

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES D'ORSAY

INTEGRALES SINGULIERES
ET FONCTIONS DIFFERENTIABLES
DE PLUSIEURS VARIABLES

Par

Elias STEIN

Avril-Mai 1968, chapitres VII et VIII

Notes recueillies par : A. SOMEN

Mathématiques
(Service des Publications)
Faculté des Sciences
91-ORSAY (France)

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES D'ORSAY

INTEGRALES SINGULIÈRES
ET FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES
DE PLUSIEURS VARIABLES

Par

Elias STEIN

Avril-Mai 1968, chapitres VII et VIII

Notes recueillies par : A. SOMEN

Mathématiques
(Service des Publications)
Faculté des Sciences
91-ORSAY (France)

Les notes de la première partie ont été recueillies par BACHVAN et SOMEN, celles de la seconde partie par SOMEN. Le manuscrit a été dactylographié par Mademoiselle BOULANGER.

Premier tirage (ch. I-IV) : juin 1967.

Second tirage (ch. I-VI) : décembre 1967.

Troisième tirage (ch. VII-VIII) : janvier 1969.

Pour toute demande s'adresser au service des publications (Bibliothèque de mathématiques) et joindre un chèque de 20 francs par exemplaire au compte chèque postal Paris 16 588 96 au nom de Monsieur Michel DEMAZURE.

1.- Table des matières.

PAGES	TROISIEME PARTIE : AVRIL-MAI 1967.
	Ch. VII <u>Localisation des propriétés à la frontière des fonctions harmoniques.</u>
VII.1	§. 0
VII.2	§. 1 Le théorème de FATOU classique et le théorème de FATOU local.
VII.14	§. 2 Relation entre l'existence des limites non-tangentielles et la finitude des intégrales multiples S ...
VII.37	§. 3 Etude des limites non-tangentielles pour un système conjugué de fonctions harmoniques.
VII.46	Bibliographie du chapitre VII.
	Ch. VIII <u>Dérivation et intégrales multiples.</u>
VIII.1	§. 1 Diverses notions de dérivabilité.
VIII.3	§. 2 Quelques résultats sur les intégrales singulières et les transformations de RIESZ.
VIII.8	§. 3 Relations entre les trois premières notions de dérivabilité.
VIII.16	§. 4 La notion de dérivabilité au sens harmonique.
VIII.19	§. 5 Quelques résultats locaux de dérivabilité.
VIII.35	Bibliographie du chapitre VIII.

2.- Recueil de notations.

PAGES	
I.2	Mf : <u>fonction maximale de</u> f .
	$E_{g,\alpha}$: <u>ensemble des points où</u> g <u>est</u> $> \alpha$.
	$ E $: <u>mesure de l'ensemble</u> E .
	n : dimension de \mathbb{R}^n .
I.6	\square : signale la fin (ou l'abandon !) d'une démonstration.
I.13	$L^p + L^q$: ensemble des $f_p + f_q$ ($f_p \in L^p$, $f_q \in L^q$).
II.1	$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$, $L^p(\mathbb{R}^n)$, $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
	$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$: les mesures de \mathbb{R}^n de masse totale finie.
II.2	TRANSFORMÉE de FOURIER : sera notée $\mathcal{F}f$ ou f^\wedge ; <u>normalisée par</u> $(\mathcal{F}f)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(2\pi i(x y)) dx$ (où $(\dots \dots)$ est le produit scalaire). L'absence du signe - devant $2\pi i$ entraîne un décalage avec certaines références du ch.III.
II.3	$ x $: <u>norme euclidienne du vecteur</u> $x \in \mathbb{R}^n$.
II.14	Ω : expression faisant partie d'un noyau de CALDERON-ZYGMUND.
II.15	\sum : sphère unité de \mathbb{R}^n . x' : point de \sum ; parfois point associé à x par $x' = \frac{x}{ x }$.
II.16	T_ϵ ($\epsilon > 0$) : voir théorème II.3.2.
II.22	(et aussi page III.2) v.p. : "valeur principale".
II.24	$L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$, $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$: voir II.4.1.2 et II.4.1.5.
II.25	$L^p(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$: voir II.4.1.6.
III.2	v.p. : se reporter page II.22 $\Omega_j(x) = c_n x_j / x $ ($j = 1, \dots, n$) où

PAGES

- $c_n = \Gamma(\frac{n+1}{2}) / \pi^{\frac{n+1}{2}}$.
- III.3 $K_j(x) = \Omega_j(x) / |x|^n$.
 R_j : $j^{\text{ème}}$ transformation de MARCEL RIESZ.
- III.5 \mathbb{R}^n considéré comme hyperplan de \mathbb{R}^{n+1} .
 \mathbb{R}_{n+1}^+ : demi-espace positif associé à l'hyperplan \mathbb{R}^n de \mathbb{R}^{n+1} .
- III.6 Δ : laplacien (selon le contexte relatif aux n variables x_j , ou relatif aux $n+1$ variables x_j et y ($j = 1, \dots, n$)).
 $P_y(x)$: noyau de POISSON pour le demi-espace \mathbb{R}_{n+1}^+ de \mathbb{R}^{n+1} ; est calculé pages III.6-7.
- III.3 I.P.f : "intégrale de POISSON" pour le demi-espace \mathbb{R}_{n+1}^+ de f définie sur l'hyperplan \mathbb{R}^n .
- III.17 S_{n-1} : sphère unité de \mathbb{R}^n .
 \mathcal{H}_k : voir III.5.2.
- III.19 $\mathcal{J}_{k,n}$: voir III.5.6.
- IV.2 grad u : gradient (même remarque que pour Δ ci-dessus (page III.6)).
 $g(f)$, $g(f,x) = g(f)(x)$: voir définition IV.1.1.
- IV.11 $g_1(f,x)$, $g_k(f,x)$: voir IV.1.6.1 et 1.6.3.
- IV.12 $g_\lambda^*(f,x)$, $S(f,x)$, $\Gamma(x_0)$: voir définition IV.1.7.1.
- IV.16 $M_r(f)$: voir définition IV.1.7.3.4.
- IV.20 m , T_m , \mathbb{M}_p : voir définition IV.2.1.
- IV.27 r_p : $p^{\text{ème}}$ fonction du système orthonormé de RADEMACHER.
- IV.28 $T \otimes I$: voir IV.3.2.
- IV.32 ρ_m , S_{ρ_m} , S_ρ : voir théorème IV.4.1.
- V.1 Δ : ici laplacien à n variables.
 \mathcal{J}_α , $(-\Delta)^{\alpha/2}$: voir formules (2) et (3) de V.1.1.
 $\mathcal{V}_\alpha = 2^\alpha \Gamma(\alpha/2) / \Gamma(\frac{n-\alpha}{2})$.

PAGES	\mathcal{R}_α : voir formules (3) et (4) de V.1.3.
V.6	\mathcal{D} : les fonctions indéfiniment dérivables à supports compacts.
V.7	$L_k^p(\mathbb{R}^n)$: espace de SOBOLEV.
V.12	G_α : noyau de BESSEL.
V.14	\mathcal{J}_α : convolution par G .
V.15	$\mathcal{L}_\alpha^p = \mathcal{J}_\alpha(L^p)$.
V.17	$\omega_p(t) = \ f(x+t) - f(x)\ _{L^p(x)}$ "L ^p -module de continuité de f ".
V.22	$\Lambda_\alpha^{p,q}, \Lambda_\alpha$: voir définition V.5.1.
VI.2	F : un fermé de \mathbb{R}^n ($\emptyset \neq F \neq \mathbb{R}^n$).
	Ω : l'ouvert complémentaire de F .
	(Q_m) : les cubes d'un découpage de Ω .
	c_1, c_2 : voir énoncé V.1.1.
VI.3	$\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_m$: voir V.1.1.
VI.6	Q^ε : cube déduit du cube Q par l'homothétie de centre le centre de Q et de rapport $1 + \varepsilon$.
VI.7	N^* : voir corollaire VI.1.7.
VI.8	δ : fonction dérivable dans $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus F$, à peu près proportionnelle à la distance à F .
VI.9	ψ, ψ_m : voir VI.1.8.4.
VI.10	$\mathcal{B}_1(F)$: voir définition VI.2.1. $\mathcal{B}_1(\mathbb{R}^n) =$ les fonctions bornées et lipschitziennes sur \mathbb{R}^n .
	$M_f = \sup_{x,y \in F; x \neq y} \frac{ f(x) - f(y) }{d(x,y)} .$
VI.11	$\mathcal{E}_1 : \mathcal{B}_1(F) \longrightarrow \mathcal{B}_1(\mathbb{R}^n)$ prolongement de WHITNEY.
	ϕ, ϕ_m : voir VI.2.3.1.
VI.16	$\mathcal{B}_k(\mathbb{R}^n)$: voir définition VI.3.1.

PAGES		
VI.17	$\mathcal{B}_k(F)$: voir définition VI.3.3. $\vec{F} = (f^{(\alpha)})_{0 \leq \alpha \leq k-1}$: voir définition VI.3.3. $P_j(b,c), R_j(b,c)$: voir définition VI.3.3.	
VI.18	$\mathcal{E}_k : \mathcal{B}_k(F) \longrightarrow \mathcal{B}_k(\mathbb{R}^n)$ prolongement de WHITNEY.	
VI.23	ω : ouvert au-dessus du graphe d'une fonction lipschitzienne. $L_k^p(\omega)$: espace de SOBOLEV relatif à ω . \mathcal{E} : prolongement de CALDERON.	
VI.24	$s = (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, d : voir VI.4.1. φ : fonction lipschitzienne $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. $M_\varphi = M$: constante de LIPSCHITZ de φ . $G_\varphi =$ graphe de $\varphi =$ frontière de ω . Γ : cône des $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $ y \geq M x $. $\Gamma^+, \Gamma^-, \Gamma(s), \Gamma^+(s), \Gamma^-(s)$: voir VI.4.1.] voir figure page VI.27
VI.25	δ^* : voir lemme VI.4.2.2 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{x,y,\lambda} = (x, y + \lambda \delta^*(x,y))$.	
VI.28	ψ : fonction auxiliaire $[1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ (voir lemme VI.4.3.2).	
VI.29	γ_p : contour orienté reproduit dans la figure page VI.27	
VI.32	ω' : ouvert contenant $\bar{\omega}$.	
VII.2	$\Gamma_\alpha(p) =$ les $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $ x-p < \alpha y$. $\Gamma_{\alpha,h}(p) =$ intersection de $\Gamma_\alpha(p)$ et du demi-espace $y < h$. $\Gamma_\alpha, \Gamma_{\alpha,h}$ quand p est l'origine de \mathbb{R}^{n+1} . $\int \dots dx, \int \dots d\sigma \dots, \iint \dots dx dy$: voir 1.1 .	

PAGES

- VII.7 $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\alpha, h}(E) = \bigcup_{x \in E} \Gamma_{\alpha, h}(x)$ ($E \subset \mathbb{R}^n$) : voir figure page 8.
 $\partial \mathcal{R}$ = frontière de \mathcal{R} .
 $\partial \mathcal{R} = F \cup F^d \cup F^h$ (quand $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\alpha, h}(F)$) : voir 1.9.
- VII.14 u : fonction harmonique dans le demi-espace ouvert \mathbb{R}_{n+1}^+ .
 $|\text{grad } u|^2 = \text{ici } \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$.
 $S_{\alpha, h} u(p) = \left(\iint_{\Gamma_{\alpha, h}(p)} |\text{grad } u|^2 y^{1-n} dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$.
 E_L = les points de \mathbb{R}^n où u a une limite non-tangentielle.
 E_B = les points de \mathbb{R}^n où u est non-tangentielllement bornée.
 E_S = les sommets des cônes pour lesquels S_{\dots} est fini.
- VII.16 $0 < \alpha < \beta$ et $0 < h < k$.
- VII.17 \mathcal{R} comme page VII.7 et $\mathcal{R}^\nu = \bigcup_{e \in E} \Gamma_{\beta, k}(e)$.
- VII.18 \mathcal{R}_ϵ : ouvert $\subset \mathcal{R}$, ayant une bonne frontière $\partial \mathcal{R}_\epsilon$: voir 2.4.4 page 19.
 N, σ_e : frontière, normale extérieure, mesure superficielle de $\partial \mathcal{R}_\epsilon$.
- VII.19 $F^h e, F^\delta e$, : voir 2.4.4 (et 2.5.2).
 $K_{\mathcal{R}}$: compact de \mathbb{R}^n tel que $K_{\mathcal{R}} \times \mathbb{R}^+ \supset \mathcal{R}$.
- VII.20 $c_{\mathcal{R}}$: voir 2.4.6.
- VII.25 E' : voir 2.6.3.
- VII.26 E : voir 2.6.4.
- VII.27 $\mathcal{R}, \mathcal{R}^\nu$: voir page VII.17.
- VII.29 \vec{h} : le vecteur $(0, \dots, 0, h) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
- VII.32 λ_θ : voir 2.6.8.
 f_ϵ : voir 2.6.9.
- VII.33 (X, Y) : un point $\in F^\delta e$.

PAGES

- VII.37 u, v_1, \dots, v_n : une fonction harmonique dans \mathbb{R}_{n+1}^+ et ses n fonctions conjuguées.
- VII.38 H : une fonction harmonique dans \mathbb{R}_{n+1}^+ .
- VII.40 $S = \frac{\partial H}{\partial x_s}, T = \frac{\partial H}{\partial y}$.
 $\rho, S_\rho, \hat{\rho}$: voir figure.
- VII.42 $B[X, Y]$: boule de centre $(X, Y) \in \Gamma_{\alpha, h}$, de rayon proportionnel à Y de manière que $\Gamma_{\beta, k} \supset B[X, Y]$.
 $c_h = \sup_{(x, h) \in \Gamma_{\beta, k}} |S(x, h)|$.
 $Z(y)$: voir 3.5 (iv).
- VII.43 $J_y = \left(\iint_{Z(y)} T^2(x, y_0) dx dy_0 \right)^{\frac{1}{2}}$.
- VIII.6 $J_1 f$: potentiel de RIESZ d'ordre 1 de f .
- VIII.7 $R_j f$: j -ème transformée de RIESZ de f (voir chapitre III, 2.1, page
- VIII.17 $f = b + m$: décomposition de f (dérivable au sens harmonique sur un ensemble) en une bonne et une mauvaise fonction (voir théorème 4.3).
 P : ensemble [compact] sur lequel s'annule la mauvaise fonction m (voir théorème 4.3).
- VIII.23 P compact, B boule ouverte, dans \mathbb{R}^n , tels que
 $B \supset P$; $Q = B \cap P$;
 $\delta(y) =$ distance de $y \in \mathbb{R}^n$ à P ;
 $J_\lambda(x) = \int_B \frac{\delta^\lambda(y)}{|x-y|^{n+\lambda}} dy$ ($x \in B, \lambda > 0$) : Intégrale de MARCINKIEWICZ.
- VIII.26 $E_1 =$ ensemble des points de \mathbb{R}^n où les dérivées premières de $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ existent au sens de L^2 ;
 $E_2 =$ les $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $\int_{\mathbb{R}^n} (f(x+h)+f(x-h)-2f(x))^2 \frac{1}{|h|^{n+2}} dh < \infty$.
- VIII.29 $Q = \int_{\mathbb{R}^n} (P \cup F)$ (F fermé où f, b, m s'annulent, et tel que Q soit borné).
 $\delta(x) =$ distance de $x \in \mathbb{R}^n$ à $P \cup F$.

INTEGRALES SINGULIERES ET FONCTIONS DIFFERENTIABLES DE PLUSIEURS VARIABLES

Par

Elias STEIN

Chapitre VII

Localisation des propriétés à la frontière des fonctions harmoniques.

0.0 Ce septième et avant-dernier chapitre fait suite aux six premiers, déjà parus.

Il retranscrit les notes recueillies par SOMEN en avril 1967.

0.1 Sont classiques des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction harmonique dans le disque unité (où $|z| < 1$) vérifie certaines propriétés en presque tout point de sa frontière, (la circonférence unité, où $|z| = 1$).

A ces énoncés "classiques" sont parallèles des énoncés que nous qualifierons de "locaux". Comparer par exemple le théorème de FATOU classique (1.4.1) et local (1.8).

Ce chapitre établit des critères pour que, étant donnée une partie mesurable E de \mathbb{R}^n , une fonction harmonique [à valeurs réelles, cette précision sera désormais omise] dans le demi-espace ouvert \mathbb{R}_{n+1}^+ vérifie certaines propriétés à la frontière en presque tout point de E .

1.- Le théorème de FATOU classique et le théorème de FATOU local.

1.1 Notations. Soient $\alpha > 0$ et $p = (p, 0) \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$. On note

$\Gamma_\alpha(p)$ = ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ tels que

$$|x-p| < \alpha y,$$

(la distance entre points de \mathbb{R}^n étant notée $d(x, p)$ ou $|x-p|$).

Etant donné de plus $h > 0$, on notera

$\Gamma_{\alpha, h}(p)$ = intersection de $\Gamma_\alpha(p)$ et du demi-espace où $y < h$.

Si $p = (0, 0) = 0$ est l'origine, on écrira simplement $\Gamma_\alpha, \Gamma_{\alpha, h}$.

La mesure d'un ensemble mesurable E de \mathbb{R}^n (muni de la mesure de LEBESGUE) sera notée $|E|$; les intégrales mettant en jeu cette mesure seront notées

$\int_{\dots} \dots dx$. Celles où intervient la "mesure superficielle" d'une bonne hypersurface de \mathbb{R}^{n+1} seront notées $\int_{\dots} \dots d\sigma_{\dots}$. Mais quand il s'agira de la mesure de LEBESGUE de \mathbb{R}^{n+1} , ce sera $\iint_{\dots} \dots dx dy$.

1.2 Définition. On dit qu'une fonction f définie dans le demi-espace ouvert

\mathbb{R}_{n+1}^+ (où $y > 0$) de \mathbb{R}^{n+1} admet une limite non-tangentielle (finie) $\lambda = f^*(p)$

en un point $p \in \mathbb{R}^n$ si, POUR TOUT $\alpha > 0$, la restriction de f au cône $\Gamma_\alpha(p)$ admet au point p la limite λ :

$$\lambda = \lim_{\substack{(x,y) \in \Gamma_\alpha(p) \\ (x,y) \rightarrow p}} f(x,y) .$$

1.3 Définition. On dit qu'une fonction f définie dans \mathbb{R}_{n+1}^+ est non-tangentielle-ment bornée au point $p \in \mathbb{R}^n$ S'IL EXISTE UN cône tronqué

$\Gamma = \Gamma_{\alpha,h}(p)$ (pour un $\alpha > 0$ et un $h > 0$ convenables) de sommet p tel que la restriction de f à Γ soit bornée.

1.4.1 Théorème de FATOU classique (pour le demi-espace \mathbb{R}_{n+1}^+). Chaque fonction harmonique bornée dans \mathbb{R}_{n+1}^+ admet en presque tout point de l'hyperplan frontière \mathbb{R}^n une limite non-tangentielle.

La démonstration (1.7) donnera le résultat suivant.

1.4.2 Corollaire. La fonction définie presque partout sur \mathbb{R}^n par les limites non-tangentielle-ment d'une fonction harmonique bornée dans \mathbb{R}_{n+1}^+ admet pour intégrale de POISSON cette fonction harmonique.

1.5 Principe de réflexion. Soit h harmonique, définie et bornée dans un demi-espace ouvert de \mathbb{R}^{n+1} , et qui se prolonge continument par la valeur zéro sur tout l'hyperplan frontière. Alors h est identiquement nulle.

Preuve. Prenons comme demi-espace et hyperplan \mathbb{R}_{n+1}^+ et \mathbb{R}^n ; h est prolongée à \mathbb{R}^{n+1} en H , fonction impaire par rapport à y :

$$H(x,y) = h(x,y) \quad \text{pour} \quad (x,y) \in \mathbb{R}_{n+1}^+,$$

$$H(x,0) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$H(x,-y)+h(x,y) = 0 \quad \text{pour} \quad (x,y) \in \mathbb{R}_{n+1}^+.$$

Comme h , H est bornée. Montrons que H est harmonique : Pour $y = 0$, $H(x,0) = 0$ vaut bien la moyenne de H sur les sphères [de \mathbb{R}^{n+1}] centrées en $(x,0)$; et pour $y \neq 0$, $H(x,y)$ vaut bien la moyenne de H sur les sphères de centre (x,y) qui ne rencontrent pas \mathbb{R}^n .

