E.

<u>Proposition : Soit E un fermé de $\mathfrak{M}_B$. E est de synthèse si et seulement si $PM(E) = I(E)^{\perp}$.</u>

$$J(E) = \overline{I_o(E)} = \overline{\{x \in B \mid \text{Supp } \hat{x} \cap E = \emptyset\}}$$

On a donc $$PM(E) = J(E)^{\perp}$$

"E est de synthèse" équivaut à $I(E) = J(E)$, donc à $I(E)^{\perp} = J(E)^{\perp}$ (car $[I(E)^{\perp}]^{\perp} = I(E)$ d'après le théorème de Hahn-Banach).

<u>Définitions</u> : $S \in PM(E)$ est synthésable <u>sur</u> E si

$$x \in I(E) \Longrightarrow \langle S, x \rangle = 0$$

$x \in I(E)$ est synthésable <u>sur</u> E si $x \in J(E)$.

exemple : <u>toute mesure est synthésable sur son support</u> :

Soit $B = \mathscr{C}(K)$ K compact ; $\mathfrak{M}_B = K$.

Le support de $S \in M(K)$ est le plus petit fermé $E \subset K$ tel que

$$\forall f \in \mathscr{C}(K) \text{ Supp } f \cap E = \emptyset \Longrightarrow \langle S, f \rangle = 0$$

$$f \in I(E) \Longleftrightarrow f(E) = 0 \Longleftrightarrow f \in \overline{\{g \in \mathscr{C}(K) \mid \text{Supp } g \cap E = \emptyset\}} \Longrightarrow \langle S, f \rangle = 0$$

<u>Remarque</u> : A toute mesure $\mu$ sur $\mathfrak{M}_B$ on peut associer une pseudo-mesure $\mathring{\mu}$ sur $B = \langle x, \mathring{\mu} \rangle = \langle \hat{x}, \mu \rangle$

On a évidemment $\text{Supp } \mathring{\mu} = \text{Supp } \mu$.

On désigne par $M(E)$ les mesures de $M(\mathfrak{M}_B)$ dont le support est inclus dans $E \subset \mathfrak{M}_B$.

<u>Proposition</u> : $S \in PM(E)$ <u>est synthésable sur</u> E <u>si et seulement s'il existe une suite</u> $(\mu_\alpha) \in M(E)$ <u>telle que</u> $(\mathring{\mu}_\alpha)$ <u>converge faiblement vers</u> S.

$\Longleftarrow$ $\forall x \in I(E)$ $\langle x, \mathring{\mu}_\alpha \rangle = \langle \hat{x}, \mu_\alpha \rangle = 0$

donc $\langle x, S \rangle = \lim\limits_{\alpha} \langle x, \mathring{\mu}_\alpha \rangle = 0$

$\Longrightarrow$ on suppose que $S \notin \overline{\mathring{M}(E)}$

D'après le théorème de Hahn-Banach :

$$\exists\, \chi \in PM(B)' \ : \ \langle S, \chi \rangle \neq 0 \qquad \langle \mathring{\mu}, \chi \rangle = 0 \quad \forall \mathring{\mu} \in \overline{\mathring{M}(E)}$$

or $B = PM(B)'$ $\qquad < \hat{x}, \mathring{\mu}_\alpha > = 0 \qquad \forall \mu \in \overline{M(E)} \Longrightarrow x \in I(E)$

$S$ ne peut être synthésable.

<u>exemple</u> : Soit $B = \mathcal{D}_1(\mathbb{T})$ algèbre des fonctions dérivables sur le tore. La distribution $\delta'$ : $< \delta', f > = f'(0)$ est une pseudo-mesure sur $\mathcal{D}_1(\mathbb{T})$, de support $\{0\}$.

Il existe $f \in \mathcal{D}_1(\mathbb{T})$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$.

$\delta'$ n'est donc pas synthésable sur $\{0\}$ et ne peut être approchée par des mesures de support $\{0\}$. On démontre par contre que $\delta'$ peut être approchée sur $[-\epsilon, \epsilon]$ par des mesures de support $\subset [-\epsilon, \epsilon]$ c'est-à-dire que $\delta'$ est synthésable sur $[-\epsilon, \epsilon]$.

On se place désormais dans le cas où $B = A(G)$ avec $G = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{T}^n$. On sait que $A(G)$ est isomorphe à $L^1(\hat{G})$ et a pour spectre $G$. On note $PM(G)$ l'espace des pseudo-mesures sur $A(G)$. En fait, pour $G = \mathbb{R}^n$ $A(G)$ n'est pas unitaire et il faudrait considérer $A(G \cup \infty)$. On supposera que les pseudo-mesures sont à support compact ne contenant pas le point à l'infini.

Comme $A(G) \supset \mathcal{D}(G)$ (espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact) ces pseudo-mesures sont des distributions à support compact.

<u>Définition</u> : La transformée de Fourier d'une pseudo-mesure $S$ de $A(G)$ à support compact est définie par $\hat{S}(\chi) = < S, \chi > \qquad \forall \chi \in \hat{G}$

Elle coïncide avec sa transformée de Fourier en tant que distribution.

<u>Théorème</u> : <u>Une distribution à support compact est une pseudo-mesure de</u> $A(G)$ $(G = \mathbb{T}^n$ <u>ou</u> $\mathbb{R}^n)$ <u>si et seulement si sa transformée de Fourier est bornée</u>.

$\Longrightarrow$ Soit $S \in PM(G)$

$$\|\hat{S}(\chi)\| \leqslant \|S\|_{PM(G)} \, \|\chi\|_{A(G)} = \|S\| < \infty .$$

$\Longleftarrow$ Soit $S$ une distribution à support compact telle que $\|\hat{S}\|_\infty < \infty$.

$S$ est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(G)$ continue sur $\mathcal{D}(G)$ pour la topologie de $A(G)$ : en effet ( On note $\|\hat{S}\|_\infty = \sup_\chi |\hat{S}(\chi)|$ )

$\forall \hat{f} \in \mathcal{D}(G) \subset A(G) \qquad |< S, \hat{f} >| = |< \hat{S}, f >| \leqslant \|\hat{S}\|_\infty \|f\|_{L_1(\hat{G})} = \|\hat{S}\|_\infty \|\hat{f}\|_{A(G)}$

D'après le théorème de Hahn-Banach, $S$ se prolonge donc en pseudo-mesure sur $A(G)$, t $\|S\| = \|\hat{S}\|_\infty$

<u>Définition</u> : <u>Un compact</u> $E \subset G$ (<u>groupe compact abélien</u>) <u>est dit sans vraie pseudo-mesure si</u> $PM(E) = M(E)$, $PM(E)$ <u>désignant les pseudo-mesures sur</u> $A(G)$ <u>à support dans</u> $E$.

<u>exemple</u> : On considère l'algèbre $A(\mathbb{T})$ et $E = \{x\}$, $x \in \mathbb{T}$.

Soit $S$ une pseudo-mesure de support $\{x\}$. $S$ étant une distribution est de la forme $\sum_{j=0}^{p} a_j \, \delta_{(x)}^{j}$. Sa transformée de Fourier est $\hat{S}(n) = \sum_{j=0}^{p} a_j (2i\pi n)^j$.

$\hat{S}(n)$ doit être bornée, donc $\hat{S}(n) = a_o$ et $S = \delta_x$. $S$ est une mesure sur $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.

<u>Théorème</u> : <u>un ensemble de Kronecker</u> $K$ <u>compact inclus dans</u> $\mathbb{T}$ <u>est sans vraie pseudo-mesure</u>.

- $K$ est totalement discontinu, c'est-à-dire la composante connexe de tout point de $K$ est réduite à ce point : sinon $K$ contiendrait un intervalle $[xy]$, avec $x, y$ rationnels. Alors il existerait $\lambda \in Q$ tel que $\lambda x + (1-\lambda)y = 0$ et $K$ ne pourrait être indépendant.

La démonstration utilisera la proposition suivante :

Proposition : Soit $E$ compact d'un groupe abélien compact $G$. Etant donné un nombre $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ indépendant de $\chi_1$ et $\chi_2$ tel que $\| \chi_{1/E} - \chi_{2/E} \|_\infty \leqslant \eta$ entraine $\| \chi_1 - \chi_2 \|_{A(E)} \leqslant \varepsilon$.

D'après l'étude de la dualité dans les Banachs,

$$f \in B \qquad \| f \|_B = \sup_{\substack{S \neq 0 \\ S \in B'}} \frac{|< f,S >|}{\| S \|}$$

Comme, $A(E) \subset PM(E)$ et $\| S \|_{A(E)'} \geqslant \| S \|_{PM}$, on a

$\| f \|_{A(E)} = \sup\limits_{S \in A(E)'} \dfrac{|< f,S >|}{\|S\|_{A(E)'}} < \sup\limits_{S \in PM(E)} \dfrac{|< f,S >|}{\|S\|_{PM}}$ il suffit donc de montrer que $\forall\ S \in PM(E)$, $|\hat{S}(\chi_1) - \hat{S}(\chi_2)| \leqslant \varepsilon \|S\|$.

Lemme 1 : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad 0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{4}$, $\exists f \in A(\mathbb{T})$ telle que $\| f \|_{A(T)} \leqslant \varepsilon$ et $1 - e^{ix} - f(x) = 0 \quad \forall x \in [-\delta, +\delta]$

Soit $m \in \mathbb{N}$ ; $\forall x \in [-\frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2m}]$ posons $y = mx$.

$$1 - e^{ix} = 1 - e^{i\frac{y}{m}} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(iy)^k}{m^k\ k!} .$$

Soit $g(y) \in A(T)$ le développement en série de Fourier de $y$ : sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a $g(y) = y$.

$$h_m(y) = 1 - e^{i\frac{y}{m}} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[ig(y)]^k}{m^k\ k!} \in A(T)$$

$$\| 1 - e^{i\frac{y}{m}} \|_{A(T)} \leqslant e^{\frac{\|g\|_A}{m}} - 1 = 0 \left(\frac{\|g\|}{m} A(T)\right)$$

Posons $f(x) = h_m(mx)$

sur $\left[ -\frac{\pi}{2m} , \frac{\pi}{2m} \right]$ $f(x) = 1 - e^{ix}$

$$\| f(x) \|_A = \| h_m(mx) \|_A = \| h_m(x) \|_A = 0 \left(\frac{\|g\|}{m} A\right)$$

On peut généraliser au cas d'un groupe abélien localement compact $G$.

Lemme 2 : $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \alpha > 0$ $\forall \theta$ $\forall \chi \in \hat{G}$ $\exists \tilde{f} \in A(G)$ telle que

(i) $\| \tilde{f} \|_{A(G)} \leqslant \varepsilon$

(ii) $| 1 - e^{-i\theta} \chi(x) | < \alpha \Longrightarrow 1 - e^{-i\theta} \chi(x) - \tilde{f}(x) = 0$

Soit $f(t) = \Sigma a_n e^{int}$ la fonction construite dans le lemme 1. Posons $f(t) = f_1(e^{it})$ c'est-à-dire $f_1(z) = \Sigma a_n z^n$ avec $z = e^{it}$

$\forall \delta > 0$ $\exists \alpha$ $|1-z| < \alpha \Longrightarrow |t| < \delta$.

$\delta$ étant défini comme dans le lemme 1, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \alpha$ $|1-z| < \alpha \Longrightarrow$ $1-z-f_1(z) = 0$.

Soit $\tilde{f}(x) = f_1(e^{-i\theta} \chi(x)) = \Sigma a_n e^{-in\theta} \chi^n(x)$

$\tilde{f} \in A(G)$ et $\| \tilde{f} \|_{A(G)} = \Sigma |a_n| < \varepsilon$.

D'autre part $|1 - e^{-i\theta} \chi(x)| < \alpha \Longrightarrow 1 - e^{-i\theta} \chi(x) - \tilde{f}(x) = 0$

Lemme 3 : $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \eta$ $0 < \eta < \varepsilon$, $\forall \theta$ $\forall \chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$ $\forall S \in PM(G)$

tq $|e^{i\theta} \chi_1(x) - \chi_2(x)| < \eta$ sur le support de $S \Longrightarrow$

$|e^{i\theta}\hat{S}(\chi_1) - \hat{S}(\chi_2)| \leqslant \varepsilon \|S\|$

Posons $\lambda(x) = e^{i\theta}\chi_1(x) - \chi_2(x) - e^{i\theta}\chi_1(x)\tilde{f}(x)$ où $\tilde{f}$ est définie comme dans le lemme 2. $\lambda(x) \in A(G)$.

$$\lambda(x) = e^{i\theta}\chi_1(x)\,[1 - e^{-i\theta}\chi_2\chi_1^{-1}(x) - \tilde{f}(x)]$$

Soit $\eta = \inf(\varepsilon, \frac{\alpha}{2})$ où $\alpha$ est défini comme dans le lemme 2. ($\eta$ est indépendant de $\theta$, $\chi_1$, $\chi_2$, S). Si $|e^{i\theta}\chi_1(x) - \chi_2(x)| = |1 - e^{-i\theta}\chi_2\chi_1^{-1}(x)| \leqslant \eta$ sur le support de S, $\{x \mid |1 - e^{-i\theta}\chi_2\chi_1^{-1}(x)| < \alpha\}$ est un ouvert, dépendant de $\chi_1$ et $\theta$, contenant le support de S. Sur cet ouvert $\lambda(x) = 0$, donc $\langle S,\lambda\rangle = 0$. $|e^{i\theta}\hat{S}(\chi_1) - \hat{S}(\chi_2)| = |S, e^{i\theta}\chi_1(x)\tilde{f}(x)| \leqslant \varepsilon \|S\|$.

<u>Démonstration du théorème</u> :

- <u>Lemme</u> 4 : Soit $S \in PM(\mathbb{T})$ telle que son support soit un Kronecker et telle que $S = \sum_1^r S_j$ avec $S_j \in PM(\mathbb{T})$ Supp $S_j \cap$ Supp $S_{j'} = \emptyset$ pour $j \neq j'$

Alors $\|\hat{S}\|_\infty = \sum_1^r \|\hat{S}_j\|_\infty$

On a évidemment $\|\hat{S}\|_\infty \leqslant \sum_1^r \|\hat{S}_j\|_\infty$.

Il suffit donc de montrer :

$\forall \varepsilon > 0 \qquad \|\hat{S}\|_\infty \geqslant \sum_1^r \|\hat{S}_j\|_\infty - \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists (n_j) \in Z \quad \exists(\theta_j) \in \mathbb{R}$

$$\left|\sum_1^r e^{i\theta_j}\hat{S}_j(n_j)\right| \geqslant \sum_1^r \|\hat{S}_j\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le support K de S étant un Kronecker la fonction continue sur K dont la restriction à Supp $S_j$ est $e^{i\theta_j} e^{in_j t}$ est approchée uniformément par des caractères :

$$\forall \delta' > 0 \quad \exists n \in \mathbb{Z} \quad \sup_j \left( \sup_{t \in S_j} | e^{i\theta_j} e^{in_j t} - e^{int} | \right) \leqslant \delta' .$$

<u>D'après le lemme</u> 3 : On a donc : $\forall \delta > 0 \ \exists n \in \mathbb{Z}$ , $\forall_j |e^{i\theta_j} \hat{S}_j(n_j) -$

$- \hat{S}_j(n)| \leqslant \mathring{\delta}_1 \|S_j\| \leqslant \frac{\delta}{2r}$

Alors $\|\hat{S}\|_\infty \geqslant |\hat{S}(n)| = |\sum_1^r \hat{S}_j(n)| \geqslant |\sum_1^r e^{i\theta_j} \hat{S}_j(n_j)| - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \sum_1^r \|\hat{S}_j\|_\infty - \varepsilon$

- <u>lemme</u> 5 : Soit $S \in PM(\mathbb{T})$, $S \neq 0$ telle que

(i) Supp $S = K$ est totalement discontinu :

(ii) Pour toute décomposition $S = \sum_{j=1}^r S_j$ $\quad S_j \in PM(\mathbb{T})$, Supp $S_j \cap$ Supp $S_{j'} = \emptyset$ si $j \neq j'$

On a $$\|\hat{S}\|_\infty = \sum_1^r \|\hat{S}_j\|_\infty$$

Alors $S \in M(\mathbb{T})$.

