

Faculté des Sciences d'Orsay

-:-:-:-

C3 Analyse Numérique

-:-:-:-

"Notions sur l'Approximation des fonctions"

-:-:-:-

R. Temam

Notes rédigées par MM.

C.M. Brauner

F. Lavainne

P. Penel

(Secrétariat de Mathématiques)

Faculté des Sciences d'Orsay

--:--:--:--

C3 Analyse Numérique

--:--:--:--

"Notions sur l'Approximation des fonctions"

--:--:--:--

R. Temam

Notes rédigées par MM.

C.M. Brauner

F. Lavainne

P. Penel

(Secrétariat de Mathématiques)

## §0 - Introduction

De manière schématique, le problème type dans la théorie de l'approximation des fonctions est le suivant : "approcher" les éléments d'un espace fonctionnel  $H$  par les éléments d'un sous-ensemble donné  $X$ .

L'exemple le plus usuel est celui où  $H$  est un espace de fonctions réelles continues sur un intervalle de  $\mathbb{R}$ , avec la norme de la convergence uniforme ou la norme de la convergence en moyenne d'ordre  $p$ , et  $X$  est l'ensemble  $\mathcal{P}_k$  des fonctions polynomiales de degré  $\leq k$ , ou l'ensemble de toutes les fonctions polynomiales. Parmi les autres exemples, citons le cas où  $H$  est l'espace des fonctions continues périodiques sur un intervalle, et  $X$  un sous-espace de fonctions trigonométriques ; ou aussi  $H =$  un espace  $L^p$ , ou un espace de Sobolev (§3).

Supposons que  $H$  est un espace normé. On peut espérer, pour le problème considéré, deux types de solution

1) On démontre que  $X$  est dense dans  $H$  ;

Autrement dit tout élément de  $H$  peut être approché d'aussi près que l'on veut par des éléments de  $X$ .

Parmi les résultats les plus célèbres dans ce genre, on a le théorème de Weierstrass (approximation de fonctions continues par des polynômes) ou plus généralement le théorème de Stone-Weierstrass. De même certains théorèmes de convergence dans la théorie des séries de Fourier.

2)  $X$  n'est pas dense dans  $H$  .

Si  $f \in H$  , alors la distance de  $f$  à  $X$

$$d(f, X) = \inf_{q \in X} \|f - q\|$$

est en général non nulle, et le problème intéressant est alors le suivant :

$$(0.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } p \in X , \text{ tel que} \\ \|f - p\| = d(f, X) \end{array} \right.$$

Définition.- Dans les conditions qui précèdent, si  $p$  vérifie (0.1), on dit que  $p$  est un élément de meilleure approximation de  $f$  dans  $X$  .

Le problème (0.1) est un problème de meilleure approximation, et c'est ce type de problèmes auquel nous allons nous intéresser dans la suite.

Remarque.- Suivant que  $X$  est ou n'est pas un sous-espace vectoriel de  $H$  , on dit que le problème d'approximation considéré est linéaire ou non linéaire. Les méthodes sont assez différentes dans les deux cas.

## §1 - Approximation dans un espace préhilbertien

### 1.0 Rappels

Définition.- Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $K$ . On appelle forme hermitienne sur  $E$  toute application  $\varphi$  de  $E \times E$  dans  $K$  telle que

$$1^\circ) \forall y \in E \quad x \rightarrow \varphi(x, y) \text{ est une forme linéaire sur } E$$

$$2^\circ) \forall x, y \in E \text{ on a } \varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}.$$

Définition.- On appelle espace préhilbertien un ensemble  $E$  muni de la structure définie par la donnée sur  $E$  d'une structure d'espace vectoriel par rapport à  $K$  ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) et d'une forme hermitienne positive (si  $\varphi(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in E$ ).

Il est bien connu que  $\varphi(x, x)$  est alors une semi norme sur  $E$ . Si c'est une norme (i.e.  $\varphi(x, x) = 0 \iff x = 0$ ) on dit que l'espace préhilbertien est séparé.

Définition.- On appelle espace de Hilbert un espace préhilbertien séparé complet (pour la norme associée à  $\varphi$ ).

1.1 Proposition.- Soient  $H$  un espace préhilbertien réel séparé et  $X$  un sous-ensemble convexe complet dans  $H$ . Alors  $\forall f \in H \exists ! u \in X$  t.q.  $\|f-u\| = d(f, X)$ .

Démonstration :

$$\text{Soient } \delta = d(f, X) = \inf_{v \in X} \|f-v\| \quad B_n = B_{\text{fermée}}(f, \delta + \frac{1}{n})$$

$$C_n = X \cap B_n \text{ est fermé non vide}$$

$$\text{il vient : } \{u \in X \text{ t.q. } \|f-u\| = \delta\} = \bigcap_{n \geq 1} C_n.$$

$$\text{Déterminons le diamètre de } C_n : \delta(C_n) = \sup_{v, w \in C_n} \|v-w\|.$$

Si  $v$  et  $w \in X$ , alors  $m = \frac{v+w}{2} \in C_n$  par convexité

$(2 \|f-m\|)^2 + \|v-w\|^2 = 2[\|f-v\|^2 + \|f-w\|^2]$  d'après la règle du parallélogramme.

On a  $\|f-v\| \leq \delta + \frac{1}{n}$  et  $\|f-m\| \geq \delta$

d'où  $\|v-w\|^2 \leq 4(\delta + \frac{1}{n})^2 - 4\delta^2$

$$\delta(C_n) \leq \left(\frac{8\delta}{n} + \frac{4}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Dans un espace métrique complet, une suite décroissante de fermés dont le diamètre tend vers 0, a une intersection réduite à un point.

D'où l'existence et l'unicité de la m.a.

Remarque.- Cette proposition est valable sous des hypothèses plus générales sur

l'espace  $H$  elle s'étend aux espaces de Banach uniformément convexes

\* cf. plus loin le théorème 2.1.3.

1.2 Définition.- Dans les conditions de la proposition 1.1 on dit que  $u$  est la projection de  $f$  sur  $X$  et l'application  $f \mapsto u$  s'appelle le projecteur dans  $H$  sur  $X$  (par analogie avec le cas où  $X$  est un sous-espace complet de  $H$ ).

On note  $u = \text{proj}_X f$ .

Remarquer que  $\text{proj}_X f = f, \forall f \in X$  et donc  $\text{proj}_X$  est une surjection sur  $X$ .

1.3 Proposition.- Sous les hypothèses de la proposition 1.1, une condition nécessaire et suffisante pour que  $u \in X$  soit la projection de  $f$  est que  $\langle u-v, f-u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in X$ .

Démonstration :

Soient  $u = \text{proj}_X f$   $v \in X$  et  $\theta \in [0,1]$  alors  $\theta v + (1-\theta)u \in X$

$$\begin{aligned} \|f-u\|^2 &\leq \|f - [\theta v + (1-\theta)u]\|^2 = \|f-u + \theta(u-v)\|^2 \\ &= \|f-u\|^2 + \theta^2 \|u-v\|^2 + 2\theta \langle f-u, u-v \rangle \end{aligned}$$

soit  $2\langle f-u, u-v \rangle + \theta \|u-v\|^2 \geq 0 \quad \forall \theta \in [0,1]$

faisons tendre  $\theta$  vers 0, il vient  $\langle f-u, u-v \rangle \geq 0$ .

Réciproquement soit  $u \in X$  tel que  $\langle u-v, f-u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in X$ .

$$\begin{aligned} \text{On a } \|f-v\|^2 &= \|f-u+u-v\|^2 = \|f-u\|^2 + 2\langle f-u, u-v \rangle + \|u-v\|^2 \\ &\geq \|f-u\|^2 \end{aligned}$$

alors  $\|f-v\| \geq \|f-u\| \quad \forall v \in X$  et par suite  $u = \text{proj}_X f$  c.q.f.d.

Cas particuliers de la proposition 1.3

1.4 Définition.- On dit que  $X \subset H$  est un cône (pointé) de sommet 0, s'il est stable par les homothéties de rapport  $\lambda > 0$  ( $\geq 0$ ).

1.5 Proposition.- Soit  $X$  un cône pointé convexe complet de sommet 0. Alors une condition nécessaire et suffisante pour que  $u$  soit la projection de  $f$  sur  $X$  est que  $\langle u, f \rangle = \|u\|^2$  et  $\langle u, v \rangle \geq \langle f, v \rangle \quad \forall v \in X$ .

Démonstration :  $u$  est caractérisée par  $\langle u-v, f-u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in X$

si  $v = 0$  on a  $\langle u, f-u \rangle \geq 0$

si  $v = 2u$  on a  $-\langle u, f-u \rangle \geq 0$

donc  $\langle u, f-u \rangle = 0$  et  $\langle v, f-u \rangle \leq 0, \quad \forall v \in X$ .

Inversement ces deux conditions s'écrivent  $\langle u, f-u \rangle = 0$

et  $-\langle v, f-u \rangle \geq 0$

d'où  $(u-v, f-u) > 0 \quad v \in X \quad \underline{\text{c. q. f. d.}}$

6.

1.6 Exemple : Soit  $H = \mathcal{C}[0,1]$  muni du produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ .

Soit  $X = \{\varphi \in \mathcal{C}[0,1] ; \varphi(x) = \text{cste} \geq 0 \text{ sur } [0,1]\}$ .

C'est un cône pointé convexe complet de sommet 0.

Si  $f \in H$ , trouver la m.a. de  $f$  sur  $X$  c'est trouver la m.a. de  $f$  par une constante  $\geq 0$ . Soit  $u$  cette meilleure approximation.

$$u(x) \equiv \lambda \geq 0 ; \text{ si } v \in X, v(x) = \mu \geq 0.$$

D'après la proposition 1.5

$$\begin{aligned} (u, f) = |u|^2 &\implies \int_0^1 \lambda f(x) dx = \lambda \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \lambda^2 dx \\ &\implies \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = \int_0^1 f(x) dx. \end{aligned}$$

. Si  $\int_0^1 f(x) dx \leq 0 \implies \lambda = 0$  car  $\lambda$  doit être  $\geq 0$ .

. Si  $\int_0^1 f(x) dx \geq 0$ , on utilise le fait que :  $\langle v, f \rangle \leq \langle v, u \rangle, \forall v \in X$ .

i.e.  $\int_0^1 \mu f(x) dx \leq \int_0^1 \lambda \mu dx = \lambda \mu, \forall \mu \geq 0 \implies \int_0^1 f(x) dx \leq \lambda$ .

Donc  $\int_0^1 f(x) dx \geq 0 \implies \lambda = \int_0^1 f(x) dx$ .

Par conséquent la m.a. de  $f \in \mathcal{C}[0,1]$  par une constante  $\geq 0$  est :  $\int_0^1 f(x) dx$

si  $\int_0^1 f(x) dx \geq 0$  ; 0 sinon.

1.7 Proposition.- Soient  $Y$  un sous-espace complet de  $H$  et  $X = \varphi + Y$  le translaté de  $Y$  par  $\varphi \in H$ .

Alors  $u$  est la projection de  $f$  sur  $X$  si et seulement si  $u \in X$  et  $f-u$  est orthogonal à  $Y$ .

En effet  $\forall w \in Y$  si  $u = \text{pro}_X f$   $u-w$  et  $u+w \in X$  d'où  $(w, f-u) = 0$  d'après



la caractérisation 1.3 de  $u$ . Réciproquement supposons que pour  $u \in X$  on ait  $(w, f-u) = 0 \quad \forall w \in Y$  on a alors  $\forall v \in X, w = u-v \in Y$  d'où  $(u-v, f-u) = 0$

c. q. f. d.

## 1.8 Applications

### 1.8.1 Détermination de la meilleure approximation

Soit  $X = \varphi + Y$ , où  $\varphi \in H$  et  $Y$  est un sous-espace vectoriel de  $H$  de dimension finie  $n$ .

$X$  est isomorphe à  $Y$  et  $Y$  isomorphe à  $\mathbb{R}^n$ , donc  $X$  est complet.

Soit  $e_1, e_2, \dots, e_n$  une base de  $Y$ .

Soit  $f \in H$ , et soit  $u$  la m.a. de  $f$  dans  $X$ ,  $u = \varphi + \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$ .

Proposition. - Les  $\lambda_j$  sont solutions du système

$$\sum_{j=1}^n \langle e_i, e_j \rangle \lambda_j = \langle f - \varphi, e_i \rangle \quad 1 \leq i \leq n$$

qui est de Cramer.

Démonstration : D'après la proposition 1.6 :

$$u \text{ m.a. de } f \iff u \in X \text{ et } (f-u) \perp Y$$

$$\iff (f-u) \perp e_i \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{ou} \quad \langle (f-u), e_i \rangle = 0$$

$$\iff \langle f - \varphi - \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j, e_i \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$\iff \sum_{j=1}^n \langle e_i, e_j \rangle \lambda_j = \langle f - \varphi, e_i \rangle \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ce système est de Cramer, car il existe une seule m.a.

Remarque. - Il est intéressant de prendre une base orthogonale.

Exemple : Prenons  $H = \mathcal{C}[0,1]$  muni de la norme quadratique :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx.$$

Soit  $Y$  l'espace des trinômes tels que  $p(1) = 0$ ,  $X = \varphi + Y$ , avec  $\varphi \equiv 1$  sur  $[0,1]$ .

Par conséquent :  $p \in Y \iff p(x) = ax^2 + bx + c$  et  $a + b + c = 0$  ;

donc  $p(x) = a(x^2 - 1) + b(x - 1)$ .

Comme base de  $Y$  on choisit  $e_1(x) = x^2 - 1$   
 $e_2(x) = x - 1$ ,

et on cherche la meilleure approximation  $u$  de  $f$  dans  $X = \varphi + Y$

$u(x) = \varphi(x) + p(x) = 1 + a(x^2 - 1) + b(x - 1)$ . On a  $\langle f - u, e_i \rangle = 0 \quad i=1,2 \implies$

$\langle f, e_i \rangle = \langle u, e_i \rangle \quad i=1,2$  ce qui donne le système (en  $a$  et  $b$ ) :

$$\langle f, x-1 \rangle = \langle 1+a(x^2-1)+b(x-1), x-1 \rangle$$

$$\langle f, x^2-1 \rangle = \langle 1+a(x^2-1)+b(x-1), x^2-1 \rangle$$

### 1.8.2 Méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés a pour but de résoudre au mieux un système de  $m$  équations à  $n$  inconnues lorsque  $m > n$  (et que les équations ne sont pas compatibles).

$$\text{Soit } \sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_j = c_i \quad 1 \leq i \leq m$$

ce système où les inconnues sont :  $\lambda_j \quad 1 \leq j \leq n$ .

On prend  $H = \mathbb{R}^m$  avec le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^m f_i g_i$$

Le système développé donne :

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} \lambda_1 + \dots + a_{1j} \lambda_j + \dots + a_{1n} \lambda_n & = & c_1 & \vdots & & & \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ a_{i1} \lambda_1 + \dots + a_{ij} \lambda_j + \dots + a_{in} \lambda_n & = & c_i & \vdots & & & \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ a_{m1} \lambda_1 + \dots + a_{mj} \lambda_j + \dots + a_{mn} \lambda_n & = & c_m & \vdots & & & \end{array}$$

avec  $m$  lignes et  $n$  colonnes.

Si on pose  $f = (c_1, c_2, \dots, c_m)$

$$a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) \quad \text{où } f \text{ et } a_j \in \mathbb{R}^m = H$$

le système devient :

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \lambda_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \lambda_j + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{in} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \lambda_n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

$$\text{ou : } a_1 \lambda_1 + \dots + a_j \lambda_j + \dots + a_n \lambda_n = f .$$

Prenons pour  $X$  l'espace engendré par  $a_1, \dots, a_n$ .