Or (théorème de LIOUVILLE 2.5.4.3) chaque fonction harmonique bornée dans \mathbb{R}^{n+1} est constante. Donc H est nulle.

■ 1.5.

1.6 Résultats complémentaires sur la dérivation. (Voir RUDIN : Real and complex analysis, chap. 8).

On dit que $x \in \mathbb{R}^k$ est "point de LEBESGUE" d'une fonction $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^k)$ si

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(x+t) - f(x)| dt = 0$$

(intégrale étendue à la boule de \mathbb{R}^k de centre x et de rayon $r > 0$).

Presque tout point de \mathbb{R}^k est point de LEBESGUE de f : C'est une amélioration du théorème de dérivation du chapitre I (1.3 iv)).

Application : preuve en 1.7 du théorème de FATOU classique.

Soit P un sous-ensemble mesurable de \mathbb{R}^k . Un point $x \in \mathbb{R}^k$ est dit "point de densité" [de LEBESGUE] de P si

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|P \cap B(x,r)|}{|B(x,r)|} = 1 .$$

Presque tout point de P est point de densité de P ; l'ensemble des points de densité de P qui appartiennent à \bar{P} est négligeable. Application : partie (iv) de la preuve de 1.10.

1.7 Preuve du théorème de FATOU classique (1.4.1).

1.7.1 Première étape. Partant de la fonction harmonique bornée u dans l'ouvert \mathbb{R}_{n+1}^+ , commençons par reconstruire (presque partout dans \mathbb{R}^n) ses valeurs frontières.

Posons pour m entier ≥ 1 et $x \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi_m(x) = \text{I.P.} u(x, \frac{1}{m}) .$$

On a pour $(x,y) \in \mathbb{R}_{n+1}^+$

$$\text{I.P.} \varphi_m(x,y) = u(x, y + \frac{1}{m}) .$$

En effet, aux deux membres sont des fonctions harmoniques par rapport à

$(x,y) \in \mathbb{R}_{n+1}^+$, continues sur $\mathbb{R}_{n+1}^+ \cup \mathbb{R}^n$, qui prennent des valeurs égales pour $(x,0) \in \mathbb{R}^n$: Elles coïncident bien, d'après le principe de réflexion 1.5. (Autre

argument : invoquer la propriété de semi-groupe $P_{y_1} * P_{y_2} = P_{y_1+y_2}$ de la convolution par le noyau de POISSON, avec $y_1 = y$, $y_2 = \frac{1}{m}$.)

Comme la suite des fonctions $x \mapsto \varphi_m(x) = u(x, \frac{1}{m})$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$,

on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement vers une fonction φ :

Pour chaque $g \in L^1$, $\lim_{m=m_k \rightarrow \infty} \int g \varphi_m dx = \int g \varphi dx$. En prenant pour g le noyau de POISSON P_y , on voit que $I.P.\varphi_{m_k}$ tend sur \mathbb{R}_{n+1}^+ d'une part vers u et d'autre part vers $I.P.\varphi$.

Donc $u = I.P.\varphi$. (1.4.1).

1.7.2 Seconde étape. L'intégrale de POISSON $I.P.\varphi$ d'une fonction $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ converge non-tangentielle (définition 1.2) presque partout vers φ .
Plus précisément, cette convergence non-tangentielle est déjà certaine pour tout point de LEBESGUE de φ (définition 1.6).

Notons $u = I.P.\varphi$ et $\int = \int_{\mathbb{R}^n}$. On a pour $x, t \in \mathbb{R}^n, y > 0$
 $u(x-t, y) - \varphi(x) = \int P(z-t, y) \varphi(x-z) dz - \int P(z-t, y) \varphi(x) dz$,

donc

$$(1) \quad |u(x-t, y) - \varphi(x)| \leq \int P(z-t, y) |\varphi(x-z) - \varphi(x)| dz.$$

Or le noyau de POISSON $P(x, y) = C_{\alpha, n} \frac{y^{n+1}}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ vérifie pour tout $\alpha > 0$

des inégalités du type

$$\sup_t \text{ avec } |t| \leq \alpha y \quad P(x-t, y) \leq C_{\alpha, n} P(x, y).$$

Donc en supposant $|t| \leq \alpha y$, le premier membre de (1) est majoré par

$$(2) \quad C_{\alpha, n} \int P(z, y) |\varphi(x-z) - \varphi(x)| dz.$$

Soit $\lambda > 0$. On partage dans (2) $\int = \int_{\mathbb{R}^n} = \int_{|z| \leq \lambda y} + \int_{|z| > \lambda y}$. Puisque $P(z, y) \leq P(0, y) = C_{\alpha, n} y^{-n}$, le premier terme $C_{\alpha, n} \int_{|z| \leq \lambda y}$ tendra bien vers zéro

avec y si on suppose que x est point de LEBESGUE de φ . Et dans le second terme $C_{\alpha,n} \int_{|z| \geq \lambda y}$, la fonction bornée $z \mapsto |\varphi(x-z) - \varphi(x)|$ est intégrée avec une mesure dont la masse $\int_{|z| \geq \lambda y} P(z,y) dz$ (qui dépend de λ mais non de y) tend vers zéro quand $\lambda \rightarrow \infty$.

■ 1.4.1

1.8 Théorème de FATOU local. Soient u harmonique dans \mathbb{R}_{n+1}^+ et E ensemble mesurable de \mathbb{R}^n . On suppose que u est non-tangentielle bornée en tout point de E (définition 1.3).

Alors u admet en presque tout point de E une limite non-tangentielle (définition 1.2).

(Pour $n = 1$, PLESSNER et PRIVALOV : voir le chapitre XIV de ZYGMUND : Trigonometric series, éd. Cambridge. Pour n quelconque, CALDERON. Preuve en 1.11.)

1.9 Les sous-ensembles $\mathcal{R} \dots$ de \mathbb{R}^{n+1} .

Soit F un fermé de \mathbb{R}^n . Soient $\alpha > 0$ et $h > 0$. Nous utiliserons constamment les ensembles ouverts \mathcal{R} suivants (notation 1.1) :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\alpha,h}(F) = \bigcup_{x \in F} \Gamma_{\alpha,h}(x).$$

La frontière $\partial \mathcal{R}$ de \mathcal{R} se décompose en trois parties

$$\partial \mathcal{R} = F \cup F^d \cup F^h.$$

La première $\mathbb{R}^n \cap \partial \mathcal{R}$ est le fermé F donné.

La seconde F^d est l'intersection de $\partial \mathcal{R}$ et de la bande $0 < y < h$. C'est

aussi l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ vérifiant les deux relations

$$0 < y < h \text{ et } y = \frac{1}{\alpha} d(x,F)$$

où d est la distance de \mathbb{R}^n ; le dernier membre est fonction lipschitzienne (de rapport $\frac{1}{\alpha}$) de x dans \mathbb{R}^n .

La troisième partie F^h est l'intersection de $\partial\mathcal{R}$ et de l'hyperplan $y = h$: C'est la réunion (selon x parcourant F) des boules de cet hyperplan, de centre (x,h) et de rayon αh .

Dans tout ce chapitre, nos études du comportement des fonctions harmoniques à l'approche des points de F ou F^d seront délicates, mais "triviales" pour F^h .

Pour $n = 1$, $\int_{\mathbb{R}} F$ est une réunion d'intervalles, et \mathcal{R} peut avoir l'allure de l'ensemble hachuré ci-dessous.



1.10 Proposition. Soit v une fonction harmonique dans \mathbb{R}_{n+1}^+ , et dont la restriction à l'ensemble ouvert $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\alpha,h}(F)$ (introduit en 1.9, avec F fermé de \mathbb{R}^n) est bornée.

Alors v admet une limite non-tangentielle en presque tout point de F .

Preuve. (i) On commence par décomposer $v : v = \psi + \psi$.

Supposons $|v| \leq 1$ sur \mathcal{R} . Posons pour $x \in \mathbb{R}^n$, m entier ≥ 1

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} v(x, \frac{1}{m}) & \text{si } (x, \frac{1}{m}) \text{ appartient à } \mathcal{R}, \\ 0 & \text{si } (x, \frac{1}{m}) \notin \mathcal{R}; \end{cases}$$

(le module de φ_m est donc majoré par 1 sur tout \mathbb{R}^n) ; notons encore φ_m son intégrale de POISSON :

$$\varphi_m(x, y) = \text{I.P.} \varphi_m(x, y) \quad \text{pour } (x, y) \in \mathbb{R}_{n+1}^+.$$

Posons pour $(x, y) \in \mathbb{R}_{n+1}^+$

$$(1) \quad v(x, y + \frac{1}{m}) = \varphi_m(x, y) + \psi_m(x, y).$$

Comme les φ_m forment un borné de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, il existe une sous-suite qui converge faiblement vers une fonction $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Prenant comme "fonction d'essai" intégrable le noyau de POISSON, on voit qu'il y a convergence simple sur \mathbb{R}_{n+1}^+ :

$$\lim_{m=m_k \rightarrow \infty} \varphi_m(x, y) = \text{I.P.} \varphi(x, y) = \varphi(x, y).$$

Mais alors, avec $\psi(x, y) = \lim_{m=m_k \rightarrow \infty} \psi_m(x, y)$, on a dans \mathbb{R}_{n+1}^+

$$(2) \quad v(x, y) = \varphi(x, y) + \psi(x, y).$$

(ii) Utilisation de cette décomposition. Le théorème de FATOU classique 1.4.1

s'applique à la fonction bornée φ : Elle admet presque partout dans \mathbb{R}^n des limites non-tangentielles. Donc d'après l'égalité (2) de (i), il suffit de montrer que ψ admet en presque tout point de F zéro pour limite non-tangentielle.

[Ce résultat peut être soupçonné : en prenant $x \in F$ puis en faisant $y = 0$

dans la relation (1) de (i), il vient $\psi_m(x,0)=0$ pour tout indice m entier assez grand, à savoir dès que $(x, \frac{1}{m}) \in \mathcal{R}$.]

(iii) La méthode consiste à trouver une fonction H harmonique dans \mathbb{R}_{n+1}^+

1° positive : $H(x,y) \geq 0$ dans \mathbb{R}_{n+1}^+ ,

2° plus grande que 2 sur la partie de la frontière de \mathcal{R} excluant F :

$$H(x,y) \geq 2 \text{ pour } (x,y) \in \partial \mathcal{R} \cap \{F\} ,$$

3° vérifiant sur \mathcal{R}

$$H \geq |\psi| ,$$

4° admettant en presque tout point de F la limite non-tangentielle zéro.

(iv) Construction de la majorante harmonique H .

Montrons qu'avec une constante > 0 assez grand on peut prendre

$$H(x,y) = \frac{2y}{h} + C^{te} \cdot (I.P.\lambda)(x,y)$$

où la fonction λ définie sur \mathbb{R}^n vaut 0 sur F , 1 ailleurs ; [rappel :

$h =$ hauteur des cônes tronqués $\Gamma_{\alpha,h}(x)$] .

C'est bien une fonction harmonique positive dans \mathbb{R}_{n+1}^+ , admettant (d'après le théorème de FATOU classique (1.4.1 et 1.4.2) appliqué à l'intégrale de POISSON de λ) la limite non-tangentielle zéro en presque tout point de F .

Quand on fait $y = h$, il vient $H(x,y) \geq 2$.

Montrons que $H(x,y) \geq 2$ si (x,y) est un point frontière de \mathcal{R} avec

$0 < y < h$.

On sait (1.9) qu'au voisinage d'un tel point (x,y) les points frontières (x',y') de \mathcal{R} sont donnés par l'équation $y' = \frac{1}{\alpha} d(x',F)$. Donc la boule ouverte B de \mathbb{R}^n , de centre x et de rayon α/y ne rencontre pas F ; autrement dit, χ vaut 1 dans cette boule; donc

$$\begin{aligned} \text{I.P.}\chi(x,y) &= c_n y \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\chi(t)}{(|x-t|^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}} dt \geq c_n y \int_B \dots dt = \\ &= c_n y \int_{\frac{|t|}{\alpha} \leq y} \frac{1}{(|t|^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}} dt > 0. \end{aligned}$$

Or cette dernière intégrale est une fonction positivement homogène de degré -1 par rapport à y ; donc le dernier membre est indépendant de (x,y) : en multipliant par une constante convenable le premier membre, il devient ≥ 2 , et $H(x,y) \geq 2$ par conséquent.

Montrons que dans \mathcal{R} on a $|\psi(x,y)| \leq H(x,y)$.

Dans l'ouvert \mathcal{R} , on a $|v| \leq 1$, $|\varphi_m| \leq 1$, donc $|\psi_m| \leq 2$. Si $(x,y) \in \partial\mathcal{R} \cap \{F\}$, on a $|\psi_m(x,y)| \leq 2 \leq H(x,y)$. De plus, si $x \in F$, alors $\lim_{y \rightarrow 0} \psi_m(x,y) = 0$.

D'après un principe du maximum pour les fonctions harmoniques, on en conclut que $|\psi_m(x,y)| \leq H(x,y)$; donc aussi $|\psi(x,y)| \leq H(x,y)$ dans \mathcal{R} .

(v) Conséquence immédiate de la majoration de $|\psi|$ par H .

Considérons un cône $\Gamma = \Gamma_{\alpha_1, h_1}(p)$ ($\alpha_1 > 0$, $h_1 > 0$, $p \in \mathbb{R}^n$) tel que sur Γ on ait $H \geq |\psi|$ et $\lim_{(x,y) \in \Gamma; (x,y) \rightarrow p} H(x,y) = 0$. [La première condition a lieu avec $\alpha_1 = \alpha$, $h_1 = h$, $p \in F$, d'après (iv) et $\mathcal{R} = \bigcup_{p \in F} \Gamma_{\alpha, h}(p)$. La seconde a lieu pour presque tout $p \in F$, tout α_1 , tout h_1 d'après (iv)].
On aura encore $\lim_{(x,y) \in \Gamma; (x,y) \rightarrow p} \psi(x,y) = 0$.

(vi) Conséquence de cette majoration pour le comportement de ψ et de v à l'approche de F .

Notons D l'ensemble des points de densité (1.6) du fermé F . On vérifie que pour tout $p \in F \cap D$, pour tout $\alpha_1 > 0$, il existe $h_1 > 0$ tel que $\Gamma_{\alpha_1, h_1}(p) \subset \mathcal{R} = \bigcup_{p \in F} \Gamma_{\alpha, h}(p)$. (Autrement dit, l'intersection de \mathcal{R} et du cône pointé $\{p\} \cup \Gamma_{\alpha_1}(p)$ est un voisinage de p relativement à ce cône.) On sait que $|F \cap [D]| = 0$.

Notons F_L l'ensemble des points de F où H admet zéro comme limite non-tangentielle. On a vu en (iv) que $|F \cap [F_L]| = 0$.

La définition 1.2 des limites non-tangentielles et le raisonnement de (v) appliqué à ces deux résultats montrent que pour tout $p \in F_L \cap D$ (donc pour presque tout point de F), ψ admet la limite non-tangentielle zéro.

Donc, de même que φ , $v = \varphi + \psi$ admet en presque tout point de F une limite non-tangentielle.

■ 1.10

1.11 Preuve du théorème de FATOU local 1.8.

On commence par "rétrécir" E par des arguments classiques de théorie de la mesure, afin de pouvoir appliquer la proposition 1.10.

Première étape. (Tous les ensembles que nous écrirons seront mesurables !) Notons pour α', h', b' strictement positifs $E_{\alpha', h', b'}$ = ensemble des $x \in E$ tels que la restriction de $|u|$ à $\Gamma_{\alpha', h'}(x)$ soit $\leq b'$. Pour $\alpha'' \leq \alpha'$, $h'' \leq h'$, $b'' \geq b'$, on a $E_{\alpha', h', b'} \subset E_{\alpha'', h'', b''}$. Or par hypothèse (définition 1.3) $E = \bigcup_{\alpha', h', b'} E_{\alpha', h', b'}$. Donc pour tout compact K de \mathbb{R}^n , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha, h, b > 0$ et un fermé $F \subset K$ tels que

$$F \subset E_{\alpha, h, b} \cap K \text{ et } |(E \cap K) \setminus F| < \varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire et que E est contenu dans une réunion dénombrable de compacts, il suffit d'établir que la propriété a lieu pour presque tout point de F .

Seconde étape. Avec α, h, b et F ainsi choisis, prenons

$$\mathcal{R} = \bigcup_{x \in F} \Gamma_{\alpha, h}(x).$$

Puisque dans \mathcal{R} on a $|u| \leq b$, la proposition 1.10 donne bien l'existence des limites non-tangentielles pour presque tout point de F .

■ 1.8

2.- Relation entre l'existence des limites non-tangentielles et la finitude des intégrales multiples S

2.1 Notations. Soit u une fonction harmonique dans le demi-espace ouvert \mathbb{R}_{n+1}^+ .

On note

$$|\text{grad } u|^2 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 .$$

On pose pour α et h strictement positifs, $p \in \mathbb{R}^n$ (voir notation 1.1)

$$S_{\alpha, h} u(p) = \left(\iint_{\Gamma_{\alpha, h}(p)} |\text{grad } u(x, y)|^2 y^{1-n} dx dy \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Cette expression ressemble à celle introduite par LUSIN (chapitre IV, 1.7.1).

2.2 Vue d'ensemble.

Soit u une fonction harmonique dans \mathbb{R}_{n+1}^+ ; (on ne suppose pas que c'est l'intégrale de POISSON d'une fonction définie dans \mathbb{R}^n).

Nous étudierons les trois ensembles mesurables de \mathbb{R}^n suivants :

E_L = ensemble des $e \in \mathbb{R}^n$ où u admet une limite non-tangentielle ;

E_B = ensemble des $e \in \mathbb{R}^n$ où u est non-tangentielle bornée ;

E_S = ensemble des $e \in \mathbb{R}^n$ tels que (avec $\alpha > 0$ et $h > 0$ dépendant de e)

$$S_{\alpha, h} u(e) < \omega .$$

Les définitions 1.2 et 1.3 donnent immédiatement

$$E_L \subset E_B .$$

Etant données deux parties mesurables P, Q de \mathbb{R}^n , il sera commode d'exprimer par " $P \subset Q$ presque partout" le fait qu'il existe un ensemble négligeable

N tel que $P \cap N \subset Q$, et par " $P = Q$ presque partout" le fait que $P \subset Q$ presque partout et $Q \subset P$ presque partout (ou encore que les fonctions valant 1 sur un ensemble et 0 sur son complémentaire sont pour P et Q égales presque partout).

Le théorème de FATOU local 1.8 dit que $E_B \subset E_L$ presque partout. Donc

$$\boxed{E_B = E_L \text{ presque partout}} .$$

Le théorème 2.3 montrera que

$$\boxed{E_L = E_S \text{ presque partout}} .$$

Pour $n = 1$, l'inclusion " $E_L \subset E_S$ presque partout" avait été établie par des méthodes de variable complexe ; (voir la seconde partie de MARCINKIEWICZ et ZYGMUND : "A theorem of LUSIN" pages 436-439 dans MARCINKIEWICZ : "Collected papers"). SPENCER et LITTLEWOOD ont montré indépendamment l'inclusion "presque" opposée.

Pour n quelconque, voir Acta Mathematica tome 106 (1961) pages 137-174.

L'ensemble E_S est agréable (voire) car il est techniquement commode de vérifier si les intégrales S_{\dots} sont finies.

Mais pour établir l'existence de limites non-tangentielles de u presque partout sur un ensemble E , le théorème de FATOU local (1.8) montre qu'il suffit de trouver une fonction harmonique H , non-tangentielle bornée presque partout sur E , et vérifiant sur un ouvert \mathcal{U} convenable associé à E (voir 1.9)

$H \geq |u|$, car ceci assure que u est non-tangentielle bornée au moins en tout point de E où H l'est. La preuve de 1.10 n'est pas une illustration appropriée. Voir plutôt 2.6.7.

2.3 Théorème. Soit u une fonction harmonique dans \mathbb{R}_{n+1}^+ . Les deux ensembles mesurables E_L et E_S ayant été définis en 2.2 vérifient

$$E_L = E_S \text{ presque partout.}$$

Plan de la démonstration. D'abord (2.4) nous donnerons la méthode de démonstration de " $E_L \subset E_S$ presque partout", tout en collectant des résultats utiles pour l'autre inclusion ; puis (2.5) nous compléterons cette démonstration, tout en donnant (2.5.4.2 et 2.5.4.3) une propriété classique des fonctions harmoniques ; enfin (2.6) nous montrerons " $E_S \subset E_L$ presque partout".