Soit $V(K) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) \mid \exists \Omega$ ouvert, $\mathbb{T} \supset \Omega \supset K$ card $f(\Omega) < \infty\}$ .

$V(K)$ est un sous-espace partout dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ pour la convergence uniforme, d'après le théorème de Stone-Weierstrass.

$\forall f \in V(K) \quad \exists \check{f} \in A(\mathbb{T}) \quad f = \check{f}$ sur un voisinage de $K$ .

Alors $\langle \sqsubset , f \rangle = \langle S, \check{f} \rangle$ est indépendant de $\check{f}$ et $\sqsubset$ est une forme linéaire sur $V(K)$.

$\forall f \in V(K) \quad \forall \Omega$ ouvert tel que card $f(\Omega) < \infty$ $\forall x \in f(K)$ qui est discret,

$\Omega_x = \Omega \cap f^{-1}(x)$ est ouvert et $K \subset \bigcup_{x \in f(K)} \Omega_x$ .

Les $\Omega_x$ sont en nombre finis et disjoints.

Donc $S = \sum_{x\in f(K)} S_x$ $\quad S_x \in PM(\mathbb{T})$, $\text{Supp } S_x \subset f^{-1}(x) \cap K \subset \Omega_x$

et $\langle|\sum, f\rangle = \sum_{x\in f(K)} \langle S_x \overset{\vee}{f}\rangle = \sum_{x\in f(K)} x\langle S_x, 1\rangle = \sum_{x\in f(K)} x\,\hat{S}_x(0)$

$$|\langle \sum, f\rangle| \leqslant \sup_{k\in K} |f(k)| \sum_{x\in f(K)} \|\hat{S}_x\|_\infty = \sup_{k\in K} |f(k)|\, \|\hat{S}\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty\, \|\hat{S}\|_\infty$$

$\sum$ est donc une forme linéaire sur $V(K)$ continue pour la topologie de la convergence uniforme sur $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. D'après le théorème de Hahn-Banach $\sum$ se prolonge en mesure $\mu_S$ à support $\subset K$ sur $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ et $\|\mu_S\| \leqslant \|\hat{S}\|_\infty$.

$\mu_S \in PM(\mathbb{T})$ et coïncide avec $S$ si et seulement si $\forall n \in Z$ $\hat{S}(n) = \hat{\mu}_S(n)$

(en effet, $\forall \hat{f} \in A(\mathbb{T})$ $\quad \langle(S-\mu_S), \hat{f}\rangle = \langle\hat{S}-\hat{\mu}_S, f\rangle$)

$\forall n \in Z$ $\quad \forall\varepsilon > 0$ Soit $\Psi \in V(K)$ telle que $|\Psi| = 1$, $\sup_{k\in K}|e^{ink} - \Psi(k)| \leqslant \eta$

où $\eta$ est défini par le lemme 3 pour $\frac{\varepsilon}{2\|\hat{S}\|_\infty}$ ($\Psi$ existe car $V(K)$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$).

Alors $S = \sum_{x\in\Psi(K)} S_x$ $\quad S_x \in PM(T)$, $\text{Supp } S_x \subset K \cap \Psi^{-1}(x)$

et $|\hat{S}_x(n) - x\,\hat{S}_x(0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\|\hat{S}\|_\infty} \|S_x\|$ $\quad \forall x \in \Psi(K)$

$$|\hat{S}(n) - \sum_{x\in\Psi(K)} x\,\hat{S}_x(0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\|\hat{S}\|_\infty} \sum_{x\in\Psi(K)} \|S_x\| = \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{car } \|S\| = \|\hat{S}\|_\infty$$

Or $\langle\mu_S, \Psi\rangle = \langle \sum, \Psi\rangle = \sum_{x\in\Psi(K)} x\,\hat{S}_x(0)$

$$|\langle\mu_S, e^{int}\rangle - \langle\mu_S, \Psi\rangle| \leqslant \|\hat{S}_\infty\|\eta \leqslant \|\hat{S}_\infty\| \frac{\varepsilon}{2\|\hat{S}\|_\infty} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc $|\hat{S}(n) - \hat{\mu}_S(n)| \leqslant \varepsilon$ .

Corollaire : Tout Kronecker compact de $\mathbb{T}$ est un ensemble de synthèse.

$M(K) \subset I(K)^{\perp}$ car toute mesure est synthésable sur son support.

On a donc $PM(K) = M(K) \subset I(K)^{\perp} \subset J(K)^{\perp} = PM(K)$.

Proposition : Soit $E$ un fermé d'un groupe compact $G$ .

$E$ est de synthèse si et seulement si $A(E)' = PM(E)$.

- $E$ est de synthèse $\Longleftrightarrow$ $PM(E) = I(E)^{\perp}$

- $I(E)^{\perp} = \{S \in PM(G) | \ker S \supset I(E)\} = \{\dot{S} \in \left(A(G)/_{I(E)}\right)'\} = A(E)'$

Proposition : Soit $H$ un sous ensemble d'un groupe compact $G$ .

$H$ est de Helson si et seulement si $M(H)$ $(= \mathscr{C}(H)')$ $= A(H)'$.

Les normes $\|\mu\|_{M(H)}$ et $\|\mu\|_{[A(H)]'}$ sont alors équivalentes.

En effet $H$ est de Helson $\Longleftrightarrow A(H) = \mathscr{C}(H)$ avec des normes équivalentes.

Corollaire : Soit $E$ un fermé dans un groupe compact $G$ .

$E$ est sans vraie pseudo-mesure $\Longleftrightarrow E$ est de Helson et de synthèse

$\Longleftarrow$ $PM(E) = A(E)' = M(E)$

$\Longrightarrow$ On a toujours $M(E) \subset A(E)' \subset PM(E)$.

## Chapitre V

## Problèmes de synthèse

### I – L'application de Hopf

1) Soit $G$ un groupe compact.

On définit les homomorphismes d'algèbres : $L^1(G) \xrightarrow{M} L^1(G \times G) \xrightarrow{P} L^1(G)$

$$f \rightsquigarrow Mf \qquad (Mf)(x,y) = f(x+y)$$

$$F \rightsquigarrow PF \qquad (PF)(t) = \int_G F(t-x,x)\,dx$$ (dx étant la mesure de Haar sur G).

2) $P \circ M(f)(t) = \int_G f(t)\,dx = f(t)$ . $P \circ M$ <u>est l'identité sur</u> $L^1(G)$.

3) On a les inclusions suivantes (G étant compact)

$$V(G) = \mathcal{C}(G) \hat{\otimes} \mathcal{C}(G) \hookrightarrow L^p(G) \hat{\otimes} L^q(G) \hookrightarrow L^2(G) \hat{\otimes} L^2(G) \hookrightarrow L^1(G) \hat{\otimes} L^1(G) \hookrightarrow L^1(G \times G)$$
$\forall\, p,q \geq 2$

<u>Proposition</u> : $P$ <u>applique</u> $L^2(G) \hat{\otimes} L^2(G)$ <u>dans</u> $A(G)$ <u>et</u> $\|P\| \leq 1$

Soit $F = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \otimes \varphi_j$ où $f_j, \varphi_j \in L^2(G)$ et $\sum_j \|f_j\|_{L^2} \|\varphi_j\|_{L^2} < \infty$

$$(PF)(t) = \int_G \sum_{j=1}^{\infty} f_j(t-x)\, \varphi_j(x)\,dx = \sum_{j=1}^{\infty} f_j * \varphi_j(x)$$

d'après le théorème de Plancherel la transformation de Fourier est une isométrie de l'algèbre $L^2(G)$ munie du produit de convolution sur l'algèbre $L^2(\hat{G})$ munie du produit ordinaire.

Donc $f_j * \varphi_j(x) = [\hat{f}_j\ \hat{\varphi}_j]^{\wedge}(x)$. D'après l'inégalité de Schwarz, $\hat{f}_j\ \hat{\varphi}_j \in L^1(\hat{G})$

c'est-à-dire que $f_j * \varphi_j(x) \in A(G) = \mathcal{F} L^1(\hat{G}) \subset \mathcal{C}(G) \subset L^1(G)$

$$\|PF\|_{A(G)} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j * \varphi_j\|_{A(G)} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \|\hat{f}_j\|_{L^2(\hat{G})} \quad \|\hat{\varphi}_j\|_{L^2(\hat{G})} = \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{L^2(G)} \|\varphi_j\|_{L^2(G)}$$

or $\|F\|_{L^2(G)\hat{\otimes} L^2(G)} = \inf \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{L^2(G)} \quad \|\varphi_j\|_{L^2(G)}$ donc $\|PF\|_{A(G)} \leqslant \|F\|_{L^2(G)\hat{\otimes} L^2(G)}$

De même P <u>applique</u> $V(G) = \mathcal{C}(G) \hat{\otimes} \mathcal{C}(G)$ <u>dans</u> $A(G)$ <u>et</u> $\|P\| \leqslant 1$ :

$$\|PF\|_{A(G)} \leqslant \sum_j \|f_j\|_{L^2(G)} \quad \|\varphi_j\|_{L^2(G)} \leqslant \sum_j \|f_j\|_{\mathcal{C}(G)} \quad \|\varphi_j\|_{\mathcal{C}(G)}$$

$$\|F\|_{V(G)} = \inf \sum_j \|f_j\|_{\mathcal{C}(G)} \quad \|\varphi_j\|_{\mathcal{C}(G)} \longrightarrow \|PF\|_{A(G)} \leqslant \|F\|_{V(G)}$$

4) <u>Proposition</u> : M <u>applique</u> $A(G)$ <u>dans</u> $V(G)$ <u>et</u> $\|M\| \leqslant 1$.

Soit $f \in A(G)$ $\quad f(x) = \sum \alpha_\chi \chi(x)$ avec $\sum |\alpha_\chi| < \infty$.

$(Mf)(x,y) = \sum \alpha_\chi \chi(x+y) = \sum \alpha_\chi \chi(x) \chi(y) \in V(G)$ car $\chi \in \mathcal{C}(G)$

$\|Mf\|_{V(G)} \leqslant \sum |\alpha_\chi| = \|f\|_{A(G)}$

<u>Conséquence</u> : P o M est l'identité sur $A(G)$ d'après 2.

$$A(G) = P \circ M(A(G)) \subset P(V(G)) \quad (\text{d'après } 4) \subset A(G) \quad (\text{d'après } 3)$$

Donc <u>$P(V(G)) = A(G)$</u> $\lfloor$mais cela n'entraîne pas $M(A(G)) = V(G)\rfloor$

Comme P o M est une isométrie, $\|P \circ M(g)\| = \|g\| \leqslant \|M(g)\| \leqslant \|M\| \; \|g\|$

M <u>est donc une isométrie</u>.

M identifie $A(G)$ à l'ensemble des fonctions de $V(G)$ qui ne dépendent que de $x+y$ ; c'est un <u>plongement d'une algèbre de groupe dans une algèbre tensorielle</u>.

## II - Problème de synthèse spectrale - Théorème de P. Malliavin

On dit que la synthèse spectrale est en défaut dans une algèbre de Banach commutative régulière semi-simple $R$ si le spectre de $R$ contient un fermé $E$ qui n'est pas de synthèse. On va étudier le problème pour les algèbres $A(G)$ et $V(G)$.

Le raisonnement se fera en deux étapes :

1) Dès qu'on a un contre exemple pour une algèbre, alors la synthèse est en défaut partout.

2) On cherche une algèbre pour laquelle il n'y a pas synthèse.

**Théorème de P. Malliavin**

> Dès que la synthèse est en défaut dans $A(\mathbb{R}^3)$ ou $A(\mathbb{T}^3)$, elle est en défaut dans tout $A(G)$ pour $G$ groupe compact infini et aussi dans tout $V(K_1 \times K_2)$ où $K_1$ et $K_2$ sont des ensembles parfaits métrisables.

**1ère étape :**

a) le défaut de synthèse dans $A(\mathbb{T}^3)$ entraîne le défaut de synthèse dans $V(D_\infty)$

b) le défaut de synthèse dans $V(D_\infty)$ entraîne le défaut de synthèse dans $A(G)$ et $V(K_1 \times K_2)$

**étude du b)**

Soit $V(K_1 \times K_2) = \mathcal{C}(K_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K_2)$

où $K_1$ et $K_2$ sont parfaits (i.e. compacts sans point isolé) métrisables : donc il existe $\tilde{K}_i \subset K_i$ tel que $\tilde{K}_i$ soit parfait métrisable totalement discontinu

c'est-à-dire $\tilde{K}_i$ est homéomorphe à $D_\infty$

Considérons l'injection canonique $\tilde{K}_i \longrightarrow K_i$

et le morphisme induit $g : \mathcal{C}(K_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K_2) \longrightarrow \mathcal{C}(\tilde{K}_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(\tilde{K}_2) \simeq V(D_\infty)$

$g$ est l'application canonique "quotient" appliquant

$$V(K_1 \times K_2) = \mathcal{C}(K_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K_2) \quad \text{sur} \quad V(K_1 \; K_2)/\mathcal{J}(\tilde{K}_1 \times \tilde{K}_2)$$

où $\mathcal{J}(\tilde{K}_1 \times \tilde{K}_2)$ est l'idéal des fonctions nulles sur $\tilde{K}_1 \times \tilde{K}_2$

<u>Lemme</u> : Soient $R(K)$ une algèbre de Banach commutative régulière semi-simple, de spectre $K$, $E$ un fermé de $K$, $\mathcal{J}(E)$ l'idéal des fonctions nulles sur $E$ et $R(E) = R(K)/\mathcal{J}(E)$

S'il y a défaut de synthèse dans l'algèbre quotient $R(E)$, alors il y a défaut de synthèse dans $R(K)$

<u>En effet</u> : Si $R(E)$ est de non synthèse, il existe un ensemble $E_1$ fermé de son spectre $E$ tel que

$$\exists f \in I^{R(E)}(E_1) \subset R(E) \quad \text{et} \quad f \notin J^{R(E)}(E_1)$$

c'est-à-dire (en identifiant $f$ à sa transformée de Gelfand)

Il existe $f$ nulle sur $E_1$ telle que $f$ ne soit pas approchable par des fonctions nulles sur un voisinage de $E_1$ dans $E$.