Si  $f \notin X$  il n'existe pas de  $\lambda_j$  tels que  $f = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j$ .

\* Une des solutions du problème consiste à chercher les  $\lambda_j$  tels que

$\|f - \sum_{j=1}^n a_j \lambda_j\|$  soit minimum. Cela revient à chercher  $u = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j$ , meil-

leure approximation de  $f \in H$ , dans  $X$ . On a donc à résoudre :

$$\langle f - \sum_{j=1}^n a_j \lambda_j, a_i \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \text{ou} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle a_j, a_i \rangle = \langle f, a_i \rangle$$

$$\text{avec } \langle a_j, a_i \rangle = \sum_{k=1}^m a_{kj} a_{ki} \quad \text{et} \quad \langle f, a_i \rangle = \sum_{k=1}^m c_k a_{ki} .$$

\* Autres solutions :

- On peut prendre un autre produit scalaire sur  $\mathbb{R}^m$  :  $\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^m \alpha_k f_k g_k$ ,

$\alpha_k > 0$  ; ceci revient à pondérer différemment les équations.

- On peut prendre une norme non hilbertienne sur  $\mathbb{R}^m$  (par exemple

$\|f\| = \max_k |f_k|$ ) ; mais cela n'entre plus dans le cadre précédent.

Exemple :

La situation précédente se rencontre chaque fois qu'il s'agit d'exploiter des résultats numériques redondants : par exemple quelle valeur attribuer aux angles d'un triangle si leur mesure donne (en  $^\circ$ ) 31, 61, 91. Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les deux premiers angles on a le système (inconsistant)

$$\lambda_1 = 31$$

$$\lambda_2 = 61$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 180 - 91 = 89 .$$

## 1.9 Approximation des fonctions continues

### 1.9.1 Polynômes orthogonaux

Soient  $I$  un intervalle fermé, borné ou non de  $\mathbb{R}$  et  $\mu$  une fonction de  $L^1(I)$ , strictement positive presque partout sur  $I$ .

Nous appellerons cette fonction  $\mu$ , un poids sur  $I$ . Soit  $H$ , l'espace  $\mathcal{C}(I)$  des fonctions continues sur  $I$ , muni du produit scalaire :

$$(f, g)_\mu = \int_I f(x)g(x)\mu(x)dx . \text{ Vérifions que la fonction}$$

$$(f, g)_\mu = \int_I f(x)g(x)\mu(x)dx \text{ est bien un produit scalaire sur } \mathcal{C}(I).$$

Il est facile de voir que c'est une forme hermitienne positive. De plus comme

$$\mu > 0 , \text{ presque partout sur } I ; (f, f)_\mu = \int_I f^2(x)\mu(x)dx = 0 \text{ entraîne } f \equiv 0$$

sur  $I$ . Nous noterons  $\mathcal{C}_\mu(I)$ , cet espace  $H$ .

Soit  $X = \mathcal{P}_n$  l'espace des polynômes de degré  $\leq n$ .  $X$  est un sous-espace de dimension finie ( $= n+1$ ) de  $H$ , il est donc convexe et complet. On a déjà vu que toute fonction de  $H$ , admet alors un élément de meilleure approximation unique dans  $X$ , qui est ici un polynôme de degré  $\leq n$ .

Soit  $e_0, e_1, \dots, e_n$  une base de  $X = \mathcal{P}_n$ . On peut prendre par exemple les vecteurs  $e_j : e_j(x) = x^j$ . La meilleure approximation d'une fonction  $f$  de  $H$  dans  $X$  s'écrit donc  $u = \sum_{j=0}^n \lambda_j e_j$ , où

$$\begin{aligned} f-u \perp X &\iff (f-u, e_j)_\mu = 0 \quad 0 \leq j \leq n \\ &\iff (f, e_j)_\mu = \sum_{i=0}^n \lambda_i (e_i, e_j)_\mu, \quad 0 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} (e_i, e_j)_\mu &= \int_I e_i(x) e_j(x) \mu(x) dx. \\ (f, e_j)_\mu &= \int_I f(x) e_j(x) \mu(x) dx. \end{aligned}$$

On obtient ainsi un système de  $(n+1)$  équations à  $(n+1)$  inconnues :

$$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n.$$

Pour le résoudre, il est plus simple de le diagonaliser ce qui revient à choisir comme base de  $X$ , une base orthogonale : ce sont les polynômes orthogonaux.

On va rappeler le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt dans le cas général.

\* Si  $H$  est un espace préhilbertien, et  $(e_0, e_1, \dots, e_n, \dots)$  une suite finie ou infinie, de vecteurs linéairement indépendants de  $H$ ; pour tout  $n$ , soit

$L_n$  le sous-espace de  $H$  engendré par  $e_0, e_1, \dots, e_n$ .

Si on pose  $p_0 = e_0$

$$p_{n+1} = e_{n+1} - \text{Projection sur } L_n \text{ de } e_{n+1}$$

la suite  $(p_n)$  est un système orthogonal, et pour tout  $n$ , les vecteurs

$p_0, p_1, \dots, p_n$  engendrent  $L_n$ .

- Cela se démontre par récurrence. Supposons démontré que  $(p_0, p_1, \dots, p_n)$  est un système orthogonal qui engendre  $L_n$ .

$$\text{Alors : } p_{n+1} = e_{n+1} - \sum_{i=0}^n (e_{n+1}, p_i) \frac{p_i}{\|p_i\|^2}$$

$$\text{donc } (p_{n+1}, p_i) = (e_{n+1}, p_i) - (e_{n+1}, p_i) \frac{\|p_i\|^2}{\|p_i\|^2} = 0 \quad \text{pour } i \leq n$$

$p_{n+1}$  est bien orthogonal à  $p_0, p_1, \dots, p_n$ .

De plus, comme  $e_{n+1} = p_{n+1} + (\text{un vecteur de } L_n)$  le système  $(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$  engendre le même espace que  $(e_0, e_1, \dots, e_{n+1})$ , c'est donc une base orthogonale. (Remarque : on peut aussi orthonormer cette base).

- La meilleure approximation de  $f \in H$  dans  $X = \mathcal{P}_n$  s'écrit donc

$$u = \sum_{j=0}^n \lambda_j p_j$$

$$((f-u), p_i)_\mu = 0, \forall i \iff (f, p_i)_\mu = \lambda_i \|p_i\|_\mu^2$$

$$\text{et } u = \sum_{j=0}^n \frac{(f, p_j)_\mu}{\|p_j\|_\mu^2} p_j$$

- Les polynômes  $p_0, p_1, \dots, p_n$  obtenus par ce procédé, avec le produit scalaire défini au début s'appellent les polynômes orthogonaux associés au poids  $\mu$  sur  $I$ .

Remarques : - On a : degré  $p_j = j$  ,  $\forall j$  .

- Si on utilise la base  $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ , les polynômes ainsi obtenus ont un coefficient de tête égal à 1 . Les polynômes orthogonaux usuellement considérés sont ceux qui précèdent, à un coefficient multiplicatif près. Le choix de ce coefficient est lié au type de polynôme considéré.

### 1.9.2 - Exemples classiques :

1°) Si  $I = [-1, +1]$  et  $\mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$  avec  $\alpha$  et  $\beta > -1$  (en sorte que  $\mu \in L^1(I)$ ) , les polynômes  $p_n$  correspondants s'appellent :

polynômes de Jacobi

\* Pour  $\alpha = \beta = 0$  , donc  $\mu(x) \equiv 1$  , ce sont les polynômes de Legendre

\* Pour  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$  , donc  $\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  , ce sont les polynômes de

Tchebycheff de 1ère espèce

\* Pour  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  , donc  $\mu(x) = \sqrt{1-x^2}$  , ce sont les polynômes de

Tchebycheff de 2ème espèce.

2°) Si  $I = ]-\infty, +\infty[$  et  $\mu(x) = e^{-x^2}$  ,

les polynômes  $p_n$  s'appellent polynômes d'Hermite.

3°) Si  $I = [0, +\infty[$  et  $\mu(x) = e^{-x}$  ,

les polynômes  $p_n$  s'appellent polynômes de Laguerre.

### 1.9.3 - Proposition : Lorsque l'intervalle $I$ est compact, les polynômes

$p_0, p_1, \dots, p_n, \dots$ , orthogonaux associés au poids  $\mu$  sur  $I$  forment une suite

orthogonale et totale dans  $\mathcal{C}_\mu(I)$ . Toute fonction  $f \in \mathcal{C}_\mu(I)$  admet un déve-

loppement convergent dans  $\mathcal{C}_\mu(I)$  :  $f = \sum_{i=0}^{+\infty} (f, p_i)_\mu \frac{p_i}{\|p_i\|_\mu^2}$  et on a  
 $\|f\|_\mu^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(f, p_i)_\mu^2}{\|p_i\|_\mu^2}$ .

Démonstration : D'après le théorème de Weierstrass, toute fonction  $f \in \mathcal{C}_\mu(I)$  est limite uniforme de polynômes donc de combinaisons linéaires des  $p_n$ . Or

$$\|f\|_\mu^2 = \int_I |f(x)|^2 \mu(x) dx \leq \|f\|^2 \int_I \mu(x) dx \quad \text{où } \|f\| = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

Cette inégalité montre que la convergence uniforme entraîne la convergence pour la norme de  $\mathcal{C}_\mu(I)$ . La famille des  $p_n$  est donc totale dans  $\mathcal{C}_\mu(I)$ .

Comme d'autre part elle est orthogonale, c'est une base orthogonale de  $\mathcal{C}_\mu(I)$ .

On a 
$$f = \sum_{i=0}^{+\infty} (f, p_i)_\mu \frac{p_i}{\|p_i\|_\mu^2}$$

Et la relation de Parseval donne :

$$\|f\|_\mu^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(f, p_i)_\mu^2}{\|p_i\|_\mu^2}$$

Remarques : - Rappelons qu'on appelle base orthogonale (orthonormale) d'un espace préhilbertien  $H$ , une famille orthogonale (orthonormale) et totale dans  $H$ .

- Une base orthogonale d'un espace préhilbertien  $H$  n'est pas une base algébrique de  $H$ , sauf dans le cas où  $H$  est de dimension finie.

- Tout espace préhilbertien séparé ne possède pas nécessairement de base orthonormale, mais tout espace de Hilbert admet une base orthonormale.

- La proposition précédente s'applique aussi à  $L^2(I, \mu(x) dx)$  car  $\mathcal{C}_\mu(I)$  est dense dans  $L^2(I, \mu(x) dx)$  [ $L^2(I, \mu(x) dx)$  est l'espace des fonctions  $f$  définies



nies sur  $I$ , de carré  $\mu$ -intégrable donc telles que  $\int_I f^2(x)\mu(x)dx < +\infty$  .

#### 1.9.4 Propriétés générales des suites de polynômes orthogonaux

Les polynômes orthogonaux  $p_n$  associés à un poids  $\mu$  sur  $I$  possèdent certaines propriétés indépendantes du poids  $\mu$  .

Proposition : Les  $n$  racines du polynôme  $p_n$  sont réelles distinctes et intérieures à  $I$  .

Démonstration : Remarquons d'abord que  $p_n$  est orthogonal à  $p_i \forall i=0,1,\dots,n-1$  et donc à toutes les combinaisons linéaires de  $p_0, \dots, p_{n-1}$  c'est-à-dire à tous les polynômes de degré  $< n$  . Soient  $t_1, t_2, \dots, t_m$  (où  $t_i < t_{i+1}$ ) les racines de  $p_n$ , réelles, intérieures à  $I$ , de multiplicité impaire (donc en lesquelles  $p_n$  change de signe). On a évidemment  $m \leq n$  .

Soit  $Q(x) = (x-t_1)\dots(x-t_m)$ .

Le polynôme  $p_n(x)Q(x)$  a un signe constant sur  $I$  et ne s'annule qu'en  $n$

points au plus. Par conséquent  $\int_I p_n(x)Q(x)\mu(x)dx \neq 0$  .

D'où : degré  $Q = m \geq n$  (sinon  $(Q, p_n)_\mu = 0$ ).

Par conséquent  $m = n$  c.q.f.d.

Proposition : Il existe trois suites de nombres réels  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  tels que pour  $n \geq 2$  on ait :

$$(1) \quad p_n(x) = (a_n x + b_n) p_{n-1}(x) - c_n p_{n-2}(x)$$

De plus si  $p_n(x) = k_n x^n + s_n x^{n-1} + \dots$

$$a_n = \frac{k_n}{k_{n-1}} ; b_n = a_n \left( \frac{s_n}{k_n} - \frac{s_{n-1}}{k_{n-1}} \right) ; c_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{\|p_{n-1}\|_\mu^2}{\|p_{n-2}\|_\mu^2}$$

ou encore :

$$x p_{n-1}(x) = \frac{k_{n-1}}{k_n} p_n(x) - \left( \frac{s_n}{k_n} - \frac{s_{n-1}}{k_{n-1}} \right) p_{n-1}(x) + \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}} \frac{\|p_{n-1}\|_\mu^2}{\|p_{n-2}\|_\mu^2} p_{n-2}(x).$$

Démonstration :

Le polynôme  $x p_{n-1}(x)$  est de degré  $n$ , il s'écrit donc :

$$\sum_{j=0}^n \rho_j p_j(x)$$

Pour  $i < n$  on a :  $(x p_{n-1}, p_i)_\mu = \rho_i \|p_i\|_\mu^2$ .

De plus :  $(x p_{n-1}, p_i)_\mu = \int_I x p_{n-1}(x) p_i(x) \mu(x) dx = (p_{n-1}, x p_i)_\mu$

$x p_i$  est un polynôme de degré  $i+1$ .

Par conséquent pour  $i+1 < n-1$  ou  $i < n-2$  on a :  $(p_{n-1}, x p_i)_\mu = 0$

et  $\rho_i = 0$  pour  $i \neq n, n-1, n-2$  et on a la relation de récurrence (1).

Dans (1), on exhibe les coefficients du terme

- de degré  $n$  :  $k_n = a_n k_{n-1} \implies a_n = \frac{k_n}{k_{n-1}}$

- de degré  $n-1$  :  $s_n = s_{n-1} a_n + b_n k_{n-1}$

$$b_n = \frac{s_n}{k_{n-1}} - s_{n-1} \frac{k_n}{k_{n-1}^2} = \frac{k_n}{k_{n-1}} \left( \frac{s_n}{k_n} - \frac{s_{n-1}}{k_{n-1}} \right)$$

$$b_n = a_n \left( \frac{s_n}{k_n} - \frac{s_{n-1}}{k_{n-1}} \right)$$

On a :  $a_n x p_{n-1}(x) = p_n(x) - b_n p_{n-1}(x) + c_n p_{n-2}(x)$

$(a_n x p_{n-1}, p_n)_\mu = \|p_n\|_\mu^2 = (p_{n-1}, a_n x p_n)_\mu$ . Par conséquent :

$(p_{n-2}, a_{n-1} x p_{n-1})_\mu = \|p_{n-1}\|_\mu^2$

et :  $(a_n x p_{n-1}, p_{n-2})_\mu = c_n \|p_{n-2}\|_\mu^2 = \frac{a_n}{a_{n-1}} \|p_{n-1}\|_\mu^2$

$$c_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{\|p_{n-1}\|_\mu^2}{\|p_{n-2}\|_\mu^2} \quad \text{c.q.f.d.}$$

Proposition : Soit  $p_n^* = \frac{p_n}{k_n}$  le polynôme orthogonal dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1. Quel que soit le polynôme  $P$  de degré  $n$ , dont le coefficient de  $x^n$  est 1, on a :

$$\|p_n^*\|_\mu \leq \|P\|_\mu$$

Démonstration :  $p_n^* - p$  est de degré  $n-1$  donc :  $(p_n^*, p_n^* - p)_\mu = 0$  et

$$\|p_n^*\|_\mu^2 = (p_n^*, p)_\mu \leq \|p_n^*\|_\mu \|p\|_\mu \quad \text{et} \quad \|p_n^*\|_\mu \leq \|p\|_\mu \quad \text{c.q.f.d.}$$

\* Polynômes de Tchebycheff (1ère espèce)

L'intervalle  $I$  est  $[-1, 1]$ , le poids :  $\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . Les polynômes orthogonaux sont de la forme :

$$T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arc} \cos x)$$

Montrons qu'ils forment bien un système orthogonal :

Pour cela on fait le changement de variable :  $x = \cos \theta$   $0 \leq \theta \leq \pi$

$$(T_m, T_n)_\mu = \int_{-1}^{+1} T_m(x) T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta d\theta$$

$$\bullet \text{ Si } m \neq n \quad (T_m, T_n)_\mu = \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta] d\theta = 0$$

$$\bullet \text{ Si } m = n \neq 0 \quad (T_n, T_n)_\mu = \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos 2n\theta + 1] d\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\bullet \text{ Si } m = n = 0 \quad (T_0, T_0)_\mu = \int_0^\pi d\theta = \pi.$$

C'est bien un système orthogonal.