2.4 Schéma de la démonstration de " $E_L \subset E_S$ presque partout".

2.4.1 (i) Notons $u^*(e)$ la limite non-tangentielle de u au point $e \in E_L$.

Choisissons α, h, β, k tels que $0 < \alpha < \beta$ et $0 < h < k$.

Nous montrerons que pour presque tout $e \in E_L$ on a $S_{\alpha, h} u(e) < \infty$.

2.4.1 (ii) Pour voir ceci, il suffit d'examiner ces expressions en imposant à e de parcourir une partie mesurable relativement compacte quelconque $E_0 \subset E_L$.

Pour opérer efficacement, on "rétrécit" E_0 .

Soit $B_1 > 0$; on remplace E_0 par $E_1 =$ ensemble des $e \in E_0$ dont la

limite non-tangentielle vérifie l'inégalité stricte $|u^*(e)| < B_1$. Pour tout $e \in E_0$, il existe (d'après $e \in E_L$) $\varepsilon > 0$ tel que $\sup_{s \in \Gamma_{\beta, \varepsilon}(e)} |u(s)| \leq B_1$.

Soit $\eta > 0$; on remplace E_1 par $E_2 =$ ensemble des $e \in E_1$ tels que $\sup_{s \in \Gamma_{\beta, \eta}(e)} |u(s)| \leq B_1$.

Si $k \leq \eta$, ces majorations sont vraies quand on remplace $\Gamma_{\beta, \eta}(e)$ par $\Gamma_{\beta, k}(e)$. Si $k > \eta$, comme E_2 est (de même que E_0) relativement compact, on passe de l'ensemble $\bigcup_{e \in E_2} \Gamma_{\beta, \eta}(e)$ à l'ensemble $\bigcup_{e \in E_2} \Gamma_{\beta, k}(e)$ en réunissant le premier ensemble et un ensemble relativement compact (contenu dans le demi-espace fermé $y \geq \eta$ où u est continue). Donc il existe $B \geq B_1$ tel que

$$\sup_{e \in E_2; s \in \Gamma_{\beta, k}(e)} |u(s)| \leq B.$$

Enfin on prend E , sous-ensemble compact de E_2 .

Il est clair que tous ces ensembles étaient mesurables, et qu'étant donné $\varepsilon_0 > 0$, on pouvait choisir B_1 assez grand, η assez petit, E assez gros pour que $|E_0 \cap E| < \varepsilon_0$.

2.4.1 (iii) Il s'agit de voir que pour presque tout $e \in E$, on a $S_{\alpha, h} u(e) < \infty$.

Nous montrerons plus précisément que $\int_{e \in E} (S_{\alpha, h} u(e))^2 de < \infty$.

Posons (comme en 1.9)

$$\mathcal{R} = \bigcup_{e \in E} \Gamma_{\alpha, h}(e);$$

$$\tilde{\mathcal{R}} = \bigcup_{e \in E} \Gamma_{\beta, k}(e).$$

Nous partons désormais des faits suivants : la fonction u est harmonique dans \mathbb{R}_{n+1}^+ ; E est un compact (de mesure $|E|$ strictement positive dans \mathbb{R}^n pour fixer les idées) inclus dans E_L ; on a (d'après $\beta > \alpha$ et $k > h$) $\mathcal{R}^\sim \supset \mathcal{R}$; il existe $B > 0$ tel que $\sup_{s \in \mathcal{R}^\sim} |u(s)| \leq B$. Par définition

$$\begin{aligned} & \int_{e \in E} (S_{\alpha, h} u(e))^2 de = \\ & = \int_{e \in E} \left(\iint_{\Gamma_{\alpha, h}(e)} |\text{grad } u(x, y)|^2 y^{1-n} dx dy \right) de . \end{aligned}$$

2.4.2 La construction de \mathcal{R} (considérer l'intersection de \mathcal{R} et de chaque hyperplan $y = C^{te}$.) montrera que pour établir la finitude de cette $\int_{e \in E} \dots$, il suffit d'établir que

$$\iint_{\mathcal{R}} |\text{grad } u(x, y)|^2 y dx dy < \infty .$$

2.4.3 Recourons à une formule de GREEN :

$$\iint_{\mathcal{R}_e} ((\Delta F)G - F(\Delta G)) dx dy = \int_{\partial \mathcal{R}_e} \left(\frac{\partial F}{\partial N} G - F \frac{\partial G}{\partial N} \right) d\sigma_e$$

où F , G sont de bonnes fonctions, \mathcal{R}_e un bon ouvert (qui tendra vers \mathcal{R} , voir lemme 2.4.4) avec $\overline{\mathcal{R}_e}$ compact $\subset \mathbb{R}_{n+1}^+$, $\partial \mathcal{R}_e$ sa frontière, de normale extérieure N , de mesure "superficielle" σ_e .

Avec $F = u^2$, $G = y$, on a $\Delta(u^2) = 2|\text{grad } u|^2$ car u est harmonique, $\frac{\partial(u^2)}{\partial N} = 2u \frac{\partial u}{\partial N}$ et $\Delta G = 0$. Il vient donc

$$(1) \left[\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{R}_e} |\text{grad } u|^2 y dx dy = \\ & = \frac{1}{2} \int_{\partial \mathcal{R}_e} \left(2u y \frac{\partial u}{\partial N} - u^2 \frac{\partial y}{\partial N} \right) d\sigma_e . \end{aligned} \right.$$

(On ne pourrait porter \mathcal{R} et $\partial\mathcal{R}$ dans cette formule, d'une part parce que $\partial\mathcal{R}$ n'est pas assez bonne, d'autre part parce que u n'est pas définie sur $\mathbb{R}^n \cap \partial\mathcal{R} = E$).

2.4.4 Lemme. Soit E un compact de \mathbb{R}^n . Soient $\alpha > 0$, $h > 0$; on considère

l'ouvert \mathcal{R} de \mathbb{R}^{n+1} (voir notations 1.1 et 1.9) : $\mathcal{R} = \bigcup_{e \in E} \Gamma_{\alpha, h}(e)$.

On peut construire une suite d'ouverts \mathcal{R}_ε (où $\varepsilon > 0$; $\varepsilon = \varepsilon_1, \varepsilon_2$

ε_3, \dots ; $\varepsilon_k > \varepsilon_{k+1}$; $\varepsilon_k \rightarrow 0$ avec $\frac{1}{k}$) tels que

(i) $\mathcal{R}_{\varepsilon_k} \subset \mathcal{R}_{\varepsilon_{k+1}}$ pour tout k ;

(ii) $\bigcup_{\varepsilon = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots} \mathcal{R}_\varepsilon = \mathcal{R}$;

(iii) la frontière $\partial\mathcal{R}_\varepsilon$ de \mathcal{R}_ε est constituée de deux parties (ou "morceaux")

$$\partial\mathcal{R}_\varepsilon = F^h_\varepsilon \cup F^\delta_\varepsilon,$$

l'une F^h_ε contenue dans l'hyperplan $y = h$; l'autre F^δ_ε , définie par les relations

$$y = \frac{1}{\alpha} \delta_\varepsilon(x), \quad (y < h),$$

est contenue dans l'ouvert \mathcal{R} , avec δ_ε fonction indéfiniment dérivable sur \mathbb{R}^n dont le gradient (par rapport à \mathbb{R}^n) vérifie $|\text{grad } \delta_\varepsilon| \leq 1$.

2.4.5 Premier corollaire (majoration de l'"aire" des $\partial\mathcal{R}_\varepsilon$). Soit $K_{\mathcal{R}}$ un compact de \mathbb{R}^n tel que le "demi-cylindre" $K_{\mathcal{R}} \times \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^+_{n+1}$ contienne \mathcal{R} .

On peut majorer indépendamment de ϵ la mesure superficielle de l'hy-
persurface $\partial\mathcal{R}_\epsilon$:

$$(1) \quad |F^h \epsilon|_{\sigma_\epsilon} \leq |K_{\mathcal{R}}| ;$$

$$(2) \quad |F^d \epsilon|_{\sigma_\epsilon} \leq |K_{\mathcal{R}}| \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha^2}} ;$$

$$(3) \quad |\partial\mathcal{R}_\epsilon|_{\sigma_\epsilon} \leq |K_{\mathcal{R}}| \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha^2}}\right).$$

2.4.6 Second corollaire (évaluation de $\frac{\partial y}{\partial N}$ sur les $\partial\mathcal{R}_\epsilon$). La dérivée de la

$(n+1)^{\text{ème}}$ coordonnée : y selon les normales extérieures N à $\partial\mathcal{R}_\epsilon$ vérifie
évidemment

$$(1) \quad \left| \frac{\partial y}{\partial N} \right| \leq |\text{grad } y| = 1 .$$

Plus précisément [utile seulement pour prouver " $E_S \subset E_L$ presque
partout"]

$$(2) \quad \frac{\partial y}{\partial N} = +1 \quad \boxed{\text{sur } F^h \epsilon} ;$$

$\boxed{\text{sur } F^d \epsilon}$, on a $\frac{\partial y}{\partial N} < 0$, mais il existe une constante $c_{\mathcal{R}} > 0$ ne dé-
pendant que de α et n telle que $\frac{\partial y}{\partial N} < -c_{\mathcal{R}} < 0$ [preuve en 2.6.1].

2.4.7 D'après 2.4.4 ((i) et (ii)), on a

$$\iint_{\mathcal{R}} |\text{grad } u|^2 y \, dx \, dy = \sup_{\epsilon=\epsilon_1, \epsilon_2, \dots} \iint_{\mathcal{R}_\epsilon} \dots ,$$

donc pour voir que le premier membre est fini, il suffit, d'après les relations

(1) de 2.4.3

1° de trouver une majoration sur $\partial\mathcal{R}_\epsilon$ de $y \left| \frac{\partial u}{\partial N} \right|$ indépendante de ϵ , ou mieux,

d'après $\mathcal{R}_\varepsilon \subset \mathcal{R}$ et $\left| \frac{\partial u}{\partial N} \right| \leq |\text{grad } u|$, une majoration sur \mathcal{R} de $y |\text{grad } u|$;

2^o d'utiliser la majoration (1) de 2.4.6 : $\left| \frac{\partial y}{\partial N} \right| \leq 1$;

3^o d'utiliser la majoration (3) de 2.4.5 (indépendante de ε) de la mesure superficielle [ou "aire"] des hypersurfaces $\partial \mathcal{R}_\varepsilon$.

2.5 Fin de la démonstration de " $E_L \subset E_S$ presque partout".

Il reste à justifier 2.4.2, à prouver 2.4.4, 2.4.5, et à résoudre le 1^o de 2.4.7.

2.5.1 Justification de 2.4.2. Transformons l'intégrale étudiée :

$$\begin{aligned} & \int_{e \in E} \left(\iint_{\Gamma_{\alpha,h}(e)} |\text{grad } u(x,y)|^2 y^{1-n} dx dy \right) de = \\ & = \iiint_{\Omega} |\text{grad } u(x,y)|^2 y^{1-n} \psi(x-e,y) (dx dy de) = \\ & = \iint_{\mathcal{R}} |\text{grad } u(x,y)|^2 y^{1-n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-e,y) de \right) dx dy = \\ & = C \iint_{\mathcal{R}} |\text{grad } u(x,y)|^2 y dx dy \end{aligned}$$

où au second membre on a introduit Ω et ψ :

$\Omega =$ ensemble des $(x,y,e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ tels que $e \in E$ et

$(x,y) \in \Gamma_{\alpha,h}(e)$;

$\psi : \mathbb{R}_{n+1}^+ \longrightarrow \mathbb{R} =$ la fonction valant un sur $\Gamma_{\alpha,h}$ (notation 1.1) et zéro

ailleurs ;

enfin la constante C du quatrième membre (venant de l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-e, y) dx = C y^n$$

(pour $0 < y < h$) ne dépend que de α et n .

■ 2.4.2

2.5.2 Preuve du lemme 2.4.4. On part de la fonction "distance à E dans \mathbb{R}^n ":

$$\delta(x) = d(x, E) \quad (x \in \mathbb{R}^n);$$

par régularisation, δ est limite uniforme quand $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon > 0$) de fonctions

$f_\varepsilon = \delta * \psi_\varepsilon$ indéfiniment dérivables qui vérifient (en vertu de

$$|\delta(x) - \delta(x')| \leq |x - x'|, \text{ si on prend } \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon dx = 1 \text{ et } \psi_\varepsilon \geq 0)$$

$$(1) \quad |\text{grad } f_\varepsilon| \leq 1.$$

Une récurrence aisée montre qu'on peut trouver une suite d'epsilons décroissant et tendant vers zéro et une suite de constantes θ_ε telles que les fonctions

$$(2) \quad \delta_\varepsilon = f_\varepsilon + \theta_\varepsilon \quad (\varepsilon = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$$

vérifient $\delta_{\varepsilon_1} \geq \delta_{\varepsilon_2} \geq \dots \geq \delta$.

[On peut adopter comme $k+1^{\text{ème}}$ ε un $\varepsilon = \varepsilon_{k+1}$ vérifiant $\varepsilon \in]0, \varepsilon_k[$,

$\varepsilon < 2^{-(k+1)}$ ainsi que $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x) - \delta(x)| \leq 10^{-k-1}$, alors que la $k+1^{\text{ème}}$ constante θ_ε vaudra 2^{-k-1} .]

Quand $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$, δ est encore limite uniforme des δ_ε ; de plus (1) et

(2) donnent $|\text{grad } \delta_\varepsilon| \leq 1$. On prendra $\mathcal{R}_\varepsilon =$ intersection du demi-espace $y < h$

et de l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $y > \frac{1}{\alpha} \delta_\varepsilon(x)$.

■ 2.4.4

2.5.3 Preuve de 2.4.5. L'hyperplan $y = h$ est parallèle à \mathbb{R}^n et contient

$F^h \varepsilon \subset F^h$; par définition de $K_{\mathcal{R}}$, la projection orthogonale de $F^h \varepsilon$ est

contenue dans $K_{\mathcal{R}}$ (car il en est ainsi pour celle de F_h). D'où (1).

La projection orthogonale sur \mathbb{R}^n de F_ε^δ fournit aussi une bijection de cet ensemble sur une partie de $K_{\mathcal{R}}$, et le cosinus de l'angle de l'hyperplan tangent en un point de ce morceau avec \mathbb{R}^n est minoré par $(1 + \frac{1}{\alpha^2})^{-\frac{1}{2}}$ d'après l'équation de ce morceau et $|\text{grad } \delta_\varepsilon| \leq 1$ (voir (iii) de 2.4.4). D'où (2).

Enfin (3) résulte de $\partial \mathcal{R}_\varepsilon = F_h^\varepsilon \cup F_\varepsilon^\delta$.

■ 2.4.5

2.5.4 Solution du 1^o de 2.4.7. La situation étant celle de 2.4.1 (iii), la majoration désirée de $y|\text{grad } u|$ sur \mathcal{R} résulte assurément du lemme suivant.

2.5.4.1 Lemme. Avec $0 < \alpha < \beta$, $0 < h < k$, $e \in \mathbb{R}^n$, si H est une fonction harmonique définie dans l'intérieur du grand cône tronqué $\Gamma_{\beta,k}(e)$ et est bornée :

$$\sup_{s \in \Gamma_{\beta,k}(e)} |H(s)| \leq M,$$

alors la restriction de la fonction positive $(x,y) \mapsto y|\text{grad } H(x,y)|$ au petit cône tronqué $\Gamma_{\alpha,h}(e)$ est majorée par MM' , où la constante M' ne dépend que de n, α, β, h, k .

Preuve. La géométrie élémentaire montre qu'il existe une constante θ ne dépendant que de n, α, β, h, k telle que pour tout $(x,y) \in \Gamma_{\alpha,h}(e)$ la boule de centre (x,y) et de rayon θy soit contenue dans $\Gamma_{\beta,k}(e)$.

Le lemme résulte donc du résultat classique 2.5.4.2 suivant.

■

2.5.4.2 Proposition. Si H est une fonction harmonique définie et bornée dans

la boule $B(c, \rho)$ de centre c et de rayon ρ de \mathbb{R}^p :

$$\sup_{s \in B(c, \rho)} |H(s)| \leq M ,$$

alors $|\text{grad } H(c)| \leq \frac{MM''}{\rho}$, où M'' ne dépend que de la dimension p de \mathbb{R}^p .

Preuve. Grâce à une similitude de \mathbb{R}^p , on se ramène au cas où $c = 0$ (l'origine de \mathbb{R}^p) et $\rho = 1$.

Soit φ une fonction indéfiniment dérivable dans \mathbb{R}^p , positive, radiale, à support dans $B(0, \frac{1}{2})$, d'intégrale 1. Comme H est harmonique, on a pour tout vecteur $s \in \mathbb{R}^p$ de norme $\leq \frac{1}{2}$

$$H(s) = \int_{\mathbb{R}^p} H(t) \varphi(s-t) dt ,$$

et par dérivation de φ au second membre, on calcule les dérivées de H au voisinage de l'origine.

■

Si cette majoration de $|H|$ est vraie dans tout \mathbb{R}^p , en faisant tendre ρ vers l'infini, on voit que le gradient de H est nul en tout point c . Donc :

2.5.4.3 Théorème de LIOUVILLE. Chaque fonction harmonique et bornée dans tout \mathbb{R}^p est constante.

■ $E_L \subset E_S$ presque partout.

2.6 Preuve de "E_S ⊂ E_L presque partout".

2.6.1 Nous commençons par la preuve du corollaire 2.4.6.

Sur le morceau F^{δ}_{ε} , un vecteur normal à la surface a pour composantes $n+1$ nombres proportionnels à

$$\left(-\frac{\partial \delta_{\varepsilon}}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial \delta_{\varepsilon}}{\partial x_n}, -\alpha \right);$$

or $\left| \frac{\partial \delta_{\varepsilon}}{\partial x_j} \right| \leq |\text{grad } \delta_{\varepsilon}| \leq 1$ pour $j = 1, \dots, n$; donc

$$\frac{\partial y}{\partial N} < -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + n}} < 0.$$

■ 2.4.6

2.6.2 Lemme. Avec les notations $\alpha, \beta, h, k, e, H$ du lemme 2.5.4.1, si la fonction harmonique H définie dans le grand cône tronqué $\Gamma_{\beta, k}(e)$ vérifie

$$\iint_{\Gamma_{\beta, k}(e)} |\text{grad } H(x, y)|^2 y^{1-n} dx dy \leq M,$$

alors $y |\text{grad } H(x, y)|$ est majoré dans le petit cône tronqué $\Gamma_{\alpha, h}(e)$ par MM''' où M''' ne dépend que de n, α, β, h, k .

La technique de démonstration est analogue à celle du lemme parallèle cité.

2.6.3 "Rétrécissement" de l'ensemble E_S. Soit E' un ensemble mesurable relativement compact de \mathbb{R}^n , inclus dans E_S ; c'est-à-dire, pour tout $e' \in E'$, il existe un cône tronqué $\Gamma_{B, K}(e')$ (de sommet e' , avec B et K dépendant de e') tel que

$$(1) \iint_{\Gamma_{B, K}(e')} |\text{grad } u(x, y)|^2 y^{1-n} dx dy < \infty \quad (e' \in E').$$

Afin de montrer l'existence d'une limite non-tangentielle en presque tout point de E' , on peut supposer successivement

- que les \iint sont étendues à des cônes tronqués de même forme : On aura (1)

avec $\Gamma_{\beta,k}(e')$ où $\beta > 0$ et $k > 0$ sont indépendants de $e' \in E'$;

- que ces intégrales sont majorées par un nombre fini B_1 indépendant de $e' \in E'$;

On aura

$$(2) \quad \iint_{\Gamma_{\beta,k}(e')} |\text{grad } u(x,y)|^2 y^{1-n} dx dy \leq B_1 < \infty \text{ pour tout } e' \in E'.$$

2.6.4 Modification des intégrales $S_{\beta,k} u(e')$.

Enfin, nous "rétrécirons" à nouveau l'ensemble E' , et nous prendrons des cônes plus petits, de manière à pouvoir remplacer dans (2) le facteur y^{1-n} par y .

Soit $\eta > 0$. D'après un théorème de LEBESGUE (voir 1.6), il existe un ensemble compact $E = E_\eta \subset E'$ avec

$$(3) \quad |E' \cap [E]| < \eta$$

et $\rho = \rho_\eta > 0$ tel que pour tout $e \in E$ et tout $r < \rho_\eta$, la boule de \mathbb{R}^n de centre e et de rayon r vérifie

$$(4) \quad \frac{|E' \cap B(e,r)|}{|B(e,r)|} \geq \frac{1}{2}.$$

(On pourra supposer η petit, à condition de prendre ρ_η assez petit).