Soit $\tilde{f}$ extension de $f$ $\quad f \in I^{R(K)}(E_1) \subset R(K)$

Si $\tilde{f}$ pouvait être approchée par des fonctions nulles sur un voisinage de $E_1$ dans $K$, $f$ le serait aussi.

Conséquences :

1) Si $V(D_\infty)$ est de non synthèse alors pour $K_1$ et $K_2$ parfaits métrisables $V(K_1 \times K_2)$ est de non synthèse.

2) Dans tout groupe infini compact $G$ on a vu (au chapitre III) qu'il existe $E \subset G$, $E$ de Cantor qui soit un Kronecker ou un ensemble de type $K_p$.

Or un modèle topologique d'ensemble de Cantor est $D_\infty$.

Soit une partition de $E$ en $E_1$ et $E_2$ homéomorphes à $D_\infty$ et tels que

$$E' = E_1 + E_2$$

On sait que

$A(E') = A(E_1+E_2)$ est isométrique à $\mathcal{C}(E_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(E_2) = V(D_\infty)$

Si $V(D_\infty)$ est de non synthèse, alors $A(E')$ est de non synthèse et d'après le lemme $A(G)$ est de non synthèse.

étude du a)

(a,1) Considérons $d : D_\infty \longrightarrow \mathbf{T}$ défini chap. II § III

et $\qquad d^3 : D_\infty^3 \longrightarrow \mathbf{T}^3$

$D_\infty^3$ est compact métrisable sans point isolé totalement discontinu donc homéomorphe à $D_\infty$

On sait que :

$V(\mathbb{T}^3) \xrightarrow{\check{d}^3 \otimes \check{d}^3} V(D_\infty)$ est une isométrie et qu'elle possède un inverse approximé local.

En conséquence si $V(\mathbb{T}^3)$ est de non synthèse alors $V(D_\infty)$ est de non synthèse.

(a,2) Considérons le plongement isométrique : $A(\mathbb{T}^3) \xrightarrow{M} V(\mathbb{T}^3)$ ; on peut même se placer dans le cas général d'un groupe compact.

$$A(G) \xrightarrow{M} V(G) \xrightarrow{P} A(G)$$

D'après IV,I : M possède un inverse approximé qui est ici un inverse P

Cet inverse est local :

$M_\alpha f = Pf$ = intégrale sur les fibres (une fibre étant l'ensemble des $(x,y)$ tels que $\check{M}(x,y) = x+y$ fixé)

$\hat{f}$ défini sur le spectre $G \times G$ peut-être identifié à f :

$$\text{soit } \check{M} : (x,y) \longrightarrow x+y$$

d'après la définition de M et P : Supp $[M_\alpha f]^\wedge \subset \check{M}\,[\text{Supp } \hat{f}\,]$

En conséquence :

<u>si</u> $A(\mathbb{T}^3)$ <u>est de non synthèse alors</u> $V(\mathbb{T}^3)$ <u>est de non synthèse</u>

<u>2ème étape</u> :

a) <u>le défaut de synthèse dans</u> $A(\mathbb{R}^3)$ <u>entraîne le défaut de synthèse dans</u> $A(\mathbb{T}^3)$

Supposons qu'il existe $E$ fermé $\subset \mathbb{R}^3$ tel qu'il existe $f$ nulle sur $E$ et non approchable par des fonctions nulles dans un voisinage de $E$.

Cette propriété étant locale on peut supposer que $f$ est à support compact.

Or les fonctions de ce type s'identifient à des fonctions de $A(\mathbb{T}^3)$ :

Cas de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{T}$. Soit $f$ une fonction de ce type : son support est contenu dans l'intervalle $[-L,+L]$. On "enroule" l'intervalle en identifiant $-L$ et $+L$ et $r \in [-L,+L] \longrightarrow e^{2i\pi r}L \in \mathbb{T}$

Cas de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{T}^3$. On "enroule" trois fois, c'est-à-dire sur chacune des trois composantes de la variable.

C'est-à-dire on effectue le changement de variables

$$f(x,y,z) = g(e^{\frac{2i\pi x}{L}}, e^{\frac{2i\pi y}{L}}, e^{\frac{2i\pi z}{L}})$$

$x$, $y$ et $z \in [-L,+L]$

En conséquence : si $E$ est de non synthèse dans $\mathbb{R}^3$, son transformé est de non synthèse dans $\mathbb{T}^3$.

b) dans $A(\mathbb{R}^3)$ la sphère unité $U_3$ est de non synthèse (cf. article de L. Schwartz C.R. Acad. Sciences 227 pages 424-426 1948)

Dans le chapitre IV on a vu : $E$ de synthèse $\Longleftrightarrow PM(E) = I(E)^{\perp}$

il faut donc montrer qu'il existe $S \in PM(U_3)$ et $f \in I(U_3)$ tels que $< S,f > \neq 0$

Soit $\mu$ la mesure uniforme sur $U_3$ de masse totale 1.

$$\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^3) \subset PM(\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

$\mathcal{F}\mu = \hat{\mu}$ est définie sur $\mathbb{R}^3$ et est bornée (car $\mu \in PM(\mathbb{R}^3)$ et on a vu au chap. IV que : une condition nécessaire et suffisante pour qu'une distribution à support compact soit une pseudo mesure est que sa transformée de Fourier soit bornée)

$$\hat{\mu}(\rho) = \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-2i\pi < r, \rho >) d\mu(r) = \int_{U^3} \exp -2i\pi < r, \rho > d\mu(r)$$

D'où $\hat{\mu}(\rho) = K \int_0^\pi \exp(-2i\pi\ |\rho| \cos\theta) \sin\theta\, d\theta = C \dfrac{\sin 2\pi|\rho|}{|\rho|}$

$\mu$ étant une distribution,

si $\rho = (\rho_1 , \rho_2 , \rho_3)$ $\qquad \widehat{\dfrac{\partial\mu}{\partial r_1}} = 2i\pi\, \rho_1\ \hat{\mu}(\rho)$

$r = (r_1 , r_2 , r_3)$

$\dfrac{\partial\mu}{\partial r_1}$ est une distribution à transformée de Fourier bornée donc c'est une pseudomesure.

On peut toujours choisir $f$ telle que $\hat{f}$ soit nulle sur $U_3$ et telle que $\widehat{\dfrac{\partial f}{\partial r_1}}$ soit $\geqslant 0$ partout sur $\mathbb{R}^3$ et $> 0$ en au moins un point.

Alors $< \dfrac{\partial\mu}{\partial r_1} , f > = < \mu , \dfrac{\partial f}{\partial r_1} > \neq 0$

III - <u>Autre méthode</u> : <u>Fonctions radiales</u>

On va démontrer directement que $\forall n \geqslant 3$ $A(\mathbb{R}^n)$ est de non synthèse, en utilisant les fonctions radiales.

(A) <u>Définitions et notations</u>

- $G$ désignant un groupe opérant sur $\mathbb{R}^n$, si $F$ désigne une fonction quelconque définie sur $\mathbb{R}^n$ on notera

$$gF : x \longrightarrow F(gx)$$

– Si $V$ désigne un espace de Banach on dit que $G$ opère sur $V$ si

$$\left[\begin{array}{l} \forall g \in G, \forall v \in V \qquad gv \in G \\ v \longrightarrow gv \ \text{ est une isométrie} \end{array}\right.$$

– <u>Fonctions radiales</u> :

On prend $G = SO_n$ groupe compact commutatif des rotations ou transformations orthogonales de $\mathbb{R}^n$. Il est simple de vérifier que $SO_n$ opère sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ et sur $A(\mathbb{R}^n)$.

A tout sous espace $V$ de $L^p(\mathbb{R}^n)$ sur lequel $SO_n$ opère on associe

$$\mathcal{R}V = \left\{ v \in V \;/\; \forall \sigma \in SO_n \qquad \sigma v = v \right\}$$

$\mathcal{R}V$ = espace des fonctions radiales contenues dans $V$

On notera $R_n = \mathcal{R}(A(\mathbb{R}^n))$

On peut identifier $R_n$ à une algèbre de fonctions définies sur $[0,\infty[$

$$f \in R_n \qquad f(x) = f(\rho) \qquad \begin{array}{l} x \quad \mathbb{R}^n \\ \langle x,x \rangle^{\frac{1}{2}} = \rho \end{array}$$

– Soit $B$ un espace de Banach de fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ sur lequel opère $SO_n$.

Soit $\mu \in \mathcal{M}(SO_n)$

$$f \in B \qquad \text{Posons} \quad (\mu * f)(x) = \int_{SO_n} \sigma f(x) \;\; d\mu(\sigma) \qquad \begin{array}{l} \sigma \in SO_n \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

On sait que :

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si} \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n) \\ \\ \mu \in \mathcal{M}(SO_n) \end{array}\right] \Longrightarrow \mu * f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

et si on convole avec $\nu \in \mathcal{M}(SO_n)$ $\qquad (\nu*\mu) * f = \nu*(\mu*f)$

(B) <u>Le défaut de synthèse dans</u> $R_n$ <u>entraîne le défaut de synthèse dans</u> $A(\mathbb{R}^n)$

Considérons $\qquad R_n \xrightarrow{M} A(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{P} R_n$

où $M$ est l'injection canonique de $R_n$ dans $A(\mathbb{R}^n)$ et $P$ défini par :

$$f \in A(\mathbb{R}^n) \longrightarrow Pf \qquad \boxed{\begin{array}{l} Pf(\rho) = \displaystyle\int_{SO_n} f(\sigma\bar{\rho})\,dh(\sigma) \\ \rho \in [0,\infty[ \end{array}}$$

où $\left[\begin{array}{l} dh(\sigma) = \text{mesure de Haar normalisée du groupe } SO_n \\ \\ \bar{\rho} = (\rho,00\ldots 0) \end{array}\right.$

1º <u>Vérifions que</u> $Pf \in R_n = \mathcal{R}(A(\mathbb{R}^n))$

a) $f \in A(\mathbb{R}^n)$ donc il existe $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,y>}\varphi(y)\,dy$$

$Pf(\rho) = \displaystyle\int_{SO_n} f(\sigma\bar{\rho})\,dh(\sigma) = \int_{SO_n} f(\sigma x)\,dh(\sigma)$ où $x$ désigne n'importe quel point de $\mathbb{R}^n$ sur la sphère de rayon $\rho$

$= h * f\ (x)$ $\qquad$ ($h$ est invariante par $SO_n$)

$$Pf(\rho) = \int_{SO_n} f(\sigma x)\,dh = \int_{SO_n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{i<\sigma x,y>}\varphi(y)\,dy\right] dh$$

D'après le théorème de Fubini et en posant $\sigma y = t$

$Pf(e) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,t>}\left[\int_{SO_n}\varphi(\sigma t)\,dh\right] dt$ (car $dy$ est la mesure de Haar de $\mathbb{R}^n$ et $SO_n$ opère sur $\mathbb{R}^n$ donc $d(\sigma t) = dt$)

$$\int_{SO_n} (\sigma\varphi)(t)\,dh = h*\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

Donc $Pf \in A(\mathbb{R}^n)$

b) <u>$Pf \in \mathcal{R}(A(\mathbb{R}^n))$</u>

Si $\delta_\tau$ est la mesure de Dirac associée à $\tau \in SO_n$

$$\delta_\tau * f = \tau f$$

d'où $\delta_\tau * h * f = h * f = Pf$ puisque $h$ est invariante

c'est-à-dire $\tau Pf = Pf \quad \forall \tau \in SO_n$ et $Pf$ est radiale.

2º <u>Montrons que $M$ a un inverse approximé local</u>

On a $P \circ M = Id$, donc $M$ a un inverse approximé qui est ici un inverse

$$\forall_\alpha \qquad M_\alpha = P$$

On veut montrer que : $\forall f \in A(\mathbb{R}^n)$ alors le compact $\operatorname{Supp} \widehat{P(f)}$ est contenu dans le compact

$$\check{M}(\operatorname{Supp} \hat{f})$$

Or $\|P\| \leqslant 1$ donc $f$ nulle $\Longrightarrow$ $Pf$ nulle

On admet que le spectre de $R_n$ est $[0,\infty[$. On peut alors identifier les fonctions de $R_n$ et $A(\mathbb{R}^n)$ à leurs transformées de Fourier.

D'où $\operatorname{Supp} \widehat{Pf} \subseteq \check{M}(\operatorname{Supp} \hat{f})$

où $\check{M} : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty[ \qquad x \longrightarrow |x|$

(C) <u>Tout revient à étudier les algèbres radiales</u>

<u>Théorème</u> : $\Big[\; n \geqslant 3 \qquad \forall x \neq 0 \qquad \{x\} \subset [0,+\infty[$ est de non synthèse dans $R_n$

<u>Démonstration</u> : E de synthèse $\Longleftrightarrow$ $PM(E) = I(E)^{\perp}$ donc $\{x\}$ est de non synthèse s'il existe $S \in PM\{x\}$ et $f \in I\{x\}$ tels que $< f, S > \neq 0$

Les éléments du dual $R_n'$ de $R_n$ (encore appelés pseudo-mesures) sont des distributions (en effet il est clair que $\mathcal{D}]0,\infty[ \subset R_n$ $n \geqslant 1$

Donc $R_n' \subset \mathcal{D}']0,\infty[$ ).

Toute distribution dont le support est un point admet une décomposition unique comme combinaison linéaire finie de dérivées de la mesure de Dirac associée à ce point.

S cherché est nécessairement de la forme $S = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j \delta^{(j)}$

D'autre part $\forall f \in I\{x\}$, $< \delta, f > = f(x) = 0$. Montrons que $S = \delta_x^{(1)}$ convient :

Soit $f \in \mathcal{D}]0,\infty[ \subset R_n$ telle que $f(x) = 0$ et $f'(x) \neq 0$

alors $< f, \delta_x^{(1)} > = -< \frac{df}{dx}, \delta > = -f'(x) \neq 0$ pourvu que $\delta_x^{(1)} \in R_n'$.

<u>$\delta_x^{(1)} \in R_n'$ pour $n \geqslant 3$.</u>

Soit $\mathcal{E}_1(]0,+\infty[)$ l'espace des fonctions scalaires sur $]0,+\infty[$ une fois continûment différentiables, muni de la topologie la moins fine rendant continue l'application $D^1$ de cet espace dans $\mathcal{E}_c(]0,+\infty[)$ : espace des fonctions continues sur $]0,\infty[$ muni de la topologie de la convergence compacte.

On sait que $\delta_x^{(1)} \in \mathcal{E}_1'$. Si $R_n \subset \mathcal{E}_1$, alors $R_n' \supset \mathcal{E}_1'$.

On va même démontrer mieux

<u>Lemme</u> : $R_n \subsetneq \mathcal{E}_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(]0,+\infty[)$ où $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ = partie entière de $\frac{n-1}{2}$

(cf. Fourier transforms de S. Bochner et K. Chandrasekharan Annals of Mathematics studies nº 19 p. 67)

Si $f \in R_n \subset A(\mathbb{R}^n)$ $n \geq 1$ $f$ est la transformée de Fourier d'une fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ radiale :

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$y = (y_1, \dots, y_n)$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,y>} g(y)dy \quad \text{avec} \quad \|f\|_A = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|dy$$

En décomposant $\int_{\mathbb{R}^n}$ en intégrale sur la sphère unité et sur le rayon vecteur il vient :

$$f(r) = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{r^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty g_f(\rho)\, \rho^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(r\rho)d\rho \qquad r \neq 0$$

où $g_f$ désigne la fonction profil $g_f(\rho) = g(y)$ où $|y| = \rho$

et où $J_\lambda(t)$ désigne la fonction de Bessel de première espèce d'ordre $\lambda$.