Propriétés :

1) On a la relation de récurrence :

$$2x T_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)$$

qui découle de la relation trigonométrique :

$$2 \cos \theta \cos n\theta = \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta$$

Comme  $T_0(x) = 1$ ,  $T_1(x) = x$ ; la relation prouve que  $T_n$  est un polynôme de degré  $n$ .

$$2) \text{ Les } n \text{ racines de } T_n(x) \text{ sont : } x = n_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} \\ k = 0, 1, \dots, n-1$$

en effet  $\cos n\theta = 0 \implies n\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2} = n \text{ Arc cos } x$  avec :  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

$$3) (1-x^2)T_n'(x) = n T_{n-1}(x) - nx T_n(x).$$

En effet d'après la relation de récurrence (propriété 1)

$$\begin{aligned} n T_{n-1}(x) - nx T_n(x) &= nx T_n(x) - n T_{n+1}(x) \\ &= n[\cos \theta \cos n\theta - \cos(n+1)\theta] \\ &\implies n \sin n\theta \sin \theta \\ &= \sin^2 \theta T_n'(x) = (1-x^2) T_n'(x) \end{aligned}$$

$$\text{car } T_n'(x) = -\frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n \text{ Arc cos } x) = \frac{-n}{\sin \theta} \sin n\theta.$$

4)  $(1-x^2)T_n''(x) - x T_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0$  s'obtient en dérivant l'expression précédente.

5)  $2 T_n(x)T_m(x) = T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x)$  ( $n \geq m$ ) découle de :

$$2 \cos n\theta \cos m\theta = \cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta$$

$$6) T_n(T_m(x)) = T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x)$$

$$\begin{aligned} \text{car } T_n(T_m(x)) &= \cos(n \text{ Arc cos} [\cos m(\text{Arc cos } x)]) \\ &= \cos(n m \text{ Arc cos } x) = T_{mn}(x). \end{aligned}$$

Les premiers polynômes de Tchebycheff sont :

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

\* Polynômes de Legendre

L'intervalle est  $I = [-1, 1]$  et le poids  $\mu(x) \equiv 1$ .

Les polynômes orthogonaux sont :

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

On pose 
$$Q_n(x) = \frac{(x^2 - 1)^n}{2^n n!}, \quad L_n = Q_n^{(n)}$$

et on vérifie que le système est orthogonal :

$$(L_n, L_m)_\mu = \int_{-1}^1 Q_n^{(n)}(x) Q_m^{(m)}(x) dx = \left[ Q_n^{(n-1)}(x) Q_m^{(m)}(x) \right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} Q_n^{(n-1)}(x) Q_m^{(m+1)}(x) dx$$

Avec  $n$  intégrations par parties on obtient :

$$(L_n, L_m)_\mu = (-1)^n \int_{-1}^{+1} Q_n(x) Q_m^{(m+n)}(x) dx$$

car  $Q_n^{(+1)} = 0$ ,  $Q_n^{(-1)} = 0$ , ...,  $Q_n^{(n-1)}(+1) = 0$ .

. Si  $n > m$   $Q_m^{(m+n)} \equiv 0$  et  $(L_n, L_m)_\mu = 0$

$$\text{. Si } n = m \quad (L_n, L_m)_\mu = (-1)^n \int_{-1}^{+1} \frac{(x^2-1)^n}{(2^n n!)^2} (2n)! \, dx = \frac{2}{2n+1}$$

Propriétés : Comme pour les polynômes de Tchebycheff on a :

1) Relation de récurrence

$$(n+1) L_{n+1}(x) - (2n+1)x L_n(x) + n L_{n-1}(x) = 0$$

$$\text{avec } L_0(x) \equiv 1 \quad \text{et} \quad L_1(x) = x$$

$$2) (x^2-1) L_n'(x) = nx L_n(x) - n L_{n-1}(x) = (n+1) L_{n+1}(x) - (n+1)x L_n(x)$$

$$3) (1-x^2) L_n''(x) - 2x L_n'(x) + n(n+1) L_n(x) = 0$$

$$4) |L_n(x)| \leq 1 \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Note : Pour d'autres exemples de polynômes orthogonaux, voir : SZEGÖ [5] .

## §2 - Approximation dans un espace normé H

On étudiera essentiellement le problème d'approximation uniforme des fonctions continues sur un espace topologique compact  $K$  . On établira un théorème de caractérisation dû à Kolmogorov, puis des considérations sur la convexité et des hypothèses plus restrictives quant au sous-espace  $X$  amèneront la démonstration du théorème de Tchebycheff. On notera l'importance des propositions 2.4.7 et 2.4.11.

### 2.1 Existence et Unicité de la m.a.

2.1.1 Soit H un espace normé et soit X un sous-espace de dimension finie de H . Tout f de H possède au moins un élément de m.a. dans X et l'ensemble  $X_f$  des éléments de m.a. de f est une partie convexe fermée de X .

Démonstration :

Soit  $\alpha = \|f\|$ .

On pose  $\bar{B}_\alpha(f) =$  boule fermée de centre  $f$ , de rayon  $\alpha$

$$Y = X \cap \bar{B}_\alpha(f)$$

on a  $d(f, Y) = d(f, X)$  donc un élément de m.a. de  $f$  dans  $X$  est m.a. de  $f$  dans  $Y$  (et réciproquement).

$Y$  partie fermée bornée d'un espace normé de dimension finie est compacte. La fonction  $v \rightarrow \|f-v\|$  y atteint son minimum.

Il existe donc  $u \in Y$  t.q.  $\|f-u\| = \inf_Y \|f-v\| = \inf_X \|f-v\|$ .

Soit  $X_f = \{u \in X \text{ t.q. } \|f-u\| = d(f, X)\}$ .

$X_f$  est fermé : il est clair que  $X_f$  est la préimage de  $\{d(f, X)\}$  par une fonction continue.

Soit  $u = \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2$ ,  $u_1$  et  $u_2 \in X_f$ ,  $\lambda \in [0, 1]$  ; on a  $u \in X$

et  $\|f-u\| \leq \lambda \|f-u_1\| + (1-\lambda) \|f-u_2\| = d(f, X)$

donc  $\|f-u\| = d(f, X)$  et par suite  $X_f$  est convexe.

Remarque : La proposition précédente est tout aussi vraie mais avec une démonstration différente si  $X$  est une partie convexe fermée non vide d'un espace de Banach réflexif, c'est-à-dire pour lequel  $H = H''$  où  $H''$  est le bidual de  $H$ .

Remarque : Il n'y a pas en général unicité dans 2.1.1. En effet soit

$H = \mathcal{C}([0, 1])$  muni de la norme de la convergence uniforme. Soit  $X$  l'espace

des fonctions  $v(x) = \lambda x$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On n'a pas unicité de la meilleure approximation de  $f \in H$ . Pour s'en convaincre, il suffit de prendre  $\lambda \in [0, 2]$  et  $v(x)$  est alors m.a. de  $f(x) \equiv 1$ .

### 2.1.2 Cas d'unicité :

Définition : Un espace normé  $H$  est dit strictement convexe si  $\forall f$  et  $g \in H$   $\|f\|=1$   $\|g\|=1$  et  $\forall \lambda \in ]0, 1[$   $\|\lambda f + (1-\lambda)g\| < 1$  (ou encore : si la sphère unité de  $H$  ne contient pas de segment ouvert).

Proposition : Si  $H$  est strictement convexe,  $X_f$  est réduit à un point  $\forall f \in H$

Démonstration immédiate par l'absurde : soient  $u_1 \neq u_2$  dans  $X_f$

$$\frac{1}{2}(u_1 + u_2) \in X_f \text{ et } \left\| f - \frac{u_1 + u_2}{2} \right\| < \frac{1}{2} \|f - u_1\| + \frac{1}{2} \|f - u_2\| < d(f, X)$$

d'où la contradiction.

Exemples : 1) Un espace préhilbertien séparé est strictement convexe.

2) Les espaces  $L^p$  ( $1 < p < \infty$ ) sont strictement convexes.

(Pour le vérifier il suffit de connaître les cas d'égalité dans l'inégalité de Minkowski).

3) Les espaces  $L^1$ ,  $L^\infty$ ,  $\mathcal{C}(I)$  (norme de la convergence uniforme)

ne sont pas strictement convexes.

Les résultats précédents donnent donc :  $H$  étant un espace normé strictement convexe et  $X$  un sous-espace de dimension finie, toute fonction  $f$  de  $H$  possède un élément de m.a. dans  $X$  et un seul.



Soient  $H$  un espace normé et  $\varepsilon > 0$ .

On pose  $\delta(\varepsilon) = \sup_{(x,y) \in U_\varepsilon} \|x-y\|$  avec  $U_\varepsilon = \{(x,y) \text{ t.q. } x \text{ et } y \in H \mid \|x\| = \|y\| = 1 \text{ et } \|\frac{x+y}{2}\| \geq 1-\varepsilon\}$

Définition : On dit que  $H$  est uniformément convexe si  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) = 0$ .

Lemme : Tout espace vectoriel normé uniformément convexe est strictement convexe

Démonstration : Soient  $x$  et  $y$  dans cet espace t.q.  $\|x\| = \|y\| = \|\frac{x+y}{2}\| = 1$ .

La définition de la convexité uniforme entraîne  $\|x-y\| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$  et par suite  $x = y$ . On conclut à la stricte convexité (i.e. il n'existe pas de segment sur la boule unité).

2.1.3 Théorème : Soit  $A$  un sous-espace fermé convexe d'un espace de Banach  $B$  uniformément convexe. Alors pour toute  $f$  de  $B$  il existe un élément de m.a. unique dans  $A$ .

Démonstration : Soit  $f \in B$  et  $D_f = \inf_{u \in A} \|f-u\|$ .

On peut toujours se ramener au problème de la m.a. de  $0$  dans  $A$ . Si  $D_f \neq 0$  par l'application  $u \rightarrow \frac{u}{D}$ , on peut supposer  $D_f = 1$  (dans le cas contraire on a nécessairement  $f \in A$ ).

L'uniforme convexité de  $B$  s'écrit  $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0$  t.q. pour  $\|x\| = \|y\| = 1$

on ait  $\|\frac{x+y}{2}\| > 1-\eta \implies \|x-y\| < \varepsilon$ .

Soit  $u_n \in A$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = 1$ .

On a  $\forall n \geq N(\eta) \|u_n\| - 1 < \eta$ .

Soient  $n$  et  $m \geq N(\eta)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| \frac{u_n}{\|u_n\|} + \frac{u_m}{\|u_m\|} \right\| &= \frac{1}{2} \left\| u_n + u_m - \left(1 - \frac{1}{\|u_n\|}\right)u_n - \left(1 - \frac{1}{\|u_m\|}\right)u_m \right\| \\ &\geq \frac{1}{2} \|u_n + u_m\| - \frac{1}{2}(\|u_n\| - 1) - \frac{1}{2}(\|u_m\| - 1) > D_0 - \eta = 1 - \eta. \end{aligned}$$

Alors  $\left\| \frac{u_n}{\|u_n\|} - \frac{u_m}{\|u_m\|} \right\| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ . Cette suite de Cauchy converge donc dans

$$\begin{aligned} B \text{ vers } u. \text{ Il vient } \|u_n - u\| &= \left\| u_n \left(1 - \frac{1}{\|u_n\|}\right) + \frac{u_n}{\|u_n\|} - u \right\| \\ &\leq \|u_n\| - 1 + \left\| \frac{u_n}{\|u_n\|} - u \right\| \end{aligned}$$

d'où  $u_n \rightarrow u$  dans  $A$  et  $\|u\| = 1$ .

Vu que  $D_0 = 1$   $u$  est m.a. de  $f \equiv 0$  dans  $A$ .

L'unicité résulte du lemme précédent et de la proposition 2.1.2.

## 2.2 Approximation uniforme des fonctions continues

Soient  $H = \mathcal{C}(K)$  où  $K$  est un espace topologique compact.

Soient  $\varphi_1 \dots \varphi_n$  linéairement indépendants dans  $H$  et  $X$  l'espace engendré par  $\varphi_1 \dots \varphi_n$ .

Soit  $f \in H$ , on sait qu'il existe un élément de m.a. dans  $X$  soit le

$$\text{polynôme } P = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \varphi_i.$$

On notera  $K_0$  l'ensemble des  $x \in K$  t.q.  $\|f - P\| = |f(x) - P(x)|$ .

### 2.2.1 Caractérisation de la m.a. Th. de Kolmogorov

Une condition nécessaire et suffisante pour que  $P$  soit polynôme de m.a.

de  $f$  dans  $X$  est que

$$\forall Q \in X, \sup_{x \in K_0} (f(x) - P(x)) > Q(x) \geq 0$$

Démonstration : (i) Montrons que si la condition est satisfaite alors  $P$  est p.m.a. de  $f$ .

$K_0$  est fermé dans  $K$  donc compact. Alors il existe  $x_0 \in K_0$  tel que

$$(f(x_0) - P(x_0))Q(x_0) = \sup_{K_0} (f(x) - P(x))Q(x) \geq 0.$$

Soit  $P_1 \in X$  et  $P - P_1 = Q$

$$\|f - P_1\|^2 \geq |f(x_0) - P_1(x_0)|^2 = |f(x_0) - P(x_0)|^2 + |Q(x_0)|^2 + 2(f(x_0) - P(x_0))Q(x_0).$$

$$\text{Alors} \quad \|f - P_1\|^2 \geq |f(x_0) - P(x_0)|^2 = \|f - P\|^2$$

et  $P$  est p.m.a. de  $f$  dans  $X$ .

(ii) Si la condition n'est pas satisfaite alors  $P$  n'est pas p.m.a. de  $f$ .

Supposons qu'il existe  $Q \in X$  t.q.  $\sup_{K_0} (f(x) - P(x))Q(x) < 0$  soit  $= -2\delta$ .

Alors  $J = \{x \in K \text{ t.q. } (f(x) - P(x))Q(x) < -\delta\}$  est un ouvert contenant  $K_0$ .

Soient  $\lambda > 0$  arbitrairement petit et  $P_1 = P - \lambda Q$ . On va établir que  $P_1$

est meilleure approximation que  $P$ .