Soient α et h deux nombres soumis aux conditions

$$(5) \begin{cases} 0 < \alpha < \beta, \\ 0 < h < k, \end{cases}$$

(plus loin, équation (9), nous imposerons une condition supplémentaire à h).

Notons

$$(6) \begin{cases} \mathcal{R} = \bigcup_{e \in E_\eta} \Gamma_{\alpha, h}(e) \\ \mathcal{R}^\nu = \bigcup_{\{ \in E' } \Gamma_{\beta, k}(\{) \end{cases}$$

Intégrons par rapport à $\{$ parcourant E' les intégrales $S_{\beta, k} u(\{)$:

$$(7) \begin{cases} \int_{\{ \in E'} \left(\iint_{\Gamma_{\beta, k}(\{)} |\text{grad } u|^2 y^{1-n} dx dy \right) d\{ = \\ = \iiint_{\Omega} |\text{grad } u|^2 y^{1-n} \varphi_{E'}(\{) \psi(x-\{, y) (d\{ dx dy) = \\ = \iint_{(x, y) \in \mathcal{R}^\nu} |\text{grad } u|^2 y^{1-n} \left(\int_{\{ \in E'} \psi(x-\{, y) d\{ \right) dx dy \end{cases}$$

où au second membre figurent $\Omega =$ ensemble des $(\{, x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ tels de

$\{ \in E'$, $(x, y) \in \Gamma_{\beta, k}(\{)$; $\varphi_{E'}$ valant 1 sur E' , 0 sur $\int_{\mathbb{R}^n} E'$; ψ définie sur \mathbb{R}_{n+1}^+ , valant 1 sur Γ_β (= le grand cône de sommet l'origine, où $|x| < \beta y$) et 0 ailleurs.

D'après l'hypothèse (2) de 2.6.3, le premier membre de (7) est majoré par

$|E'| B_1$.

Il est clair qu'on minore le dernier membre de (7) en maintenant $\int_{\{ \in E'} \dots d\{$, mais en effectuant seulement $\iint_{(x, y) \in \mathcal{R}} \dots dx dy$. L'étude détaillée de cette mi-

noration montrera qu'il existe θ assez petit pour que (7) soit minoré par

$\theta \iint_{\mathcal{R}} |\text{grad } u|^2 y \, dx \, dy$, d'où la majoration

$$(8) \quad \iint_{\mathcal{R}} |\text{grad } u|^2 y \, dx \, dy \leq |E'| B_1 / \theta .$$

2.6.5. Minoration $\int_{\{ \in E' } \psi(x-\{, y) d\{ \geq C^{te} y^n$.

Considérons pour un élément $(x, y, e) \in \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[\times E'$ les propriétés A), B), C), D) suivantes (avec d : distance dans \mathbb{R}^n).

A) On a $(x, y) \in \mathcal{R}^\vee = \bigcup_{\{ \in E'} \Gamma_{\beta, k}(\{)$ et $\psi(x-e, y) = 1$.

B) Il existe $\{ \in E'$ tel que $d(x, \{) < \beta y$; on a $d(x, e) < \beta y$ et $y < k$.

C) On a $(x, y) \in \mathcal{R} = \bigcup_{z \in E} \Gamma_{\alpha, h}(z)$ et $\psi(x-e, y) = 1$.

D) Il existe $z \in E$ tel que $d(x, z) < \alpha y$; on a $d(x, e) < \beta y$ et $y < h$.

Par définition de \mathcal{R} , \mathcal{R}^\vee et ψ , les propriétés A) et B) sont équivalentes, et les propriétés C) et D) sont équivalentes. Comme \mathcal{R}^\vee contient \mathcal{R} , D) implique B). Donc en prenant x, y, e et un seul z de manière à satisfaire D), puis en imposant au nombre $h \in]0, k[$ la restriction supplémentaire (voir (3) et (4))

$$(9) \quad (\beta - \alpha)h < \rho_\eta ,$$

on trouve (avec $B(z; r) =$ boule de \mathbb{R}^n de centre z et de rayon r)

$$\begin{aligned} \int_{e \in E'} \psi(x-e, y) de &\geq |E' \cap B(z; (\beta - \alpha)y)| \geq \\ &\geq \frac{1}{2} |B(z; (\beta - \alpha)y)| = \theta y^n \quad \text{si } 0 < y < h , \end{aligned}$$

avec θ ne dépendant que de n et $\beta - \alpha$.

Reportant cette minoration dans le dernier membre de (7), on obtient compte-tenu de $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}'$ la majoration (8) annoncée en 2.6.4, laquelle nous écrirons

$$(10) \quad \iint_{\mathfrak{R}} |\text{grad } u|^2 y \, dx \, dy \leq B \quad (< \infty).$$

2.6.6 Retour aux bons ouverts \mathfrak{R}_ϵ : majoration des $\int_{\partial \mathfrak{R}_\epsilon} u^2 \, d\sigma_\epsilon$.

Comme $E = E_\eta$ est un compact dans 2.6.4 (6), on peut appliquer à \mathfrak{R} la construction des bons ouverts \mathfrak{R}_ϵ de 2.4.4, pour lesquels on a la formule (1) de 2.4.3 et les corollaires 2.4.5 et 2.4.6.

Récrivons cette formule (1) en tenant compte de la décomposition $\partial \mathfrak{R}_\epsilon = F^{\delta}_\epsilon \cup F^h_\epsilon$, puis en tenant compte de $\frac{\partial y}{\partial N} = 1$ sur F^h_ϵ et en divisant tous les termes par une constante $c > 0$ que nous préciserons plus loin :

$$(11) \quad \left[\int_{F^{\delta}_\epsilon} \left(\frac{-\frac{\partial y}{\partial N}}{c} \right) u^2 \, d\sigma_\epsilon = -\frac{1}{c} \int_{\partial \mathfrak{R}_\epsilon} y \frac{\partial(u^2)}{\partial N} \, d\sigma_\epsilon + \right. \\ \left. + \frac{1}{c} \int_{F^h_\epsilon} u^2 \, d\sigma_\epsilon + \frac{2}{c} \iint_{\mathfrak{R}_\epsilon} |\text{grad } u|^2 y \, dx \, dy . \right.$$

Notons \vec{h} le vecteur de \mathbb{R}^{n+1} dont les n premières coordonnées sont nulles et la dernière est h ; on aura si $x \in \mathbb{R}^n$, $\vec{h} = (0, h)$, $(x, h) = (x, 0) + \vec{h}$, et plus généralement si $P \subset \mathbb{R}^n$, alors son translaté $P + \vec{h}$ sera dans l'hyperplan $y = h$.

Avec les notations du corollaire 2.4.5, on a $F^h_\epsilon \subset K_{\mathfrak{R}} + \vec{h}$, donc la majoration indépendante de ϵ , par disons B' :

$$(12) \int_{F^h_\epsilon} u^2 d\sigma_\epsilon \leq \int_{K_{\mathcal{R}}+\vec{h}} u^2(x,h) d(x+\vec{h}) = B'.$$

D'après $\mathcal{R}_\epsilon \subset \mathcal{R}$, (10) (fin de 2.6.5) donne la majoration indépendante de ϵ

$$(13) \iint_{\mathcal{R}_\epsilon} |\text{grad } u|^2 y dx dy \leq B.$$

Bornons la première intégrale du second membre de (11) :

$$(14) \left[\begin{aligned} & \left| \int_{\partial\mathcal{R}_\epsilon} y \frac{\partial(u^2)}{\partial N} d\sigma_\epsilon \right| \leq 2 \int_{\partial\mathcal{R}_\epsilon} |u| \left(y \left| \frac{\partial u}{\partial N} \right| \right) d\sigma_\epsilon \leq \\ & \leq 2 \left(\sup_{(x,y) \in \partial\mathcal{R}_\epsilon} y \left| \frac{\partial u}{\partial N}(x,y) \right| \right) \cdot \left(\int_{\partial\mathcal{R}_\epsilon} u^2 d\sigma_\epsilon \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial\mathcal{R}_\epsilon} d\sigma_\epsilon \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq B'' \left(\int_{\partial\mathcal{R}_\epsilon} u^2 d\sigma_\epsilon \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right.$$

En effet, on a le second membre en appliquant $\frac{\partial(u^2)}{\partial N} = 2u \frac{\partial u}{\partial N}$, le troisième en appliquant l'inégalité de SCHWARZ dans $\int_{\partial\mathcal{R}_\epsilon} |u| \cdot 1 d\sigma_\epsilon$; enfin, on peut trouver B'' fini indépendant de ϵ au dernier membre : le facteur (sup...) est borné d'après $\partial\mathcal{R}_\epsilon \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{R}^\sim = \bigcup_{e \in E} \Gamma_{\beta,k}(e) \subset \bigcup_{f \in E'} \Gamma_{\beta,k}(f)$, d'après la majoration (2) de 2.6.3 et d'après le lemme 2.6.2 ; quant au troisième facteur, il est majoré selon la relation (3) de 2.4.5.

A côté de ces majorations des expressions du second membre de (11), on peut minorer le premier membre par $\int_{F^{\delta}_\epsilon} u^2 d\sigma_\epsilon$, à condition d'adopter la valeur $c = c_{\mathcal{R}}$ qui est $\leq -\frac{\partial y}{\partial N}$ quand la normale N est relative au morceau F^{δ}_ϵ (voir corollaire 2.4.6). Avec ce choix de c , (12), (13), (14) donnent dans (11)

$$\int_{F^{\delta}_\epsilon} u^2 d\sigma_\epsilon \leq \frac{B''}{c} \left(\int_{\partial\mathcal{R}_\epsilon} u^2 d\sigma_\epsilon \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{B'}{c} + \frac{2B}{c}.$$

Ajoutons membre à membre cette inégalité et (12) ; d'après la décomposition

$F^d_\epsilon \cup F^h_\epsilon = \partial \mathcal{R}_\epsilon$, il vient au premier membre $\int_{\partial \mathcal{R}_\epsilon} u^2 d\sigma_\epsilon$. On a donc avec des constantes $\beta_1 \geq 0$ et $\beta_2 \geq 0$, et en posant $J_\epsilon = \left(\int_{\partial \mathcal{R}_\epsilon} u^2 d\sigma_\epsilon \right)^{\frac{1}{2}}$ l'inégalité du second degré par rapport à J_ϵ :

$$(15) \quad J_\epsilon^2 - \beta_1 J_\epsilon - \beta_2 \leq 0.$$

Comme J_ϵ est un nombre fini à priori, cette condition fournit une majoration de J_ϵ indépendante de ϵ par disons $\sqrt{B_2}$:

$$(16) \quad \boxed{\int_{\partial \mathcal{R}_\epsilon} u^2 d\sigma_\epsilon \leq B_2} \quad (\text{fini et indépendant de } \epsilon).$$

2.6.7 Esquisse de la fin du raisonnement. Cette dernière majoration aura pour conséquence l'existence d'une "majorante harmonique" $H + C^{te}$ vérifiant

$$(17) \quad |u| \leq H + C^{te} \quad \text{sur } \mathcal{R},$$

où $H = I.P.F$ avec F positive $\in L^2(\mathbb{R}^n)$. Or on peut montrer que l'intégrale de POISSON d'une fonction de L^2 est presque partout non-tangentielle bornée, donc d'après $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\alpha, h}(E)$ (notation 1.9), cette majoration montre que u est presque partout sur E non-tangentielle bornée, donc (théorème de FATOU local 1.8) admet presque partout sur E des limites non-tangentielle, comme annoncé.

2.6.8 Lemme. Soit g une fonction positive et intégrable sur \mathbb{R}^n . Soit $V = I.P.g$

son intégrale de POISSON :

$$V(x, y) = (P_y * g)(x) \quad (x, y) \in \mathbb{R}_{n+1}^+.$$

Pour tout $\theta > 0$ il existe une constante λ_θ (indépendante de g) telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_{n+1}^+$ on ait

$$V(x, y) \geq \lambda_\theta \cdot (\text{moyenne de } g \text{ sur la boule de } \mathbb{R}^n \text{ de centre } x \text{ et de rayon } \theta y).$$

(La démonstration montre comment étendre ce résultat à des convolutions analogues).

Preuve. Il suffit d'examiner le cas où $x = 0$; alors

$$\begin{aligned} V(0, y) &= c_n y \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(t)}{(|t|^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}} dt \geq \\ &\geq c_n y \int_{|t| \leq \theta y} \dots dt \geq c_n y \int_{|t| \leq \theta y} \frac{g(t)}{(\theta^2 y^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}} dt = \\ &= \underline{c_n \cdot (\theta^2)^{\frac{n+1}{2}} \cdot (1+\theta^2)^{\frac{-n-1}{2}} \cdot (\text{moyenne})} \text{ où } c_n \text{ ne dépend que de } n. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.6.9 Construction de la majorante harmonique $H + C^{te}$. [voir notations de 2.4.4].

Pour $\epsilon = \epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ on définit f_ϵ sur \mathbb{R}^n de la manière suivante.

Si la demi-droite "verticale" au-dessus de $x \in \mathbb{R}^n$ rencontre \mathcal{R}_ϵ , alors on prend $f_\epsilon(x) =$ valeur absolue de u prise au point d'intersection "le plus bas" de $\partial \mathcal{R}_\epsilon$ et de cette demi-droite.

Sinon, on prend $f_\epsilon(x) = 0$. Autrement dit,

$$\begin{aligned} \text{Si } \frac{1}{\alpha} \delta_\epsilon(x) < h \text{ [c'est-à-dire si } (x, \frac{1}{\alpha} \delta_\epsilon(x)) \in F^{\delta_\epsilon} \text{]}, \text{ alors } f_\epsilon(x) = \\ = |u(x, \frac{1}{\alpha} \delta_\epsilon(x))|. \end{aligned}$$

Si $\frac{1}{\alpha} \delta_\epsilon(x) > h$, alors $f_\epsilon(x) = 0$.

L'image par $(x,y) \mapsto x$ de la mesure superficielle du morceau F^δ_ε est plus grande que la restriction à l'ensemble {projection de $\partial\mathcal{R}_\varepsilon$ sur \mathbb{R}^n } de la mesure de LEBESGUE de \mathbb{R}^n (au point x , la densité est l'inverse du cosinus de l'angle que fait l'hyperplan tangent à F^δ_ε au point $(x, \frac{1}{\alpha}\delta_\varepsilon(x))$ avec l'hyperplan \mathbb{R}^n). Donc (voir (16) en 2.6.6)

$$(17) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f^2(x) dx \leq \int_{F^\delta_\varepsilon} u^2 d\sigma_\varepsilon \leq \int_{\partial\mathcal{R}_\varepsilon} u^2 d\sigma_\varepsilon \leq B_2 .$$

Posons

$$(18) \quad v_\varepsilon = \text{I.P.} f_\varepsilon$$

et montrons qu'il existe deux constantes > 0 indépendantes de ε , c_1 , c_2 telles que

$$(19) \quad |u(x,y)| \leq c_1 v_\varepsilon(x,y) + c_2 \quad \text{si } (x,y) \in \mathcal{R}_\varepsilon .$$

D'après le principe du maximum, il suffit d'assurer les inégalités de ce type en tout point frontière de \mathcal{R}_ε .

Sur le morceau de frontière F^h_ε qui est inclus dans le compact $K_{\mathcal{R}} + \vec{h}$ (voir texte ^{entre} (11) et (12) en 2.6.6), il suffit déjà d'adopter

$$(20) \quad c_h = \sup_{s \in K_{\mathcal{R}} + \vec{h}} |u(s)| .$$

Majoration de $|u|$ sur le morceau de frontière F^δ_ε .

Soit (X,Y) avec $Y = \frac{1}{\alpha} \delta_\varepsilon(X)$ un point fixé de F^δ_ε . Soit \mathcal{C}_X le "demi-cylindre" constitué des points $(x,y) \in \mathbb{R}^+_{n+1}$ tels que $[y > 0$ et que]

$$d(x, X) \leq \frac{\alpha Y}{2}.$$

La propriété intéressante de \mathcal{C}_X , qui résulte de l'équation de $F^{\delta \epsilon}$ et de $|\delta_\epsilon(x) - \delta_\epsilon(x')| \leq d(x, x')$ (voir lemme 2.4.4), est :

$$(21) \quad \inf_{(x,y) \in \mathcal{C}_X \cap F^{\delta \epsilon}} y \geq \frac{Y}{2}.$$

Or d'après le lemme 2.6.2, il existe [comme on l'a d'ailleurs vu en commentant le troisième membre de (14) en 2.6.6] une constante Λ telle que pour $(x,y) \in \mathcal{R}$, en particulier dans \mathcal{R}_ϵ , on ait

$$(22) \quad y |\text{grad } u(x,y)| \leq \Lambda.$$

La différence $u(X,Y) - u(x,y)$ est l'intégrale curviligne du gradient de u selon une courbe orientée différentiable par morceaux joignant ces deux points. On peut choisir une telle courbe d'extrémités (X,Y) et (x,y) restant de plus dans $\mathcal{C}_X \cap F^{\delta \epsilon}$ mais n'ayant pas une longueur démesurée vis-à-vis de $d(X,x)$. [C'est peut-être impossible si cette intersection n'est pas connexe par arcs. On consolide le raisonnement (comparer au passage de B_1 à $B \geq B_1$ en 2.4.1 (ii)) grâce aux deux remarques suivantes : 1° Si h' est assez grand, $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_{\alpha, h'}(E)$ est connexe par arcs, et plus précisément, pour n'importe quel demi-cylindre $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}_{n+1}^+$ d'axe parallèle au $(n+1)^{\text{ème}}$ axe, et pour tout ϵ , les ouverts \mathcal{R}'_ϵ construits à partir de \mathcal{R}' sont tels que $F^{\delta \epsilon} \cap \mathcal{C}$ soit connexe par arcs. 2° La convergence ou la divergence de l'intégrale double $S_{\beta, k'}^{H(e)}$ (H harmonique) est indépendante du paramètre k' (remarque utile pour 2.6.2 si cet h' est plus grand que k).]

Il en résulte, compte-tenu de (21) et (22) qu'il existe une constante θ_1 ayant la propriété suivante.

Pour tout $\epsilon = \epsilon_1, \epsilon_2, \dots$, pour tout $(X, Y) \in F_\epsilon^\delta$, pour tout $(x, y) \in F_\epsilon^\delta \cap \mathcal{R}_X$ on a

$$|u(X, Y) - u(x, y)| \leq \theta_1.$$

Donc pour les (X, Y) et (x, y) ainsi spécifiés

$$|u(X, Y) - \theta_1| \leq |u(x, y)| = f_\epsilon(x)$$

d'après la construction de f_ϵ , donc

$$(23) \quad \left[\begin{array}{l} |u(X, Y) - \theta_1| \leq (\text{moyenne de } f_\epsilon \text{ sur la boule de } \mathbb{R}^n, \text{ de centre } X, \text{ de rayon} \\ \frac{\alpha Y}{2}) \leq \frac{1}{\lambda} \text{ I.P. } f_\epsilon(X, Y) \end{array} \right.$$

où ce λ est le λ_θ de l'énoncé 2.6.8 quand on y fait $\theta = \frac{\alpha}{2}$; c'est légitime

car f_ϵ est bien positive, intégrable, car de carré sommable d'après (17) et nulle

hors de $K_{\mathbb{R}}^2$ qui est compact (2.4.5).

Majoration de $|u|$ dans \mathcal{R}_ϵ puis dans \mathcal{R} .