On sait (cf. le livre de Courant-Hilbert : Methods of Mathematical physics vol. 1 chap. VII § 7 page 421) que ces fonctions vérifient :

$$\frac{d^s}{d(t^2)^s} \frac{J_\lambda(t)}{t^\lambda} = (-\tfrac{1}{2})^s \frac{J_{\lambda+s}(t)}{t^{\lambda+s}} \qquad s \geq 1 \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

On étudiera seulement le cas : $k \geq 1$ ;

<u>$n = 2k+2$</u> , le cas $n$ impair étant analogue

$J_{2k}$ est uniformément bornée par 1 , on a donc convergence uniforme et on peut intervertir les opérations de dérivation et d'intégration.

D'où

$$\frac{d^k}{d(r^2)^k} f(r) = (-1)^k \frac{2\pi^{k+1}}{r^{2k}} \int_0^\infty g_f(\rho)\, \rho^{2k+1}\, J_{2k}(r\rho)\, d\rho$$

On a même

$$\left| \frac{d^k}{d(r^2)^k} f(r) \right| \leq \frac{2\pi^{k+1}}{r^{2k}} \int_0^\infty |g_f(\rho)|\, \rho^{n-1}_{n}\, d\rho$$

Or $\|f\|_A = W_{n-1} \int_0^\infty |g_f(\rho)|\, \rho^{n-1}\, d\rho$ où $W_{n-1} = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ aire n dimensionnelle de $U_n$

D'où
$$\left| \frac{d^k}{d(r^2)^k} \right| \leq \frac{\Gamma(k+1)}{r^{2k}} \|f\|_A$$

IV <u>Etude d'ensembles de non synthèse</u>

Soit $R$ une algèbre de Banach commutative, $I$ un idéal de $R$.

On définit $I^n$, idéal engendré par les éléments $r_1 \times r_2 \ldots \times r_n$ où $r_j \in I$.

$$I^\omega = \bigcap_n I^n$$

$I^{\omega+1}$ idéal fermé engendré par les $r_1 \times r_2$ où $r_1 \in I^\omega$, $r_2 \in I$

etc...

On a évidemment $I \supseteq I^2 \supseteq \ldots \supseteq I^n \supseteq \ldots \supseteq I^\omega \supseteq I^{\omega+1} \ldots$

On suppose maintenant $R$ régulière semi-simple et $I = I(E)$ où $E$ est un compact du spectre de $R$, non de synthèse.

$$I(E) \underset{\neq}{\supset} J(E) = \overline{I_0(E)}$$

$\forall \alpha$ hull $I^\alpha(E)$ = hull $I(E) = E$

$J(E)$ étant le plus petit idéal fermé dont le hull est $E$, on a

$$I(E) \supseteq I^\alpha(E) \supseteq J(E) .$$

<u>exemple</u> 1 : Soit $R = \mathcal{D}_1(\mathbb{T})$ l'algèbre des fonctions dérivables sur le tore munie de la norme $\|f\| = \| |f| + |f'| \|_\infty$

Soit $E = \{x\} \in \mathbb{T}$

$I(E)$ est l'ensemble des fonctions de $R$ nulles en $x$.

$I^2(E)$ est inclus dans l'ensemble $S$ des fonctions de $R$ nulles en $x$ ainsi que leur dérivée. Or $S$ est égal à $J(E)$ : en effet si $S \supsetneq J(E)$, d'après le théorème de Hahn-Banach,

$$\exists f \in S \;,\; f \notin J(E)$$

$$\exists \mu \neq 0 \;,\; \mu \in [\mathcal{D}_1(\mathbb{T})]' \quad \text{telle que} \quad <\mu, f> \neq 0$$

$$<\mu, g> = 0 \quad \forall g \in J(E).$$

$J(E)$ étant l'ensemble des fonctions dont le support est disjoint de $\{x\}$, le support de $\mu$ est $\{x\}$. $\mu$ étant une distribution, $\mu = \alpha\,\delta_x + \beta\,\delta'_x$ et $<\mu, f> = 0$.

Donc $J(E) \subset I^2(E) \subset S = J(E)$.

<u>exemple</u> 2 : On suppose $R$ séparable. Alors la chaîne des idéaux $I^\alpha(E)$ est dénombrable

sinon, $\forall \alpha$ tel que $I^{\alpha-1} \supsetneq I^\alpha$

$\exists r \in I^\alpha$ $r \notin I^{\alpha+1}$, $\exists r' \in I^{\alpha+1}$ tels que $\|r - r'\| = \theta \neq 0$

Alors $\frac{r}{\theta} \in I^\alpha$ $\frac{r'}{\theta} \in I^{\alpha+1}$ et $\left\|\frac{r}{\theta} - \frac{r'}{\theta}\right\| = 1$.

$R$ séparable contiendrait un sous-ensemble non dénombrable de vecteurs dont la distance mutuelle est 1 ,

<u>exemple</u> 3 :

<u>Proposition</u> : <u>il existe dans</u> $A(\mathbb{R}^n)$ <u>une chaîne d'idéaux distincts de longueur</u> $\geq \left[\frac{n-1}{2}\right]$.

On considère la sphère unité $S_n$ de $\mathbb{R}^n$, $\mu$ la mesure uniforme de masse 1 sur $S_n$.

1º $\frac{\partial^m \mu}{\partial r^m}$ $(m \leq \left[\frac{n-1}{2}\right])$ est une pseudo-mesure sur $S_n$ : il suffit de montrer que c'est une distribution à transformée de Fourier bornée voir : [8])

2º Soit $f \in R_n \subset A(\mathbb{R}^n)$ telle que $f(1) = 0$ $f'(1) \neq 0$ et $f$ dérivable $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ fois.

Alors $f \in I^{A(\mathbb{R}^n)}(S_n)$

$$f'(1) \neq 0 \implies \frac{\partial^m f^m}{\partial r^m}(1) \neq 0 \iff < \mu , \frac{\partial^m f^m}{\partial r^m} > = < \frac{\partial^m \mu}{\partial r^m} , f > \neq 0$$

$$\implies f^m \notin PM(S_n)^{\perp} = J(S_n)$$

Donc $I^m \underset{\neq}{\supset} J(S_n)$.

<u>Corollaire</u> : <u>il existe dans</u> $A(\mathbb{T}^n)$ <u>une chaîne d'idéaux distincts de longueur</u> $\geq \left[\frac{n-1}{2}\right]$ :

Les groupes $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{T}^n$ sont localement isomorphes; à $S_n$ on associe une petite sphère $S_n^\alpha$ de $\mathbb{T}^n$. $\mathbb{T}^n$ étant une variété analytique réelle,

$$\exists f \in I^{A(\mathbb{T}^n)}(S_n^\alpha) \qquad f^m \notin J^{A(\mathbb{T}^n)}(S_n^\alpha) \qquad m = \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

<u>exemple</u> 4 : Soit $G$ un groupe abélien compact infini.

<u>Proposition : il existe dans $A(G)$ des chaînes d'idéaux de longueur arbitraire.</u>

<u>existence de chaînes de longueur finie</u> :

- il existe dans $A(\mathbf{T}^n)$ une chaîne de longueur $\geq \left[\frac{n-1}{2}\right]$ définie par $I(S_n^\alpha) = I(E)$

- il existe dans $V(\mathbf{T}^n)$ une chaîne de longueur $\geq \left[\frac{n-1}{2}\right]$ :

Soit $M$ l'application de Hopf : $A(\mathbf{T}^n) \longrightarrow V(\mathbf{T}^n)$

D'après le chapitre V, § II, $a_{/2}$ si $E^* = \left\{(x,y) \in \mathbf{T}^n \times \mathbf{T}^n \mid x+y \in E\right\}$ on a

$$M^{-1}\left[I^\vee(E^*)\right] = I^A(E) \qquad M^{-1}\left[J^\vee(E^*)\right] = J^A(E)$$

$M$ étant injective, $(I^A)^m(E) \underset{\neq}{\supset} J^A(E)$ entraîne

$$(I^\vee)^m(E^*) \underset{\neq}{\supset} (J^\vee)(E^*)$$

- $V(\mathbf{T}^n)$ est isomorphe isométriquement à une sous-algèbre de $V(D_\infty)$ car $\check{d} \hat{\otimes} \check{d} : \mathcal{C}(\mathbf{T}^n) \hat{\otimes} \mathcal{C}(\mathbf{T}^n) \longrightarrow \mathcal{C}(D_\infty) \hat{\otimes} \mathcal{C}(D_\infty)$

admet un inverse approximé local. De plus, pour tout fermé $E \subset \mathfrak{M}_{V(\mathbf{T}^n)}$

et pour $E' = (\check{d} \hat{\otimes} \check{d})^{-1}(E)$ on a

$$(\check{d} \hat{\otimes} \check{d})^{-1}(J^{V(D_\infty)}(E')) = J^{V(\mathbf{T}_n)}(E)$$

D'autre part $(\check{d} \hat{\otimes} \check{d})^{-1}(I^{V(D_\infty)}(E')) = I^{V(\mathbf{T}_n)}(E)$

Donc $V(D_\infty)$ contient une chaîne d'idéaux de longueur $\geq \left[\frac{n-1}{2}\right]$

- soit $E \subset G$, somme de deux Kroneckers ou de deux ensembles $K_p$ disjoints parfaits. $A(E)$ est isomorphe topologiquement à $V(D_\infty)$.

Il existe $E'$ tel que $I^{A(E)}(E')$ engendre une chaîne de longueur $\geq \left[\frac{n-1}{2}\right]$.

or $\quad I^{A(E)}(E') = \overset{\frown}{I^{A(G)}(E')} \qquad\qquad J^{A(E)}(E') \supset \overset{\frown}{J^{A(G)}(E')}$

$$I^{m^{A(E)}}(E') \underset{\neq}{\supset} J^{A(E)}(E') \quad \text{entraîne donc} \quad I^{m^{A(G)}}(E') \underset{\neq}{\supset} J^{A(G)}(E')$$

<u>existence d'une chaîne de longueur</u> $\omega$ :

On considère dans $G$ une suite de compacts $K_n$ tels que

(i) les $K_n$ sont deux à deux disjoints

(ii) $(K_n) \longrightarrow \{a\}$ $\quad a \in G$ au sens suivant :

$$\forall\, v(a) \qquad \exists\, N \qquad n > N \Longrightarrow K_n \subset v(a).$$

Chaque $K_n$ contient un ensemble $F_n$, somme de deux Kroneckers ou de deux ensembles $K_p$ disjoints parfaits. Dans chaque $F_n$ existe une chaîne de longueur $\geq \left[\frac{n-1}{2}\right]$ engendrée par un $I(E_n)$.

Soit $E = \left[\bigcup_n E_n\right] \cup \{a\}$. Alors $I(E)$ engendre une chaîne de longueur $\omega$ :

Soit $f \in A(F_n) \qquad f \in I^{A(F_n)}(E_n) \qquad f^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \notin J^{A(F_n)}(E_n)$

Soit $F \in A(G)$ telle que $F_{/F_n} = f$

$L^1(\hat{G})$ étant une algèbre normale, il existe $\varphi$ appartenant à $L^1(\hat{G})$ telle que $\hat{\varphi} = 1$ sur $F_n$

$$\hat{\varphi} = 0 \quad \text{sur} \quad \{a\} \cup E_1 \ldots \cup E_{n-1} \cup E_{n+1} \cup \ldots = E \cap E_n^c$$

Soit $\tilde{f} = F \times \hat{\varphi} \in A(G)$ ; $F \times \hat{\varphi}_{/F_n} = f$ et $F \times \hat{\varphi} = \tilde{f} \in I(E)$

$$\tilde{f}^n \in I^n(E) \qquad \tilde{f}^n \notin J^{A(G)}(E_n) \quad \text{donc} \quad \tilde{f}^n \notin J^{A(G)}(E)$$

Ceci montre que $\forall n$, $I(E)$ engendre une chaîne de longueur $\geq n$.

## Chapitre VI

## Problèmes de calcul symbolique

Soient K un compact, R une sous-algèbre de Banach de $\mathscr{C}(K)$, symétrique, unitaire, régulière, de spectre K .

Soit f une fonction de R à valeurs réelles

Définition : On désigne par $[f]^R$ le calcul symbolique de f dans R c'est-à-dire

$$[f]^R = \left\{ \Phi_{/I} \mid \Phi \in \mathscr{C}(\mathbb{R}) \qquad \Phi \circ f \in R \right\} \in \mathscr{C}(I) \quad \text{où} \quad I = [-1,+1]$$

$$[R] = \bigcap_{\substack{f \in R \\ f(K) \subset I}} [f]^R$$

On va étudier le calcul symbolique de $R = A(G)$.

Définition : Soit $\sigma = (s_i)$ une suite de réels $> 0$ tels que $s = \sum_{j=1}^{\infty} s_j < \infty$.

Soit $\mathscr{C}_\sigma$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I telles que

$$\sup_{\substack{x \in I \\ n \in \mathbb{N}}} | s_1 \, s_2 \cdots s_n \, f^{(n)}(x)|^{\frac{1}{n}} < \infty$$

Lemme 1 : Soient $\epsilon > 0$ et $\sigma$ une suite positive sommable.

Alors il existe $f_{\sigma,\epsilon} \in A(\mathbb{T}^\infty)$, à valeurs réelles, telle que

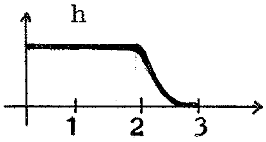
$$\|f\|_A \leqslant 1+\epsilon \quad \text{et} \quad [f]^A \subset \mathscr{C}_\sigma$$

Démonstration : Soit $\gamma : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{T}^4$

$$(r_1, \ldots, r_4) \rightsquigarrow (e^{ir_1}, \ldots, e^{ir_4})$$

Soient $\varphi$ et $h$ deux fonctions radiales sur $\mathbb{R}^4$ à valeurs réelles telles que

(i) $h[0,2] = 1$ (ii) $\mathrm{Supp}\ h \subset [0,3]$




(i') $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ (ii') $\mathrm{Supp}\ \varphi \subset [0,2]$ (iii') $\dfrac{d\varphi}{d\alpha^2}(1) = 1$.

En particulier, $\varphi$ et $h$ appartiennent à $A(\mathbb{R}^4)$ et

$$\mathrm{Supp}_{\mathbb{R}^4}\ \varphi, h \subset \left\{x \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, |x_j| \leq 3\right\}$$

Soit $\theta \in A(\mathbb{T}^4)$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^4, \ |x_j| \leq \pi \qquad \varphi(x) = \theta \circ \gamma(x).$$

On pose $G = \mathbb{T} \times G_1 \times \ldots \times G_n \times \ldots$ avec $G_j = \mathbb{T}^4$

$= \mathbb{T}^{\infty}$

$\mathcal{E}$ étant un réel $> 0$ arbitraire, soit

$$f(g) = \sin t + \mathcal{E} \sum_{j=1}^{\infty} s_j\ \theta(g_j) \qquad g = (t, g_1, \ldots, g_n, \ldots) \in G$$

$$\|\sin t\|_{A(G)} = \left\| \frac{e^{-it}}{2i} + \frac{e^{it}}{2i} \right\|_{A(G)} = 1$$

donc $f \in A(G)$ et $\|f\|_{A(G)} \leq 1 + \mathcal{E}\ \|\theta\|_A\ s$

On choisit $\mathcal{E}$ pour que $\mathcal{E}\, s\, \|\theta\|_A \leq \varepsilon$ alors $\|f\|_{A(G)} \leq 1+\varepsilon$.