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \text{ dans } J, |f(x) - P_1(x)|^2 &= |f(x) - P(x)|^2 + \lambda^2 |Q(x)|^2 + 2\lambda Q(x)(f(x) - P(x)) \\ &< \|f - P\|^2 - 2\lambda\delta + \lambda^2 \|Q\|^2 \\ &< \|f - P\|^2 - \delta\lambda \text{ si } \lambda \leq \frac{\delta}{\|Q\|^2} \end{aligned}$$

Soit  $x$  dans  $K - J$ ,  $\sup |f(x) - P(x)|$  est atteint sur  $K - J$  soit en  $x_1$ .

$J$  contenant  $K_0$ , on a  $|f(x_1) - P(x_1)| < \|f - P\|$

$$\exists \delta_1 > 0 \quad |f(x_1) - P(x_1)| \leq \|f - P\| - \delta_1$$

$$|f(x)-P_1(x)| \leq |f(x)-P(x)| + \lambda |Q(x)|$$

$$\leq \|f-P\| - \delta_1 + \lambda \|Q\| \leq \|f-P\| - \frac{1}{2}\delta_1 \quad \text{si } \lambda \leq \frac{\delta_1}{2\|Q\|}$$

$$\text{Ainsi si } \lambda \leq \text{Min} \left( \frac{\delta}{\|Q\|^2}, \frac{\delta_1}{2\|Q\|} \right)$$

$$\text{Sup}_K |f(x)-P_1(x)| = \|f-P_1\| < \|f-P\| \quad \text{c.q.f.d.}$$

Note : Dans le cas de fonctions à valeurs complexes la condition caractéristique

s'écrit  $\text{Sup}_K \text{Re}[(f(x)-P(x))\overline{Q(x)}] \geq 0 \quad \forall Q \in X$ .

On utilise pour cela l'égalité  $|\alpha+\beta|^2 = |\alpha|^2 + 2\text{Re}(\alpha\bar{\beta}) + |\beta|^2 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

### 2.3 Utilisation de la convexité

2.3.1 Définition : Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel réel ou complexe.

On appelle enveloppe convexe de  $A$  notée  $A_c$  l'intersection de tous les ensembles convexes qui contiennent  $A$ . C'est aussi le plus petit ensemble convexe contenant  $A$  (car toute intersection de convexes est convexe).

2.3.2 Lemme :  $A_c$  est identique à l'ensemble  $\tilde{A}$  des combinaisons linéaires

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \xi_i \quad \text{où } \xi_i \in A \quad \lambda_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1.$$

En effet  $A_c$  est le plus petit ensemble convexe contenant  $A$  et par suite contient toute combinaison linéaire de ce type, soit  $A_c \supset \tilde{A}$ . Inversement  $\tilde{A}$  est évidemment convexe donc  $\tilde{A} \supset A_c$ . Alors  $A_c = \tilde{A}$ .

2.3.3 Lemme : Dans un espace vectoriel réel de dimension finie  $n$ , on a

$$A_c = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i \xi_i \quad \text{où } \xi_i \in A \quad \lambda_i > 0 \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \quad \text{et } p \leq n+1 \right\}.$$

Démonstration : Soit  $\xi \in A_c$  fixé

$$\text{Soit } r \text{ le plus petit entier tel que } \xi = \sum_{i=1}^r \lambda_i \xi_i.$$

Si  $r > n+1$   $\xi_2, \dots, \xi_{r-1}$  sont  $r-1$  vecteurs linéairement dépendants

( $r-1 > n$ )

alors  $\sum_2^r \beta_i (\xi_i - \xi_1) = 0$

ou  $\sum_1^r \gamma_i \xi_i = 0$  avec  $\gamma_i = \beta_i$  pour  $i \geq 2$  et  $\gamma_1 = -\sum_2^r \beta_i$

on a  $\xi = \sum_1^r (\lambda_i + \alpha \gamma_i) \xi_i$ .

Certains  $\gamma_i$  sont  $< 0$ . Posons  $\alpha = \min_{\gamma_i < 0} \left\{ \frac{\lambda_i}{|\gamma_i|} \right\} > 0$  on a  $\lambda_i + \alpha \gamma_i \geq 0$  et

$\lambda_i + \alpha \gamma_i = 0$  pour un  $i$  au moins

$$\sum_1^r \gamma_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_1^r \lambda_i + \alpha \gamma_i = 1.$$

On aurait donc une écriture de  $\xi$  du type indiqué avec moins de  $r$  termes, ce qui est contradictoire. Donc  $r \leq n+1$ .

Note : Pour un espace vectoriel complexe un travail analogue donne  $r \leq 2n+1$ .

Lemme (toujours en dimension finie) : Si  $A$  est compact,  $A_c$  est compact.

Démonstration : Pour ce faire, il suffit de considérer l'application qui à

$\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$  [tels que  $\lambda_i \geq 0$  et  $\sum \lambda_i = 1$ ] associe la somme  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \xi_i$ . Cette application est continue à valeur dans  $A_c$ .

#### 2.3.4 Remarque et rappels

1) Soit  $f$  une forme linéaire non nulle sur un espace vectoriel  $E$ ,  $f(\xi) = \beta$  est l'équation d'un hyperplan.

$\{\xi \text{ t.q. } f(\xi) - \beta \leq 0\}$  et  $\{\xi \text{ t.q. } f(\xi) - \beta \geq 0\}$  sont les demi-espaces limités par l'hyperplan.

On dit qu'un hyperplan  $\pi$  sépare strictement deux ensembles  $A$  et  $B$  si

A et B sont inclus dans les demi-espaces ouverts limités par  $\pi$ .

2) Soit dans  $\mathbb{R}^n$  un ensemble A convexe fermé ne contenant pas l'origine.

Alors il existe un hyperplan qui sépare strictement  $\{0\}$  et A.

En utilisant la convexité, on va établir une nouvelle forme du théorème de Kolmogorov.

Soit A l'ensemble des vecteurs de composantes  $(f(x)-P(x))\varphi_j(x)$  où  $j = 1 \dots n$  pour  $x \in K_0$ .

Soit  $f \in \mathcal{C}(K)$ .

2.2.5 Proposition : Une condition nécessaire et suffisante pour que P soit m.a. de f dans X est que  $0 \in A_c$ .

Démonstration :

(i) Montrons que si  $0 \notin A_c$  alors P n'est pas p.m.a. de f.

Dans ce cas il existe un hyperplan qui sépare strictement  $\{0\}$  et  $A_c$

soit  $\sum_1^n \alpha_j \xi_j - \beta = 0$ .

Supposons que  $0 \in \{\xi \text{ t.q. } \sum_1^n \alpha_j \xi_j - \beta > 0\}$  alors  $\beta < 0$  et on a

$A_c \subset \{\xi \text{ t.q. } \sum_1^n \alpha_j \xi_j - \beta < 0\}$ . La relation  $\sum_1^n \alpha_j \xi_j - \beta < 0$  satisfaite

aussi par les éléments de A donne  $\sum_1^n \alpha_j (f(x)-P(x))\varphi_j(x) - \beta < 0$ .

Soit  $Q = \sum_1^n \alpha_j \varphi_j$  alors  $(f(x)-P(x))Q(x) < \beta < 0$  et ce  $\forall x \in K_0$

alors  $\sup_{K_0} (f(x)-P(x))Q(x) < 0$  et P n'est pas m.a. de f

(ii) Supposons que P ne soit pas m.a. de f dans X

alors il existe  $Q \in X$  t.q.  $\sup_{K_0} (f(x)-P(x))Q(x) = \beta < 0$ .

Q s'écrit  $\sum_1^n \alpha_j \varphi_j$ .

Soit  $\pi_-$  le demi-espace  $\sum_1^n \alpha_j \xi_j - \beta \leq 0$ .

$$\sum_1^n \alpha_j (f(x) - P(x)) \varphi_j(x) - \beta = (f(x) - P(x)) Q(x) - \beta \leq 0 \quad \forall x \in K_0$$

donc  $\pi_- \supset A$  et,  $\pi_-$  étant convexe,  $\pi_- \supset A_c$ .

Si maintenant  $\xi = 0$   $\sum_1^n \alpha_j \xi_j - \beta = -\beta > 0$  donc  $\pi_- \not\supset 0$  c.q.f.d.

2.3.6 Proposition : Un polynôme P est p.m.a. de  $f \in \mathcal{C}(K)$  si et seulement

si il existe  $x_1, \dots, x_r \in K_0$  ( $r \leq n+1$ ) et  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  positifs t.q.  $\sum_1^r \lambda_k = 1$  et pour lesquels  $\sum_1^r \lambda_k [f(x_k) - P(x_k)] Q(x_k) = 0 \quad \forall Q \in X$ .

Démonstration :

Une condition équivalente étant  $0 \in A_c$  on a  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$   $r \leq n+1$   $\lambda_k > 0$

et  $\sum_1^r \lambda_k = 1$  tel que  $0 = \sum_1^r \lambda_k \xi^k$

$\xi_r^k$  dans A de composantes  $\xi_i^k = (f(x_k) - P(x_k)) \varphi_i(x_k)$ .

Alors  $0 = \sum_1^r \lambda_k \xi_i^k \quad 1 \leq i \leq n$ .

Note :  $\sum_1^r \lambda_k (f(x_k) - P(x_k)) \varphi_i(x_k) = 0 \quad 1 \leq i \leq n$  équivaut à

$$\sum_1^r \lambda_k (f(x_k) - P(x_k)) Q(x_k) = 0 \quad \forall Q \in X \quad \text{c.q.f.d.}$$

2.3.7 Proposition : P est m.a. de f dans X si et seulement si il existe

points  $x_1, \dots, x_r$  dans K,  $r \leq n+1$  et r nombres  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  non nuls.

t.q.  $l(Q) = \sum_1^r \alpha_i Q(x_i) = 0 \quad \forall Q \in X$  et  $f(x_i) - P(x_i) = \|f - P\| \text{ sñ } \alpha_i (1 \leq i \leq r)$

Démonstration : (i) Supposons la condition satisfaite, alors on a pour  $Q \in X$

$$\begin{aligned} \|f - Q\| \sum_1^r |\alpha_i| &\geq \sum_1^r |f(x_i) - Q(x_i)| \cdot |\alpha_i| \\ &\geq \left| \sum_1^r (f(x_i) - Q(x_i)) \alpha_i \right| = \left| \sum_1^r (f(x_i) - P(x_i)) \alpha_i \right| \end{aligned}$$

i.e.  $\ell(Q-P) = 0$

$$= \|f-P\| \sum_1^r |\alpha_i|$$

i.e.  $s_{\tilde{n}}[f(x_i)-P(x_i)] = s_{\tilde{n}} \alpha_i$

donc  $\|f-Q\| \geq \|f-P\| \quad \forall Q \in X$  et  $P$  m.a. de  $f$  dans  $X$ .

(ii) La réciproque est immédiate d'après la proposition précédente 2.3.6.

$P$  étant m.a. de  $f$  on a  $0 \in A_c$  et

$$\sum_1^r \lambda_k (f(x_k)-P(x_k)) \varphi_i(x_k) = 0 \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{pour } r \text{ pts et } r \text{ nombres } \lambda_k > 0$$

$$\alpha_k = \lambda_k (f(x_k)-P(x_k)) \neq 0$$

et  $s_{\tilde{n}} \alpha_k = s_{\tilde{n}} (f(x_k)-P(x_k))$

d'où  $f(x_k)-P(x_k) = \|f-P\| s_{\tilde{n}} \alpha_k$

Soit  $Q = \sum_1^n \mu_i \varphi_i$  on a  $\sum_1^r \alpha_k Q(x_k) = \sum_1^r \sum_1^n \alpha_k \mu_i \varphi_i(x_k)$   
 $= \sum_1^n \mu_i \sum_1^r \alpha_k \varphi_i(x_k) = 0 \quad \underline{\text{c.q.f.d.}}$

Note : Dans le cas de fonctions à variable complexe, la proposition reste valable mais la condition  $r \leq n+1$  est remplacée par  $r \leq 2n+1$ .

## 2.4 Sous-espaces du type de Tchebycheff

### 2.4.1 Définition

Soit  $K$  un espace topologique compact.

Soit  $X$  un sous-espace de dimension finie  $n$  de  $C(K)$ .

On dit que  $X$  est un sous-espace du type de Tchebycheff de  $C(K)$  si :

i)  $K$  possède au moins  $n+1$  points

ii) Tout polynôme de  $X$  non identiquement nul, s'annule en  $n-1$  points de  $K$  au plus.



Exemples :

i)  $K = [a, b]$ .

Prenons pour  $X : \mathcal{P}_{n-1}$ , l'espace des polynômes de degré  $< n$  sur  $[a, b]$ .

$X$  est du type de Tchebycheff : tout polynôme  $P$  de  $X$  s'écrit

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x^i \text{ et a donc au plus } n-1 \text{ racines.}$$

ii)  $K = [0, 2\pi]$ .

Prenons pour  $X$  l'espace engendré par :  $1, \cos x, \dots, \cos mx, \sin x, \dots, \sin mx$ ,

qui est de dimension  $n = 2m+1$ . C'est un espace du type de Tchebycheff ; en

effet, tout polynôme  $P$  de  $X$  s'écrit  $P(x) = a_0 + \sum_{p=1}^m \cos px + \sum_{p=1}^m \sin px$ ,

et a donc au plus  $2m = n-1$  racines.

iii)  $K = [a, b]$ .

Prenons pour  $X$  l'espace engendré par une fonction  $\phi$  continue sur  $K$ . Il

est clair que  $X$  est du type de Tchebycheff si et seulement si  $\phi$  ne s'annule

pas sur  $K$ .

Remarques :

i) Dans certains livres, on parle plutôt de "systèmes de Tchebychef", ou encore de "systèmes de Haar".

On dit que les fonctions  $\phi_1 \dots \phi_n$  de  $C(K)$  forment un système de Tchebychef,

si :  $\alpha$ )  $K$  a au moins  $n$  points

$\beta$ ) tout polynôme  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i$ , non identiquement nul, a au plus  $n-1$  ra-

cines sur  $K$ .

ii) Si on se donne  $K$  espace topologique compact,  $C(K)$  admet-il des sous-espaces du type de Tchebychef ? La réponse est donnée par le théorème de Mairbuber et Curtis.

Théorème :  $C(K)$  possède des sous-espaces du type de Tchebychef, si et seulement si  $K$  est homéomorphe à un sous-ensemble du cercle unité de  $C$  (réf. citée en [2]).

#### 2.4.2 Propriétés d'un sous-espace du type de Tchebychef

Soit  $X$  du type de Tchebychef dans  $C(K)$ , de dimension  $n$ .

i) Si  $P$  est un polynôme de  $X$ , et  $P$  s'annule en  $n$  points distincts de  $K$ , alors  $P \equiv 0$ .

Si  $P$  et  $Q \in X$  et  $P = Q$  en  $n$  points distincts de  $K$ , alors  $P \equiv Q$ .

ii) Si  $x_1, \dots, x_n$  sont  $n$  points distincts de  $K$ , et si  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  sont  $n$  fonctions linéairement indépendantes de  $X$ , alors la matrice  $M = (\varphi_j(x_i))$  est non singulière

$$M = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix}$$

Démonstration :

On suppose que  $M$  est singulière. Cela entraîne que, par exemple, les colonnes de  $M$  sont linéairement dépendantes. C'est-à-dire qu'il existe  $n$  scalaires

$\lambda_1 \dots \lambda_n$  non tous nuls t.q.  $\sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j(x_i) = 0 \quad i=1 \dots n$ . Il existe donc un polynôme  $P = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j$  de  $X$  t.q.  $P$  s'annule en  $n$  points distincts de  $K$ .