Avec les notations de (20) et (23), en prenant $c_1 = \frac{1}{\lambda}$ et $c_2 = \text{Max}(c_h, \theta_1)$,

on conjoint les majorations valables sur les deux morceaux de $\partial \mathcal{R}_\epsilon$ en une majora-

tion valable sur $\partial \mathcal{R}_\epsilon$, d'où (19) qu'on récrit :

$$(24) \quad |u| \leq c_1 \text{ I.P. } f_\epsilon + c_2 \quad \text{sur } \mathcal{R}_\epsilon.$$

Comme la suite $(f_\epsilon)_{\epsilon = \epsilon_1, \epsilon_2, \dots}$ forme un borné de $L^2(\mathbb{R}^n)$ d'après (17),

on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement vers une fonction $F \in L^2$ nulle hors du compact $K_{\mathcal{R}}$ comme les f_ϵ . Il en résulte que les intégrales de POISSON des fonctions de la sous-suite convergeront simplement dans \mathbb{R}_{n+1}^+ vers $H = I.P.F$. Or \mathcal{R} reste réunion de la sous-suite croissante des \mathcal{R}_ϵ où ϵ parcourt seulement la sous-suite des indices extraits. Donc (24) donnera

$$|u| \leq c_1 H + c_2 \text{ sur tout } \mathcal{R}.$$

■ 2.3

2.7 Remarques. Notons ici avec $\alpha > 0$, $h > 0$ fixés $\sum_{\alpha,h} =$ ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $S_{\alpha,h} u(x) < \omega$. Compte-tenu du résultat " $E_L = E_S$ presque partout" du théorème 2.3 et de $\sum_{\alpha,h} \subset E_S$, l'étude préliminaire 2.4.1 (iii) montre qu'il existe un ensemble négligeable $N_{\alpha,h}$ tel que $E_S = \sum_{\alpha,h} \cup N_{\alpha,h}$.

Il est clair que la difficulté pour faire converger $S_{\alpha,h} u(x)$ est au voisinage de $(x,0)$: en fait $\sum_{\alpha,h}$ ne dépend pas de h .

2.8 Exemple. Prenons $n = 1$, $f = u + iv$ une fonction holomorphe dans le demi-plan supérieur \mathbb{R}_2^+ , de partie réelle u , imaginaire v . Comme $|\text{grad } u| = |\text{grad } v|$, les intégrales S_{\dots} relatives à u et à v prennent la même valeur pour chaque sommet de cône x de l'axe réel. Donc " $E_L(u) = E_L(v)$ presque partout".

3.- Etude des limites non-tangentielles pour un système conjugué
de fonctions harmoniques.

3.1 Notations. Soit u une fonction harmonique dans le demi espace \mathbb{R}_{n+1}^+ où $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y > 0$. Soient v_1, \dots, v_n les n fonctions harmoniques conjuguées de u (chapitre III § 4). On sait qu'elles vérifient dans \mathbb{R}_{n+1}^+ le système d'équations aux dérivées partielles

$$(1) \quad \left[\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial y} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial v_s}{\partial x_s} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_s} = \frac{\partial v_s}{\partial y} \quad (s = 1, \dots, n), \\ \frac{\partial v_s}{\partial x_t} = \frac{\partial v_t}{\partial x_s} \quad (s \neq t, \quad s \text{ et } t \in \{1, \dots, n\}) \end{array} \right. ,$$

[qu'on pourrait rendre plus élégant en écrivant $u = v_0$, $y = x_0$: La fonction vectorielle (u, v_1, \dots, v_n) est localement le gradient d'une fonction harmonique à $n+1$ variables] .

3.2 Théorème. Avec les notations ci-dessus, soit E un ensemble mesurable de \mathbb{R}^n .

(i) Si la fonction harmonique u dans \mathbb{R}_{n+1}^+ admet en tout point de E une limite non-tangentielle, alors chacune des n fonctions harmoniques conjuguées v_1, \dots, v_n admet en presque tout point de E une limite non-tangentielle.

(ii) Si chacune des n fonctions v_1, \dots, v_n admet en tout point de E une limite non-tangentielle, alors u admet en presque tout point de E

une limite non-tangentielle.

On peut montrer si $n \geq 2$ que quel que soit l'indice $s \in \{1, \dots, n\}$ on ne peut ni dans l'énoncé (i), ni dans l'énoncé (ii) interchanger les rôles de u et de v_s . L'étude 2.8 du cas $n = 1$ ne laissait pas présager une dissymétrie de ce genre.

Ce théorème local mettant en jeu ces $n + 1$ fonctions résulte d'un théorème mettant en jeu une seule fonction harmonique et un seul point (arbitraire) de \mathbb{R}^n !

3.3 Théorème. Soit H harmonique dans \mathbb{R}_{n+1}^+ . Soit $p \in \mathbb{R}^n$. Soient α, β, n, k tels que $0 < \alpha < \beta$, $0 < h < k$.

Si l'intégrale suivante étendue au grand cône tronqué de sommet p

(notation 1.1) est finie :

$$\iint_{\Gamma_{\beta, k}(p)} \left| \frac{\partial H}{\partial y} \right|^2 y^{1-n} dx dy < \infty ,$$

alors pour $s = 1, \dots, n$, les intégrales suivantes étendues au petit cône tronqué sont aussi finies :

$$\iint_{\Gamma_{\alpha, h}(p)} \left| \frac{\partial H}{\partial x_s} \right|^2 y^{1-n} dx dy < \infty .$$

Pour $n = 1$, ce théorème est dû à FRIEDRICHS ; sa méthode est valable pour des domaines plus généraux mais ne s'adapte pas quand $n > 1$. Preuve en 3.5.

3.4 Le théorème 3.2 résulte aussitôt de ce dernier.

Pour l'assertion 3.2(i) : Partons de l'hypothèse $\iint_{\Gamma_{\beta,k}(p)} |\text{grad } u|^2 y^{1-n} dx dy < \infty$

alors pour $s = 1, \dots, n$ on a

$$\iint_{\Gamma_{\beta,k}(p)} \left| \frac{\partial v_s}{\partial y} \right|^2 y^{1-n} dx dy = \iint_{\Gamma_{\beta,k}(p)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 y^{1-n} dx dy < \infty$$

d'après les relations $\frac{\partial v_s}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x_s}$ de la seconde ligne de 3.1 (1), puis d'après

la minoration $|\text{grad } u|^2 = \sum_{t=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 \geq \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2$.

D'où d'une part en prenant $H = v_s$ dans le théorème 3.3

$$\iint_{\Gamma_{\alpha,h}(p)} \left| \frac{\partial v_s}{\partial x_t} \right|^2 y^{1-n} dx dy < \infty \text{ pour } t = 1, \dots, n,$$

mais d'autre part à fortiori $(\Gamma_{\alpha,h}(p) \subset \Gamma_{\beta,k}(p))$

$$\iint_{\Gamma_{\alpha,h}(p)} \left| \frac{\partial v_s}{\partial y} \right|^2 y^{1-n} dx dy < \infty,$$

d'où par addition $\iint_{\Gamma_{\alpha,h}(p)} |\text{grad } v_s|^2 y^{1-n} dx dy = S_{\alpha,h} v_s(p) < \infty$.

On conclut pour v_s en invoquant le théorème 2.3, en l'occurrence " $E_L(v_s) \subset E_S(v_s)$ presque partout".

Pour l'assertion 3.2 (ii), on raisonne de même, en tenant compte en outre de

la première relation de 3.1 (1) : $\frac{\partial u}{\partial y} = - \sum_{s=1}^n \frac{\partial v_s}{\partial x_s}$.

■ 3.2

3.5 Preuve du théorème 3.3.

3.5 (i) Notations ; principe de la démonstration. Fixons l'indice $s \in \{1, \dots, n\}$;

posons

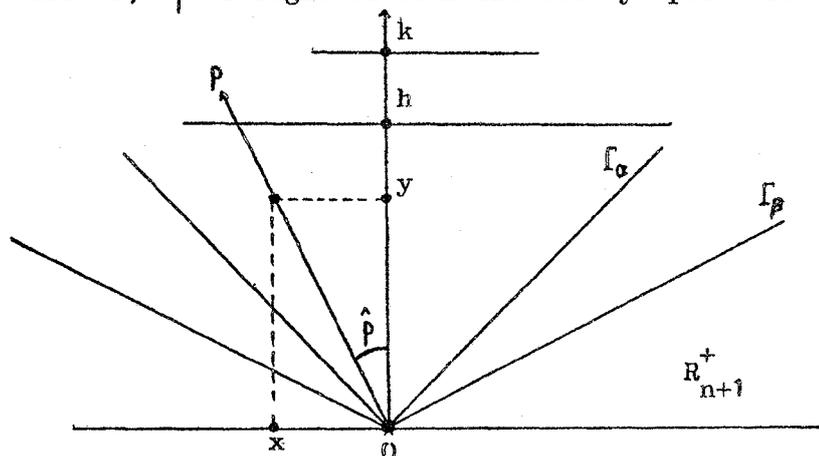
$$S = \frac{\partial H}{\partial x_s} \quad , \quad T = \frac{\partial H}{\partial y} \quad ;$$

comme $\frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial x_s}$, on a (avec (x,y) et $(x,\tau) \in \mathbb{R}_{n+1}^+$)

$$(1) \quad S(x,y) = - \int_y^h \frac{\partial T}{\partial x_s}(x,\tau) d\tau + S(x,h).$$

L'hypothèse est (à un faible degré !) une sorte de majoration portant sur $|T|$ dans le grand cône tronqué ; mais comme T est harmonique, nous espérons trouver pour $\frac{\partial T}{\partial x_s} = \frac{\partial S}{\partial y}$ une majoration, laquelle nous intégrerons sur le petit cône tronqué.

Il suffit de considérer les deux cônes $\Gamma_{\beta,k}$ et $\Gamma_{\alpha,h}$ de sommet l'origine : $p = 0$. Nous désignerons par ρ une demi-droite issue de l'origine et contenue dans le grand cône Γ_{β} ; nous noterons S_{ρ} la restriction de la fonction S à cette demi-droite, $\hat{\rho}$ l'angle du demi-axe des y positifs avec la demi-droite ρ .



Notre objectif est d'obtenir des inégalités du type

$$(2) \quad \int_{y=0}^{y=h} y |S_{\rho}(x,y)|^2 dy \leq A \quad (\infty, \text{ avec } (x,y) \in \rho)$$

avec A indépendant de ρ si ρ reste dans le petit cône Γ_{α} .

La peine est laissée au lecteur de voir que, "en intégrant selon ρ parcourant Γ_α ces inégalités", il obtiendra une inégalité de la forme voulue (avec A' ne dépendant que de α, h, n) :

$$\iint_{\Gamma_{\alpha,h}} |S(x,y)|^2 y^{1-n} dx dy \leq AA' < \infty.$$

3.5 (ii) Une évaluation classique des dérivées d'une fonction harmonique.

Soient P un point [provisoirement] fixé de \mathbb{R}^{n+1} , $B = B(P,R)$ une boule de centre P et de rayon $R = 2r$, \mathcal{H} une fonction harmonique au voisinage de B . Notons, pour tout $Q \in B(P,r)$, $B_Q = B(Q,r)$ la boule fermée de centre Q , de rayon $r = \frac{R}{2}$. Comme B contient B_Q et que \mathcal{H} est harmonique, on a successivement

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}(Q)| &\leq \frac{1}{|B_Q|} \iint_{B_Q} |\mathcal{H}(x,y)| \cdot 1 dx dy \leq \\ &\leq \frac{1}{|B_Q|^{\frac{1}{2}}} \left(\iint_{B_Q} |\mathcal{H}|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{|B_Q|^{\frac{1}{2}}} \left(\iint_B |\mathcal{H}|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On a évidemment $|B_Q|^{\frac{1}{2}} = |B(P,r)| = C \cdot r^{\frac{n+1}{2}}$ où la constante ne dépend que de

$n+1$. On a donc obtenu une majoration de $|\mathcal{H}|$ sur toute la boule $B_P = B(P,r)$.

On sait (proposition 2.5.4.2) que cette majoration a pour conséquence une majoration de la valeur absolue de chaque dérivée première de \mathcal{H} au centre P :

$$\left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j}(P) \right| \leq \frac{\theta'}{r^{\frac{n+1}{2}} \cdot r} \left(\iint_{B(P,2r)} |\mathcal{H}|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

où θ' ne dépend que de n (ne dépend pas de l'indice $j = 1, \dots, n$).

3.5 (iii) Majoration de $\left| \frac{\partial T}{\partial x_s} \right|$ sur $\Gamma_{\alpha,h}$.

Soit (X,Y) un point quelconque de $\Gamma_{\alpha,h}$. On exploite à nouveau le fait qu'il existe une constante ne dépendant que de n, α, β, h, k telle que la boule $B[X,Y]$ de centre (X,Y) et de rayon $C^{te} \cdot Y$ soit entièrement contenue dans $\Gamma_{\beta,k}$. En appliquant l'évaluation ci-dessus avec $P = (X,Y)$, $B = B[X,Y]$,

$2r = C^{te} \cdot Y$, $\mathcal{E} = T$, $j = s$, il vient avec une constante θ convenable

$$(3) \quad \left| \frac{\partial T}{\partial x_s} (X,Y) \right| \leq \theta Y^{-\frac{n-3}{2}} \left(\iint_{B[X,Y]} |T|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} .$$

3.5 (iv) Majoration portant sur la fonction S . Notons

$$(4) \quad c_h = \sup_{(x,h) \in \Gamma_{\beta,k}} |S(x,h)| .$$

La formule (1) de 3.5 (i), puis la majoration (3) ci-dessus donnent pour $(X,Y) \in \Gamma_{\alpha,h}$

$$\begin{aligned} |S(X,Y)| - c_h &\leq \int_Y^h \left| \frac{\partial T}{\partial x_s} (X,y) \right| dy \leq \\ &\leq C^{te} \int_Y^h y^{-\frac{n+3}{2}} \left(\iint_{B[X,y]} T^2(x,y_0) dx dy_0 \right)^{\frac{1}{2}} dy_0 , \end{aligned}$$

$(Y,y$ et y_0 sont trois avatars de la $n+1^{ème}$ coordonnée). On majore le troisième

membre en remplaçant $\iint_{B[X,y]}$ par $\iint_{Z(y)}$ où la "zône" $Z(y)$ contient

$B[X,y]$:

$Z(y) =$ intersection du grand cône Γ_{β} [(ou ce qui revient au même ici "du grand cône tronqué $\Gamma_{\beta,k}$ "] et de la bande comprise entre les deux hyperplans horizontaux tangents à $B[X,y]$. (C'est donc aussi l'ensemble des $(x,y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ vérifiant $|x| < \beta y_0$ et

$y - \text{rayon de } B[X,y] \leq y_0 \leq y + \text{rayon de } B[X,y]$;

rappelons que ce dernier membre est majoré par k , car $\Gamma_{\rho,k} \supset B[X,y]$, boule dont le rayon est proportionnel à y .)

On a donc (en posant

$$(5) \quad J_y = \left(\iint_{Z(y)} T^2(x,y_0) dx dy_0 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et en mettant en jeu les notations de 3.5 (i) : ρ = demi-droite de sommet 0

passant par (X,Y) , $\hat{\rho}$ = angle de cette demi-droite avec le $n+1^{\text{ème}}$ demi-axe

positif, et en notant t = norme dans \mathbb{R}^{n+1} du vecteur (X,Y) la majoration

$$(6) \quad |S_\rho(X,Y)| - c_h \leq C^{te} \int_0^h \frac{y^{-\frac{n+3}{2}}}{t \cos \hat{\rho}} J_y dy$$

En notant $F(t)$ le second membre de cette inégalité, et $f(y) = y^{\frac{-n-3}{2}} J_y$,

le lemme 3.6 ci-dessous donne [on a la minoration $\cos \hat{\rho} \geq \cos \alpha > 0$]

$$\int_0^h |F(t)|^2 t dt \leq \left(\frac{2 C^{te}}{t \cos \alpha} \right)^2 \int_0^h y^{-n-3} (J_y)^2 y^3 dy$$

Développons l'intégrale du second membre en posant φ_y valant 1 sur $Z(y)$

et 0 sur $\int_{\mathbb{R}^{n+1}} Z(y)$, puis majorons-la.

$$\begin{aligned} & \int_0^h y^{-n} (J_y)^2 dy = \int_0^h \left(\iint_{Z(y)} T^2 dx dy_0 \right) y^{-n} dy = \\ & = \iiint_{(x,y_0,y) \in \Omega} T^2(x,y_0) \varphi_y(x,y_0) y^{-n} dx dy_0 dy \leq \iiint_{(x,y_0,y) \in \Omega'} \dots = \\ & = \iint_{(x,y_0) \in \Gamma_{\rho,k}} T^2(x,y_0) \left(\int_0^h y^{-n} \varphi_y(x,y_0) dy \right) dx dy_0 \leq \\ & \leq C^{te} \iint_{\Gamma_{\rho,k}} T^2(x,y_0) y_0^{1-n} dx dy_0 < \infty \end{aligned}$$

(aux troisième et quatrième membres, on a introduit les deux ouverts ($\Omega \subset \Omega'$) :

$\Omega =$ ensemble des $(x, y_0, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ tels que $(x, y_0) \in Z(y)$ et $0 < y < h$;

$\Omega' =$ ensemble des (x, y_0, y) tels que $|x| < \beta y_0, y_0 < k$ et $0 < y < h$;

l'inégalité entre les deux dernières lignes résulte de ce qu'il existe une cons-

tante telle que $(\int_0^h \dots dy) \leq C^{te} \cdot y_0^{1-n}$ d'après la construction de $Z(y)$;

enfin, l'avant-dernier membre est par hypothèse fini.

Ceci montre que si on posait provisoirement et incorrectement $c_h = 0$ dans

(6), on pourrait écrire $|F(t)| = |S_\rho(X, Y)|$ et on aurait l'inégalité (2) souhaitée

depuis 3.5 (i) :

$$(7) \int_0^h |S_\rho(X, Y)|^2 Y dY \leq C^{te} \iint_{\Gamma_{\beta, k}} |T(x, y_0)|^2 y_0^{1-n} dx dy_0 < \omega .$$

Si nous refusons d'ignorer c_h dans (6), posons

$$f_\rho(y) = \text{Max}(|S_\rho(x, y)|, c_h) \quad (\text{avec } (x, y) \in \rho) ;$$

on a évidemment $|S_\rho(x, y)| \leq f_\rho(y)$ puis, comme le second membre de (6) est à

priori positif, il donne

$$0 \leq f_\rho(y) - c_h \leq C^{te} \int_t^h \cos \hat{\rho} y^{\frac{-n-3}{2}} J_y dy$$

et on a correctement au lieu de (7)

$$\int_0^h (f_\rho(y) - c_h)^2 y dy \leq C^{te} \iint \dots = C^{te} .$$

En développant le carré au premier membre puis en appliquant l'inégalité de

SCHWARZ pour le produit $1 \cdot f_\rho$ et la mesure $y dy$, on trouve

$$\int_0^h (f_\rho(y))^2 y \, dy \leq 2 c_h \int_0^h f_\rho(y) y \, dy + C^{te} \leq \\ \leq C^{te} \left(\int_0^h (f_\rho(y))^2 y \, dy \right)^{\frac{1}{2}} + C^{te} ,$$

et on en conclut que le premier membre (qui d'après $f_\rho \geq |S_\rho|$ majore l'intégrale étudiée $\int_0^h |S_\rho(x,y)|^2 y \, dy$) reste borné par une quantité indépendante de $\rho \in \Gamma_\alpha$ par une discussion analogue à celle de l'inégalité (15) de 2.6.6.

■ 3.3

3.6 Lemme (utilisé pour discuter le second membre de (6) en 3.5 (iv)).

Soient $0 < a_0 < a$, $b > 0$, f définie sur \mathbb{R}^+ . On pose

$$F(t) = \int_{at}^b f(y) \, dy \quad \text{si } at < b, \quad \text{et } = 0 \quad \text{si } at > b .$$

$$\text{Alors } \int_0^b |F(t)|^2 t \, dt \leq \frac{4}{a_0^2} \int_0^b |f(y)|^2 y^3 \, dy .$$

Preuve. On passe de φ à φ_a : $\varphi_a(t) = \int_{at}^\infty \varphi(y) \frac{dy}{y}$, ($t > 0$) par un opérateur continu de $L^2(\mathbb{R}^+)$ (lemme de SCHUR, chapitre V, 6.2). Plus précisément

$$\int_0^\infty |\varphi_a(t)|^2 dt \leq \frac{4}{a} \int_0^\infty |\varphi(y)|^2 dy :$$

nous venons d'admettre que ceci est vrai pour $a=1$, puis nous avons utilisé le changement de variable $y \mapsto ay$.

On obtient le lemme en appliquant ce résultat au dernier membre de la relation

$$|t^{\frac{1}{2}} F(t)| = |t^{\frac{1}{2}} \int_{at}^b f(y) dy| \leq \\ \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{at}^b y^{\frac{1}{2}} |f(y)| dy = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{at}^b y^{3/2} |f(y)| \frac{dy}{y} .$$

Indications bibliographiques pour le chapitre VII

Pour les théorèmes classiques, voir le chapitre XIV, pages 199-221, et les références page 334 de

ZYGMUND : Trigonometric series, volume II, (éd. Cambridge, 1959).