Soit $\Phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telle que $F = \Phi \circ f \in A(G)$.

$\forall t \in \mathbb{T}$ $\forall k \geqslant 1$ on définit $f_{t,k}(g_1 \ldots g_K) = f(t, g_1 \ldots g_K , 0\ 0 \ldots)$

$$F_{t,k}(g_1 \ldots g_K) = F(t, g_1 \ldots g_K , 0 \ldots) = \Phi \circ f_{t,k}$$

$\hat{G} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^4 \times \ldots \times \mathbb{Z}^4 \times \ldots$ ;

$$f(g) = \sum_{n \in \hat{G}} c(n)\ e^{i<n,g>}$$

$$\| f \|_{A(G)} = \sum_{n \in \hat{G}} | c(n) |$$

$$f_{t,k}(g_1 \ldots g_K) = \sum_{n' \in (\mathbb{Z}^4)^k} d(n')\ e^{i(<n_1, g_1> + \ldots + <n_K\ g_K>)}$$

$$\text{avec} \quad d(n') = \sum_{\substack{n \in \hat{G} \\ n/(\mathbb{Z}^4)^k = n'}} c(n)$$

$$\| f_{t,k} \|_{A(G_1 \times \ldots \times G_K)} = \sum_{n' \in (\mathbb{Z}^4)^k} |d(n')| \leqslant \| f \|_{A(G)}$$

de même $F_{t,k} \in A(G_1 \times \ldots \times G_K)$ et $\| F_{t,k} \|_{A(G_1 \times \ldots \times G_K)} \leqslant \| F \|_{A(G)}$

Soit $\tilde{F}_{t,k} = \left[ F_{t,k} \circ (\gamma_1 \times \ldots \times \gamma_K) \right] \times \left[ h_1 \otimes \ldots \otimes h_k \right]$

$h_i$ étant la fonction de $A(\mathbb{R}^4)$ définie précédemment ; en notant $\tilde{G}_i = \mathbb{R}^4$

on a $h_1 \otimes \ldots \otimes h_K \in A(\tilde{G}_1) \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} A(\tilde{G}_K)$ qui est isométriquement isomorphe à $A(\tilde{G}_1 \times \ldots \times \tilde{G}_K)$.

Donc $\tilde{F}_{t,K} \in A(\tilde{G}_1 \times \ldots \times \tilde{G}_K)$.

Si $(\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_K) \in \operatorname{Supp} h_1 \otimes \ldots \otimes h_K$ ,

$$\left[ f_{t,k} \circ (\gamma_1 \times \ldots \times \gamma_K) \right] (\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_K) = \sin t + \varepsilon \sum_1^k s_j\ \varphi_j(\tilde{g}_j)$$

$$\left[ F_{t,k} \circ (\gamma_1 \times \ldots \times \gamma_K) \right] (\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_K) = \Phi\left[ \sin t + \varepsilon \sum_1^k s_j\ \varphi_j(\tilde{g}_j) \right] \in R_{4\ 4 \ldots 4}$$

Comme $h_1 \otimes \ldots \otimes h_k \in R_{4\ 4 \ldots 4}$ on a aussi $\tilde{F}_{t,k} \in R_{4\ 4 \ldots 4}$

$$\|\tilde{F}_{t,k}\|_{A(\tilde{G}_1 \times \ldots \times \tilde{G}_K)} \leq \|F_{t,k} \circ (\sigma_1 \times \ldots \times \sigma_K)\|_{A(\tilde{G}_1 \times \ldots \times \tilde{G}_K)} \times \|h\|^K_{A(\mathbb{R}^4)}$$

$$= \|F_{t,k}\|_{A(G_1 \times \ldots \times G_K)} \|h\|^K_{A(\mathbb{R}^4)}$$

Lorsque $(\alpha_1, \ldots, \alpha_K)$ est dans un voisinage assez petit de $(1, \ldots 1)$,

$$h_i(\alpha_i) = 1 \quad \text{et} \quad \tilde{F}_{t,k}(\alpha_1 \ldots \alpha_K) = \Phi(\sin t + \mathcal{E} \sum_1^k s_j \; \varphi_j(\alpha_j))$$

$$\frac{\partial^K \tilde{F}_{t,k}}{\partial\alpha_1^2 \ldots \partial\alpha_K^2} (1, \ldots, 1) = \Phi^{(K)} (\sin t) \mathcal{E}^K s_1 \, s_2 \ldots s_K$$

car $\varphi_j(1) = 1$ et $\frac{d\varphi_j}{\varphi\alpha_j^2}(1) = 1$. On va vérifier l'existence de $\frac{\partial^K \tilde{F}_{t,K}}{\partial\alpha_1^2 \ldots \partial\alpha_K^2}$

<u>Remarque sur les fonctions multiradiales</u> :

Soit $h_{SO_n}$ la mesure de Haar de $SO_n$. Pour toute fonction $f \in A(\mathbb{R}^n)$ on a défini au chapitre V $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$(h_{SO_n} * f)(x) = \int_{\sigma \in SO_n} f(\sigma x) dh_{SO_n}$$

$f$ est radiale, c'est-à-dire $f \in R_n$, si et seulement si $h_{SO_n} * f = f$

On sait qu'on peut identifier $A(\mathbb{R}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_r})$ à $A(\mathbb{R}^{n_1}) \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} A(\mathbb{R}^{n_r})$.

Soit $f \in A(\mathbb{R}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_r})$ et $f = f_1 \otimes \ldots \otimes f_r$ avec $f_i \in A(\mathbb{R}^{n_i})$

<u>Définition</u> : $f$ est multiradiale si et seulement si $h_{SO_{n_1+\ldots+n_r}} * f = f$

Or $h_{SO_{n_1+\ldots+n_r}} * (f_1 \otimes \ldots \otimes f_r) = (h_{SO_{n_1}} * f_1) \otimes \ldots \otimes (h_{SO_{n_1}} * f_r)$

donc $f$ est multiradiale si et seulement si $f_1 \ldots f_r$ sont radiales.

$R_n$, sous-algèbre de $A(\mathbb{R}^n)$ étant munie de la norme induite par celle de $A(\mathbb{R}^n)$, on peut identifier $R_{n_1 \ldots n_r}$ à $R_{n_1} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} R_{n_r}$.

On a montré que pour une fonction radiale $\in R_n$ et $n = 2k'+2$,

$$\left|\frac{d^{K'} f(\alpha)}{d(\alpha^2)^{K'}}\right| \leqslant \frac{\Gamma(K'+1)}{\alpha^{2K'}} \|f\|_A \qquad \text{(cf v. p.14)}$$

avec $n_1 = n_2 = \dots = n_K = 4$ et $k' = 1$ on obtient pour $f \in R_{4\dots4}$

$$\left|\left(\frac{\partial^K f(\alpha_1 \dots \alpha_K)}{\partial\alpha_1^2 \dots \partial\alpha_K^2}\right)(1,\dots,1)\right| \leqslant \|f\|_{A(\mathbb{R}^4\times\dots\times\mathbb{R}^4)}$$

En appliquant ce résultat à $\tilde{F}_{t,K}$ on a :

$$|\Phi^{(K)}(\sin t) + \zeta^K s_1 s_2 \dots s_K| \leqslant \|\tilde{F}_{t,k}\|_{A(\tilde{G}_1\times\dots\times\tilde{G}_K)} \leqslant \|F_{t,K}\|_{A(G_1\times\dots\times G_K)} \|h\|^K_{A(R^4)}$$

$$|s_1 s_2 \dots s_K \Phi^{(K)}(\sin t)|^{\frac{1}{K}} \leqslant \|F\|^{\frac{1}{K}}_{A(G)} \|h\|_{A(R^4)} \zeta^{-1}$$

donc $\sup\limits_{\substack{K\in\mathbb{N} \\ x\in I}} | s_1 s_2 \dots s_K \Phi^{(K)}(x)|^{\frac{1}{K}} < \infty$ c'est-à-dire $\Phi \in \mathcal{C}_\sigma$.

<u>Lemme</u> 2 : <u>Soient</u> $\varepsilon > 0$ <u>et</u> $\sigma$ <u>une suite positive sommable</u>.

Alors il existe $f_{\sigma,\varepsilon} \in V(D_\infty)$ telle que $\|f\|_{V(D_\infty)} \leqslant 1+\varepsilon$ et $[f]^{V(D_\infty)} \subset {}_\sigma$.

Soit $f_1 \in A(\mathbb{T}^\infty)$ vérifiant les conditions du lemme 1.

$M$ étant l'application isométrique de Hopf : $A(\mathbb{T}^\infty) \xrightarrow{M} V(\mathbb{T}^\infty)$,

On définit $f = Mf_1 \in V(\mathbb{T}^\infty)$.

$d$ étant l'application $D_\infty \to \mathbb{T}$, soit $\tilde{f} = \check{d} \hat{\otimes} \check{d}(f) \in V(D_\infty)$

$$\|f_1\|_{A(\mathbb{T}^\infty)} = \|f\|_{V(\mathbb{T}^\infty)} = \|\tilde{f}\|_{V(D_\infty)} \leqslant 1+\varepsilon .$$

Il est évident que $[\tilde{f}]^{V(D_\infty)} \subset \{\Phi_{/I} \ \Phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \ , \ \Phi \circ \tilde{f} \in L^\infty(D_\infty) \hat{\otimes} L^\infty(D_\infty)\}$

On peut identifier $L^\infty(D_\infty)$ à $L^\infty(\mathbb{T}^\infty)$. Donc

$$[\tilde{f}]^{V(D_\infty)} \subset \left\{ \Phi_{/I} \mid \Phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \qquad \Phi \circ f \in L^\infty(\mathbb{T}^\infty) \hat{\otimes} L^\infty(\mathbb{T}^\infty) \right\}$$

Soit $\Phi$ appartenant à cet ensemble.

$$\Phi \circ f(x,y) = \Phi \circ Mf_1(x,y) = \Phi \circ f_1(x+y) = M\left[\Phi \circ f_1(x)\right]$$

Dans l'étude de l'application de Hopf $P$ on a vu que

$$L^\infty(\mathbb{T}^\infty) \hat{\otimes} L^\infty(\mathbb{T}^\infty) \xrightarrow{P} A(\mathbb{T}^\infty)$$

Donc $P \circ M(\Phi \circ f_1) = \Phi \circ f_1 \in A(\mathbb{T}^\infty)$ et $\Phi \in [f_1]^{A(\mathbb{T}^\infty)}$

$$[\tilde{f}]^{V(D_\infty)} \subset [f_1]^{A(\mathbb{T}^\infty)} \subset \mathcal{C}_\sigma .$$

<u>Théorème</u> : Soient $\varepsilon > 0$ et $\sigma$ une suite positive sommable. Alors

(i) Pour tout groupe compact abélien $G$ contenant un Kronecker parfait, il existe $f_{\sigma,\varepsilon} \in A(G)$ telle que $[f]^{A(G)} \subset \mathcal{C}_\sigma$ et $\|f\|_{A(G)} \leq 1+\varepsilon$

(ii) Pour tout groupe compact abélien $G$ contenant un ensemble $K_p$ parfait il existe $f_{\sigma,\varepsilon} \in A(G)$ telle que $[f]^{A(G)} \subset \mathcal{C}_\sigma$ et $\|f\|_{A(G)} \leq 4+\varepsilon$ .

(i) Etant donné un Kronecker parfait $K = K_1 \cup K_2$, soit $E = K_1+K_2$

On sait que $A(E)$ est isométriquement isomorphe à $V(E)$ donc à $V(D_\infty)$ (Chap III § 3

Il existe d'après le lemme 2 $f_{\sigma,\frac{\varepsilon}{2}} \in A(E)$, $\|f\|_{A(E)} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ et $[f]^{A(E)} \subset \mathcal{C}_\sigma$

Il existe $F \in A(G)$ telle que $F_{/E} = f$ et $\|F\|_{A(G)} \leq \|f\|_{A(E)} + \frac{\varepsilon}{2} \leq 1 + \varepsilon$ .

Or $[F]^{A(G)} \subset [f]^{A(E)} \subset \mathcal{C}_\sigma$ .

(ii) Etant donné un ensemble $K_p$ parfait, $K_p = K_1 \cup K_2$ , soit $E = K_1+K_2$.

On sait que $A(E)$ est topologiquement isomorphe à $V(E)$ donc à $V(D_\infty)$ et

$\|f\|_{A(E)} \leq 4 \, \|\tilde{f}\|_{V(E)} = 4 \, \|\tilde{\tilde{f}}\|_{V(D_\infty)}$

il existe, d'après le lemme 2 , $\tilde{\tilde{f}}_{\sigma,\frac{\varepsilon}{8}} \in V(D_\infty)$ , donc $f_{\sigma,\frac{\varepsilon}{2}} \in A(E)$ telle que

$\|f\|_{A(E)} \leq 4 + \frac{\varepsilon}{2}$ .

il existe $F_{\sigma,\varepsilon} \in A(G)$ telle que $F_{/E} = f$ et $\|F\|_{A(G)} \leq 4 + \varepsilon$ .

On sait que tout groupe abélien compact contient un parfait de Kronecker ou de type $K_p$ .

On peut démontrer que si $\mathcal{A}(-1,1)$ est l'ensemble des fonctions analytiques sur $(-1,1)$ et indéfiniment dérivables sur $I$ ,

$$\mathcal{A}(-1,1) \supset \bigcap_{\sigma} \mathcal{C}_{\sigma}[-1,1]$$

$$(\sigma \text{ suite} > 0 \text{ sommable})$$

Or $[A(G)] = \bigcap_{\substack{f \in A(G) \\ f(G) \subset I}} [f]^{A(G)} \subset \bigcap_{\sigma} \mathcal{C}_{\sigma}[-1,1]$

<u>Théorème</u> : <u>Pour tout groupe</u> $G$ <u>abélien compact, le calcul symbolique de</u> $A(G)$ <u>est inclus dans</u> $\mathcal{A}(-1,1)$.

## Chapitre VII

### Théorèmes de topologie générale sur la théorie élémentaire des algèbres tensorielles

Soient $K_i$ , $K'_i$ $i = 1,2$ des compacts

$p_i : K_i \Longrightarrow K'_i$ des surjections continues.

On a vu au chapitre II, § II que si $K_i$ , $K'_i$ étaient métrisables et $K'_i$ munis d'une structure de groupe, $V(K') = \mathcal{C}(K'_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K'_2)$ pouvait être plongé isométriquement dans $V(K)$.

On considère la sous algèbre de $V(K)$ constituée par les fonctions constantes sur les fibres associées à la surjection $p_1 \times p_2$.