P n'étant pas identiquement nul, il y a contradiction avec le fait que X soit du type de Tchebychef. C.Q.F.D.

iii) Si  $x_1 \dots x_n$  sont n points distincts de  $K$ , et si  $c_1 \dots c_n$  sont n nombres réels, alors il existe un polynôme  $P$  de  $X$  unique t.q.  $P(x_i) = c_i$   $i = 1 \dots n$ .

Démonstration :

$P$  est de la forme  $\sum_1^n \lambda_j \varphi_j$ ,  $\varphi_1 \dots \varphi_n$  étant une base de  $X$ ; d'après ii), le système  $\sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j(x_i) = c_i$   $i = 1 \dots n$  est de Cramer, d'où le résultat.

$P$  est appelé le polynôme d'interpolation prenant les valeurs données  $c_k$  aux points  $x_k$ .

Si le nombre de points  $x_k$  et de valeurs  $c_k$  est inférieur à  $n$ , il est clair que  $P$  existe, mais n'est plus unique.

2.4.3 Proposition :

Soit  $X$  du type de Tchebychef dans  $C(K)$ , de dimension  $n$ .

i) Soit  $x_1 \dots x_r$  r points distincts de  $K$ , et soit  $l(v) = \sum_{i=1}^r \alpha_i v(x_i)$ , où les  $\alpha_i$  sont non nuls, une fonctionnelle sur  $C(K)$  s'annulant sur  $X$ .

Alors  $r = n+1$ .

ii) Soit  $x_1 \dots x_{n+1}$  n+1 points distincts de  $K$  alors il existe un système de  $n+1$  nombres  $\alpha_1 \dots \alpha_{n+1}$  non nuls, unique à un coefficient multiplicatif près,

t.q.  $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i Q(x_i) = 0, \forall Q \in X$ .

Démonstration :

i) On sait déjà, d'après 2.3.6, que  $r \leq n+1$ . Supposons  $r \leq n$ ; d'après 2.4.2

(iii), il existe un polynôme d'interpolation  $Q$  de  $x$  t.q.

$$Q(x_1) = 1,$$

$$Q(x_i) = 0 \quad i=2\dots r$$

$$\ell(Q) = \sum_{k=1}^r \alpha_k Q(x_k) = \alpha_1 \neq 0 \quad \text{ce qui est absurde, d'où } r = n+1.$$

ii) Considérons l'équation  $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i Q(x_i) = 0 \quad \forall Q \in X$ .

Si  $\varphi_1 \dots \varphi_n$  est une base de  $X$ , il est clair que cette équation est identique

$$\text{au système :} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \varphi_j(x_i) = 0, j=1\dots n$$

C'est un système de  $n$  équations à  $n+1$  inconnues ; le rang de la matrice est

$n$ , donc l'espace des solutions  $(\alpha_1 \dots \alpha_{n+1})$  est de dimension 1. Si on écarte

la solution triviale, aucun  $\alpha_i$  n'est nul.

C.Q.F.D.

2.4.4 Corollaire :

Soit  $X$  un sous-espace du type de Tchebychef de  $C(K)$  de dimension  $n$ .

Soit  $f \in C(K)$ , et  $P$  le p.m.a. de  $f$  dans  $X$ .

Alors  $K_0 = \{x \in K \text{ t.q. } |f(x)-P(x)| = \|f-P\|\}$  a du moins  $n+1$  points.

Démonstration : Si  $P$  est p.m.a, la proposition 2.3.7 nous donne  $r$  points

$x_1 \dots x_r$  de  $K$ ,  $r \leq n+1$ , et  $r$  nombres non nuls  $\alpha_1 \dots \alpha_r$  t.q.

$$\ell(v) = \sum_{i=1}^r \alpha_i v(x_i) \text{ s'annule sur } X \text{ et t.q. } |f(x_i)-P(x_i)| = \|f-P\|; \text{ d'après}$$

2.4.3 i),  $r = n+1$ , donc on connaît  $n+1$  points où  $|f(x_i)-P(x_i)| = \|f-P\|$ .

C.Q.F.D.

Ce corollaire nous permet d'énoncer :

2.4.5 Proposition

Soit  $X$  un sous espace du type de Tchebychef de  $C(K)$ . Alors toute fonction  
continue sur  $K$  possède un p.m.a. dans  $X$  et un seul.

Démonstration :

Soit  $f \in C(K)$ , et soit  $P$  et  $P_1$  deux p.m.a. distincts de  $f$ .

Alors  $\frac{P+P_1}{2}$  est aussi p.m.a. de  $f$ , puisque l'ensemble des p.m.a. de  $f$  est convexe.

D'après le corollaire 2.4.4, il existe  $n+1$  points  $x_1 \dots x_{n+1}$  de  $K$  tels que :

$$\left| f(x_k) - \frac{P(x_k) + P_1(x_k)}{2} \right| = \left\| f - \frac{P+P_1}{2} \right\| = \delta$$

$$\forall k, \text{ posons : } \begin{aligned} f(x_k) - P(x_k) &= \rho_k \\ f(x_k) - P_1(x_k) &= \sigma_k \end{aligned}$$

$$\text{On a : } |\rho_k| \leq \|f - P\| = \delta$$

$$|\sigma_k| \leq \|f - P_1\| = \delta$$

$$|\rho_k + \sigma_k| = 2\delta$$

d'où  $\rho_k = \sigma_k$ , donc  $P = P_1$  en au moins  $n+1$  points de  $K$ . Alors  $P \equiv P_1$ .

C.Q.F.D.

Cette proposition admet une réciproque.

2.4.6 Théorème de Haar

Soit  $K$  un espace topologique compact ayant au moins  $n$  points. Soit  $X$  un  
sous-espace de  $C(K)$  de dimension finie. Si chaque fonction continue sur  $K$   
admet un seul p.m.a. dans  $X$ , alors  $X$  est du type de Tchebychef.

On pourra trouver une démonstration de ce théorème dans CHENEY [3] (p.81, cas d'un intervalle), ou dans LORENTZ [2] (p.27, cas général).

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour énoncer le théorème suivant :

#### 2.4.7 Théorème

Soit  $K$  un espace topologique compact ; soit  $X$  du type de Tchebychef dans  $C(K)$ , de dimension  $n$ . Alors :

i) toute fonction continue sur  $K$  possède un p.m.a. et un seul dans  $X$ .

ii) soit  $f \in C(K)$ .

$P$  est p.m.a. de  $f$  dans  $X$  si, et seulement si, il existe dans  $K$   $n+1$  points distincts  $x_1, \dots, x_{n+1}$ , et  $n+1$  nombres non nuls  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$  tels que :

$$a) \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i Q(x_i) = 0 \quad \forall Q \in X$$

$$b) f(x_i) - P(x_i) = \|f-P\| \operatorname{sign} \alpha_i$$

Ce théorème est la conséquence immédiate de la proposition 2.3.7 et de 2.4.3 i).

Remarque : D'après 2.4.3 ii), les coefficients  $\alpha_i$  sont définis de manière unique (à un coefficient multiplicatif près), dès qu'on connaît les points  $x_1, \dots, x_{n+1}$ .

Le système des points  $x_1, \dots, x_{n+1}$  n'est pas nécessairement unique.

#### 2.4.8 Cas d'un intervalle

Si  $K = [a, b]$ , nous allons pouvoir donner une caractérisation simple du p.m.a. d'une fonction continue sur  $[a, b]$  dans un sous-espace du type de Tchebychef de  $C([a, b])$ .

Nous allons avoir besoin de la remarque suivante, qui précise la proposition

2.4.3.

2.4.9 Proposition

Soit  $X$  un sous-espace du type de Tchebychef de  $C([a,b])$ , de dimension  $n$ .

Soit  $a < x_1 < x_2 \dots < x_{n+1} < b$   $n+1$  points ordonnés de  $[a,b]$ , et soit

$l(v) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i v(x_i)$  une fonctionnelle linéaire s'annulant sur  $X$ . Alors les

signes des coefficients  $\alpha_i$  sont alternés.

Démonstration :

i) Si  $n = 1$ ,  $X$  est engendré par une fonction  $\phi$ .

On a :  $\alpha_1 \phi(x_1) + \alpha_2 \phi(x_2) = 0$ .

Comme  $X$  est du type de Tchebychef,  $\phi$  ne s'annule pas, donc garde un signe constant, par conséquent  $\alpha_1 \alpha_2 < 0$ .

ii) Si  $n \geq 2$ , il y a donc au moins trois points  $x_i$ .

Supposons qu'en deux points adjacents  $x_{j-1}$  et  $x_j$ , les  $\alpha_i$  soient du même signe, par exemple positifs.

Il est bien clair qu'il est possible de trouver deux nombres  $\rho_{j-1}$  et  $\rho_{j+1}$  tous deux positifs t.q. :

$$\alpha_{j-1} \rho_{j-1} + \alpha_{j+1} \rho_{j+1} > 0$$

d'après 2.4.2 iii), il existe un polynôme d'interpolation unique  $Q$  de  $X$  t.q.

$$Q(x_i) = 0 \text{ si } i \neq j-1, j, j+1$$

$$Q(x_{j-1}) = \rho_{j-1} > 0$$

$$Q(x_{j+1}) = \rho_{j+1} > 0.$$

Notons que  $Q(x_j)$  n'est pas imposé, mais comme

$$l(Q) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i Q(x_i) = \alpha_{j-1} \rho_{j-1} + \alpha_j Q(x_j) + \alpha_{j+1} \rho_{j+1} = 0,$$

on a 
$$Q(x_j) = -\frac{1}{\alpha_j} (\alpha_{j-1} \rho_{j-1} + \alpha_{j+1} \rho_{j+1}) < 0.$$

Donc, puisque  $Q(x_{j-1})$  et  $Q(x_{j+1}) > 0$ ,  $Q$  doit s'annuler sur  $]x_{j-1}, x_j[$  et sur  $]x_j, x_{j+1}[$ .

Comme, d'autre part,  $Q(x_i) = 0$  si  $i \neq j-1, j, j+1$ ,  $Q$  a  $n$  racines distinctes, donc il est identiquement nul, ce qui est absurde. C.Q.F.D.

Nous en déduisons immédiatement :

#### 2.4.10 Lemme

Soit  $X$  un sous-espace du type de Tchebychef de  $C([a,b])$ , de dimension  $n$ .

Soit  $f \in C([a,b])$ , et  $P$  son p.m.a. dans  $X$ .

Alors les deux énoncés suivants sont équivalents :

i) il existe  $n+1$  points distincts  $x_1 \dots x_{n+1}$  dans  $[a,b]$ , et  $n+1$  nombres non nuls  $\alpha_1 \dots \alpha_{n+1}$  tels que :

$$a) \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i Q(x_i) = 0 \quad \forall Q \in X$$

$$b) f(x_i) - P(x_i) = \|f-P\| \operatorname{sign} \alpha_i$$

ii) il existe  $n+1$  points ordonnés de  $[a,b]$ , soit  $a \leq x_1 < x_2 \dots < x_{n+1} \leq b$  tels que :  $f(x_i) - P(x_i) = \pm \|f-P\|$ , avec des signes alternés.

Démonstration :

Supposons i). Quitte à changer la numérotation des  $x_i$ , on peut supposer qu'ils sont rangés par ordre croissant. Alors, d'après 2.4.9, les signes des  $\alpha_i$  sont alternés. On a donc bien ii).



Supposons ii). La proposition 2.4.3 nous donne a). D'après 2.4.9, les signes des  $\alpha_i$  sont alternés. Il suffit de multiplier les  $\alpha_i$  par  $\pm 1$  pour avoir b).

C.Q.F.D.

Il ne reste plus qu'à énoncer le théorème démontré par Tchebychef en 1857:

#### 2.4.11 Théorème

Soit  $[a,b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et soit  $X$  du type de Tchebychef dans  $C([a,b])$ , de dimension  $n$ .

Alors :

- i) toute fonction  $f$  continue sur  $[a,b]$  possède dans  $X$  une m.a. et une seule.
- ii)  $P \in X$  est m.a. de  $f$  si et seulement si il existe  $n+1$  points de  $[a,b]$ ,  $a \leq x_1 < x_2 \dots < x_{n+1} \leq b$  t.q.  $f(x_i) - P(x_i) = \pm \|f-P\|$  avec des signes alternés

#### 2.4.12 Applications du théorème de Tchebychef.

##### 2.4.12 A) Meilleure approximation d'une fonction continue par une constante.

Soit  $f$  continue sur  $[a,b]$ .

Il existe  $x_1$  et  $x_2 \in [a,b]$  t.q. :

$$f(x_1) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) = m$$

$$f(x_2) = \sup_{x \in [a,b]} f(x) = M$$

Soit  $X$  l'espace des fonctions constantes sur  $[a,b]$ . Il est clair qu'il est du type de Tchebychef.

Soit  $P$  le p.m.a. de  $f$  dans  $X$ .

On a :  $P = \frac{m+M}{2}$

En effet :  $\|f-P\| = \sup_{x \in [a,b]} \left| f(x) - \frac{m+M}{2} \right| = \frac{M-m}{2}$

aux points  $x_1$  et  $x_2$ ,  $f-P$  atteint son maximum  $\frac{M-m}{2}$ , avec des signes alternés :

$$f(x_1) - P(x_1) = m - \frac{m+M}{2} = - \left( \frac{M-m}{2} \right)$$

$$f(x_2) - P(x_2) = M - \frac{m+M}{2} = + \left( \frac{M-m}{2} \right)$$

#### 2.4.12 B) Approximation par une fonction linéaire.

Prenons  $[a,b] = [0, \frac{\pi}{2}]$  et  $f(x) = \sin x$

$$X = \{v \text{ t.q. } v(x) = \lambda x + \mu\}$$

Il est clair que  $X$  est bien du type de Tchebychef.

Cherchons  $P$  p.m.a. de  $f$  dans  $X$ ,  $P(x)$  est de la forme  $\lambda x + \mu$ .

$f(x) - P(x)$  atteint son maximum en trois points au moins :  $x_1 < x_2 < x_3$ .

Supposons que les trois points  $x_k$  appartiennent à  $]0, \frac{\pi}{2}[$ .

Alors l'équation  $f'(x_k) - P'(x_k) = 0 = \cos x_k - \lambda$  a trois solutions dans

$]0, \frac{\pi}{2}[$ , ce qui est absurde, d'où :  $0 = x_1 < x_2 < x_3 = \frac{\pi}{2}$ , avec  $\cos x_2 = \lambda$ .

On a, si  $\rho$  est égal à  $\|f-P\|$  au signe près :

$$f(0) - P(0) = -\mu = +\rho$$

$$f(x_2) - P(x_2) = \sin x_2 - \lambda x_2 - \mu = -\rho$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - P\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \lambda \frac{\pi}{2} - \mu = +\rho$$

les inconnues sont  $\lambda, \mu, x_2, \rho$ . Elles sont parfaitement déterminées par les

équations ci-dessus :

$$\mu = -\rho$$

$$1 - \lambda \frac{\pi}{2} = \mu + \rho = 0, \quad \text{d'où } \lambda = \frac{2}{\pi}$$

l'équation  $\cos x_2 = \frac{2}{\pi} < 1$  détermine  $x_2$  de manière unique.

$$2\mu = \sqrt{1 - \cos^2 x_2} - \frac{2}{\pi} x_2, \quad \text{d'où } \mu = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}} - \frac{2}{\pi} \text{Arc cos } \frac{2}{\pi} \right]$$

#### 2.4.12 C) Polynômes de Tchebychef.

Nous allons démontrer l'énoncé suivant :

Le polynôme de degré  $n$ , dont le coefficient de  $x^n$  est 1, qui approche le mieux 0 sur  $[-1, +1]$ , au sens de la norme de la convergence uniforme, est  $2^{-n+1} T_n$ .