Pour les théorèmes locaux, voir les deux articles de CALDERON dans T.A.M.S., tome 68 (1950) :

"On the behaviour of harmonic functions at the boundary", pages 47-54,

"On a theorem of MARCINKIEWICZ and ZYGMUND", pages 55-61.

Lire l'article de l'auteur de ce cours

"On the theory of harmonic functions of several variables, II. Behaviour near the boundary", Acta Mathematica, tome 106 (1961), Pages 137-174.

Chapitre VIII

Dérivation et intégrales multiples.

1.- Diverses notions de dérivabilité.

1.1 Définition de la dérivée au sens ordinaire, au sens faible, au sens de L^q .

Soit f une fonction réelle définie dans un ouvert non vide relativement compact de \mathbb{R}^n .

(i) Soit $x^0 \in \Omega$. On dit que f a une dérivée "au sens ordinaire" au point x^0 s'il existe une forme linéaire Λ sur \mathbb{R}^n telle que

$$f(x) - f(x^0) - \Lambda(x - x^0) = o(|x - x^0|)$$

quand $x \in \Omega$ tend vers x^0 , ou encore si

$$\sup_{|h| \leq r} \left(\frac{1}{|h|} |f(x^0 + h) - f(x^0) - \Lambda(h)| \right)$$

tend vers zéro avec r [assez petit pour que la boule de centre x^0 et de rayon r soit incluse dans Ω].

(ii) Si $f \in L^1(\Omega)$, nous dirons que f est "faiblement dérivable", et a pour dérivées faibles $\frac{\partial f}{\partial x_k} = f'_k$ ($k = 1, \dots, n$) s'il existe des fonctions $f'_k \in L^1(\Omega)$ qui coïncident avec les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ de f au sens des distributions. Ceci donne

quel que soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \rangle = \int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx = - \langle \frac{\partial f}{\partial x_k}, \varphi \rangle = - \int_{\Omega} f'_k \varphi dx :$$

Le premier membre vaut le second par définition de la distribution associée à f , et vaut le troisième par définition de la dérivée d'une distribution ; le troisième membre vaut le dernier d'après la définition ci-dessus.

(iii) On suppose f mesurable. Soit $x^0 \in \Omega$. Nous dirons que f a au point x^0 une dérivée "au sens de L^q " s'il existe une forme linéaire Λ sur \mathbb{R}^n telle que

$$\left(\frac{1}{r^n} \int_{B(x^0, r)} |f(x) - f(x^0) - \Lambda(x - x^0)|^q dx \right)^{1/q}$$

tend vers zéro avec r [assez petit pour que Ω contienne cette boule], ou si on préfère : quand r tend vers zéro, on a

$$\int_{|h| \ll r} |f(x^0 + h) - f(x^0) - \Lambda(h)|^q dh = o(r^{n+q}).$$

1.2 Remarques. Si f a une dérivée au sens ordinaire au point x^0 , alors elle est continue en ce point, donc bornée au voisinage de ce point. Ceci montre qu'une fonction égale presque partout à f ne sera pas nécessairement dérivable en ce point. Beaucoup d'énoncés conduisent, en partant d'une fonction, à la modifier sur un ensemble négligeable afin d'améliorer ses propriétés. Par exemple :

1.3 Proposition. Soit f une fonction intégrable sur un intervalle ouvert borné J de \mathbb{R} . On suppose f faiblement dérivable. (Sa dérivée au sens des distributions f' appartient par définition à $L^1(J)$.)

Alors il existe une fonction g continue sur J et une seule telle que

$g = f$ presque partout ; de plus, quel que soit l'intervalle compact $[x, y] \subset J$,

on a

$$g(y) = \int_x^y f'(t) dt + g(x) ;$$

la dérivée au sens ordinaire de g existe presque partout et est presque partout égale à f' .

[Voir par exemple L. SCHWARTZ : Théorie des distributions, édi. HERMANN (1966), chapitre II, théorème III, page 54.]

1.4 Au contraire, dès que $n > 1$, on peut trouver $f \in L^1(\Omega)$ faiblement dérivable mais telle que, quel que soit l'ouvert non vide Ω' inclus dans Ω , quel que soit $g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega')$, $f-g$ ne soit pas une fonction négligeable dans Ω' : on pourrait dire que f est essentiellement non bornée au voisinage de chaque point de Ω . Il n'existe donc aucune fonction presque partout égale à f et qui serait dérivable en au moins un point de Ω . Voir exemple 3.1. Le théorème 3.2 donnera des conditions sur f assurant l'existence presque partout de ses dérivées au sens ordinaire ou au sens de L^q .

2.- Quelques résultats sur les intégrales singulières et les transformations de RIESZ.

Le lemme suivant servira à prouver le théorème 3.2, en prenant pour noyau K les noyaux de MARCEL RIESZ $x_j / |x|^{n+1}$.

2.1 Lemme sur les intégrales singulières. Soit K un noyau [de CALDERON-ZYGMUND] de \mathbb{R}^n :

$$K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n} \quad (x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0)$$

avec Ω positivement homogène de degré zéro, indéfiniment dérivable sur le complémentaire de l'origine et de moyenne nulle sur la sphère unité :

$$\int_{|x'|=1} \Omega(x') dx' = 0. \quad \text{Soit } f \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad (1 < p < \infty).$$

Quel que soit $\varepsilon > 0$, l'intégrale

$$\int_{|y| > \varepsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y) dy$$

est absolument convergente, et quand $\varepsilon \rightarrow 0$, elle converge pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$.

2.2 Remarques. Ce résultat complète le second théorème (3.2) du chapitre II. On pourrait remplacer l'hypothèse de dérivabilité de Ω par une condition "du type de DINI". Voir CALDERON-ZYGMUND "On the existence of certain singular integrals", Acta Mathematica, tome 88 (1952), pages 85-139.

2.3 Preuve du lemme 2.1 Notons K_ε le noyau tronqué au voisinage de l'origine

$$K_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |x| < \varepsilon, \\ K(x) & \text{pour } |x| > \varepsilon, \end{cases} \quad (\varepsilon > 0).$$

Introduisons une fonction radiale à valeurs positives $\varphi \in \mathcal{D}$, avec

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx = 1. \quad \text{Posons}$$

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 < p < \infty$). On définit $T_\delta f$ et Tf par

$$(1) \quad T_\delta f = K_\delta * f, \quad (\delta > 0),$$

$$(2) \quad Tf = \lim_{\delta \rightarrow 0} T_\delta f :$$

On sait déjà (chapitre II, théorème 3.2) que (1) est un élément de L^p , et que

la limite au second membre de (2) a lieu en norme L^p : $\|Tf - T_\delta f\|_p \rightarrow 0$.

Remarquons qu'on a, en posant

$$(3) \quad \Delta_\varepsilon = (\varphi_\varepsilon * K) - K_\varepsilon,$$

$$(4) \quad \varphi_\varepsilon * Tf - T_\varepsilon f = \Delta_\varepsilon f$$

et évidemment $\Delta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \Delta_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. De plus,

$$(5) \quad \int_{|x'|=1} \Delta_1(x') dx' = 0;$$

enfin, $|\Delta_1|$ est majoré par une fonction radiale intégrable : avec une constante convenable

$$(6) \quad |\Delta_1(x)| \leq C \cdot (1 + |x|)^{-n-1}.$$

Pour voir (5), on utilise la nullité des moyennes de K et de K_ε sur chaque sphère centrée à l'origine, donc aussi dans chaque couronne "centrée" à l'origine. Ce résultat servira seulement, sachant déjà que la limite de $T_\varepsilon f$ existe presque partout, pour voir que cette limite est bien Tf .

Montrons (6). Soit $r > 0$ tel que $\varphi(x)$ s'annule pour $|x| > r$. Dans $B(0, 2r)$, Δ_1 est borné, car K_1 est borné et (d'après $\varphi \in \mathcal{D}$) $\varphi * K$ est borné

au voisinage de l'origine; et pour $|x| > 2r$

$$\Delta_1(x) = \int_{|y| < r} \varphi(y)K(x-y)dy - \int_{|y| < r} K(x)\varphi(y)dy ;$$

(la première intégrale "ne rencontre pas la singularité de K "), d'où

$$|\Delta_1(x)| \leq \int_{|y| < r} \varphi(y)|K(x-y) - K(x)|dy, \quad (|x| \geq 2r).$$

Or on peut trouver C assez grand, indépendant des $y \in B(0,r)$ pour que

$$|K(x-y) - K(x)| \leq C/|x|^{n+1} \quad (|y| \leq r, |x| \geq 2r).$$

D'où (6) en regroupant les deux cas $|x| \geq$ ou $\leq 2r$.

D'après (6) et la conclusion b) du second théorème (3.6) du chapitre III, on sait que quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $(\Delta_\varepsilon * f)(x)$ converge presque partout, la limite étant $f(x) \int_{|x'|=1} \Delta_1(x')dx = f(x) \cdot 0 = 0$. Or on sait pour la même raison que $\varphi_\varepsilon * Tf$ converge presque partout vers Tf , donc $T_\delta f$ converge aussi presque partout d'après (4).

2.1

2.4 Quelques formules avec les transformées de RIESZ et le potentiel de RIESZ d'ordre 1.

2.4 (i). Pour f convenable définie dans \mathbb{R}^n ($n \geq 2$), le potentiel (d'ordre $\alpha = 1$) de RIESZ de f est $J_1 f$:

$$(1) \quad J_1 f = \frac{1}{\gamma(1)} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{1}{|x-y|^{n-1}} dy ;$$

la transformée de FOURIER de $J_1 f$ vaut au point x

$$(2) \quad (J_1 f)^\wedge(x) = f^\wedge(x) \cdot 2\pi/|x| ;$$

on peut encore écrire $\mathcal{J}_1 f = \mathcal{R}_1 * f$ où \mathcal{R}_1 est le noyau

$$(3) \quad \mathcal{R}_1(x) = \frac{1}{\gamma(1)} \cdot \frac{1}{|x|^{n-1}}.$$

Les n transformées de RIESZ $R_j f$ de f ($j = 1, \dots, n$) sont

$$(4) \quad R_j f(x) = c_n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x-y) dy,$$

et admettent pour transformées de FOURIER

$$(5) \quad (R_j f)^\wedge(x) = i \frac{x_j}{|x|} f^\wedge(x).$$

Le potentiel de RIESZ et les transformées de RIESZ de f sont reliés par

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{J}_1 f = R_j f, \quad (1 \leq j \leq n),$$

$$(7) \quad f = -\mathcal{J}_1 \left(\sum_{j=1}^n R_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \right).$$

Pour (1), (2), (3), voir la définition 1.3 du chapitre V (où on fera $\alpha = 1$);

pour (4), (5) voir le n° 2.1 du chapitre III; pour (7), voir chapitre V, 2.4.1

[où on observe que la formule est vraie pas seulement pour $f \in \mathcal{D}$]; pour (6), il nous suffira de supposer $f \in \mathcal{D}$, et de prendre les dérivées au sens des distributions; on établit alors (6) en passant aux transformées de FOURIER.

On peut montrer que si f est dans L^p et s'annule hors d'un compact, $\mathcal{J}_1 f$ est faiblement dérivable.

2.4 (ii). Rappelons (chapitre V, théorème 1.4) que \mathcal{J}_1 envoie continûment L^p dans L^q si $1' < p < n$ et $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ (on a donc $\frac{n}{n-1} < q < \infty$ et $p < q$). Mais comme les fonctions $x \mapsto |x-y|^{-n+1}$ n'appartiennent pas au dual de L^n , \mathcal{J}_1 ne

peut envoyer L^n dans L^∞ .

Rappelons que les opérateurs R_j envoient continûment L^p dans L^p ($1 < p < \infty$). Ils vérifient les hypothèses du théorème 3.2 du chapitre II, et celles du lemme 2.1 ci-dessus.

3.- Relations entre les trois premières notions de dérivabilité.

3.1 Exemple sur la dérivabilité au sens ordinaire et au sens faible pour $n > 1$.

Pour $n > 1$, il existe une fonction f positive, appartenant à $L^n(\mathbb{R}^n)$, dont le potentiel de RIESZ (d'ordre 1) $J_1 f$ est [essentiellement] non borné au voisinage de l'origine. C'est le cas avec

$$f(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |y| > 1 \\ \frac{1}{|y| [\log(\frac{1}{|y|})]^{n+\varepsilon}} & \text{pour } |y| \leq 1, (\varepsilon > 0). \end{cases}$$

On a $f \in L^n(\mathbb{R}^n)$ mais $J_1 f(x) \rightarrow +\infty$ dès que $|x| \rightarrow 0$.

Étudions $F = J_1 f$. On ne peut la modifier sur un ensemble négligeable pour la rendre dérivable au sens ordinaire à l'origine. Mais sa dérivée au sens des distributions est (formule (6) de 2.4 (i)) $\frac{\partial}{\partial x_j} F = R_j f$, qui appartient à L^n , donc à L^1_{loc} .

A partir de F , on construit une fonction $x \mapsto \sum c_j F(x-x_j)$ (où les coefficients c_j et les translations x_j seront choisis de manière appropriée), qui possédera une dérivée faible sur un voisinage de l'origine, mais ne possédant de

dérivée au sens ordinaire en aucun point assez voisin de l'origine ; plus précisément, toute fonction égale presque partout à cette série présentera ce phénomène.

Pour ce phénomène, $p = n$ est l'exposant critique : On sait que $\int_1 f$ est continu si $f \in L^p$ avec $p > n$ (chapitre V, 2.3 (iii)).

3.2 Théorème. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($n > 1$), à support compact, dont les dérivées au sens des distributions $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ appartiennent aussi à $L^p(\mathbb{R}^n)$.

(a) Si $p > n$, alors f (modifiée au besoin sur un ensemble négligeable) a des dérivées premières au sens ordinaire en presque tout point.

(b) Si $1 < p < n$, posons

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n};$$

alors en presque tout point, f possède des dérivées premières au sens de L^q .

3.3 Remarques. Voir CALDERON-ZYGMUND : "Local properties of solutions of partial differential equations", *Studia Mathematica*, tome 20 (1961), pages 171-225.

Dans le cas frontière $p = n$, puisque $L_{loc}^n \subset L_{loc}^s$ quand $s < n$, la conclusion de (b) est ici valable quand on remplace q par n'importe quel

$$s \in] \frac{n}{n-1}, +\infty [.$$

Pour $p = 1$, on peut adapter ces résultats. Voir CALDERON-ZYGMUND : "On the differentiability of functions which are of bounded variation in TONELLI's sense", *Revista Mathematica Argentina*, tome 20 (1960), pages 102-121.

3.4 Preuve de 3.2,3.4.1 Première étape : cas général $1 < p < \infty$.

L'hypothèse permet d'écrire (voir 2.4 (i) (7))

$$(1) \quad f = \int_1 g, \quad \text{où}$$

$$(2) \quad g = \sum_{j=1}^n R_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \in L^p.$$

Posons pour simplifier

$$(3) \quad \underline{F} = \gamma(1)f ;$$

on sait que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$(4) \quad F(x) = \int g(y) |x-y|^{-n+1} dy$$

avec l'intégrale convergeant absolument. En dérivant le second membre de (4) sous

le signe \int , on introduit des noyaux singuliers proportionnels aux noyaux de

RIESZ ; comme ils obéissent au lemme 2.1, ces n transformés de g

$$(5) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| > \varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} g(x-y) dy \quad (j = 1, \dots, n)$$

existent [simultanément] pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Nous admettrons que l'hypothèse $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ suffit à entraîner que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(6) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n} \int_{|y-x| < r} |g(y) - g(x)|^p dy = 0 ;$$

[preuve (dans le cas dimension 1) dans ZYGMUND : "Trigonometric series" éd. Cambridge, tome I, chapitre II, théorème (11.3), page 65.

Comme $p > 1$, en un point x vérifiant (6) on a aussi

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n} \int_{|y-x| < r} |g(y) - g(x)|^p dy = 0 ;$$

nous avons déjà utilisé cette dernière propriété avec des fonctions de L^1 au lieu de L^p au chapitre VII (1.6).]

Soit donc x un point de \mathbb{R}^n vérifiant simultanément (4), l'existence de (5), et (6). Pour simplifier, disons que ceci a lieu pour $x = 0$ et que $g(0) = 0$.

Ceci se traduit par

$$g(0) = 0, F(0) = \int \frac{g(y)}{|y|^{n-1}} dy \quad (\text{intégrale absolument convergente}),$$

$$\frac{1}{r^n} \int_{|y| < r} |g(y)|^p dy \rightarrow 0 \quad \text{quand } r \rightarrow 0,$$

$$(7) \quad \alpha_j = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (n-1) \int_{|y_j| > \varepsilon} \frac{g(y)y_j}{|y|^{n+1}} dy,$$

($j = 1, \dots, n$), ce qui définit les nombres α_j .

Nous montrerons que $\sum_{j=1}^n \alpha_j h_j = A(h)$, où $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, est

la forme linéaire définissant la dérivée à l'origine de F (au sens ordinaire ou au sens de L^q selon l'énoncé). Il s'agit d'évaluer quand $h \rightarrow 0$ la petitesse (en un sens à préciser) de

$$F(h) - F(0) - \sum_{j=1}^n \alpha_j h_j.$$

Pour un h vérifiant (4), on a

$$\begin{aligned} \underline{F(h) - F(0)} &= \int g(y) (|h-y|^{-n+1} - |y|^{-n+1}) dy = \\ &= \int_{|y| < 2|h|} g(y) |h-y|^{-n+1} dy - \int_{|y| < 2|h|} g(y) |y|^{-n+1} dy + \\ &+ \int_{|y| > 2|h|} g(y) (|h-y|^{-n+1} - |y|^{-n+1}) dy = \underline{A_h - B_h + C_h} \quad \text{disons.} \end{aligned}$$

3.4.2 Seconde étape : Cas général $1 < p < \infty$; étude de l'intégrale C_h .

Il s'agit de $C_h = \int_{|y| > 2|h|} g(y)(|h-y|^{-n+1} - |y|^{-n+1}) dy$; ce sera le terme dominant de la différence $F(y) - F(0)$: Nous verrons que quand $h = (h_1, \dots, h_n)$ tend vers l'origine, C_h admet l'évaluation

$$C_h = (n-1) \sum_{j=1}^n \alpha_j h_j + o(|h|) .$$

Le développement de TAYLOR (à partir du point y) de $|h-y|^{-n+1}$ selon les puissances de h_1, \dots, h_n montre que, en posant

$$(8) \quad \begin{cases} \nabla |y|^{-n+1} = \text{valeur au point } y \text{ du gradient de la fonction} \\ x \mapsto |x|^{-n+1} = \text{le vecteur } (-n+1)y/|y|^{n+1} , \end{cases}$$

$$(9) \quad |h-y|^{-n+1} - |y|^{-n+1} = \left(h \cdot \nabla |y|^{-n+1} \right) + o\left(\frac{|h|^2}{|y|^{n+1}} \right) .$$

[Il est clair que pour tout $y \neq 0$ on a (si le segment $[h-y, y]$ de \mathbb{R}^n ne contient pas l'origine) une erreur en $o(|h|^2)$, mais on a l'erreur en $o\left(\frac{|h|^2}{|y|^{n+1}}\right)$ grâce à $|y| \geq 2|h|$ et à l'homogénéité de chaque terme du développement de TAYLOR.]

Enfin reportons (9) dans l'intégrale C_h ; en tenant compte de (8) puis en développant le produit scalaire $(h|y) = \sum_{j=1}^n h_j y_j$, il vient

$$C_h = (n-1) \sum_{j=1}^n (h_j \int_{|y| > 2|h|} g(y) \frac{y_j}{|y|^{n+1}} dy) + \int_{|y| > 2|h|} g(y) o\left(\frac{|h|^2}{|y|^{n+1}}\right) dy .$$

Par hypothèse (3.4.1 (7)), quand $|h| \rightarrow 0$, la j -ème intégrale de la première

ligne tend vers α_j , donc la première ligne du second membre tend vers

$$(-n+1) \sum_{j=1}^n \alpha_j h_j .$$

Il suffit donc de démontrer que $\lim_{h \rightarrow 0} |h| \int_{|y| > 2|h|} |g(y)|/|y|^{n+1} dy = 0$;
ou même que, étant donné $\eta > 0$, on peut trouver H_0 tel que l'expression

$$(10) \quad |h| \int_{|h| < |y| < H_0} |g(y)|/|y|^{n+1} dy$$

devienne $< \eta$ quel que soit $|h| < H_0$.