Il est clair qu'il existe un plongement canonique de $V(K')$ dans cette sous algèbre.

A) Problème : y-a-t-il identité entre $V(K')$ et cette sous algèbre ?

L'objet des théorèmes ci-après est de montrer que dans le cas où les morphismes sont engendrés par

$d : D_\infty \longrightarrow \mathbb{T}$ alors $V(\mathbb{T}^\omega)$ est égale à la sous algèbre des fonctions de $V(D_\infty)$ constantes sur les fibres.

B) Notations : $\omega = 1, 2, \ldots \chi_0$ où $\chi_0 = \text{card } \mathbb{N}$

Posons $d_\omega = \underbrace{d \times d \times \ldots}_{\omega \text{ fois}} : D_\infty^\omega \longrightarrow \mathbb{T}^\omega$

$d\omega$ est surjective puisque $d$ l'est.

$$\text{Or} \quad D_{\infty}^{\omega} = (\mathbb{Z}(2))^{\chi_0\omega} = (\mathbb{Z}(2))^{\chi_0} = D_{\infty}$$

$$\text{Donc} \quad d_{\omega} : D_{\infty} \longrightarrow \mathbb{T}^{\omega} \quad \text{et} \quad d_{\omega}^{\vee} : \mathscr{C}(\mathbb{T}^{\omega}) \longrightarrow \mathscr{C}(D_{\infty})$$

C) <u>Théorème</u> 1 : Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
V(\mathbb{T}^{\omega}) \arrow[r, "d_{\omega}^{\vee} \hat{\otimes} d_{\omega}^{\vee}"'] \arrow[d] & V(D_{\infty}) \arrow[d, "J"] \\
\mathscr{C}(\mathbb{T}^{\omega} \times \mathbb{T}^{\omega}) \arrow[r, "(d_{\omega} \times d_{\omega})^{\vee}"'] & \mathscr{C}(D_{\infty} \times D_{\infty})
\end{tikzcd}$$

Alors on a $\boxed{(\operatorname{Im} J) \cap (\operatorname{Im}(d_{\omega} \times d_{\omega})^{\vee}) = \operatorname{Im}(J \circ (d_{\omega}^{\vee} \hat{\otimes} d_{\omega}^{\vee}))}$

Dans cette égalité de deux ensembles le membre de gauche désigne une sous algèbre égale à une sous algèbre de $V(D_{\infty})$ de fonctions constantes sur les fibres et le membre de droite une sous algèbre égale à $V(\mathbb{T}^{\omega})$.

Le théorème 1 se déduira du théorème suivant :

<u>Théorème</u> 2 : Considérons le diagramme, où A et B sont deux compacts paramètres

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}(\mathbb{T} \times A) \hat{\otimes} \mathscr{C}(B) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathscr{C}(D_{\infty} \times A) \hat{\otimes} \mathscr{C}(B) \arrow[d, "J"] \\
\mathscr{C}(\mathbb{T} \times A \times B) \arrow[r, "\theta"] & \mathscr{C}(D_{\infty} \times A \times B)
\end{tikzcd}$$

où $\varphi = (d \times I\delta\, A)^{\vee} \hat{\otimes} I\delta\, B^{\vee}$

$\theta = (d \times I\delta\, A \times I\delta\, B)^{\vee}$

Alors $\boxed{(\operatorname{Im} J) \cap \operatorname{Im} \theta = \operatorname{Im}(J \circ \varphi)}$

<u>Le théorème 2 entraîne le théorème 1</u>:

Soit B un espace compact. On considère le diagramme suivant :

$$\Delta_\omega(A)\qquad \begin{array}{ccccc} \mathscr{C}(\mathbb{T}^\omega)\hat{\otimes}\mathscr{C}(B) & \xrightarrow{\varphi_\omega} & \mathscr{C}(D_\infty)\hat{\otimes}\mathscr{C}(B) & = & V_\omega(B) \\ \downarrow & & \downarrow J & & \\ \mathscr{C}(\mathbb{T}^\omega\times B) & \xrightarrow{\theta_\omega} & \mathscr{C}(D_\infty\times B) & = & W_\omega(B) \end{array}$$

où $\varphi_\omega = \check{d}_\omega \hat{\otimes} \check{\mathrm{Id}}\, B$

$\theta_\omega = (d_\omega \times \mathrm{Id}_B)^\vee$

Alors on a $(\mathrm{Im}\, J) \cap (\mathrm{Im}\ \theta_\omega) = \mathrm{Im}(J \circ \varphi_\omega)$

<u>Démonstration</u> :

<u>$\omega = n$</u>

Il suffit d'appliquer n fois le théorème 2 aux diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathscr{C}(\mathbb{T}^n)\hat{\otimes}\mathscr{C}(B) & \xrightarrow{A=\mathbb{T}^{n-1}} & \mathscr{C}(D_\infty\times\mathbb{T}^{n-1})\hat{\otimes}\mathscr{C}(B) & \xrightarrow{A=D_\infty\times\mathbb{T}^{n-2}} & \mathscr{C}(D_\infty\times\mathbb{T}^{n-2})\hat{\otimes}\mathscr{C}(B) & \ldots\longrightarrow & \mathscr{C}(D_\infty)\hat{\otimes}\mathscr{C}(B) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{C}(\mathbb{T}^n\times B) & \longrightarrow & \mathscr{C}(D_\infty\times\mathbb{T}^{n-1}\times B) & \longrightarrow & \mathscr{C}(D_\infty\times\mathbb{T}^{n-2}\times B) & \ldots\longrightarrow & \mathscr{C}(D_\infty\times B) \end{array}$$

<u>$\omega = \chi_0$</u>

Soit K un groupe compact.

On définit $\alpha_n$, $\beta_n$ : $K^\infty \xrightarrow{\alpha_n} K^n \xrightarrow{\beta_n} K^\infty$

$$(k_1\ k_2 \ldots k_n \ldots) \longmapsto (k_1 \ldots k_n) \longmapsto (k_1 \ldots k_n\ 0 \ldots)$$

Il est clair que $(\beta_n \circ \alpha_n)^\vee \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{Id}\ \mathscr{C}(K^\infty)$ pour la convergence simple.

On applique $\alpha_n$ (respectivement $\beta_n$) à $K = \mathbb{T}$ et $K = D_\infty$ en identifiant $D_\infty^\omega$ à $D_\infty$. Par transposition on obtient une correspondance entre les diagrammes $\Delta_\infty(A)$ et $\Delta_n(A)$ (respectivement $\Delta_n(A)$ et $\Delta_\infty(A)$).

Soit $x \in \mathscr{C}(D_\infty) \hat{\otimes} \mathscr{C}(B) = V_\infty(B)$ tel que $Jx \in (\mathrm{Im}\ J) \cap (\mathrm{Im}\ \theta_\infty)$.

Alors $x_n = \left[\check{\beta}_n(D_\infty) \hat{\otimes} \check{\mathrm{Id}}\,B\right](x) \in V_n(B)$ et $J\,x_n \in \mathrm{Im}\ \theta_n$

c'est-à-dire $x_n \in \mathrm{Im}\ \varphi_n$.

Son image $\tilde{x}_n = \left[\check{\alpha}_n(D_\infty) \hat{\otimes} \check{\mathrm{Id}}\ A\right](x_n) = \left[\alpha_n \check{\circ} \beta_n(D_\infty) \hat{\otimes} \check{\mathrm{Id}}\ A\right](x)$ est dans $\mathrm{Im}\ \varphi$.

$\mathrm{Im}\ \varphi$ est fermé dans $\mathscr{C}(D_\infty) \hat{\otimes} \mathscr{C}(B)$ car $\varphi$ est isométrique. Comme $\tilde{x}_n \longrightarrow x$, $x \in \mathrm{Im}\ \varphi$.

D) <u>Démonstration du théorème</u> 2 :

D-1 <u>Lemme préliminaire sur les Banach</u>

Soient $B$ un Banach quelconque et une suite de sous espaces fermés $B_n$ tels que
$$B = B_0 \supset B_1 \ldots \supset B_n \supset \bigcap_1^\infty B_n = B_\infty$$
et tels que

<u>hypothèse</u> 1 : l'injection $i^{(n)} : B_n \longrightarrow B_{n-1}$ $n = 1, 2 \ldots$ a un inverse approximé
$$i_\alpha^{(n)} : B_{n-1} \longrightarrow B_n \quad \alpha \in A_n$$

<u>hypothèse</u> 2 : si $j^{(n)} : B_n \longrightarrow B$ $j^{(n)} = i^{(1)} \circ \ldots \circ i^{(n)}$ on sait que $j^{(n)}$ possède un inverse approximé noté $j_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ pour $(\alpha_1, \ldots \alpha_n) \in A_1 \times \ldots \times A_n$.

D'après l'hypothèse 1, $j_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = i^{(n)}_{\alpha_n} \circ \ldots \circ i^{(1)}_{\alpha_1}$.

Par hypothèse : Pour tout $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots \alpha_n, \ldots) \in A_1 \times A_2 \ldots \times A_n \times \ldots$
$$j^{(n)} \circ j_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \text{une limite } J_{\underline{\alpha}} : B \longrightarrow B$$
(c'est-à-dire : $j^{(n)} \circ j_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(x) \longrightarrow J_{\underline{\alpha}}(x)$)

Alors

$\forall C$ espace de Banach on a :

$$B \hat{\otimes} C = B_o \hat{\otimes} C \supset \ldots \supset B_n \hat{\otimes} C \ldots \supset B_\infty \hat{\otimes} C = \bigcap_1^\infty (B_n \hat{\otimes} C)$$

chaque espace étant contenu isométriquement dans tous ceux qui sont à sa gauche.

Démonstration du lemme :

On sait que pour tout $n$

$$\mathrm{Im}(j^{(n)} \circ j_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}) \subset B_{n-1}$$

Donc d'après l'hypothèse 2 $\mathrm{Im}(J_{\underline{\alpha}}) \subset B_\infty$.

Considérons la famille $J_{\underline{\alpha}}$ $\underline{\alpha} \in A = A_1 \times A_2 \ldots A_n \times \ldots$ muni de l'ordre produit elle constitue un inverse approximé de $j^\infty : B_\infty \longrightarrow B$.

Or toutes les applications $i^{(P)}$ sont de norme $\leq 1$ par suite d'après le chapitre II § II on a un plongement isométrique de

$$B_\infty \hat{\otimes} C \text{ dans } B \hat{\otimes} C$$

et aussi de

$$\left.\begin{array}{l} B_1 \hat{\otimes} C \\ B_n \hat{\otimes} C \\ \text{et } \bigcap_{n=1}^\infty (B_n \hat{\otimes} C) \end{array}\right\} \text{dans } B \hat{\otimes} C$$

il reste à démontrer que $B_\infty \hat{\otimes} C = \bigcap_{n=1}^\infty (B_n \hat{\otimes} C)$

il est clair que $\forall n$ $B_\infty \hat{\otimes} C \subset B_n \hat{\otimes} C$

D'où $B_\infty \hat{\otimes} C \subset \bigcap_{n=1}^\infty (B_n \hat{\otimes} C)$

Soit $x \in \bigcap_{n=1}^\infty (B_n \hat{\otimes} C)$.

$\forall \underline{\alpha} \in A$ on a $x_{\underline{\alpha}} = (J_{\underline{\alpha}} \hat{\otimes} \mathrm{Id}\ C)(x) \in B_\infty \hat{\otimes} C$

Or pour un choix convenable de $\underline{\alpha}$ on peut avoir $\| x-(j^\infty \hat{\otimes} \mathrm{Id}\ C)(x_{\underline{\alpha}}) \|_{B \hat{\otimes} C} \leqslant \varepsilon$

et comme $B_\infty \hat{\otimes} C$ est fermé (car plongé isométriquement dans $B \hat{\otimes} C$)

On a bien $$B_\infty \hat{\otimes} C = \bigcap_{n=1}^{\infty} (B_n \hat{\otimes} C)$$

D-2 <u>Application du lemme au cas du plongement de</u> $\mathscr{C}(\mathbb{T} \times A) \hat{\otimes} C$ <u>dans</u> $\mathscr{C}(D_\infty \times A) \hat{\otimes} C$

D-2.1 <u>Idée</u> : On intercale entre $\mathscr{C}(\mathbb{T} \times A)$ et $\mathscr{C}(D_\infty \times A)$ une suite de Banach $H_i$ de telle sorte que

$$\mathscr{C}(\mathbb{T} \times A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n \subset H_n \subset \ldots H_1 \subset \mathscr{C}(D_\infty \times A)$$

Nous savons que $d : D_\infty \longrightarrow \mathbb{T}$ est presque injective (sauf en une infinité dénombrable de points, les rationnels diadiques $\Delta$).

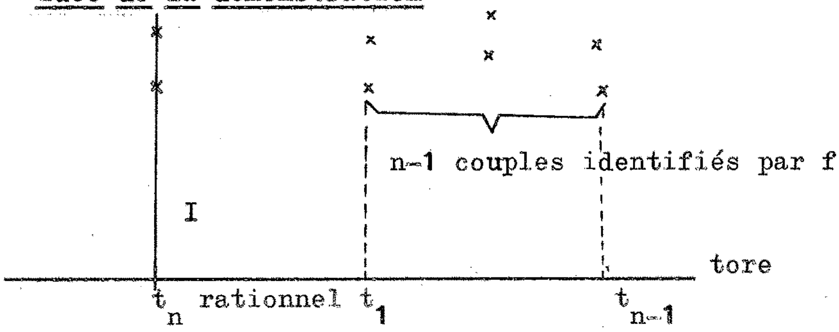
$H_1$ sera le sous espace de $\mathscr{C}(D_\infty \times A)$ où on identifie deux points de $D_\infty$ correspondant par $d$ au même point de $\mathbb{T}$.

$H_2$ sera le sous espace de $H_1$ où on identifie deux autres points etc...

D-2.2 <u>L'hypothèse 1 du lemme est vérifiée</u> :

Il s'agit de montrer que l'injection canonique $i^{(n)} : H_n \longrightarrow H_{n-1}$ a un inverse approximé :

<u>idée de la démonstration</u>



Soit $\Gamma = (t_n)$ l'image par $d$ des rationnels diadiques $\Delta$.

Soit $f \in H_{n-1}$ c'est-à-dire $f$ identifie $n-1$ couples de points de $D_\infty$ chaque couple correspondant à un point du tore $(t_1 \ldots t_{n-1})$.

Soit $t_n \in \Gamma$ $t_n \neq t_i$ $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

L'idée est de construire des intervalles fermés de centre $t_n$ et de demi longueur $\alpha$ irrationnel suffisamment petit pour que tous les $t_i$ $1 \leqslant i \leqslant n-1$ soient à l'intérieur de $I$.

On considère alors la fonction $\varphi_\alpha$ telle que

$\varphi_\alpha = f$ en dehors de $d^{-1}(]t_n-\alpha, t_n+\alpha[)$ et telle que

$\varphi_\alpha$ est "affine" sur $d^{-1}]t_n-\alpha, t_n+\alpha[$

en posant $i_\alpha^{(n)} : f \to \varphi_\alpha$ on voit que si $\alpha$ irrationnel tend vers 0 alors $i_\alpha^n(f) \to f$ puisqu'il y a de plus en plus de points où $f$ et $\varphi_\alpha$ coïncident.