Rappel :  $T_n$  est le polynôme de Tchebychef d'ordre  $n$ . Pour  $x \in [-1, +1]$ ,

$T_n(x) = \cos nt$  avec  $x = \cos t$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ . On sait que  $T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) -$

$T_{n-2}(x)$   $n=2, 3, \dots$ ,  $T_0 = 1$ ,  $T_1 = x$  d'où le coefficient de  $x_n$  dans  $T_n$  est

$2^{n-1}$  (par récurrence). Nous allons avoir besoin de la remarque suivante

Remarque :  $P_n$  est p.m.a. de 0 sur  $[-1, +1]$  si et seulement si :

a) il existe  $n+1$  points de  $[-1, +1]$  où  $P_n = \pm \|P_n\|$  avec des signes alternés.

b) le coefficient de  $x_n$  dans  $P_n$  est 1.

En effet :

Soit  $Q_{n-1}$  le p.m.a. de  $x^n$  sur  $[-1, +1]$ . Comme  $\mathcal{P}_{n-1}$  est du type de Tche-

bychef, il existe  $n+1$  points sur  $[-1, +1]$  où  $x^n - Q_{n-1} = \pm \|x^n - Q_{n-1}\|$

avec des signes alternés.

Il est clair que  $P_n = x^n - Q_{n-1}$ , d'où la remarque.

Il ne reste plus qu'à voir que  $2^{-n+1} T_n$  satisfait a) et b) :

a) il est clair que  $\|T_n\| = \sup |\cos nt| = 1$ .

pour  $t_k = \frac{k\pi}{n}$ ,  $\cos nt = (-1)^k$ .

Puisque  $t \in [0, \pi]$ ,  $k$  prend les valeurs  $0, 1, \dots, n$ , donc il y a  $n+1$  points

$t_k$  entre 0 et  $\pi$ . Prenons  $x_k = \cos t_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$   $k=0, 1, \dots, n$ .

Il y a  $n+1$  points  $x_k$  entre  $-1$  et  $+1$ , où  $T_n$  prend les valeurs  $\pm 1$

avec des signes alternés.

Donc  $T_n$  vérifie a), ce qui entraîne que  $2^{-n+1}T_n$  vérifie aussi a).

b) il est évident que le coefficient de  $x_n$  dans  $2^{-n+1}T_n$  est 1.

## 2.5 Meilleure approximation sur un sous-ensemble et Algorithme de Remès.

Soient  $K = [a, b]$  et  $X \subset \mathcal{C}(K)$  un sous-espace du type de Tchebycheff de dimension finie  $n$ .

Soit  $J$  un sous-ensemble de  $K$  formé de  $n+1$  pts au moins. Si  $v \in X$ , la restriction  $v|_J$  caractérise  $v$  de manière unique. Si  $Y = \{v|_J \mid v \in X\}$ ,  $Y$  est du type de Tchebycheff et on peut poser le problème de la m.a. de  $f|_J$  dans  $Y$ .

2.5.1 Définition : On dit que  $u \in X$  est la m.a. de  $f$  sur  $J$ , si  $u|_J$  est la m.a. de  $f|_J$  dans  $Y$ .

Si  $f \in \mathcal{C}(K)$ , on sait qu'il existe  $u$  unique dans  $X$  qui réalise la m.a.

de  $f$  sur  $J$  et qu'il existe alors  $n+1$  pts de  $J$  tels que

$$f(x_i) - u(x_i) = \pm \sup_J |f(x) - u(x)| \text{ avec des signes alternés.}$$

2.5.2 Algorithme de Remès.

- L'algorithme de Remès permet de construire la m.a. dans  $X$  de  $f \in \mathcal{C}(K)$

- Précisons l'algorithme :

a)- On part de  $J_0$  arbitraire formé de  $n+1$  points.

b)- Soit  $u_0$  la m.a. de  $f$  sur  $J_0$  :  $u_0 = \sum_1^n \lambda_j \varphi_j$

en ces  $n+1$  points on a  $f(x_i) - u(x_i) = (-1)^i \|f-u_0\|_{\mathcal{C}(J)} = (-1)^i \rho_0$

d'où  $n+1$  équations à  $n+1$  inconnues  $\lambda_j$  et  $\rho_0$  qui s'écrivent

$$\sum_1^n \lambda_j \varphi_j(x_i) + (-1)^i \rho_0 = f(x_i) \quad 0 \leq i \leq n .$$

c)- On a  $\|f-u_0\| = \sup_K |f(x)-u_0(x)| \geq \rho_0 = \|f-u_0\|_{(J)} = \sup_J |f(x)-u_0(x)|$

( $\alpha$ ) ou bien  $\|f-u_0\| = \rho_0$  et d'après le théorème de Tchebycheff,  $u_0 =$  m.a.

de  $f$  sur  $K$

( $\beta$ ) ou bien  $\|f-u_0\| > \rho_0$  .

Alors  $\exists x \in K-J_0$  t.q.  $|f(x)-u_0(x)| = \|f-u_0\|$ .

On considère  $J_0 \setminus \{x\}$  que l'on ordonne et, on élimine un des points en sorte que les alternations soient respectées.

d)- Sur l'ensemble  $J_1$  ainsi obtenu, on détermine  $u_1$  m.a. de  $f$  et on itère le procédé...

e)- Il en résulte une suite  $u_k$  qui converge vers la m.a. de  $f$  sur  $J$  .

2.5.3 Proposition : La suite  $u_k$  converge uniformément vers la m.a. de  $f$  dans  $X$  .

Trois lemmes préalables seront utiles à la démonstration.

Lemme 1 : Les  $\rho_k = \sup_{J_k} |f(x) - u_k(x)|$  forment une suite croissante.

Démonstration :

On note  $J_i = \{x_1^i \dots x_{n+1}^i\}$  et  $u_i$  la m.a. de  $f$  sur  $J_i$ .

Soit  $l_i(v) = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j^i v(x_j^i)$  les  $\alpha_j^i$  ayant été normalisées c'est-à-dire

$\sum_{j=1}^{n+1} |\alpha_j^i| = 1$ . On a  $l_i(u_k) = 0$  car  $u_k \in X$ .

$$\begin{aligned} \rho_1 = l_1(f) &= l_1(f - u_0) = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j^1 (f(x_j^1) - u_0(x_j^1)) \\ &= \sum_j |\alpha_j^1| |f(x_j^1) - u_0(x_j^1)| \quad \text{"puisque l'on a des} \\ &\quad \text{alternations"} = \sum_j |\alpha_j^1| \rho_0 + |\alpha_{j_1}^1| (\|f - u_0\| - \rho_0) \quad \text{"puisque l'on a} \end{aligned}$$

$|f(x_j^1) - u_0(x_j^1)| = \rho_0$  sauf pour un  $j$  ( $j = j_1$ ) où l'on a

$$|f(x_{j_1}^1) - u_0(x_{j_1}^1)| = \|f - u_0\|.$$

Alors  $\rho_1 = \rho_0 + |\alpha_{j_1}^1| (\|f - u_0\| - \rho_0) > \rho_0$  puisque  $\|f - u_0\| > \rho_0$ .

De même,  $\rho_k = \rho_{k-1} + |\alpha_{j_k}^k| (\|f - u_{k-1}\| - \rho_{k-1}) > \rho_{k-1}$  c.q.f.d.

Lemme 2 : Il n'y a pas de points de  $J_k$  dont la distance mutuelle tende vers

0, i.e.  $\exists s > 0$  t.q.  $|x_i^k - x_j^k| \geq s \quad \forall i \text{ et } j \leq n+1 \text{ et } \forall k$ .

Démonstration :

Par l'absurde pour  $i$  et  $j$  fixés.

Supposons qu'il existe  $\{k_m\} \rightarrow +\infty$  t.q.  $|x_i^{k_m} - x_j^{k_m}| \rightarrow 0$ .

Dans la suite  $\{x_\ell^{k_m}\}$  on peut extraire une sous-suite convergente vers  $\bar{x}_\ell$  et

ce pour  $1 \leq \ell \leq n+1$ . On notera que  $\bar{x}_i = \bar{x}_j$ . Comme  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n+1}$ , ne sont

pas tous distincts, il existe  $\bar{u}$  dans  $X$  (du type de Tchebycheff), tel que

$$\bar{u}(\bar{x}_\ell) = f(\bar{x}_\ell), \quad 1 \leq \ell \leq n+1. \quad \text{Alors } |f(x_\ell^{k_m}) - u_k(x_\ell^{k_m})| = \rho_k > \rho_1 > 0$$

$1 \leq l \leq n+1$  et  $|f(x_l^{k_m}) - \bar{u}(x_l^{k_m})| \leq \frac{\rho_1}{2} \quad \forall l$  dès que  $k_m \geq k_{m_0}$ .

Il suffit maintenant de remarquer que  $l_k(u_k - \bar{u}) \neq 0$  pour  $k_m \geq k_{m_0}$  ce qui

est impossible puisque  $l_k$  doit s'annuler pour toute fonctionnelle de  $X$  :

$$\begin{aligned} l_k(u_k - \bar{u}) &= l_k(u_k - f) + l_k(f - \bar{u}) \\ &= -\rho_k + \sum_j \alpha_j^k (f(x_j^k) - \bar{u}(x_j^k)) \\ &\leq -\rho_k + \frac{\rho_1}{2} \sum_j |\alpha_j^k| = -\rho_k + \frac{\rho_1}{2} < -\frac{\rho_1}{2} < 0 \end{aligned} \quad \text{c.q.f.d.}$$

Lemme 3 : Il existe  $r > 0$  tel que  $|\alpha_i^k| \geq r$  pour  $1 \leq i \leq n+1$ ,  $\forall k$

Démonstration (par l'absurde)

Supposons  $\alpha_1^{k_m} \rightarrow 0$  pour une certaine suite  $k_m$ .

Les  $\{\alpha_i^k\}_k$  étant bornées (puisque l'on a  $\sum_{i=1}^{n+1} |\alpha_i^k| = 1$ ) alors par ex-

tractions successives de sous-suites, on obtient une sous-suite  $k_m$  telle que

$$\begin{cases} \alpha_1^{k_m} \rightarrow 0 \\ \alpha_i^{k_m} \rightarrow \alpha_i & 2 \leq i \leq n+1 \\ x_i^{k_m} \rightarrow \bar{x}_i & 1 \leq i \leq n+1 \end{cases}$$

Alors si  $v \in X$   $l_{k_m}(v) = 0 = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j^{k_m} v(x_j^{k_m})$  tend vers  $\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j v(\bar{x}_j)$

d'où  $\sum_{j=2}^{n+1} \alpha_j v(\bar{x}_j) = 0 \quad \forall v \in X$ .

Compte tenu de  $|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \geq s > 0$  (lemme 2), ceci n'est possible que si

$\alpha_2 = \dots = \alpha_{n+1} = 0$ . Or la normalisation des  $\alpha_i^k$  exige que  $\sum_{j=1}^{n+1} |\alpha_j| = 1$

d'où la contradiction.

Démonstration de la proposition 2.6.1

Soit  $u$  la m.a. de  $f$  et  $\rho = \|f - u\|$ .

$$\rho_k = \sup_{J_k} |f(x) - u_k(x)| \leq \sup_{J_k} |f(x) - u(x)| \leq \rho$$

$$\rho_{k+1} = \rho_k + |\alpha_i^k| (\|f - u_k\| - \rho_k) \quad \text{d'après le lemme 1}$$

$$\geq \rho_k + r (\|f - u\| - \rho_k) \quad \text{d'après le lemme 3.}$$

$$\begin{aligned} \text{Il vient } \rho - \rho_{k+1} &\leq (1-r)(\rho - \rho_k) \\ &\leq (1-r)^{k+1}(\rho - \rho_0) \end{aligned}$$

Les  $\alpha_i^k$  étant non tous nuls et  $\sum |\alpha_i^k| = 1$ , on a  $r < 1$  et le second membre tend vers 0, quand  $k \rightarrow +\infty$ .

$$\text{D'où } \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \rho.$$

D'où immédiatement dans la formule qui vient du lemme 1

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - u_k\| = \rho.$$

La suite  $\{u_k\}$  étant alors bornée dans  $X$  qui est de dimension finie, est relativement compacte, et il existe une suite extraite convergente vers  $\bar{u}$  dans  $X$ .

Alors  $\rho = \|f - u\| = \|f - \bar{u}\|$  d'où  $u = \bar{u}$  (unicité de la m.a. de  $f$  dans  $X$ )

$$\text{et } \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u.$$

c.q.f.d.



### §3 - Fonctions splines d'interpolation

#### 3.0 Introduction

A l'origine, il s'agissait d'un problème d'interpolation : pour tracer une courbe passant par des points donnés, les dessinateurs utilisaient des lattes (en anglais "splines") flexibles. Ces lattes étaient maintenues en place par des poids de plomb, appelés "ducks". En jouant, d'une part sur les points où les ducks étaient attachés à la latte, d'autre part sur la position de la latte et des poids par rapport à la surface, on arrivait à faire passer la latte par les points imposés.

Appelons  $\Gamma$  la courbe dessinée par l'axe déformé de la latte.

La "fonction spline" mathématique  $u$  est une approximation de la courbe  $\Gamma$  par une fonction de classe  $C^2$ , de classe  $C^3$  par morceaux, les sauts de la dérivée troisième correspondant aux points où sont attachés les ducks.

La théorie mathématique des fonctions splines est récente ; un grand progrès a été effectué en 1957 avec la démonstration par Holloday du théorème suivant :

Théorème : soit  $a < x_1 \dots < x_N < b$  une subdivision de  $[a, b]$  , et  $y_1 \dots y_N$  N nombres réels. Parmi toutes les fonctions  $v$  de classe  $C^2$  sur  $[a, b]$  telles que  $v(x_i) = y_i$   $i=1 \dots N$  , la spline fonction  $u$  telle que  $u''(x_1) = u''(x_N)$  minimise la fonction  $E(v) = \int_a^b |v''(x)|^2 dx$  .

On peut trouver une démonstration de ce théorème dans Ahlberg [6] .

Interprétation : l'énergie potentielle de la latte est minimum. En effet,  $v''$  est en général une bonne approximation de la courbure  $C$ , et on sait que l'énergie potentielle d'une latte déformée est proportionnelle à  $\int (C(x))^2 dx$ . C'est pourquoi le théorème d'Holloday est parfois appelé la "propriété du minimum de courbure".

Nous allons généraliser ce résultat, en cherchant parmi les fonctions  $v$  t.q.

$v^{(k)} \in L^2(a,b)$  et  $v(x_i) = y_i$  celle qui réalise le minimum de la fonction  $E(v) = \int_a^b |v^{(k)}(x)|^2 dx$ .

3.1 Définition et propriétés de  $H^k(a,b)$ .

3.1.1 Définition

Soit  $[a,b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $k$  un entier  $\geq 1$ . L'espace de Sobolev  $H^k(a,b)$  d'ordre  $k$  sur l'ouvert  $]a,b[$  est défini par :

$$H^k(a,b) = \{u; \text{t.q. } u \in L^2(a,b) \text{ et } \frac{d^j u}{dx^j} \in L^2(a,b), j=1, \dots, k\}.$$

Il faut préciser à quel sens on prend les  $\frac{d^j u}{dx^j}$ .

Pour cela rappelons brièvement comment sont définies les distributions sur  $]a,b[$ .

(pour une théorie générale, voir Schwartz [7]).