Notons maintenant pour alléger, si $0 < r < R < \infty$, $\int_{r < |y| < R} \dots dy = \int_r^R \dots dy$.

L'inégalité de HÖLDER (avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) donne le début de

$$\begin{aligned} \int_r^R |g(y)|/|y|^{n+1} dy &\leq \left(\int_r^R |y|^{-(n+1)p'} dy \right)^{1/p'} \left(\int_0^R |g|^p dy \right)^{1/p} = \\ &= C^{te} \left(r^{-1-\frac{n}{p}} - R^{-1-\frac{n}{p}} \right) \left(\int_0^R |g|^p dy \right)^{1/p} = \\ &= \left(r^{-1-\frac{n}{p}} - R^{-1-\frac{n}{p}} \right) \varepsilon_R R^{n/p} \end{aligned}$$

où la constante de la seconde ligne ne dépend que de n et p ; la dernière

égalité définit donc le nombre ε_R . Ce facteur ε_R tendrait vers zéro si on

faisait tendre R vers zéro.

En effet, par hypothèse (voir 3.4.1) $\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R^n} \int_0^R |g|^p dy = 0$. Dans
(10), découpons la couronne $|h| < |y| < H_0$ par des sphères dont les rayons vé-
rifient

$$H_0 \gg H_1 > H_2 > \dots > H_m = |h| :$$

$$\int_{|h|}^{H_0} \frac{|g(y)|}{|y|^{n+1}} dy = \sum_{s=0}^{m-1} \int_{H_{s+1}}^{H_s} \dots dy \leq \\ \leq \sum_{s=0}^{m-1} \varepsilon_s H_s^{n/p} \left(H_{s+1}^{-1-\frac{n}{p}} - H_s^{-1-\frac{n}{p}} \right)$$

(en posant $\varepsilon_{H_s} = \varepsilon_s$) ; d'où la majoration de (10) (on a $H_m = |h|$) :

$$|h| \int_{|h|}^{H_0} \dots dy \leq \sum_{s=0}^{m-1} \varepsilon_s \frac{H_m}{H_{s+1}} \left[\left(\frac{H_s}{H_{s+1}} \right)^{n/p} - \frac{H_{s+1}}{H_s} \right].$$

Or nous pouvons construire les rayons H_s de la manière suivante : Choisissons un nombre $\theta \in]0,1[$; on impose $\frac{H_{s+1}}{H_s} = \theta$ pour $s = 1, \dots, m-1$ et $\theta \leq \frac{H_1}{H_0} \leq 1$. Les H_s (ainsi que m d'ailleurs) varient avec $|h|$ une fois θ fixé. Sauf peut-être pour le terme d'indice $j = 0$ dans la somme $\sum_{s=0}^{m-1} \dots$ au second membre ci-dessus, chaque $[\dots]$ vaut $\theta^{\frac{n}{p}} - \theta$; donc avec $C_\theta = \sup_{t \in [\theta, 1]} (t^{\frac{n}{p}} - t)$, cette somme est enfin majorée par

$$\text{Max} \{ \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_m \} C_\theta \sum_{j=1}^m \theta^j \leq C_\theta \left(\sup_{h < R < H_0} \varepsilon_R \right) \frac{\theta}{1-\theta}.$$

Comme $\lim_{R \rightarrow 0} \varepsilon_R = 0$, on peut bien trouver H_0 tel que ceci soit $< \eta$.

3.4.3 Troisième étape : petitesse des intégrales A_h et B_h dans le cas $n < p < \infty$.

Appliquons l'inégalité de HÖLDER à ces deux intégrales (voir la fin de 3.4.1)

$$A_h = \int_{|y| < 2|h|} g(y) |h-y|^{-n+1} dy, \quad B_h = \int_{|y| < 2|h|} g(y) |y|^{-n+1} dy.$$

Pour l'exposant conjugué de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$), l'hypothèse $p > n$ équivaut à

$$(n-1)p' < n.$$

Par conséquent, les deux fonctions $y \mapsto |y|^{-n+1}$ et $y \mapsto |h-y|^{-n+1}$ appartiennent à $L_{loc}^{p'}$. Donc

$$\begin{aligned} |A_h| &\leq \int_{|y| < 2|h|} |g(y)| \cdot |h-y|^{-n+1} dy \leq \\ &\leq \left(\int_{|y| < 2|h|} |g|^{p'} dy \right)^{1/p} \left(\int_{|y| < 3|h|} |y|^{(-n+1)p'} dy \right)^{1/p'} \end{aligned}$$

(d'après $|h-y| \leq |h| + |y| \leq 3|h|$ au troisième membre) ; pour la même raison, ce troisième membre majore aussi $|B_h|$.

Ainsi

$$\begin{aligned} |A_h - B_h| &\leq |A_h| + |B_h| \leq \\ &\leq 2 \left(\int_{|y| < 2|h|} |g|^{p'} dy \right)^{1/p} \left(\int_{|y| < 3|h|} |y|^{(-n+1)p'} dy \right)^{1/p'}. \end{aligned}$$

Or d'une part $\frac{1}{r^n} \int_{|y| < r} |g|^{p'} dy$ tend vers zéro avec r (hypothèse de 3.4.1), donc le facteur où apparaît g est $\mathcal{O}(|h|^{n/p})$ quand $h \rightarrow 0$, et d'autre part le dernier facteur est $\mathcal{O}(|h|^{(n+(-n+1)p')/p'})$. Donc $|A_h - B_h| = \mathcal{O}(|h|)$.

3.4.4 Quatrième étape : cas $1 < p < n$.

On veut montrer que la dérivabilité de $F = \gamma(1)f$ au sens de L^q au point x^0 (définition 1.1 (iii)) :

$$(11) \quad \int_{|h| < r} |F(x^0+h) - F(x^0) - \sum_{j=1}^n \alpha_j h_j|^{q'} dh = \mathcal{O}(r^{n+q}), \quad (r \rightarrow 0)$$

a lieu ici pour $x^0 = 0$ et $\frac{1}{q'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.

L'étude en 3.4.2 du terme C_h du second membre de $F(h) - F(0) = A_h - B_h + C_h$ reste utile : elle donne les valeurs α_j des dérivées de F , et

l'erreur en $\mathcal{O}(|h|)$ crée peu d'ennuis si on l'introduit entre les barres [...] de (11).

Posons $G(h) = A_h - B_h$. Il reste à voir que

$$\int_{|h| < r} |G(h)|^q dh = \mathcal{O}(r^{n+q}), \quad (r \rightarrow 0),$$

ce que nous admettrons. (Diversions : c'est facile à démontrer pour B_h au lieu de $G(h)$ en utilisant le théorème 1.4 (ii) du chapitre V avec $\alpha = 1$.)

■ 3.2

4.- La notion de dérivabilité au sens harmonique.

Nous exploiterons les richesses du chapitre VII.

4.1 Définition. Soit $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$; soit $p \in \mathbb{R}^n$. On rend f nulle sur le complémentaire d'un voisinage ouvert borné de p . Soit $u = I.P.f$ l'intégrale de POISSON de f dans \mathbb{R}_{n+1}^+ (chapitre III, § 3).

On dit que " f possède au point p des dérivées premières au sens harmonique" si

1° $f(p) =$ limite non-tangentielle de u au point p (chapitre VII, définition 1.2) ;

2° les limites non-tangentielles au point p des n dérivées premières $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ ($k = 1, \dots, n$) de u par rapport aux coordonnées de \mathbb{R}^n existent : ce seront les "dérivées de f au sens harmonique au point p ".

4.2 Remarques. Cette définition est consistante : indépendante du voisinage de p choisi pour tronquer f ; si $g \in \mathcal{L}_{loc}^1$ coïncide avec f sur un voisinage de

p , les conditions 1° et 2° sont simultanément vraies ou fausses pour f et g , et si oui les limites sont égales (la convolution par le noyau de POISSON et ses $\frac{\partial}{\partial x_k}$ est peu influencée par ce qui est loin de p).

On montre que si f est dérivable au sens de L^q (définition 1.1 (iii)) au point p , alors elle l'est aussi au sens harmonique, les dérivées valant les limites du 2°.

On n'exige rien d'analogue au 2° pour la dérivée $\frac{\partial u}{\partial y}$ de u par rapport à la $n+1$ ème variable. Néanmoins, les $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ sont conjugués à la fonction $\frac{\partial u}{\partial y}$ (système 3.1 (1) du chapitre VII) : d'après le chapitre VII (théorèmes 3.3 puis 2.3), l'existence presque partout sur un ensemble mesurable de \mathbb{R}^n des limites non-tangentielles des $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ équivaut à l'existence presque partout sur cet ensemble des limites non-tangentielles de $\frac{\partial u}{\partial y}$.

4.3 Théorème de décomposition. Soient $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, nulle hors d'un compact de \mathbb{R}^n , E un ensemble mesurable relativement compact de \mathbb{R}^n , de mesure $|E| > 0$; on suppose f dérivable au sens harmonique en chaque point de E . Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact P inclus dans E tel que $|E \setminus P| < \varepsilon$, [un nombre $M > 0$] et une décomposition de f en somme d'une bonne fonction b bornée et lipschitzienne et une mauvaise fonction m nulle sur P :

$$f = b + m,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |b(x)| \leq M, \quad |b(x) - b(x')| \leq M|x-x'|, \quad (x, x' \in \mathbb{R}^n), \quad m(p) = 0 \quad (p \in P). \end{array} \right.$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$, $h > 0$, P compact de E , et $M > 0$ tels que $|E \cap P| < \varepsilon$ et que sur $\mathcal{R} = \bigcup_{e \in P} \Gamma_{\alpha, h}(e)$ (notations du chapitre VII, 1.1 et 1.9) on ait $|u| \leq M$, $|\frac{\partial u}{\partial x_k}| \leq M$, $|\frac{\partial u}{\partial y}| \leq M$; en effet, les $n+1$ premières fonctions ont des limites non-tangentielles sur E d'après les hypothèses et la définition 4.1, et $\frac{\partial u}{\partial y}$ en possède presque partout sur E d'après la dernière remarque de 4.2 : le raisonnement du chapitre VII, 2.4.1 (ii) s'étend d'une seule fonction u à u et ses $n+1$ dérivées maintenant (on pourrait rendre ε petit au prix d'un accroissement de M).

La restriction de u à \mathcal{R} appartient donc à $L_1^\infty(\mathcal{R})$ (chapitre V, définition 2.1). Comme la frontière de \mathcal{R} a des bonnes propriétés (chapitre VII, 1.9), et bien qu'elle ne soit pas le graphe d'une fonction lipschitzienne définie sur tout \mathbb{R}^n , on peut adapter le théorème 4.3 du chapitre VI : On peut prolonger u à \mathbb{R}^{n+1} par $U \in L_1^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$.

On prendra $b =$ restriction de U à \mathbb{R}^n : elle a les bonnes propriétés de l'énoncé ; en particulier, le fait que b et f sont égales sur P résulte de ce que les limites non-tangentielles de u [sur E , et en particulier] sur P existent et sont égales aux valeurs de f d'après le 1° de la définition 4.1.

4.4 Remarques. On a des résultats analogues à 4.3 pour les dérivées d'ordre k : L_k^∞ interviendra au lieu de L_1^∞ . A propos, la plupart des résultats de ce chapitre

s'étend aux dérivées d'ordre supérieur, grâce à des démonstrations moins élémentaires.

Le principe de la décomposition de 4.3 (pour $n = 1$ et les dérivées au sens ordinaire) est dû à MARCINKIEWICZ.

La démonstration de 4.3 montre qu'on peut remplacer la condition de l'énoncé sur les limites non-tangentielles de u et des $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ par la condition analogue sur la majoration non-tangentielle de $|u|$ et des $|\frac{\partial u}{\partial x_k}|$, car ces propriétés sont "presque partout" équivalentes (théorème de FATOU local, chapitre VII, 1.8 ou 2.2).

Mais la condition que $|u|$ et les $|\frac{\partial u}{\partial x_k}|$ sont non-tangentiuellement bornés sur E présente beaucoup d'analogie avec la condition $f(x+h) - f(x) = \mathcal{O}(|h|)$ pour $x \in E$; voir théorème 5.2 ci-dessous.

5.- Quelques résultats locaux de dérivabilité.

Les démonstrations utiliseront le résultat suivant.

5.1 Proposition. Soit f une fonction lipschitzienne d'ordre 1 dans \mathbb{R}^n . Ses dérivées au sens ordinaire f'_k existent presque partout; ce sont des fonctions essentiellement bornées; elles peuvent être identifiées aux dérivées de f au sens des distributions.

Pour $n = 1$, ceci est une conséquence du fait que f est absolument continue.

5.2 Théorème. Soient f une fonction [continue] nulle hors d'un compact de \mathbb{R}^n , E un ensemble mesurable borné de \mathbb{R}^n . On suppose que pour tout $e \in E$ on a

$$|f(e+h) - f(e)| \leq A|h|, \quad (h \in \mathbb{R}^n, |h| < \eta)$$

(où $A > 0$, $\eta > 0$ dépendent de e).

Alors f possède une dérivée au sens ordinaire en presque tout point de E .

(On pourrait supposer f mesurable au lieu de continu, mais alors nous ne saurions affirmer la mesurabilité des ensembles $E_{s,t}$ ci-dessous. Voir cette extension dans SAKS : "Théorie de l'intégrale".)

Preuve. Soit $E_{s,t}$ (s et t entiers > 1) l'ensemble des $e \in E$ tels que

$$|f(e+h) - f(e)| \leq s|h| \quad \text{pour } |h| \leq \frac{1}{t}.$$

Comme f est continu, c'est un ensemble mesurable. On a $E = \bigcup_{s,t} E_{s,t}$ et $E_{s,t} \subset E_{s',t'}$ si $s \leq s'$ et $t \leq t'$.

Soit F un compact contenu dans un $E_{s,t}$; (avec s et t assez grands, on pourra rendre $|E \cap F|$ petit d'après les relations ci-dessus); on a avec $M_1 (=s)$ et $\eta (= \frac{1}{t})$ indépendants de p :

$$(1) \quad |f(p+h) - f(p)| \leq M_1|h| \quad \text{si } h \in \mathbb{R}^n, |h| < \eta, p \in F.$$

On pourrait d'ailleurs lever cette restriction sur $|h|$ car f est continue à support compact.

Nous admettrons que (1) implique la dérivabilité de f au sens harmonique en chaque point de F. Décomposons donc f selon le théorème 4.3 (F remplaçant E) :
récrivons

$$(2) \quad f = b + m ,$$

$$(3) \quad |b(x)| \leq M_2 , \quad (x \in \mathbb{R}^n) ,$$

$$(4) \quad |b(x+h) - b(x)| \leq M_2 |h| , \quad (x, h \in \mathbb{R}^n) ,$$

avec M_2 assez grand ; donc d'après (2), (4) et (1)

$$(5) \quad |m(x+h) - m(x)| \leq (M_1 + M_2) |h| \quad (x \in F, |h| < \eta)$$

Mais sur le compact P (inclus dans F) du théorème 4.3, m s'annule ; (5) donne

$$(6) \quad |m(x+h)| \leq (M_1 + M_2) |h| , \quad (x \in P, |h| < \eta) .$$

Appliquons à la fonction b la proposition 5.1 : elle possède des dérivées au sens ordinaire en presque tout point de \mathbb{R}^n . D'après (2), comme $|E \cap P|$ peut être pris petit, il suffit d'établir la dérivabilité au sens ordinaire de m en presque tout point de P, qui résulte de la proposition 5.3 ci-dessous.

■ 5.2

5.3 Proposition. Soient m une fonction mesurable sur \mathbb{R}^n , P un ensemble mesurable de \mathbb{R}^n sur lequel m s'annule. On suppose qu'il existe deux nombres > 0 ,

M, η tels que

$$(1) \quad |m(x+h)| \leq M |h|$$

pour $x \in P$, $h \in \mathbb{R}^n$, $|h| < \eta$.

Alors en chaque point de densité de P (chapitre VII, 1.6) m est dé-

différentiable au sens ordinaire et ses n dérivées premières sont nulles.

Preuve. Fixons p , point de densité de P . Le second membre de (1) est un $\mathcal{O}(|h|)$; il s'agit quand $x = p$ de le remplacer par un $\mathcal{O}(|h|)$.

Avec $B(p,r)$ = boule de centre p et de rayon r dans \mathbb{R}^n , la propriété de p se traduit par

$$(2) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|P \cap B(p,r)|}{|B(p,r)|} = 1.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Je prétends que, dès que le nombre R est assez petit, quel que soit $h \in \mathbb{R}^n$ de longueur $|h| \leq R$, la boule de centre $p + h$ et de rayon $\varepsilon|h|$ rencontre l'ensemble P .

Si non, raisonnant par l'absurde, il existerait une suite de nombres $r_k > 0$ tendant vers zéro quand $k \rightarrow \infty$ et une suite de vecteurs $h_k \in \mathbb{R}^n$ de longueurs $|h_k| = r_k$ tels que

$$P \cap B(p, r_k) \subset B(p, r_k) \cap \left[B(p + h_k, \varepsilon r_k) \right].$$

Mais la géométrie élémentaire montre que la mesure de ce dernier ensemble vaut

$|B(p, r_k) \cap \left[B(p + h_k, \varepsilon r_k) \right]| = (1 - \theta_\varepsilon) |B(p, r_k)|$
 où $\theta_\varepsilon > 0$ ne dépend que de n et ε . D'où $\frac{|P \cap B(p, r_k)|}{|B(p, r_k)|} < 1 - \theta_\varepsilon$, contrairement à la propriété (2) de p .

Cela prouvé, soit h assez voisin de l'origine : $|h| \leq \text{Min}(R, \eta)$ (où R est dans l'énoncé qui suit (2) et η est dans l'énoncé de la proposition). Il

existe alors $q \in P \cap B(p+h, \varepsilon|h|)$. D'après successivement $q \in P$, les hypothèses de l'énoncé, puis $q \in B(p+h, \varepsilon|h|)$, on a $|(m(p+h))| = |m(p+h) - m(q)| \leq M |p+h-q| \leq M \varepsilon|h|$, ce qui montre que $m(p+h)$ est $o(|h|)$.

■ 5.3

5.4 Quelques variantes d'une intégrale de MARCINKIEWICZ.

5.4.1 Théorème. Soient dans \mathbb{R}^n , P un compact, B une boule ouverte contenant

P . On note

$$Q = B \cap \int P, \quad \delta(y) = \text{distance de } y \in \mathbb{R}^n \text{ à } P.$$

On pose, λ désignant un paramètre > 0

$$J_\lambda(x) = \int_B \frac{\delta^\lambda(y)}{|x-y|^{n+\lambda}} dy, \quad (x \in B).$$

On a évidemment $J_\lambda(x) = +\infty$ pour tout $x \in Q$. Mais $J_\lambda(x)$ est fini pour presque tout $x \in P$.

Preuve. On peut remplacer \int_B par \int_Q car δ s'annule sur P . Il suffit de voir que $\int_P J_\lambda(x) dx$ est fini ; or

$$\begin{aligned} \int_P J_\lambda(x) dx &= \int_P \left(\int_Q \frac{\delta^\lambda(y)}{|x-y|^{n+\lambda}} dy \right) dx = \\ &= \int_Q \delta^\lambda(y) \left(\int_P |x-y|^{-n-\lambda} dx \right) dy \leq \\ &\leq \int_Q \delta^\lambda(y) \frac{c}{\delta^\lambda(y)} dy = c |Q| < \infty \end{aligned}$$

où c ne dépend que de n et λ : on est passé de la seconde à la troisième ligne en observant que pour $x \in P, y \in Q$, on a $\delta(y) \leq |x-y|$, d'où

$$\int_P |x-y|^{-n-\lambda} dx \leq \int_{v \in \mathbb{R}^n, |v| > \delta(y)} |v|^{-n-\lambda} dv = \frac{c}{\delta^\lambda(y)}.$$

5.4.2 Variantes (voir le commentaire pages 4-5 des "Collected papers" de MARCINKIEWICZ).

La variante correspondant à $\lambda = 0$ est

$$J_0(x) = \int_B \frac{1}{|x-y|^n \log \frac{1}{\delta(y)}} dy.$$

En adoptant pour $\lambda = 1$ l'expression $\int_B \frac{\delta(y)}{(|x-y| + \delta(y))^{n+1}} dy$, il y aura convergence presque partout pour B et non seulement pour P ; on peut remplacer ce dénominateur par $(|x-y|^2 + \delta^2(y))^{\frac{n+1}{2}}$. Pour $x \in P$, cette expression majore $J_1(x)$.