<u>mise au point de la démonstration</u>

On considère une famille d'intervalles fermés du tore

$I_{m,n}$ $m + 1, \ldots, \infty$ tels que
$n = 1, \ldots, \infty$

a) $I_{mn}$ a pour centre $t_n \in \Gamma$
b) $I_{1,n} \supsetneq \bigcap_m I_{mn} = \{t_n\}$
c) $\bar{I}_{m,n}$ a pour extrémités $k_{mn}$ et $k'_{mn} \notin \Gamma$
d) $\bar{I}_{\alpha_1\alpha_2}$ et $I_{\beta_1\beta_2}$ sont, ou bien disjoints, ou bien contenus l'un dans l'autre

Il est possible de construire une telle suite par récurrence sur $n$ :

Les $I_{mp}$ $\substack{p \leqslant n \\ m : 1 \to \infty}$ étant construits, l'introduction de $t_{n+1}$ bouleverse peut-être la taille de ces intervalles mais par un changement de numérotation.

sur les $m$ (décalage vers les $m$ croissants) il est possible de trouver

$\operatorname{Im} p \quad \underset{m : 1 \to \infty}{p \leq n}$ tels que $t_{n+1} \notin \operatorname{Im} p$

alors on choisit $I_{1,n+1}$ disjoint des $I_{1p}$, et les $I_{i,n+1}$ sont contenus dedans.

<u>Construction de l'inverse approximé</u>

Soit $f \in H_{n-1}$, c'est-à-dire $f$ identifie les points de $D_\infty \times A$ associés à $t_1 \times A$, $t_2 \times A$, ... $t_{n-1} \times A$.

Soit $x \in D_\infty \times A$ si $(d \times I\delta\, A)(x) \notin \operatorname{Imn} \times A$ posons $\left[i_m^{(n)}(f)\right](x) = f(x)$

si $(d \times I\delta\, A)(x) \in \operatorname{Imn} \times A$ $\left[i_m^{(n)}(f)\right](x) = \varphi\left[d(x),y\right]$ où $\varphi$

est affine par rapport à la première variable sur Imn.

Cette application est un inverse approximé

On a $$\|i_m^{(n)}(f)\| \leq \|f\|_\infty$$

et $(i_m^{(n)} \circ i^{(n)} - I\delta)(f) \longrightarrow 0$ si $m \longrightarrow \infty$ c'est-à-dire lorsque la longueur de Imn tend vers 0.

D-2.3 <u>L'hypothèse 2 du lemme est vérifiée</u> :

$$j^{(n)} = i^{(1)} \circ \dots \circ i^{(n)} : H_{n-1} \longrightarrow \mathscr{C}(D_\infty \times A)$$

$$j_{m_1 m_2 \dots m_n} = \mathscr{C}(D_\infty \times A) \longrightarrow H_{n-1}$$

Il faut démontrer que pour toute suite $(m_1, m_2, \dots m_n, \dots)$ alors

$j^{(n)} \circ j_{m_1 \dots m_n}$ converge simplement vers $J_{m_1 m_2 \dots m_n \dots}$ continue de norme $\leq 1$ lorsque $n \longrightarrow \infty$

$j^{(n)} \circ j_{m_1 \ldots m_n}$ converge simplement :

Soit $g \in \mathscr{C}(D_\infty \times A)$ et $g_n = j^{(n)} \circ j_{m_1 \ldots m_n}(g) \in H_{n-1} \subset \mathscr{C}(D_\infty \times A)$.

Lorsque $n$ croit $g_n$ tend vers une fonction $h$ telle que tous les couples de $D_\infty$ correspondant à un point de $\mathbb{T}$ soient identifiés

et $h \in \bigcap H_n = \mathscr{C}(\mathbb{T} \times A)$ et puisque $\|j^{(n)} \circ j_{m_1 \ldots m_n}\| \leq 1$ Alors $\|J_{m_1 m_2 \ldots m_n \ldots}\| \leq 1$

<u>Conséquence</u>

$\forall C$ Banach et en particulier si $C = \mathscr{C}(B)$ alors

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathscr{C}(\mathbb{T} \times A) \hat{\otimes} \mathscr{C}(B) = \bigcap_1^\infty H_n \hat{\otimes} \mathscr{C}(B) \subset H_n \hat{\otimes} \mathscr{C}(B) \ldots \subset \mathscr{C}(D_\infty \times A) \hat{\otimes} \mathscr{C}(B) \\ \text{tous ces plongements étant isométriques} \end{array}}$$

D-3 <u>Utilisation des $H_i$ pour la démonstration du théorème</u> 2

On va intercaler les $H_i$ entre $\mathscr{C}(\mathbb{T} \times A)$ et $\mathscr{C}(D_\infty \times A)$.

On sait qu'on a des plongements isométriques

$$\mathscr{C}(\mathbb{T} \times A) \hat{\otimes} \mathscr{C}(B) = \bigcap_1^\infty H_n \hat{\otimes} \mathscr{C}(B) \subset H_n \hat{\otimes} \mathscr{C}(B) \ldots \subset H_1 \hat{\otimes} \mathscr{C}(B) \subset \mathscr{C}(D_\infty \times A) \hat{\otimes} \mathscr{C}(B)$$

Il suffira en effet de vérifier la propriété énoncée dans le théorème 2 pour chaque étape $n$.

Supposons que dans le diagramme :

$$(\mathcal{S}_n) \qquad \begin{array}{ccc} H_n \hat{\otimes} \mathscr{C}(B) & \xrightarrow{\varphi_n} & \mathscr{C}(D_\infty \times A) \hat{\otimes} \mathscr{C}(B) \\ \downarrow & & \downarrow J \\ \mathscr{C}(\Phi_{H_n} \times B) & \xrightarrow[\theta_n]{} & \mathscr{C}(D_\infty \times A \times B) \end{array}$$

On a $\boxed{(\mathrm{Im}\ J) \cap (\mathrm{Im}\ \theta_n) = \mathrm{Im}(J \circ \varphi_n)}$

Soit alors $f \in \mathcal{C}(D_\infty \times A) \hat{\otimes} \mathcal{C}(B)$ tel que $Jf \in \mathrm{Im}\,\theta$. Il est clair que $Jf \in \mathrm{Im}\,\theta_n$ donc que $Jf \in \mathrm{Im}\,\varphi_n$. D'après l'hypothèse $f \in H_n \hat{\otimes} \mathcal{C}(B)$ $\forall_n$.

D'après D-2 $f \in \mathcal{C}(T \times A) \hat{\otimes} (B)$ et on obtient le théorème 2.

Démontrons $(\delta_n)$ : les espaces compacts X, A, B étant donnés, les couples $\left\{(x_j, x'_j) \in X \times X\right\}$ $j = 1$ à $n$ étant donnés

alors

$$\text{si} \quad \mu_n = \left\{f \in \mathcal{C}(X \times A) \text{ tq } f(x_j, a) = f(x'_j, a) \quad j = 1 \text{ à } n\right\} \subset \mathcal{C}(X \times A)$$

et

$$\text{si} \quad M_n = \left\{F \in \mathcal{C}(X \times A) \hat{\otimes} \mathcal{C}(B) \text{ tq } JoF(x_j, a, b) = JoF(x'_j, a, b) \quad j = 1 \text{ à } n\right\}$$

On a
$$\mu_n \hat{\otimes} \mathcal{C}(B) = M_n$$

<u>Démonstration pour</u> n=1 :

Par définition de $\mathcal{C}(X \times A) \hat{\otimes} \mathcal{C}(B)$ on sait que toute fonction $F \in \mathcal{C}(X \times A) \hat{\otimes} \mathcal{C}(B)$ s'écrit sous la forme d'une série absolument sommable

$$F(x, a, b) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x, a)\, \beta_i(b) \quad \text{où} \quad f_i \in \mathcal{C}(X \times A)$$
$$\text{et} \quad \beta_i \in \mathcal{C}(B)$$

Il faut montrer que si $F \in M_n$ alors les $f_i$ peuvent être choisis dans $\mu_n$. Dans le cas n=1 $\mu_n$ est un sous espace de codimension 1 dans $\mathcal{C}(X \times A)$. Donc toute fonction $f$ de $\mathcal{C}(X \times A)$ peut être décomposée en une somme de deux vecteurs dont l'un est contenu dans $\mu_n$.

Il est clair qu'il existe $\varphi \notin \mu_n$ $\quad \varphi \in \mathcal{C}(X \times A)$

Alors $\forall f_i \in \mathscr{C}(X \times A) \qquad f_i = f_i^{(1)} + k_i \varphi \qquad \varphi(x_1, a) \neq \varphi(x'_1, a)$

$$F(x,a,b) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i^{(1)}(x,a)\beta_i(b) + \varphi \sum_{i=1}^{\infty} k_i \ \beta_i(b)$$

or par hypothèse $F(x_1,a,b) = F(x'_1,a,b)$ donc $\sum_1^{\infty} k_i \ \beta_i(b)\left[\varphi(x_1,a)-\varphi(x'_1,a)\right] = 0$

ce qui entraîne $\sum k_i \ \beta_i(b) = 0$ CQFD

<u>Soit</u> $n > 1$

On identifie $\mu_n$ à $\mathscr{C}(X_n \times A)$, $X_n$ étant déduit de $X$ par identification de $x_j$ à $x'_j$ pour $j=1$ à $n$.

Supposons les relations ($\mathscr{S}$) démontrées jusqu'à l'ordre $n-1$.

Soit $F \in M_n \subset M_{n-1}$. Alors $F \in \mu_{n-1} \hat{\otimes} \mathscr{C}(B) = \mathscr{C}(X_{n-1} \times A) \hat{\otimes} \mathscr{C}(B)$ et

$JF(x_n,a,b) = JF(x'_n,a,b)$. On est ramené au cas $n=1$.

## Chapitre VIII

## Problèmes de type Bernstein

– On désigne par $\Lambda_\alpha(\mathbb{T}^n, B)$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{T}^n$ à valeurs dans un Banach $B$, telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{T}^n \qquad \|f(x)-f(y)\|_B = O(\|x-y\|^\alpha_{\mathbb{T}^n})$$

et $\|x-y\|_{\mathbb{T}^n} = \frac{1}{n} \sum_i |x_i - y_i|$

<u>Remarque</u> 1 : <u>Si</u> $\alpha' > \alpha$ <u>on</u> <u>a</u> $\Lambda_{\alpha'}(\mathbb{T}^n, B) \subset \Lambda_\alpha(\mathbb{T}^n, B)$.

– Soit $D_\infty = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\infty$

On a défini les applications surjectives : $D_\infty \xrightarrow{d} \mathbb{T}$

$$D^n_\infty \xrightarrow{d^n} \mathbb{T}^n$$

$D_\infty$ est muni de la métrique $\Delta(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j - y_j}{2^j} = \Delta(0, x+y)$

$d$ est alors une application de $\Lambda_1(D_\infty)$ :

Soient $t, u \in \mathbb{T}$. $t = e^{2i\pi x}$ $u = e^{2i\pi y}$ $x, y \in [0\ 1] \rightsquigarrow x', y' \in D_\infty$

$$|t-u|_{\mathbb{T}} = |e^{2i\pi(x-y)} - 1| = 2|\sin \pi(x-y)| \leqslant 2\pi |x-y| = 2\pi \Delta(0, |x'-y'|)$$

$$\leqslant 2\pi \Delta(x', y')$$

<u>Remarque</u> 2 : $D^n_\infty$ étant muni de la métrique produit, $d^n \in \Lambda_1(D^n_\infty)$, donc <u>$\Lambda_\alpha(\mathbb{T}^n, B) \subset \Lambda_\alpha(D^n_\infty, B)$</u>. On ne peut identifier $D_\infty$ à $D^n_\infty$ car cette identification ne préserve pas la métrique.

– Soit $D_r = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ $\quad r$ entier $> 0$.

On considère les projections surjectives $p_r : D_\infty \longrightarrow D_r$

$p_r^n : D_\infty^n \longrightarrow D_r^n$

et l'application induite $\check{p}_r^n : \mathscr{C}(D_r^n) \longrightarrow \mathscr{C}(D_\infty^n)$

Remarque 3 : On sait que les applications $\check{p}_r^n \hat{\otimes} \check{p}_r^m : \mathscr{C}(D_r^n) \hat{\otimes} \mathscr{C}(D_r^m) \longrightarrow \mathscr{C}(D_\infty^n) \hat{\otimes} \mathscr{C}(D_\infty^m)$

et $\check{p}_r^n \hat{\otimes} \check{\mathrm{Id}}_K : \mathscr{C}(D_r^n) \hat{\otimes} \mathscr{C}(K) \longrightarrow \mathscr{C}(D_\infty^n) \hat{\otimes} \mathscr{C}(K)$

où $K$ est un compact quelconque, sont isométriques.

- Soient $K_1 \ldots K_n$ des espaces finis, de cardinaux $p_1 \ldots p_n$.

On a alors de façon évidente :

$$V(K) = \mathscr{C}(K_1) \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \mathscr{C}(K_n) \longleftrightarrow \mathscr{C}(K_1 \times \ldots \times K_n) = \mathscr{C}(K)$$

Mais cette bijection n'est pas isométrique.

Lorsque $K_1 \ldots K_n$ sont des compacts quelconques, on sait que

$$V(K) \underset{\subset}{\longrightarrow} \mathscr{C}(K)$$

Soit $BM(V)$ le dual topologique de $V(K)$, ou espace des bimesures sur $K$.

$$BM(V) \supset M(K)$$

Proposition 1. Si $K_1 \ldots K_n$ sont des espaces finis, $BM(V) = M(K)$, les normes étant équivalentes.