On définit d'abord :

$$\mathcal{D}(]a,b[) = \{\varphi, \varphi \text{ indéfiniment différentiable sur } ]a,b[, \text{ et à support compact dans } ]a,b[\}$$

puis :

$\mathcal{D}'(]a, b[) = \text{dual de } \mathcal{D}(]a, b[) = \text{espace des distributions sur } ]a, b[$

qu'on munit de la topologie forte de dual.

Si  $T \in \mathcal{D}'(]a, b[)$  et  $\varphi \in \mathcal{D}(]a, b[)$ , la valeur en  $\varphi$  de  $T$  est notée  $\langle T, \varphi \rangle$ .

La dérivée  $\frac{dT}{dx}$  est définie par :

$$\left\langle \frac{dT}{dx}, \varphi \right\rangle = -\langle T, \frac{d\varphi}{dx} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]a, b[)$$

ce qui donne une application linéaire continue de  $\mathcal{D}'(]a, b[)$  dans lui-même qui

à  $T$  associe  $\frac{dT}{dx}$ .

Naturellement, on définira  $\frac{d^j T}{dx^j}$  par itération.

On note que  $\mathcal{D}(]a, b[) \subset L^2(a, b) \subset \mathcal{D}'(]a, b[)$ , en identifiant (ce qui est loisible) tout élément  $u$  de  $L^2(a, b)$  à la distribution :  $\varphi \rightarrow \langle u, \varphi \rangle$ .

On peut maintenant préciser la définition de  $H^k(a, b)$  en disant que les dérivées

$\frac{d^j u}{dx^j}$  sont prises au sens des distributions sur  $]a, b[$ .

On munit  $H^k(a, b)$  de la norme :

$$\|u\|_{H^k(a, b)} = \left( \sum_{j=0}^k \|D^j u\|_{L^2(a, b)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{avec } D^j u = \frac{d^j u}{dx^j}$$

on notera désormais :  $|u| = |u|_{L^2(a, b)}$  et  $(u, v) = (u, v)_{L^2(a, b)}$

$$\|u\|_k = \|u\|_{H^k(a, b)}$$

### 3.1.2 Lemme

Pour la norme  $\| \cdot \|_k$ ,  $H^k(a, b)$  est un espace de Hilbert, le produit scalaire

de deux éléments  $u$  et  $v$  de  $H^k$  étant donné par :

$$((u, v)) = \sum_{j=0}^k (D^j u, D^j v)$$

Démonstration :

Il faut vérifier essentiellement que  $H^k(a,b)$  est complet pour cette norme :

Soit  $\{u_k\}$  une suite de Cauchy dans  $H^k(a,b)$ .

Pour tout  $j$ ,  $0 \leq j \leq k$ ,  $\{D^j u_k\}$  est une suite de Cauchy dans  $L^2(a,b)$  qui est complet, d'où  $D^j u_k$  tend vers  $\Psi_j \in L^2(a,b)$ .

Posons  $\Psi_0 = u$ .

Comme  $u_k$  tend vers  $u$  dans  $L^2(a,b)$ , on a en particulier  $u_k \rightarrow u$  dans  $\mathcal{D}'([a,b[)$ , et, la dérivation étant continue dans  $\mathcal{D}'$ , on a :  $D^j u_k \rightarrow D^j u$  dans  $\mathcal{D}'([a,b[)$  donc  $D^j u = \Psi_j \in L^2(a,b)$  et  $u \in H^k(a,b)$ . D'où  $u_k \rightarrow u$  dans  $H^k(a,b)$ . C.Q.F.D.

### 3.1.3 Lemme

Soit  $u \in H^1(a,b)$ .

Alors : i)  $u$  est p.p. égale à une fonction continue de  $[a,b]$  dans  $\mathbb{R}$ .

ii) l'injection  $H^1(a,b) \rightarrow \mathcal{C}([a,b])$  est continue.

Démonstration :

i) Considérons  $v(x) = \int_a^x u'(y) dy$

dans  $\mathcal{D}'$ , on a :  $v' = u'$  d'où  $(v-u)' = 0$

alors, presque partout,  $u(x) = \int_a^x u'(y) dy + c$

donc, quitte à modifier  $u$  sur un ensemble de mesure nulle,  $u \in \mathcal{C}([a,b])$ .

On peut maintenant parler des valeurs de  $u$  en tout point de l'intervalle  $[a,b]$ .

ii) Soit  $x_0 \in [a, b]$ .

$$\forall x \in [a, b], u^2(x_0) = u^2(x) - 2 \int_{x_0}^x u'(y)u(y)dy$$

$$u^2(x_0) \leq u^2(x) + 2 \int_{x_0}^x |u'(y)||u(y)|dy.$$

D'après l'inégalité de Schwarz,  $u^2(x_0) \leq u^2(x) + 2|u| \cdot |u'| \leq u^2(x) + |u|^2 + |u'|^2$ .

On somme de  $a$  à  $b$  :

$$(b-a)u^2(x_0) \leq |u|^2 + (b-a)(|u|^2 + |u'|^2) \leq |u|^2 + |u'|^2 + (b-a)(|u|^2 + |u'|^2)$$

d'où  $u^2(x_0) \leq c^2(|u|^2 + |u'|^2)$  avec par exemple  $c^2 = 1 + \frac{1}{b-a}$ .

Ceci est vrai pour  $x_0$  arbitraire dans  $[a, b]$ .

Donc  $\sup_{x \in [a, b]} |u(x)| \leq c \|u\|_1$  i.e.  $\|u\|_{\mathcal{C}([a, b])} \leq c \|u\|_1$ , ce qui entraîne

bien que l'injection de  $H^1(a, b)$  dans  $\mathcal{C}([a, b])$  est continue. C.Q.F.D.

3.1.4 Soit  $T : H^k(a, b) \rightarrow L^2(a, b) \subset \mathcal{D}'([a, b])$  définie par  $T(v) = D^k v$ .

Il est clair que  $T$  est linéaire et continue.

Lemme :

$T$  est surjective et admet un inverse continue  $S$  :

$$x \rightarrow (Sf)(x) = \int_a^x \frac{(x-\xi)^{k-1}}{(k-1)!} f(\xi) d\xi.$$

Démonstration :

$$\text{On a : } (D^j Sf)(x) = \int_a^x \frac{(x-\xi)^{k-1-j}}{(k-1-j)!} f(\xi) d\xi \text{ pour } j=1 \dots k-1$$

et  $D^k Sf = f$

donc on a bien  $Sf \in H^k(a, b)$  et  $T \circ S = I$ .

$T$ , ayant un inverse, est surjective.

Montrons que  $S$  est continue :

$$|(Sf)(x)| \leq c_0 \int_a^b |f(\xi)| d\xi$$

d'après l'inégalité de Schwarz,  $|(Sf)(x)| \leq c_0 (b-a)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b |f(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$

d'où  $|(Sf)(x)| \leq c_1 |f|$  et  $\sup_{x \in [a,b]} |(Sf)(x)| \leq c_1 |f|$ .

Par un raisonnement analogue, on a, pour  $j=1 \dots k-1$  :

$$\sup_{x \in [a,b]} |(D^j Sf)(x)| \leq c_2 |f|$$

donc  $|D^j Sf| \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \|D^j Sf\|_u \leq c_2 (b-a)^{\frac{1}{2}} |f|$

et  $\|Sf\|_k = \left( \sum_{j=1}^k |D^j Sf|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_3 |f|$ , ce qui entraîne bien que  $S$  est continue.

C.Q.F.D.

### 3.1.5 Lemme

Soient  $x_1, \dots, x_N$   $N$  points de  $[a, b]$ .

Soit  $H^k(a, b)$  l'espace de Sobolev d'ordre  $k$ ,  $1 \leq k \leq N$ , sur  $]a, b[$

alors  $v \rightarrow \left( |D^k v| + \sum_{i=1}^N |v(x_i)| \right)$  est une norme sur  $H^k(a, b)$  équivalente à la  
norme initiale  $\|v\|_k$ .

Démonstration :

i) on écrit  $v = SD^k v + v - SD^k v$

$$\text{d'où : } \|v\|_k \leq \|SD^k v\|_k + \|v - SD^k v\|_k$$

$$\|v\|_k \leq c_3 |D^k v| + \|v - SD^k v\|_k$$

Or  $D^k(v - SD^k v) = D^k v - D^k SD^k v = 0$ .

Donc  $v - SD^k v \in \mathcal{P}_{k-1}$ , espace des polynômes de degré  $\leq k-1$  sur  $[a, b]$ .

Sur  $\mathcal{P}_{k-1}$ , espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Par conséquent, sur  $\mathcal{P}_{k-1}$ ,  $\theta \rightarrow \sum_{i=1}^N |\theta(x_i)|$  est une norme équivalente à la norme induite par celle de  $H^k(a,b)$ .

$$\text{d'où : } \|v - SD^k v\|_k \leq c_4 \sum_{i=1}^N |v(x_i) - SD^k v(x_i)|$$

$$\|v - SD^k v\|_k \leq c_4 \sum_{i=1}^N |v(x_i)| + c_4 \sum_{i=1}^N |SD^k v(x_i)|$$

alors  $\|v - SD^k v\|_k \leq c_4 \sum_{i=1}^N |v(x_i)| + c_5 |D^k v|$ , puisque :

$$|SD^k v(x_i)| \leq \|SD^k v\|_u \leq c \|SD^k v\|_1 \leq c \cdot c_3 |D^k v|.$$

$$\text{Finalement, } \|v\|_k \leq c_3 |D^k v| + c_4 \sum_{i=1}^N |v(x_i)| + c_5 |D^k v|$$

$$\text{i.e. } \|v\|_k \leq c_6 |D^k v| + c_4 \sum_{i=1}^N |v(x_i)|.$$

ii) dans l'autre sens :

$$|D^k v| + \sum_{i=1}^N |v(x_i)| \leq \|v\|_k + N \|v\|_1 \leq c_7 \|v\|_k \quad \underline{\text{C.Q.F.D.}}$$

3.2 Nous pouvons maintenant aborder le problème que nous nous étions posé, en

l'énonçant sous la forme suivante :

Soit  $a < x_1 < x_2 \dots < x_N < b$  une subdivision de l'intervalle  $[a,b]$ , et

$y_1 \dots y_N$  N nombres réels.

Soit  $H^k(a,b)$  l'espace de Sobolev d'ordre  $k$ ,  $1 \leq k \leq N$ , sur  $]a,b[$ .

Soit  $X = \{v \in H^k(a,b) \text{ t.q. } v(x_i) = y_i, i=1 \dots N\}$

et  $Y = \{v \in H^k(a,b) \text{ t.q. } v(x_i) = 0, i=1 \dots N\}$

posons  $E(v) = \int_a^b |D^k v(x)|^2 dx$ .

Notre problème est : trouver  $u \in X$  t.q.  $E(u) \leq E(v) \forall v \in X$ .

La réponse nous est donnée par la proposition suivante.

3.2.1 Proposition :

Avec les hypothèses ci-dessus, il existe  $u \in X$  unique tel que  $E(u) \leq E(v)$

$\forall v \in X$  . Cet élément  $u$  est caractérisé par :  $(D^k u, D^k \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in Y$  .

Démonstration :

Le problème revient à trouver l'élément  $v_*$  de  $D^k X \subset L^2(a,b)$  t.q.  $|v_*| \leq |w|$

$\forall w \in D^k X$  .

En effet, supposons que  $v_*$  existe et est unique :

comme  $v_* \in D^k X$  , il existe  $u_* \in X$  t.q.  $D^k u_* = v_*$  .

Montrons l'unicité de  $u_*$  : soit  $u_{**}$  un autre élément de  $X$  t.q.  $D^k u_{**} = v_*$

alors  $D^k(u_{**} - u_*) = 0$  , d'où  $u_* - u_{**} \in \mathcal{P}_{k-1}$  .

Mais  $u_*(x_i) - u_{**}(x_i) = 0$  pour  $i=1 \dots N$  , avec  $N \geq k$  .

Par conséquent,  $u_* - u_{**} \equiv 0$  .

Comme  $E(u_*) \leq E(v) \quad \forall v \in X$  ,  $u_*$  est solution du problème.

Il suffit donc de montrer l'existence et l'unicité de  $v_*$  :

Supposons que  $D^k X$  soit fermé dans l'espace de Hilbert  $L^2(a,b)$  ; alors il

existe un élément unique  $w$  qui réalise la meilleure approximation de  $0$  dans

$D^k X$  : c'est la projection de  $0$  sur  $D^k X$  . Nous poserons :  $v_* = w$  .

Tout revient donc à montrer que  $D^k X$  est fermé dans  $L^2(a,b)$  :

Soit  $\{v_n \in D^k X\}$  une suite convergente vers  $v$  dans  $L^2(a,b)$ . C'est donc

aussi une suite de Cauchy dans  $L^2(a,b)$ . Pour tout  $n$  , soit  $u_n \in X$  tel que

$D^k u_n = v_n$  .



$\{u_n\}$  est une suite de Cauchy dans  $H^k(a,b)$  :

En effet,  $\|u_n - u_m\|_k \leq c |D^k(u_n - u_m)| + c \sum_{i=1}^N |u_n(x_i) - u_m(x_i)|$ ,

d'après le lemme 3.1.5.

Or  $u_n(x_i) - u_m(x_i) = 0$ , d'où  $\|u_n - u_m\|_k \leq c |v_n - v_m| \rightarrow 0$  et  $u_n \rightarrow u$  dans  $H^k(a,b)$ . L'opérateur  $T$  étant continu,  $D^k u_n \rightarrow D^k u$  dans  $L^2(a,b)$ , et on a

évidemment  $D^k u = v$ . Mais, pour  $i=1 \dots N$ ,  $u(x_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_i) = y_i$ .

Donc  $u \in X$ ,  $D^k u = v \in D^k X$ , et  $D^k X$  est fermé dans  $L^2(a,b)$ .

Caractérisation de  $u_*$  :

$v_* = D^k u_*$ , étant la projection de 0 sur  $D^k X$  (qui est un sous-espace affine translaté de  $D^k Y$ ), est caractérisée par  $v_* - 0 \perp D^k Y$ , c'est-à-dire :

$$(D^k u_*, D^k \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in Y.$$

C.Q.F.D.

Nous allons maintenant donner une caractérisation plus précise de l'élément minimisant que nous venons de construire :

### 3.2.2 Proposition

La fonction  $u$  qui réalise le minimum de  $E(v)$  dans  $X$  est caractérisée par les conditions suivantes :

i)  $u$  est un polynôme de  $d^0 \leq k-1$  sur  $]a, x_1[$  et  $]x_N, b[$

ii)  $u$  est un polynôme de  $d^0 \leq 2k-1$  sur  $]x_i, x_{i+1}[$   $i=1 \dots N-1$

iii)  $D^j u(x_i - 0) = D^j u(x_i + 0)$   $j=0 \dots 2k-2$   $i=1 \dots N$

iv)  $D^j u(a) = D^j u(b) = 0$   $j=k \dots 2k-1$ .

Démonstration :

α) si  $u$  vérifie les 4 conditions, montrons que  $(D^k u, D^k \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in Y$ .

Soit  $\varphi \in Y$ .

Considérons  $]x_i, x_{i+1}[$ ,  $i=1 \dots N-1$ .

Sur cet intervalle,  $D^{2k} u \equiv 0$ , car  $d^0 u \ll 2k-1$ .