On peut remplacer les données P compact, B boule ouverte contenant P par: P fermé, B ouvert contenant P avec $Q = B \cap P$ de mesure finie.

5.4.3 Digression. Au chapitre II, dans la partie 2.5 de la démonstration du premier théorème, on avait étudié la convolution $Tm = K * m$ d'un noyau K et d'une mauvaise fonction m nulle hors d'un ouvert $Q = \bigcup Q_k$ réunion d'une suite de cubes Q_k dont les intérieurs étaient deux à deux disjoints.

En rappelant ou en surajoutant progressivement des propriétés ou des hypothèses sur K , m et les Q_k , nous verrons que pour $x \in P = \bigcup_{\mathbb{R}^n} Q$, on peut majorer $|Tm(x)|$ par une série rappelant les intégrales $J_1(x)$ de 5.4.1.

Soit $x \in P$. Comme les Q_k sont deux-à-deux "presque" disjoints et que

$$\int_{Q_k} m \, dx = 0 \quad \text{pour chaque indice } k,$$

$$Tm(x) = \sum_k \int_{Q_k} K(x-y) m(y) dy = \sum_k \int_{Q_k} (K(x-y) - K(x-y^k)) m(y) dy$$

où y^k désigne le centre du cube Q_k .

On suppose maintenant que le gradient de K vérifie $|\text{grad } K|(y) \leq |y|^{-n-1}$.

Or ($x \in P = \bigcup Q$) x est assez loin de chaque Q_k ; on aura donc avec des constantes convenables indépendantes de k

$$|K(x-y) - K(x-y^k)| \leq C^{te} \frac{|y-y^k|}{|x-y|^{n+1}} \leq C^{te} \frac{\text{diamètre de } Q_k}{|x-y|^{n+1}}, \quad (x \notin Q, y \in Q_k).$$

Cette majoration jointe à la propriété $\int_{Q_k} |m(y)| dy \leq C^{te} |Q_k|$ (voir chapitre II, 2.5 (i)) donne

$$\int_{Q_k} |K(x-y) - K(x-y^k)| \cdot |m(y)| dy \leq C^{te} \frac{|Q_k| \cdot \text{diamètre de } Q_k}{|x-y|^{n+1}} \quad (x \in P, y \in Q_k).$$

Mais par construction la longueur des arêtes de Q_k était à peu près proportionnelle à $\delta(y) = d(y, P)$ si $y \in Q_k$, donc $\frac{|Q_k| \cdot \text{diamètre de } Q_k}{|x-y|^{n+1}}$ est de l'ordre de grandeur de $\int_{Q_k} \frac{\delta(y)}{|x-y|^{n+1}} dy$. D'où en majorant la valeur absolue de la série

donnant $Tm(x)$,

$$|Tm(x)| \leq C^{te} \sum_k \int_{Q_k} \frac{\delta(y)}{|x-y|^{n+1}} dy = C^{te} \int_Q \frac{\delta(y)}{|x-y|^{n+1}} dy \quad (x \in P).$$

Ici P était fermé, mais non compact, Q n'était pas nécessairement borné, mais de mesure finie.

5.5 Théorème. Soit $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Considérons les deux ensembles E_1 , E_2 suivants :

E_1 = ensembles des points de \mathbb{R}^n où les dérivées premières de f existent au sens de L^2 (définition 1.1 (iii)),

E_2 = ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f(x+h) + f(x-h) - 2f(x))^2 \frac{1}{|h|^{n+2}} dh < \infty .$$

Alors on a $E_1 = E_2$ "presque partout".

Observations. Voir STEIN et ZYGMUND : "On the differentiability of functions", *Studia Mathematica*, tome 23 (1964), pages 247-283.

Déjà pour $n = 1$, on peut construire une fonction "lisse" ("smooth") : f est continue et $f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)$ tend vers zéro avec h pour tout x - mais qui n'est dérivable au sens ordinaire que sur un ensemble de mesure nulle.

Comme $|f|^2$ est intégrable, quels que soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$, la partie $\int_{|h| \geq \varepsilon} \dots dh$ de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n} \dots dh$ servant à définir E_2 converge.

5.6 Preuve du théorème 5.5

5.6.1 D'après cette dernière remarque, en multipliant f par 1 ou 0, on se ramène au cas où f est nul hors d'un ouvert borné.

Rappelons qu'un point x appartient à E_1 quand il existe une forme linéaire Λ sur \mathbb{R}^n telle que

$$(1) \int_{|h| < \rho} |f(x+h) - f(x) - \Lambda(h)|^2 dh = o(\rho^{n+2}), (\rho \rightarrow 0) .$$

5.6.2 Preuve de $E_1 \subset E_2$ "presque partout".

Soit E un sous-ensemble mesurable borné de E_1 . Après avoir retranché au besoin un ensemble de petite mesure, on peut supposer d'après (1) qu'il existe $A > 0$ tel que

$$(2) \int_{|h| < \rho} |f(e+h) - f(e)|^2 dh \leq A \rho^{n+2} \quad \text{si } e \in E$$

(et si $\rho < \rho_0$ indépendant de e ; mais cette restriction peut être levée avec A assez grand car f est nul hors d'un compact).

En chaque point de E , f admet des dérivées au sens de L^2 , donc au sens harmonique. Recourons au théorème de décomposition 4.3 : on peut écrire $f = b+m$ (avec b fonction bornée lipschitzienne, m fonction nulle sur P sous-ensemble compact de E ; $|E \cap P|$ peut être pris petit). En multipliant b et m par une fonction ($\in \mathcal{D}$ disons) convenable, on se ramène au cas où b et m s'annulent comme f hors d'un compact.

On sait par la proposition 5.1 que b a presque partout des dérivées premières au sens ordinaire qui sont des fonctions de L^∞ ; b a donc presque partout un

gradient ; on note $|\text{grad } b|^2 = \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial b}{\partial x_s} \right)^2$.

Un théorème de PLANCHEREL donne avec une constante ne dépendant que de n (voir la démonstration précédant 3.3 au chapitre V avec $\alpha = 1$)

$$(3) \left[\begin{aligned} & \iint_{(x,h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |b(x+h) + b(x-h) - 2b(x)|^2 \frac{1}{|h|^{n+2}} dx dh = \\ & = C^{te} \int_{\mathbb{R}^n} |\text{grad } b|^2 dx \end{aligned} \right.$$

qui est fini, car ce gradient est borné et est nul hors d'un compact. Donc l'intégrale par rapport à h de la fonction du premier membre :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |b(x+h) + b(x-h) - 2b(x)|^2 \frac{1}{|h|^{n+2}} dh$$

est finie pour presque tout $x \in E$ (ou même $\in \mathbb{R}^n$).

Il reste seulement à voir (d'après $f = b + m$) que quand on substitue m à b dans cette dernière intégrale, elle converge encore pour presque tout $x \in E$; puisque $|E \cap \{P\}|$ peut être pris petit, il suffit même de montrer ceci presque partout sur P .

Mais pour $x = p \in P$, l'intégrale en question admet (d'après $m(p) = 0$ et l'inégalité du losange $|X+Y|^2 \leq 2|X|^2 + 2|Y|^2$) la majoration

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} |m(p+h) + m(p-h) - 2m(p)|^2 \frac{1}{|h|^{n+2}} dh \leq \\ & \leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} |m(p+h)|^2 \frac{1}{|h|^{n+2}} dh, \quad (p \in P). \end{aligned}$$

Il suffit donc de voir que $\int_{\mathbb{R}^n} |m(p+h)|^2 \frac{1}{|h|^{n+2}} dh$ est fini pour presque tout $p \in P$. Nous le ferons en majorant ces intégrales par des intégrales du type de MARCINKIEWICZ $J_2(p) \cdot C^{te}$. (5.4.1) dont on sait déjà qu'elles convergent presque partout sur P .

D'après (2) et $m = f - b$, on peut trouver A' assez grand tel que pour tout $x \in E$ on ait

$$\int_{|h| < \rho} |m(x+h) - m(x)|^2 dh \leq A' \rho^{n+2} \quad (x \in E)$$

(si ρ est assez petit, mais cette restriction peut être levée car m est nul hors d'un compact). Mais comme m s'annule sur $P \subset E$,

$$(4) \int_{|h| < \rho} |m(p+h)|^2 dy \leq A' \rho^{n+2} \quad (p \in P).$$

Puisque f , m , b s'annulent hors d'un compact, on peut ajouter à P un fermé où ces trois fonctions sont nulles, de manière que l'ouvert $Q = \int_{\mathbb{R}^n} (PUF)$ soit relativement compact. Posons

$$\delta(x) = \underline{\text{distance de } x \in \mathbb{R}^n \text{ à } PUF} = \int Q.$$

Comme δ et m s'annulent sur $\int Q$, on a (notation parallèle à 5.4.1)

$$(5) J_2(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta^2(y)}{|x-y|^{n+2}} dy = \int_Q \frac{\delta^2(y)}{|x-y|^{n+2}} dy, \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

$$(6) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|m(p+h)|^2}{|h|^{n+2}} dh = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|m(y)|^2}{|p-y|^{n+2}} dy = \int_Q \frac{|m(y)|^2}{|p-y|^{n+2}} dy, \quad (p \in P).$$

Utilisons un découpage de l'ouvert Q en cubes de WHITNEY (chapitre VI, théorème 1.1) $Q = \cup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$. D'après la dernière remarque de 5.4.2, $J_2(x)$ est fini pour presque tout $x \in \int Q$, en particulier presque partout sur P : Il suffit, pour voir que le premier membre de (6) est fini presque partout sur P , de trouver une constante θ_1 telle que pour tout indice $k \in \mathbb{N}$

$$(7) \int_{Q_k} \frac{|m(y)|^2}{|p-y|^{n+2}} dy \leq \theta_1 \int_{Q_k} \frac{\delta^2(y)}{|p-y|^{n+2}} dy, \quad (p \in P)$$

$$\text{car } \int_Q \dots dy = \sum_k \int_{Q_k} \dots dy.$$

Notons

$$(8) D_k = \text{diamètre de } Q_k.$$

Rappelons (chapitre VI, § 1) que quand y parcourt Q_k , les quantités $d(y, \{Q\})$ et D_k sont "à peu près proportionnelles" (c'est-à-dire que leur rapport reste compris entre deux nombres strictement positifs qui dépendent de n , mais ni de k , ni de $y \in Q_k$). Donc quand le point p parcourt le compact $P \subset \{Q\}$, il existe deux constantes (ne dépendant que de n et P) telles que

$$0 < c' < \frac{D_k}{|p-y|} < c'' \quad (p \in P, y \in Q_k).$$

Cette remarque ramène l'étude de (6) à la recherche d'une constante θ telle que

$$(9) \int_{Q_k} |m(y)|^2 dy \leq \theta \int_{Q_k} \delta^2(y) dy, \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Or d'une part $\delta(y)$ est à peu près proportionnel à D_k pour $y \in Q_k$; il existe donc χ_n ne dépendant que de n tel que

$$(10) \int_{Q_k} \delta^2(y)^2 dy \geq \chi_n (D_k)^{n+2}.$$

Et d'autre part (4) (où A' est indépendant de p et de $p \in P$) donne (avec $p + h = y$ ici) pour un certain R_k et un χ_n' convenable

$$(11) \int_{Q_k} |m(y)|^2 dy < \int_{|h| < R_k} |m(p+h)|^2 dh \leq \\ \leq A(R_k)^{n+2} \leq A' \chi_n' (D_k)^{n+2}, \quad (k \in \mathbb{N}),$$

où R_k est le rayon de la plus petite boule fermée de centre p et contenant Q_k .

Comme p parcourt le compact $P \subset \mathbb{Q}$, et comme D_k est à peu près proportionnel à $d(Q_k, \mathbb{Q})$ (chapitre VI, § 1), il est clair que $R_k \leq \chi_n'' D_k$ où χ_n'' ne dépend que de n et P , d'où (11).

On a bien établi (9), sous la forme

$$\frac{1}{A' \chi_n'} \int_{Q_k} |m(y)|^2 dy \leq (D_k)^{n+2} \leq \frac{1}{\chi_n} \int_{Q_k} \delta^2(y) dy. \quad \blacksquare E_1 \subset E_2 \text{ "presque partout".}$$

[Observer que pour majorer $|Tm|$ sur P avec $m \in L^1$ en 5.4.3, on avait utilisé les intégrales J_1 ; ici pour majorer (6), on a mis en jeu les intégrales J_2 .]

5.6.3 Quelques lemmes pour voir que $E_2 \subset E_1$ "presque partout".

5.6.3.1 Lemme. Etant donné E , ensemble mesurable non négligeable de \mathbb{R}^n , p un point de densité de E (chapitre VII, 1.6), tout point x assez voisin de p est une des extrémités d'un segment dans \mathbb{R}^n dont le milieu et l'autre extrémité appartiennent à E (autrement dit, on peut écrire $x = 2e_1 - e_2$ avec e_1 et $e_2 \in E$).

Preuve. On se ramène par translation au cas où le point de densité p est l'origine de \mathbb{R}^n . Comme 0 est point de densité de E , 0 est aussi point de densité

de l'ensemble homothétique $2E$, donc encore de $E' = E \cap 2E$. A fortiori, E' n'est pas négligeable. Comme E contient E' , il suffit d'établir que tout x assez voisin de l'origine peut s'écrire $x = e'_1 - e'_2$ avec e'_1 et $e'_2 \in E'$. C'est vrai, car E' est mesurable et non négligeable. █

5.6.3.2 Corollaire. Soit g une fonction réelle définie dans $\mathbb{R}_{n+1}^+ = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$. Soit E ensemble mesurable de \mathbb{R}^n . Avec $A > 0$, $B > 0$, on suppose que

$$|g(e+t, y) + g(e-t, y)| \leq A \quad \text{pour } e \in E, t \in \mathbb{R}^n, y > |t|,$$

et que

$$|g(e, y)| \leq B \quad \text{pour } e \in E, y > 0.$$

Alors pour presque tout $x \in E$, on a si y est assez petit :

$$|g(x+t, y)| \leq A + B \quad \text{pour } |t| < y < \epsilon_x.$$

D'après le lemme, c'est vrai dès que x est un point de densité de E , donc (chapitre VII, 1.6) pour presque tout $x \in E$. █

5.6.3.3 Un fruit de cette idée est :

Lemme "intégral". Soient G une fonction mesurable dans $\mathbb{R}_{n+1}^+ = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, E un ensemble mesurable de \mathbb{R}^n . On suppose que pour tout $e \in E$

$$\iint_{|t| < y} |G(e+t, y) + G(e-t, y)|^2 y^{1-n} dt dy < \infty,$$

et

$$\int_0^\infty y |G(e, y)|^2 dy < \infty.$$

Alors pour presque tout $x \in E$

$$\iint_{|t| < y} |G(x+t, y)|^2 y^{1-n} dt dy < \infty.$$

(La seconde hypothèse dit qu'au-dessus de E , G est "en moyenne" petit pour y grand).

5.6.4 Preuve de $E_2 \subset E_1$ "presque partout" (esquisse).

Notons u l'intégrale de POISSON de f pour \mathbb{R}_{n+1}^+ , d'où $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} * f$.
Comme $P_y(t) = c y / (|t|^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}$ est radial par rapport à t , $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$ l'est aussi.

Des estimations de P et de ses dérivées montrent que l'hypothèse $e \in E_2$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(e+h) + f(e-h) - 2f(e)|^2 \frac{1}{|h|^{n+2}} dh < \infty, \quad (e \in E_2)$$

entraîne $\int_0^\infty y \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(e, y) \right|^2 dy < \infty$, $(e \in E_2)$ et

$$\iint_{|t| < y} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(e+t, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(e-t, y) \right|^2 y^{1-n} dt dy < \infty, \quad (e \in E_2).$$

Le lemme intégral 5.6.3.3 donne donc pour presque tout $x \in E_2$

$$\iint_{|t| < y} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x+t, y) \right|^2 y^{1-n} dt dy < \infty$$

(avec les notations du chapitre VII, cette $\iint_{|t| < y} \dots dt dy$ s'écrit

$\iint_{\Gamma_1(x)} \dots dt' dy$ si $t' = x + t$). Or (chapitre VII, théorème 3.3, puis 3.4 avec

$H = \frac{\partial u}{\partial y}$) cette finitude implique pour presque tout $x \in E_2$ la convergence non-tangentielle de $\frac{\partial u}{\partial x_s}$ ($s = 1, \dots, n$).

En outre, (résultat admis dès le chapitre VII) $f \in L^2$ implique que u converge non-tangentiellement pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Ces deux derniers résultats montrent que f est en presque tout $x \in E_2$ dérivable au sens harmonique (définition 4.1).

Décomposons donc f selon le théorème 4.3 : $f = b + m$, $E_2 \supset P$, compact où s'annule m . On se ramène, par multiplication par une fonction de \mathcal{D} valant 1 sur un ouvert, au cas où f , b , m sont nuls hors d'un compact, alors $|\text{grad } b|$ est devenu de carré sommable comme en 5.6.2, et un théorème de PLANCHEREL donne (voir l'équation 5.6.2 (3))

$$\int_{\mathbb{R}^n} |b(x+h) + b(x-h) - 2b(x)|^2 \frac{1}{|h|^{n+2}} dh < \infty$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$. Ce dernier résultat donne, d'après $P \subset E_2$, $m = f - b$ et $m(p) = 0$ si $p \in P$

$$(12) \int_{\mathbb{R}^n} |m(p+h) + m(p-h)|^2 \frac{1}{|h|^{n+2}} dh < \infty$$

pour presque tout $p \in P$.

Posons maintenant

$$(13) G(x,y) = \frac{m(x)}{y}, \quad (x \in \mathbb{R}^n, y > 0).$$

On a, d'après $m(p) = 0$ si $p \in P$,

$$(14) \int_0^\infty y |G(p,y)|^2 dy = 0, \quad (p \in P),$$

et par raison d'homogénéité avec $p \in P$ (ou même $\in \mathbb{R}^n$), $t \in \mathbb{R}^n$, $y > 0$ et une constante ne dépendant que de n

$$(15) \int_{\mathbb{R}^n} |m(p+h) + m(p-h)|^2 \frac{1}{|h|^{n+2}} dh = \\ = c^{te} \iint_{|t| < y} |G(p+t, y) + G(p-t, y)|^2 y^{1-n} dt dy ,$$

$$(16) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|m(p+t)|^2}{|h|^{n+2}} dh = c^{te} \iint_{|t| < y} |G(p+t, y)|^2 y^{1-n} dt dy .$$

Mais (14) et le fait que le premier membre de (15) est fini pour presque tout $p \in P$ entraînent d'après le lemme intégral 5.6.3.3 que le premier membre de (16) est fini pour presque tout $p \in P$; pour un tel p , ceci entraîne aussitôt la dérivabilité de m au sens de L^2 .

Or b est presque partout dans \mathbb{R}^n dérivable au sens ordinaire, donc au sens de L^2 ; donc $f = b + m$ l'est aussi presque partout sur P , donc presque partout sur E_2 , puisque quel que soit le compact K de \mathbb{R}^n , $|K \cap E_2 \cap P|$ peut être pris petit.

■ 5.5

5.7 Terminons par un énoncé sans démonstration sur la dérivabilité au sens ordinaire.

Théorème. Soient $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, E un ensemble mesurable de \mathbb{R}^n . Pour que f ait des dérivées au sens ordinaire presque partout sur E , il faut et il suffit que soient vérifiées presque partout sur E les deux conditions suivantes :

$$|f(e+h) + f(e-h) - 2f(e)| \leq A_e |h| , \quad (h \in \mathbb{R}^n , |h| < \eta_e)$$

$$\int_{|h| < 1} |f(e+h) + f(e-h) - 2f(e)|^2 \frac{1}{|h|^{n+2}} dh < \infty .$$

Indications bibliographiques pour le chapitre VIII.

L'extension du lemme 2.1, page 4, au cas $p = 1$ nécessite une analyse plus poussée; voir l'article de CALDERON et ZYGMUND des Acta Mathematica (1952) cité en 2.2.

Pour le théorème 5.5, page 26, voir l'article de R.L. WHEEDEN : "On the n -dimensional integral of MARCINKIEWICZ", Journal of Math. and Mechanics, tome 14 (1965), pages 61-70.

Voir l'article de synthèse de E.M. STEIN : "Singular integrals, harmonic functions, and differentiability properties of functions of several variables", Symposium in pure and applied mathematics, volume 10, (éd. Amer. Math. Soc.).