On note $p_1 \ldots p_n$ les cardinaux de $K_1 \ldots K_n$.

$$\forall f \in V(K) \qquad f = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \, e_\nu^1 \otimes \ldots \otimes e_\nu^n$$

avec $e_\nu^i \in \mathscr{C}(K_i)$ et $\|e_\nu^i\|_\infty \leq 1 \quad \forall \nu \quad \forall i, \; 1 \leq i \leq n$.

$$\|f\|_V = \inf_{\text{pour toutes les décompositions}} \sum |\alpha_\nu| \longrightarrow \|f\|_V \geq \|f\|_\infty$$

Soit $\mu \in M(K)$.

$$\|\mu\|_{M(K)} = \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}(K) \\ \|f\|_\infty \leq 1}} |<f,\mu>| \geqslant \sup_{\substack{f \in V(K) \\ \|f\|_V \leq 1}} |<f,\mu>| = \|\mu\|_{BM(V)}$$

- Soit $\mu \in BM(V)$

$$\|\mu\|_{BM(V)} = \sup_{\substack{f = e^1 \otimes \cdots \otimes e^n \\ \|e^i\|_\infty \leq 1}} |<f,\mu>|$$

$$e^i \in \mathcal{C}(K_i) \qquad e^i(k_i^{r_i}) = u_i^{r_i} \in \mathbb{C} \qquad 1 \leq r_i \leq p_i$$

$$<e^1 \otimes \cdots \otimes e^n, \mu> = \sum_{r=(r_1 \cdots r_n)} \mu_r \, u_1^{r_1} \cdots u_n^{r_n}$$

$$\|\mu\|_{BM(V)} = \sup_{|u_i^{r_i}| \leq 1} \left| \sum_r \mu_r \, u_1^{r_1} \cdots u_n^{r_n} \right| = \sup_{|u_i^{r_i}| \leq 1} \sum_r |\mu_r \, u_1^{r_1} \cdots u_n^{r_n}|$$

$$= \sup_{\substack{|u_i^{r_i}| \leq 1 \\ 1 \leq i \leq n-1}} \sum_{r_1 \cdots r_{n-1}} \sum_{r_n=1}^{r_n=p_n} |\mu_r \, u_1^{r_1} \cdots u_{n-1}^{r_{n-1}}|$$

On décompose les $u_i^{r_i} \in \mathbb{C}$ en parties réelle et imaginaire.

$$\|\mu\|_{BM(V)} \left[ = \sup_{\substack{|u_i^{r_i}| \leq 1 \\ 1 \leq i \leq n-1}} \sum_{\substack{r_1 \cdots r_{n-1} \\ u_i^{r_i} \in \mathbb{R}}} \sum_{r_n=1}^{r_n=p_n} |\mu_r \, u_1^{r_1} \cdots u_{n-1}^{r_{n-1}}| \right] \times 2^{n-1} \qquad u_i^{r_i} \in \mathbb{R}$$

$$\|\mu\|_{BM(V)} \geqslant 2^{n-1} \left[ \sup_{\substack{u_i^{r_i} = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq n-1}} \sum_{r_1 \cdots r_{n-1}} \sum_{r_n} |\mu_{r_1 \cdots r_{n-1} r_n} \, u_1^{r_1} \cdots u_{n-1}^{r_{n-1}}| \right.$$

$\mu$ est aussi une forme linéaire bornée sur $\mathcal{C}(K)$ car

$$\|\mu\|_{M(K)} = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} |<f,\mu>| = \sup_{\substack{|u_1^{r_1}\dots u_n^{r_n}|\leq 1 \\ \forall r=(r_1,\dots,r_n)}} \left|\sum \mu_r\, u_1^{r_1}\dots u_n^{r_n}\right| \leq \sum_r |\mu_r|$$

On utilise alors la théorie des probabilités, en associant à $u_i^{r_i}$ la variable aléatoire $u_i^{r_i}$ valant $\pm 1$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$ pour chaque valeur. Ces variables sont indépendantes les unes des autres.

Lemme. Soient $\alpha_1 \dots \alpha_K \in \mathbb{C}$. On considère la variable aléatoire $(\pm \alpha_1 \dots \pm \alpha_K)$ où les $\pm$ sont choisis au hasard avec probabilité $\frac{1}{2}$ indépendamment les uns des autres.

Alors $\mathcal{E}|\pm \alpha_1 \dots \pm \alpha_K| \geq \frac{\sqrt{3}}{3} (|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_K|^2)^{\frac{1}{2}}$

D'après l'inégalité de Hölder,

$$\mathcal{E}|\pm \alpha_1 \dots \pm \alpha_K|^2 \leq \left[\mathcal{E}|\pm \alpha_1 \dots \pm \alpha_K|\right]^{2/3} \left[\mathcal{E}|\pm \alpha_1 \dots \pm \alpha_K|^4\right]^{1/3}$$

Les $\pm$ étant indépendants, $\mathcal{E}|\pm \alpha_1 \dots \pm \alpha_K|^2 = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_K|^2$

$$\mathcal{E}|\pm \alpha_1 \dots \pm \alpha_K|^4 = |\alpha_1|^4 + \dots + |\alpha_K|^4 + 6 \sum_{i<j} |\alpha_i|^2 |\alpha_j|^2$$
$$\leq 3 (|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_K|^2)^2$$

On obtient ici :

$$\|\mu\|_{BM(V)} \geq 2^{n-1} \sup_{\substack{u_i^{r_i} = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq n-2}} \sum_{r_n\, r_1 \dots r_{n-2}} |u_1^{r_1} \dots u_{n-2}^{r_{n-2}}|\, \mathcal{E}\left|\sum_{r_{n-1}} \mu_{r_1 \dots r_{n-1} r_n}\, u_{n-1}^{r_{n-1}}\right|$$

Or $\mathcal{E}\left|\sum_{r_{n-1}} \mu_r\, u_{n-1}^{r_{n-1}}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sum_{r_{n-1}=1}^{r_{n-1}=p_{n-1}} |\mu_r|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{p_{n-1}}} \sum_{r_{n-1}} |\mu_r|$

La dernière inégalité n'est autre que l'inégalité de Schwarz.

En recommençant pour $r_{n-2}\dots r_1$ on a :

$$\|\mu\|_{BM(V)} \geqslant \frac{2^{n-1}}{\sqrt{p_1\dots p_{n-1}}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} \sum_{r_n}\sum_{r_1\dots r_{n-1}} |\mu_r| \geqslant \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{p_1\dots p_{n-1}}}\|\mu\|_{M(K)}$$

– Alors

$$\forall f \in V(K)\ \|f\|_V = \sup_{\substack{\mu\in BM(V)\\ \|\mu\|_{BM}\leqslant 1}} |<f,\mu>| \leqslant \sup_{\substack{\mu\in M(K)\\ \|\mu\|_M \leqslant \sqrt{p_1\dots p_{n-1}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}}} |<f,\mu>| = \sqrt{p_1\dots p_{n-1}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}\|f\|_\infty$$

ce qui démontre la

<u>Proposition</u> 2. Si $K_1\dots K_n$ sont des espaces finis, $V(K) = \mathscr{C}(K)$, les normes étant équivalentes.

<u>Proposition</u> 3. Si $K_1\dots K_{n-1}$ sont des espaces finis, $K_n$ un compact quelconque, $V(K) = \mathscr{C}(K)$, les normes étant équivalentes.

– On vérifie aisément que $V(K) = \mathscr{C}(K_1)\hat{\otimes}\dots\hat{\otimes}\mathscr{C}(K_n) = \mathscr{C}(K_1\times\dots\times K_{n-1})\hat{\otimes}\mathscr{C}(K_n)$ est algébriquement isomorphe à $\mathscr{C}(K_1\times\dots\times K_n)$, en posant

$$\forall f(t,k)\in\mathscr{C}(K_1\dots K_n)\ ,\quad f = \sum_{t_i\in\mathscr{C}(K_1\times\dots\times K_{n-1})} f_{t_i}\otimes 1_{\delta_{tt_i}} \quad \text{avec } \delta_{tt_i} \begin{array}{l} =1 \text{ si } t=t_i \\ =0 \text{ si } t\neq t_i\end{array}$$

– On remarque que la constante $\sqrt{p_1\dots p_{n-1}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$ de la proposition 2 est indépendante du cardinal du dernier espace.

La boule unité de $BM(V)$ est l'enveloppe convexe faiblement fermée de ses points extrémaux qui sont les bimesures à support fini . Ce sont aussi des mesures sur $\mathscr{C}(K)$.

$$\|f\|_V = \sup_{\substack{\mu \in BM(V) \\ \mu \text{ discrète} \\ \|\mu\|_{BM} \leq 1}} |<f,\mu>| \leq \sqrt{p_1 \dots p_{n-1}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} \|f\|_\infty$$

(pour chaque $\mu$ discrète on considère la restriction de $f$ à

$K_1 \times \dots \times K_{n-1} \times \operatorname{Supp} \mu$ et on applique la proposition 2).

<u>Théorème</u> : Pour $m$ entier $> 0$ et $B = \mathcal{C}(K)$ $K$ compact

on a
$$\Lambda_{\frac{m}{2}+\varepsilon}(\mathbb{T}^m, B) \xrightarrow{\subseteq} \mathcal{C}(\mathbb{T}^m) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K).$$

(1)
$$\underline{\Lambda_{\frac{m}{2}}(D^m_\infty, B) \xrightarrow{\subseteq} \mathcal{C}(D^m_\infty) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K).}$$

Soit $f \in \Lambda_\alpha(D^m_\infty, B)$

On lui associe $f_r$ :
$$\begin{tikzcd} D^m_\infty \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_r"'] & \mathcal{C}(K) \\ D^m_r \arrow[ur, "f_r"'] & \end{tikzcd}$$

Soit $dt$ la mesure de Haar de $D^m_\infty$. On pose

$\forall x \in D^m_r$ $\quad f_r(x) = 2^{rm} \displaystyle\int_{\{t \mid p^m_r(t) = x\} = Z_r(x)} f(t)\,dt$ $\qquad f_r \in \mathcal{C}(D^m_r, B)$

(si $f(t) = 1$ $\quad \forall t \in Z_r(x)$ on obtient bien $f_r(x) = 1$)

$$\forall x \in D_r \qquad \|f_r(x)\| \leq \sup_{t \in Z_r(x)} \|f(t)\|$$

d'où $\|f_r\|_\infty \leq \|f\|_\infty$

$$\|\check{p}^m_r(f_r) - f\|_\infty = \sup_{x \in D^m_r} \left[ \sup_{t \in Z_r(x)} \|f(t) - f_r(x)\| \right] = 0 \quad (\text{diamètre de } Z_r(x))^\alpha = 0(m2^{-r\alpha})$$

Soit $\varphi_r = f_r - (f_{r-1})$ $\quad \varphi_r \in \mathcal{C}(D^m_r, B)$ $\quad \|\varphi_r\|_\infty = 0(2^{-r\alpha})$

$f = \lim_{r \to \infty} (\check{p}^m_r f_r)$ pour la convergence uniforme dans $\mathcal{C}(D^m_\infty, B)$

ou $f = \displaystyle\sum_1^\infty \check{p}^m_r \varphi_r$

On vérifie facilement que $\mathcal{C}(G,B)$ s'identifie à $\mathcal{C}(G \times K)$ pour tout groupe $G$ compact, en posant $f(g,k) = f_g(k)$.

D'après la proposition 3

$$\varphi_r \in \mathcal{C}(D_r^m,B) = \mathcal{C}(D_r^m \times K) \Longrightarrow \varphi_r \in \mathcal{C}(D_r^m) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K) = V_r$$

$$\|\varphi_r\|_{V_r} = 0\ (\sqrt{2^{rm}}\ \|\varphi_r\|_{\infty}) = 0\left(2^{r(\frac{m}{2}-\alpha)}\right)$$

et $\|\varphi_r\|_{V_r} = \|\check{p}_r^m(\varphi_r)\|_{\mathcal{C}(D_\infty^m)\hat{\otimes}\mathcal{C}(K)}$ d'après la remarque 3

La série $\sum_1^\infty \check{p}_r^m(\varphi_r)$ converge dans $\mathcal{C}(D_\infty^m)\hat{\otimes}\mathcal{C}(K)$ pourvu que $\alpha > \frac{m}{2}$ et a pour limite $f$. Donc $f \in \mathcal{C}(D_\infty^m)\hat{\otimes}\mathcal{C}(K)$.

(2) $$\Lambda_\alpha(\mathbb{T}^m,B) \subset \Lambda_\alpha(D_\infty^m,B)$$

$$\alpha > \frac{m}{2} \Longrightarrow \Delta_\alpha(D_\infty^m,B) \subset \mathcal{C}(D_\infty^m)\hat{\otimes}\mathcal{C}(K)$$

D'autre part $\Lambda_\alpha(\mathbb{T}^m,B) \subset \mathcal{C}(\mathbb{T}^m,B) = \mathcal{C}(\mathbb{T}^m \times K)$

et on sait que $\mathcal{C}(D_\infty^m)\hat{\otimes}\mathcal{C}(K) \cap \mathcal{C}(\mathbb{T}^m \times K) = \mathcal{C}(\mathbb{T}^m)\hat{\otimes}\mathcal{C}(K)$ (en identifiant $\mathcal{C}(D_\infty^m)$ à $\mathcal{C}(D_\infty)$).

La même méthode permet de montrer le théorème suivant :

<u>Théorème</u> : $$\Lambda_{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{T}) \xrightarrow{\subset} \mathcal{C}(\mathbb{T}^m)\hat{\otimes}\mathcal{C}(\mathbb{T}).$$

(les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{C}$).

Il suffit de montrer que $\Lambda_{\frac{1}{2}+\varepsilon}(D_\infty^m \times D_\infty) \subset \mathcal{C}(D_\infty^m)\hat{\otimes}\mathcal{C}(D_\infty)$.

Soit $f \in \Lambda_\alpha(D_\infty^m \times D_\infty)$. On lui associe $f_r$ et $\varphi_r$.

$\varphi_r \in \mathcal{C}(D_r^m \times D_r)$ et d'après la proposition 1,

$$\varphi_r \in \mathcal{C}(D_r^m) \hat{\otimes} \mathcal{C}(D_r) = V_r \;;\; \|\varphi_r\|_{V_r} = 0\,(2^{r(\frac{1}{2}-\alpha)}) = \|\check{P}_r^m \hat{\otimes} P_r(\varphi_r)\|_{\mathcal{C}(D_\infty^m) \hat{\otimes} \mathcal{C}(D_\infty)}$$

d'après la remarque 3.

Donc $\alpha > \frac{1}{2} \Longrightarrow f \in \mathcal{C}(D_\infty^m) \hat{\otimes} \mathcal{C}(D_\infty)$.

<u>Corollaire</u> : $\underline{\Lambda_{\frac{m}{2}+\varepsilon}(\mathbb{T}^m) \xrightarrow{\subset} V(\mathbb{T}^m) \xrightarrow{\subset} A(\mathbb{T}^m)}$

en effet $\Lambda_{\frac{m}{2}+\varepsilon}(\mathbb{T}^m) \xrightarrow{\subset} \Lambda_{\frac{m}{2}+\varepsilon}(\mathbb{T}^m, B)$ où $B = \mathcal{C}(\mathbb{T}^m)$

$\subset \mathcal{C}(\mathbb{T}^m) \hat{\otimes} \mathcal{C}(\mathbb{T}^m) = V(\mathbb{T}^m) \xrightarrow{\subset} A(\mathbb{T}^m)$ en utilisant l'application de Hopf P.

## Bibliographie


[1] BOURBAKI.- Algebre linéaire.- Chapitre 2, ASI, 1236.

[2] BOURBAKI.- Topologie générale.- Chapitre 9, § 6, nº 8, ASI, 1045.

[3] KAHANE et SALEM.- Ensembles parfaits et séries trigonométriques.- ASI, 1301.

[4] RUDIN(W.).- Fourier Analysis on Groups.- Interscience Publishers.

[5] SEMINAIRE SCHWARTZ.- Produit tensoriel topologique d'espaces vectoriels topologiques.- 1953-54.

[6] SCHWARTZ.- Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts.- CRASCI, Paris, t. 227, p. 424-426, 1948.

[7] VAROPOULOS.- Tensor Algebras and Harmonic Analysis.- Acta Mathematica 119 novembre 1967.

[8] VAROPOULOS.- Spectral synthesis on spheres.- Proc. Camb. Phil. Soc., 1966.

[9] VAROPOULOS.- Sur les ensembles parfaits et séries trigonométriques.- Note de Varopoulos présentée par Leray, CRASCI, Paris, t. 260, p. 4668-4676, 1965.

[10] VAROPOULOS.- Algèbres tensorielles.- cours à Orsay, 1965-1966.

[11] VAROPOULOS.- Algèbres de Banach. Algèbres de groupes. Cours à Orsay 65-66.