D'où, par intégration par partie :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} D^{2k} u \cdot \varphi = D^{2k-1} u(x_{i+1}-0) \varphi(x_{i+1}) - D^{2k-1} u(x_i+0) \varphi(x_i) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} D^{2k-1} u \cdot D\varphi \\ &= - \int_{x_i}^{x_{i+1}} D^{2k-1} u \cdot D\varphi \quad \text{puisque } \varphi(x_{i+1}) = \varphi(x_i) = 0. \end{aligned}$$

Une deuxième intégration par partie donne :

$$0 = - D^{2k-2} u(x_{i+1}) \cdot D\varphi(x_{i+1}) + D^{2k-2} u(x_i) D\varphi(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} D^{2k-2} u \cdot D^2 \varphi.$$

Cette écriture a un sens puisque  $D^j u(x_i-0) = D^j u(x_i+0) = D^j u(x_i)$  pour

$j=0 \dots 2k-2$ . Après  $k$  intégrations par partie :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{\alpha(j)} \{ D^{k+j} u(x_{i+1}) \cdot D^{k-1-j} \varphi(x_{i+1}) - D^{k+j} u(x_i) \cdot D^{k-1-j} \varphi(x_i) \} \\ &\quad + (-1)^k \int_{x_i}^{x_{i+1}} D^k u \cdot D^k \varphi \quad \text{avec } \alpha(j) = j \quad \text{si } k \text{ impair} \\ &\quad \quad \quad \alpha(j) = j+1 \quad \text{si } k \text{ pair} \end{aligned}$$

Nous remarquons : comme  $u$  est  $2k-2$  fois dérivable en  $x_1$ ,

$$D^{k+j} u(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1-0} D^{k+j} u(x) = 0 \quad \text{pour } j=0 \dots k-2. \quad \text{De même au point } x_N.$$

On a :

$$(D^k u, D^k \varphi) = \int_a^b D^k u \cdot D^k \varphi = \int_a^{x_1} D^k u \cdot D^k \varphi + \int_{x_N}^b D^k u \cdot D^k \varphi + \int_{x_1}^{x_N} D^k u \cdot D^k \varphi$$

comme  $u$  est de degré  $\ll k-1$  sur  $]a, x_1[$  et sur  $]x_N, b[$ ,

$$(D^k u, D^k \varphi) = \int_{x_1}^{x_N} D^k u \cdot D^k \varphi = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} D^k u \cdot D^k \varphi$$

Mais :

$$\sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} D^k u \cdot D^k \varphi = \sum_{i=1}^{N-1} \left[ \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{\alpha(j)} (-1)^{k+1} \left\{ D^{k+j} u(x_{i+1}) \cdot D^{k-1-j} \varphi(x_{i+1}) - D^{k+j} u(x_i) \cdot D^{k-1-j} \varphi(x_i) \right\} \right] .$$

En intervertissant les sommations en  $i$  et les sommations en  $j$  :

$$\sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} D^k u \cdot D^k \varphi = \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j \left[ D^{k+j} u(x_N) D^{k-1-j} \varphi(x_N) - D^{k+j} u(x_1) D^{k-1-j} \varphi(x_1) \right]$$

D'après la remarque que nous avons faite, cette quantité est nulle.

On a donc  $(D^k u, D^k \varphi) = 0$ .

$\beta$ ) Supposons maintenant  $(D^k u, D^k \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in Y$ .

En prenant pour  $\varphi$  une fonction de  $\mathcal{D}(]x_i, x_{i+1}[) \subset Y$ , on voit que la condition  $(D^k u, D^k \varphi) = 0$  entraîne que  $D_u^{2k} \equiv 0$  sur  $]x_i, x_{i+1}[$ .

Donc, sur chacun de ces intervalles, degré  $u \leq 2k-1$ , ce qui nous donne ii).

Utilisons ce résultat, comme dans le cas  $\alpha$ ) :

Soit  $\varphi \in Y$ ; on a  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} D^{2k} u \cdot \varphi = 0$ .

Après  $k$  intégrations par partie, on a  $0 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} D^k u \cdot D^k \varphi + \sigma_i$ .

Avec  $\sigma_i = \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j \{ D^{k+j} u(x_{i+1}+0) \cdot D^{k-1-j} \varphi(x_{i+1}) - D^{k+j} u(x_i+0) D^{k-1-j} \varphi(x_i) \}$ .

D'où :  $0 = \int_a^b D^k u \cdot D^k \varphi + \sum_{i=0}^N \sigma_i$ , avec la convention  $a = x_0$  et  $b = x_{N+1}$ .

Mais, comme  $(D^k u, D^k \varphi) = 0$ , on a nécessairement  $\sum_{i=0}^N \sigma_i = 0$ .

Considérons maintenant l'intervalle  $]a, x_1[$ , et prenons pour  $\varphi$  une fonction de  $\mathcal{D}(]a, x_1[)$ .

Alors  $0 = \sum_{i=0}^N \sigma_i = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j [- D^{k+j} u(a) D^{k-1-j} \varphi(a)]$ , et, nécessairement,

$D^{k+j} u(a) = 0$  pour  $j=0 \dots k-1$ . D'où  $u$  est un polynôme de degré  $\leq k-1$  sur

$]a, x_1[$  . Le même raisonnement s'applique à l'intervalle  $]x_N, b[$  . On a donc prouvé i) et iv). Il ne nous reste plus qu'à prouver :  $D^j u(x_i - 0) = D^j u(x_i + 0)$  pour  $j=0 \dots 2k-2$  et  $i=1 \dots N$  .

Prenons pour  $\varphi$  une fonction de  $\mathcal{D}(]x_{i-1}, x_{i+1}[)$  telle que  $\varphi(x_i) = 0$  .

Il est clair que  $\varphi \in Y$  .

Alors :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^N \sigma_{-i} = \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j \{ D^{k+j} u(x_{i+1} - 0) D^{k-1-j} \varphi(x_{i+1}) - D^{k+j} u(x_i + 0) D^{k-1-j} \varphi(x_i) \\ &\quad + D^{k+j} u(x_i - 0) D^{k-1-j} \varphi(x_i) - D^{k+j} u(x_{i-1} + 0) D^{k-1-j} \varphi(x_{i-1}) \} \\ &= \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j [ D^{k+j} u(x_i - 0) - D^{k+j} u(x_i + 0) ] D^{k-1-j} \varphi(x_i) \} \end{aligned}$$

Nécessairement,  $D^{k+j} u(x_i - 0) = D^{k+j} u(x_i + 0)$  pour  $j=0 \dots k-2$  , et on a bien prouvé iii). C.Q.F.D.

### 3.2.3 Définition

Soit  $a < x_1 < x_2 \dots < x_N < b$  une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$  .

On dit que  $u_i \in H^k(a, b)$  est la i-ème fonction spline de base si  $u_i(x_j) = \delta_{ij}$

et  $E(u_i) \leq E(v) \forall v \in X$  .

Avec les notations de la proposition 3.2.2, on a  $u = \sum_{i=1}^N \sigma_{-i} u_i$  .

### 3.3 Problème de convergence

Soit  $H^k(a, b)$  l'espace de Sobolev d'ordre  $k$  sur  $]a, b[$  .

Soit  $f \in H^k(a, b)$  fixé.

A tout  $n \in \mathbb{N}$  , associons une subdivision  $\Delta_n : a < x_1^n < x_2^n \dots < x_{N(n)}^n < b$  de  $[a, b]$  .

Soit  $X_n = \{v, v \in H^k(a,b) \text{ et } v(x_i^n) = f(x_i^n), i=1 \dots N(n)\}$

et  $Y_n = \{v, v \in H^k(a,b) \text{ et } v(x_i^n) = 0, i=1 \dots N(n)\}$

On sait alors qu'il existe un élément  $u_n$  de  $X_n$  tel que  $E(u_n) \leq E(v) \forall v \in X_n$

Le problème est alors le suivant : Est-ce que  $u_n$  converge vers  $f$  quand  $n$  tend vers l'infini ?

La réponse nous est donnée par la proposition suivante :

### 3.3.1 Proposition

Si le module de la subdivision  $\Delta_n$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ , alors  $u_n$  converge vers  $f$  dans  $H^k(a,b)$ .

Démonstration : Nous noterons  $\eta_n = \sup_{i=0 \dots N} |x_{i+1}^n - x_i^n|$  le module de la subdivision  $\Delta_n$ .

i) Remarques préliminaires :

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$u_n(x_i^n) = f(x_i^n)$ , donc  $u_n - f \in Y_n$ , et  $(D^k u_n, D^k u_n - D^k f) = 0$ .

D'après l'inégalité de Schwarz,  $|D^k u_n|^2 = (D^k u_n, D^k f) \leq |D^k u_n| |D^k f|$ .

Donc  $|D^k u_n| \leq |D^k f|$ .

Posons  $v_n = u_n - f$ .

On a  $v_n(x_i^n) = 0$  pour  $i=1, \dots, N(n)$ .

$|D^k v_n| \leq |D^k u_n| + |D^k f|$ , donc  $|D^k v_n|$  est majoré par une constante indépendante de  $n$ , par exemple  $2|D^k f|$ .

Ecrivons :  $v_n = SD^k v_n + \theta_n$ , avec  $\theta_n = v_n - SD^k v_n$ .

Comme  $D^k(v_n - SD^k_{v_n}) = 0$ , on a  $\theta_n \in \mathcal{P}_{k-1}$ .

On remarque que  $\theta_n(x_i^n) = -SD^k_{v_n}(x_i^n)$ .

Notre but est de montrer que  $v_n \rightarrow 0$  dans  $H^k(a,b)$ .

ii) Montrons que la suite  $\{D^k_{v_n}\}$  est bornée dans  $L^2(a,b)$ .

Dès que  $n$  est assez grand,  $\eta_n \leq \frac{b-a}{k}$ .

Il existe alors  $k$  points  $y_1^n \dots y_k^n$  tels que  $|y_{i+1}^n - y_i^n| \geq \frac{b-a}{2k}$ .

Utilisons les polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$\theta_n(y) = \sum_{i=1}^k \theta_n(y_i^n) \ell_i^n(y), \quad \text{où } \ell_i^n(y) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{(y - y_j^n)}{(y_i^n - y_j^n)}$$

$$|\theta_n(y)| \leq \sum_{i=1}^k |\theta_n(y_i^n)| \cdot |\ell_i^n(y)|.$$

$$\text{D'une part : } |\ell_i^n(y)| \leq \frac{(b-a)^{k-1}}{[(b-a)/2k]^{k-1}} = (2k)^{k-1}.$$

$$\text{D'autre part : } |\theta_n(y_i^n)| \leq |SD^k_{v_n}(y_i^n)| \leq \|SD^k_{v_n}\|_{\mathcal{B}([a,b])} \leq c \|SD^k_{v_n}\|_1 \leq c \cdot c_3 |D^k_{v_n}|$$

$$\text{D'où } |\theta_n(y)| \leq k(2k)^{k-1} c \cdot c_3 |D^k_{v_n}|, \quad \text{donc } \|\theta_n\|_{\mathcal{B}([a,b])} \text{ est borné indépen-}$$

damment de  $n$  dans  $\mathcal{P}_{k-1}$  dès que  $\eta_n \leq \frac{b-a}{k}$ .

Toutes les normes étant équivalentes sur  $\mathcal{P}_{k-1}$ , on voit que la suite  $\{\theta_n\}$

est bornée dans  $H^k$ .

$$\|v_n\|_k \leq \|SD^k_{v_n}\|_k + \|\theta_n\|_k \leq c_3 |D^k_{v_n}| + \|\theta_n\|_k.$$

Comme  $|Dv_n| \leq \|v_n\|_k$ , la suite  $\{D^k_{v_n}\}$  est bornée dans  $L^2(a,b)$ .

iii) Montrons que  $v_n \rightarrow 0$  uniformément.

Soit  $x \in [a,b]$ . Alors il existe  $i$  tel que  $x_i^n \leq x < x_{i+1}^n$ .

$$v_n(x) = u_n(x_i^n) + \int_{x_i^n}^x Dv(\xi) d\xi.$$

D'après l'inégalité de Schwarz,

$$|v_n(x)| \leq \left( \int_{x_i}^x d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{x_i}^x |Dv(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \leq (|x-x_i^n|)^{\frac{1}{2}} |Dv_n|$$

D'où  $\|v_n\|_{\mathcal{C}([a,b])} \leq K(\eta_n)^{\frac{1}{2}}$ , ce qui entraîne bien que  $v_n \rightarrow 0$  uniformément.

iv) Puisque la suite  $\{D^k v_n\}$  est bornée dans  $L^2(a,b)$ , on peut en extraire une sous-suite  $\{D^k v_{n_p}\}$  qui converge vers  $v$  dans  $L^2$  faible. Mais alors toute la suite  $\{D^k v_n\}$  converge vers  $v$  dans  $L^2$  faible : en effet, supposons qu'il existe  $g \in L^2(a,b)$  tel que  $(g, D^k v_n) \not\rightarrow (g, v)$ . Cela signifie qu'il existe un nombre  $\eta > 0$ , et une suite  $n_p$  tels que :  $|(g, D^k v_{n_p} - v)| \geq \eta$ . Or la suite  $\{D^k v_{n_p}\}$  est bornée dans  $L^2(a,b)$ , donc on peut en extraire une sous-suite convergeant faiblement vers  $v$ , ce qui est absurde.

On voit maintenant que  $v=0$  : en effet,  $D^k v_n \rightarrow v$  dans  $L^2$  faible, donc dans  $\mathcal{D}'$ . Mais d'autre part,  $v_n \rightarrow 0$  uniformément, donc aussi dans  $\mathcal{D}'$ .

L'opérateur  $D^k$  étant continu dans  $\mathcal{D}'$ ,  $D^k v_n \rightarrow 0$  et  $v=0$ .

Montrons que  $D^k v_n \rightarrow 0$  également dans  $L^2$  fort :

$$\text{Comme } (D^k u_n, D^k v_n) = 0, \quad |D^k v_n|^2 + (D^k f, D^k v_n) = 0.$$

Donc  $|D^k v_n| \rightarrow 0$ , ce qui signifie bien que  $D^k v_n \rightarrow 0$  dans  $L^2$  fort.

Nous pouvons maintenant conclure que  $v_n \rightarrow 0$  dans  $H^k(a,b)$  :

Soit  $x_1 < x_2 < \dots < x_k$   $k$  points fixés de  $]a,b[$ .

$$\|v_n\|_k \leq c \left\{ |D^k v_n| + \sum_{i=1}^k |v_n(x_i)| \right\} \leq c \left\{ |D^k v_n| + kK(\eta_n)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

cette dernière quantité tendant vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ .

C.Q.F.D.

Le corollaire suivant est immédiat :

3.3.2 Corollaire : Pour  $j=0, \dots, k-1$ , on a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^j u_n - D^j f\| = 0_{\mathcal{C}([a,b])}$ .

BibliographieA - Approximation des fonctions.

- [1] BOURBAKI (N.).- Eléments de Mathématiques  
Livre V Espace vectoriel topologique  
Chapitre V Espaces hilbertiens.  
Hermann.
- [2] LORENTZ (G.G.).- Approximation of Functions (1966) Rinehart and Winston
- [3] CHENEY (E.W.).- Introduction to Approximation Theory. International series  
in pure and applied mathematics. Mc Graw-Hill Company.
- [4] DAVIS (P.J.).- Interpolation and approximation (1961) Ginn and Blaisdell  
Publishing Company.

B - Polynômes orthogonaux.

- [5] SZEGO (G.).- Orthogonal Polynomials (1967) American Mathematical Society.  
Colloquium Publications, volume XXIII.

C - Fonctions splines.

- [6] AHLBERG (J.H.), NILSON (E.N.), WALSH (J.L.).- The Theory of splines and  
their applications (1967) Academic Press.

D - Théorie des distributions

- [7] SCHWARTZ (L.).- Théorie des distributions. Actualités scientifiques et  
industrielles, Hermann.